ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. L. Disp. 1ª. **1914-1915**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di C. Frati, A. Baudi di Vesme e C. Cipolla.

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di C. Cipolla, G. De Sanctis e P. Fedele.

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME CINQUANTESIMO

1914-1915

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1914.

NB. — *La prima data è quella dell'elezione,*
la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.

PRESIDENTE

Boselli (S. E. Paolo), P.° Segretario di S. M. per l'Ordine Mauriziano e Cancelliere dell'Ordine della Corona d'Italia, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore Onorario della R. Università di Bologna, Presidente dell'Istituto Storico Italiano, Presidente del Consiglio degli Archivi, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della Classe di scienze morali della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia Patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio onorario dell'Accademia di Massa, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Corrispondente dell' Accademia Dafnica di Acireale, Presidente Onorario della Società di Storia Patria degli Abruzzi in Aquila, Presidente del Consiglio Centrale della Società " Dante Alighieri ", Presidente del Consiglio di Amministrazione del R. Politecnico di Torino, Presidente del Consiglio Superiore della Marina Mercantile, Membro del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Presidente del Comitato Nazionale per la Storia del Risorgimento, Gr. Cord. ✠ e ✿, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo. — *Torino, Piazza Maria Teresa*, 3.
Rieletto alla carica il 18 maggio 1913 — 5 giugno 1913.

Vice-Presidente

Camerano (Lorenzo), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali; Professore di Anatomia comparata e di Zoologia e Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Presidente del Club Alpino Italiano, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro della Società Zoologica di Francia, Socio corrispondente del Museo Civico di Rovereto, della Società Scientifica del Cile, della Società Spagnuola di Storia naturale, Socio straniero della Società Zoologica di Londra, Socio onorario della Società scientifica del Messico, Socio onorario della Società zoologica italiana, Socio Onorario dell'Accademia dei Zelanti di Acireale, ✠, Comm. ♔. — *Torino, Museo Zoologico della R. Università, Palazzo Carignano.*

Rieletto alla carica il 22 giugno 1913 — 11 luglio 1913.

Tesoriere

Einaudi (Luigi), Dottore in legge, Professore di Scienza delle finanze e Diritto finanziario della R. Università di Torino ed incaricato di economia e legislazione industriale nel R. Politecnico di Torino, Membro della Regia Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e di quella dei Georgofili. — *Piazza Statuto, 16.*

Eletto alla carica l'11 gennaio 1914 — 5 febbraio 1914.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, incaricato di Geometria analitica e proiettiva e Direttore del R. Politecnico di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio ordinario non residente della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, Comm. ✠, e ♔. — *Torino, Via Lagrange, 2.*

Eletto alla carica l'8 febbraio 1914 — 12 marzo 1914.

Segretario

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze (dei XL), Membro onorario della Società Filosofica di Cambridge e della Società Matematica di Londra, Socio straniero dell'Accademia delle Scienze del Belgio e di quella di Danimarca, Socio corrispondente della Società Fisico-Medica di Erlangen, dell'Accademia delle Scienze di Bologna, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ✠, ♔. — *Torino, Corso Vittorio Eman., 85.*

Rieletto alla carica il 16 novembre 1913 — 21 dicembre 1913.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo Cavour di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio straniero della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Comm. ♔, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo). — *Torino, Via Principe Tommaso, 17.*

29 Gennaio 1871 - 9 febbraio 1871. — Pensionato 21 marzo 1878.

D'Ovidio (Enrico), *predetto.*

29 Dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Uffiz. ✠, Comm. ♔. — *Torino, Via Sant'Anselmo, 6.*

5 Dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Camerano (Lorenzo), *predetto.*

10 Febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Segre (Corrado), *predetto*.

10 Febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della " *Sociedad Cientifica* „ del Messico, Socio del Circolo Matematico di Palermo, della Società matematica di Kasan, della Società filosofica di Ginevra, corrispondente della R. Accademia dei Lincei, ♕. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*

25 Gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Jadanza (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nel R. Politecnico, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli, del Circolo matematico di Palermo, dell'Accademia Dafnica di Acireale e della Società degli Ingegneri Civili di Lisbona, Membro effettivo della R. Commissione Geodetica italiana, Comm. ♕. — *Torino, Via Madama Cristina, 11.*

3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 17 ottobre 1902.

Foà (Pio), Senatore del Regno, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Presidente della Commissione Reale per l'educazione fisica, Assessore per l'Igiene al Municipio di Torino, ecc., ecc., Uff. ✠, Comm. ♕. — *Torino, Corso Valentino, 40.*

3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 9 novembre 1902.

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze naturali, Professore ordinario e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica ed incaricato di Chimica bromatologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio della R. Accademia di Medicina e della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Socio onorario della Società di Farmacia di Torino, già Membro anziano del Consiglio Sanitario Provinciale, Cittadino Onorario di Crespellano (Bologna), Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio onorario dell'Associazione chimico-farm. toscana, Membro corrispondente dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro corrispondente della Società di Farmacia di Parigi, Membro d'onore della R. Accademia delle Scienze di Romenia (Bucarest); Membro onorario della *Verein Chemiker-Coloristen*; Socio Onorario dell'Associazione Chimica Industriale di Torino; Socio della *Deutsche Gesellschaft f. Geschichte d. Medizin und Naturwissenschaften*, Membro della Società Chimica di Berlino, della *Berliner Gesellschaft f. Gesch. d. Naturwiss.*, ecc., Comm. ♕, ⚔. — *Torino, Corso Valentino, 11.*

12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896. — Pensionato 28 maggio 1903.

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore ordinario di Statica grafica e scienza delle costruzioni e Direttore dell'annesso Laboratorio sperimentale dei materiali da costruzione nel R. Politecnico in Torino, Comm. ♕, Uff. ✠. — *Torino, Corso Valentino, 7.*

31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), Dottore in Scienze naturali, Professore di Geologia e Direttore del Museo di Geologia e di Paleontologia della R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio residente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, e Corrispondente dell'I. R. Istituto Geologico di Vienna, Membro del R. Comitato Geologico, ecc., Comm. ✻, ♔. — *Torino, Palazzo Carignano.*

15 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 21 gennaio 1909.

Mattirolo (Oreste), Dottore in Medicina, Chirurgia e Scienze naturali, Professore ordinario di Botanica e Direttore dell'Istituto botanico della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina, Presidente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, della Società Imperiale di Scienze naturali di Mosca, della Royal Botanical Society di Edinburgh, della Società Veneto-Trentina, della Società Antonio Alzate di Mexico, ecc., Comm. ♔, *Officier du mérite agricole. — Torino, Orto Botanico della R. Università (al Valentino).*

10 Marzo 1901 - 16 marzo 1901. — Pensionato 15 dicembre 1910.

Grassi (Guido), Professore ordinario di Elettrotecnica e Direttore della scuola Galileo Ferraris nel R. Politecnico di Torino, Socio ordinario della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia Pontaniana e del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, Membro della Commissione superiore Metrica al Ministero di Agricoltura, Ind. e Comm., Membro del Consiglio Superiore dei servizi elettrici al Ministero delle Poste e Telegrafi, Consigliere comunale, Uff. ✻, Comm. ♔. — *Torino, Via Cernaia, 40.*

9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902. — Pensionato 30 novembre 1911.

Somigliana (nob. Carlo), Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Fisica matematica e incaricato di Meccanica razionale nella R. Università di Torino, rappresentante dell'Accademia nel Consiglio amministrativo del R. Politecnico di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della Società italiana delle scienze (detta dei XL) e corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione. — *Corso Vinzaglio, 10.*

5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905. — Pensionato 20 luglio 1913.

Fusari (Romeo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore ordinario di Anatomia umana, descrittiva e topografica e Direttore dell' Istituto anatomico della R. Università di Torino, Socio dell'Accademia di Medicina di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Fondatore della Società medico-chirurgica di Pavia, Onorario dell'Accademia delle Scienze mediche e naturali di Ferrara, ✻ e ♔. — *Via Baretti, 45.*

5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Balbiano (Luigi), Dottore in chimica, Professore ordinario di Chimica organica nel R. Politecnico di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di medicina di Roma, Socio onorario delle Società di Farmacia di Torino, di Parigi e di Liegi, Uff. ❋. — *Via dei Mille, 7.*
15 maggio 1910 — 12 giugno 1910.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Dottore in Fisica, Dottore onorario in Matematiche della Università Fridericiana di Christiania, Dottore onorario in scienze della Università di Cambridge, Dottore onorario in Filosofia della Università di Stockholm, Dottore onorario in Fisica della Clark University di Worcester, Mass., Professore di Fisica matematica, incaricato di Meccanica superiore, Direttore del Seminario Matematico e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Roma, Professeur agréé à la Sorbonne (1912), Louis Clark Vanuxem lecturer (1912) all'Università di Princeton N. J., uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro nazionale della Società degli Spettroscopisti italiani, Membro straniero della Società Reale di Londra, Socio corrispondente nella Sezione di Geometria dell'Accademia delle Scienze di Parigi, Membro straniero nella classe di matematica pura della Reale Accademia Svedese delle scienze, Membro onorario straniero della Società Reale di Edimburgo, Membro straniero dell'Accademia nazionale delle Scienze (Stati Uniti d'America, Washington), Membro straniero della American Philosophical Society for Promoting Useful Knowledge di Philadelphia (Pae), Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Gottinga, Membro corrispondente straniero dell'Accademia Ungherese delle scienze di Budapest, Membro corrispondente dell'Accademia Imperiale delle scienze di Pietroburgo, Membro onorario dell'Accademia Rumena di Bucarest, Socio corrispondente della Società medico-fisica di Erlangen, Membro dell'Accademia Imperiale Leopoldina Carolina di Halle, Membre du Bureau della Società matematica di Francia, Membro onorario della Società Matematica di Londra, Membro onorario della Società matematica di Kharkow, Membro onorario della Società matematica di Calcutta, Membro onorario della Società di Scienze fisiche e naturali di Bordeaux, Membro corrispondente della Società Scientifica di Buenos Aires, Membro onorario dell'Harvard Mathematical club in Cam-

bridge (Mass.), Vice-Presidente del R. Comitato Talassografico Italiano, ✠, ❋, ♛. — *Roma, Via in Lucina, 17.*

3 Febbraio 1895 - 11 febbraio 1895.

Fergola (Emanuele), Senatore del Regno, Professore emerito nella R. Università di Napoli, Socio ordinario residente della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Membro della Società italiana dei XL, Socio della R. Accademia dei Lincei e dell'Accademia Pontaniana, Socio ordinario del R. Istituto d' incoraggiamento alle Scienze naturali, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto, Gr. Uffiz. ❋, Gr. Croce ♛. — *Napoli, Via dei Mille, 74.*

12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896.

Bianchi (Luigi), Professore di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL; Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere in Milano, ❋, ♛, ✠. — *Pisa, Via Manzoni, 3.*

13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Dini (Ulisse), Senatore del Regno, Professore di Analisi Superiore nella R. Università di Pisa e incaricato di Analisi infinitesimale, Direttore della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Socio della R. Accademia dei Lincei e Presidente della Società Italiana detta dei XL, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti, Socio ordinario non residente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli nella Sezione di Scienze matematiche, Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena, dell'Accademia di scienze naturali di Catania e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Zelanti di Acireale, Membro del Consiglio Direttivo del Circolo matematico di Palermo, Socio della Società italiana per il progresso delle scienze (Roma), della R. Società delle scienze di Gottinga, Membro straniero della *London mathemat. Society*, Dottore onorario delle Università di Christiania e di Glasgow, Comm. ❋, Gr. Uff. ♛, ✠. — *Via S. Martino, 32. Pisa.*

13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, Membro del Consiglio superiore di Sanità, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei di Roma, Dottore in Scienze *ad honorem* dell'Università di Cambridge, Membro onorario dell'Università Imperiale di Charkoff, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Membro della Società per la Medicina interna di Berlino, Membro onorario della Imp. Accademia Medica di Pietroburgo, della Società di Psichiatria e Neurologia di Vienna, Socio corrispondente onorario della *Neurological Society* di Londra, Membro corrispondente della *Société de Biologie* di Parigi, Membro dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina*, Socio della R. Società delle Scienze di Gottinga e delle Società Fisico-mediche di Würzburg, di Erlangen, di Gand, Membro

della Società Anatomica, Socio nazionale della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Socio corrispondente dell'Accademia di Medicina di Torino, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente dell'Accademia Medico-fisica Fiorentina, della R. Accademia delle Scienze mediche di Palermo, della Società Medico-chirurgica di Bologna, Socio onorario della R. Accademia Medica di Roma, Socio onorario della R. Accademia Medico-chirurgica di Genova, Socio corrispondente dell'Accademia Fisiocritica di Siena, dell'Accademia Medico-chirurgica di Perugia, della *Societas medicorum Svecana* di Stoccolma, Membro onorario dell'*American Neurological Association* di New-York, Socio onorario della *Royal Microscopical Society* di Londra, Membro corrispondente della R. Accademia di Medicina del Belgio, Membro onorario della Società freniatrica italiana e dell'Associazione Medico-Lombarda, Socio onorario del Comizio Agrario di Pavia, Professore ordinario di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Membro effettivo della Società Italiana d'Igiene e dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro onorario dell'Università di Dublino, Socio corrispondente della Società medica di Batavia, Membro straniero dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro onorario dell'Imperiale Società degli alienisti e neurologi di Kazan, Socio emerito della R. Accademia medico-chirurgica di Napoli, Socio corrispondente dell'Imp. Accademia delle Scienze di Vienna, Socio onorario della R. Società dei Medici in Vienna, Comm. ✻ ✠, Cav. ✠.
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

ACCADEMICI STRANIERI

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga. — 10 Gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.

Haeckel (Ernesto), Professore nella Università di Jena. — 13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Darboux (Giovanni Gastone), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Helmert (Federico Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia, Potsdam. — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Noether (Massimiliano), Professore nell'Università di Erlangen. — 15 maggio 1910 - 12 giugno 1910.

Baeyer (Adolfo v.), Professore nell'Università di München. — Id. id.

Thomson (John Joseph), Professore nell'Università di Cambridge. — Id. id.

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Cantor (Maurizio), Professore nell'Università di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.
Schwarz (Ermanno A.), Professore nella Università di Berlino. — 19 Dicembre 1880.
Bertini (Eugenio), Professore nella Regia Università di Pisa. — 9 Marzo 1890.
Jordan (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 12 Gennaio 1896.
Mittag-Leffler (Gustavo), Professore all'Università di Stoccolma. — 12 Gennaio 1896.
Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 10 Gennaio 1897.
Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 Aprile 1898.
Veronese (Giuseppe), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Padova. — 17 Aprile 1898.
Zeuthen (Gerolamo Giorgio), Professore nella Università di Copenhagen. — 14 Giugno 1903.
Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 Giugno 1903.
Enriques (Federico), Professore nell'Università di Bologna. — 15 maggio 1910.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell' Università di Cambridge. — 27 Maggio 1894.
Celoria (Giovanni), Senatore del Regno, Direttore dell'Osservatorio di Milano. — 12 Gennaio 1896.
Pizzetti (Paolo), Professore nella R. Università di Pisa. — 14 Giugno 1903.
Cerulli (Vincenzo), Direttore dell' Osservatorio Collurania, Teramo. — 15 maggio 1910.
Boussinesq (Valentino), Membro dell' Istituto di Francia, Professore nella Università di Parigi. — Id. id.
Levi-Civita (Tullio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Blaserna (Pietro), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.

Roiti (Antonio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 12 Marzo 1882.

Righi (Augusto), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Bologna. — 14 Dicembre 1884.

Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 15 Maggio 1892.

Rayleigh (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella *Royal Institution* di Londra. — 3 Febbraio 1895.

Röntgen (Guglielmo Corrado), Professore nell'Università di München. — 14 Giugno 1903.

Lorentz (Enrico), Professore dell'Università e Curatore del Laboratorio Teyler di Haarlem. — 14 Giugno 1903.

Battelli (Angelo) Professore nell'Università di Pisa. — 15 maggio 1910.

Garbasso (Antonio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze. — Id. id.

Neumann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — Id. id.

Zeeman (P.), Professore nell'Università di Amsterdam. — Id. id.

Cantone (Michele), Professore nell'Università di Napoli. — Id. id.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 2 Gennaio 1881.

Körner (Guglielmo), Professore nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano. — 2 Gennaio 1881.

Fischer (Emilio), Professore nell'Università di Berlino. — 24 Gennaio 1897.

Ramsay (Guglielmo), Professore nell'Università di Londra. — Id. id.

Schiff (Ugo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 28 Gennaio 1900.

Dewar (Giacomo), Professore nell'Università di Cambridge. — 14 Giugno 1903.

Ciamician (Giacomo), Senatore del Regno, Professore nell'Università di Bologna. — 14 Giugno 1903.

Ostwald (Dr. Guglielmo), Gross Bothen (Sachsen). — 5 Marzo 1905.

Arrhenius (Svante Augusto), Professore e Direttore dell'Istituto Fisico dell'Università di Stoccolma. — 5 Marzo 1905.

Nernst (Walter), Professore nell'Università di Berlino. — 5 Marzo 1905.

Haller (Albin), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — 15 Maggio 1910.

Willstätter (Richard), Professore, Kaiser Wilhelm Institut, Berlin. — Id. id.

Engler (Carlo), Professore nella Scuola superiore tecnica di Karlsruhe. — Id. id.

Meyer (Ernesto v.), Professore nella R. Scuola superiore tecnica in Dresda. — Id. id.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Strüver (Giovanni), Professore nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.
Capellini (Giovanni), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Bologna. — 12 Marzo 1882.
Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna. — 8 Febbraio 1885.
Geikie (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica, Londra. — 3 Dicembre 1893.
Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.
Taramelli (Torquato), Professore nella R. Univ. di Pavia. — 28 Gennaio 1900.
Liebisch (Teodoro), Professore nell'Università di Gottinga. — Id. id.
Bassani (Francesco), Professore nella R. Univ. di Napoli. — 14 Giugno 1903.
Issel (Arturo), Professore nella R. Università di Genova. — Id. id.
Goldschmidt (Viktor), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 5 Marzo 1905.
Suess (Franc. Edoardo), Professore nella "Deutsche Technische Hochschule" di Praga. — Id. id.
Haug (Emilio), Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.
Lacroix (Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 Maggio 1910.
Kilian (Carlo), Professore nell' Università di Grenoble. — Id. id.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Saccardo (Andrea), Professore nella R. Università di Padova. — 8 Febbraio 1885.
Pirotta (Romualdo), Professore nella R. Univ. di Roma. — 15 Maggio 1892.
Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.
Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.
Schwendener (Simone), Professore nell'Univ. di Berlino. — Id. id.
Wiesner (Giulio), Professore nell'Univ. di Vienna. — 14 Giugno 1903.
Klebs (Giorgio), Professore nell'Università di Halle. — Id. id.
Belli (Saverio), Professore, Torino. — Id. id.
Baccarini (Pasquale), Professore nell' Istituto di Studi superiori in Firenze. — 15 Maggio 1910.
Mangin (Luigi), Membro dell' Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — Id. id.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Chauveau (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di Parigi. — 1° Dicembre 1889.
Waldeyer (Guglielmo), Professore nell'Università di Berlino. — Id. id.

Roux (Guglielmo), Professore nell'Università di Halle. — 13 Febbraio 1898.

Minot (Carlo Sedgwick), Professore nell' " Harvard Medical School „ di Boston Mass. (S. U. A.). — 28 Gennaio 1900.

Boulenger (Giorgio Alberto), Assistente al Museo di Storia Naturale di Londra. — Id. id.

Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 Giugno 1903.

Weismann (Augusto), Professore nell'Università di Freiburg i. Br. (Baden). — 5 Marzo 1905.

Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History*. — Id. id.

Dastre (Alberto Giulio), Membro dell' Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.

Ramôn y Cajal (Santiago), Professore nell' Università di Madrid. — 15 Maggio 1910.

Metchnikoff (Elia), Vice-Direttore dell'Istituto Pasteur in Parigi. — Id. id.

Kossel (Albrecht), Professore nell'Università di Heidelberg. — Id. id.

Ehrlich (Paolo), Professore, Direttore dell'Istituto sperimentale di terapia in Frankfurt a. M. — Id. id.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

Chironi (Dott. Giampietro), Senatore del Regno, Professore ordinario di Diritto Civile nella R. Università di Torino, Dottore aggregato della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Cagliari, Socio della R. Accademia delle Scienze di Napoli, della R. Accademia Peloritana, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), dell'Associazione internazionale di Berlino per lo studio del Diritto comparato, dell'Accademia Americana di Scienze sociali e politiche di Filadelfia, della Società di studi legislativi di Parigi, Membro della Commissione Reale per l'ordinamento dell'istruzione superiore, Comm. ✠, Grand'Uff. ♔. — *Torino, Via Monte di Pietà, 26.*

Eletto alla carica il 18 maggio 1913 — 5 giugno 1913.

Segretario.

Renier (Rodolfo), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore di Storia comparata delle Letterature neolatine nella R. Università di Torino, Socio attivo della R. Commissione dei testi di lingua; Socio non residente dell'I. R. Accademia degli Agiati di Rovereto; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Deputazione Veneta di Storia patria, di quella per le Marche, di quella per l'Umbria, di quella per l'Emilia e Membro effettivo della R. Deputazione di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, della Società storica abruzzese e della Commissione di storia patria e di Arti belle della Mirandola, della Deputazione municipale ferrarese di storia patria, della R. Accademia Virgiliana di Mantova, dell'Accademia Pontaniana di Napoli, dell'Accademia di Verona, della R. Accademia di Padova, dell'Ateneo Veneto e di quello di Brescia; Membro della Società storica lombarda e della Società Dantesca italiana; Socio onorario dell'Accademia Etrusca di Cortona, della R. Accademia di scienze e lettere di Palermo, dell'Accademia Cosentina e dell'Accademia Dafnica di Acireale, Uffiz. ✠, Comm. ♔. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 90.*

Eletto alla carica il 18 maggio 1913 — 5 giugno 1913.

ACCADEMICI RESIDENTI

Manno (Barone D. Antonio), Senatore del Regno, Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi e dell'Istituto storico italiano, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Bibliotecario e Conservatore del Medagliere di S. M. (Incaricato), Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Gr. Uffiz. ✠ e Gr. Cord. ♔, Balì Gr. Cr. d'on. e devoz. del S. M. O. di Malta, decorato di Ordini stranieri. — *Torino, Via Ospedale, 19.*

17 Giugno 1877 - 11 luglio 1877. — Pensionato 28 febbraio 1886.

Carle (Giuseppe), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza e Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, ☩, Comm. ✠, ♔. — *Torino, Via Principi d'Acaia, 5.*

7 Dicembre 1879 - 1° gennaio 1880. — Pensionato 4 agosto 1892.

Boselli (Paolo), *predetto.*

15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

Cipolla (Conte Carlo), Dottore in Filosofia, Professore emerito nella R. Università di Torino, Prof. di Storia moderna nel R. Istituto di Studi Superiori in Firenze, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria e della R. Deputazione Toscana, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e della Società Storica Friulana, Comm. ♔. — *Firenze, Via Lorenzo il Magnifico, 10.*

15 Febbraio 1891 - 15 marzo 1891. — Pensionato 4 marzo 1900.

Renier (Rodolfo) *predetto.*

8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 30 ottobre 1901.

Pizzi (Nobile Italo), Dottore in Lettere, Professore di Persiano e Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della Società Colombaria di Firenze, Dottore onorario dell'Università di Lovanio, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, dell'Accademia Petrarchesca di Arezzo, dell'Accademia Dafnica di Acireale, dell'Accademia dell'Arcadia di Roma, della Società Reale di Napoli, ✠, ♔. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 16.*

8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 16 giugno 1907.

Chironi (Dott. Giampietro, *predetto*).

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900. — Pensionato 20 maggio 1897.

De Sanctis (Gaetano), Dottore in Lettere, Professore di Storia antica nella R. Università di Torino, Socio ordinario della Pontificia Accademia romana di Archeologia, ♔. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 44.*

21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903. - Pensionato 15 febbraio 1912.

Ruffini (Francesco), Dottore in Leggi, Membro corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Professore di diritto ecclesiastico, ✠, Comm. ♔. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*

21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903. — Pensionato 19 giugno 1913.

Stampini (Ettore), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore ordinario di Letteratura latina e Direttore della Biblioteca della Facoltà di Filosofia e Lettere nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia Peloritana di Messina, dell'Ateneo di Brescia e dell'Accademia Virgiliana di scienze, lettere ed arti di Mantova e della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Direttore della Rivista di Filologia e d'Istruzione classica, Decorato della Medaglia del Merito Civile di 1ª Classe della Repubblica di S. Marino, Uff. ✠, Comm. ♔. — *Piazza Vittorio Emanuele I, 10.*

20 Maggio 1906 - 9 giugno 1906.

D'Ercole (Pasquale), Dottore in Filosofia, Professore di Filosofia teoretica nella R. Università di Torino, Membro della Società Filosofica di Berlino, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze morali e politiche di Napoli, Uff. ✠, Gr. Uff. ♔. — *Corso Siccardi, 26.*

17 Febbraio 1907 - 19 Aprile 1907.

Brondi (Vittorio), Dottore in Legge, Professore di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore di assistenza e beneficenza pubblica, Socio corrispondente onorario del Circolo di Studi sociali di Firenze, Uff. ✠, Comm. ♔. — *Torino, Via Montebello, 26.*

17 Febbraio 1907 - 19 Aprile 1907.

Sforza (Conte Giovanni), Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia patria di Modena per la Sotto-Sezione di Massa e Carrara, Socio effettivo di quelle delle antiche Provincie e della Lombardia, di Parma e Piacenza, e della Toscana, Socio onorario della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Ateneo di Brescia, della Società Ligure di Storia patria, della R. Accademia Lucchese, Socio onorario della R. Accademia di Belle Arti di Carrara, Membro d'onore dell'*Académie Chablaisienne* di Thonon-les-Bains, Membro aggregato dell'*Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Savoie*, Socio della R. Commissione per i testi di lingua, Membro della Commissione Araldica Piemontese, della Società di Storia patria di Vignola, della Commissione municipale di Storia patria e belle arti della Mirandola, della Commissione Senese di Storia patria e della Società storica di Carpi, Corrispondente della R. Accademia Valdarnese del Poggio in Montevarchi, della Società Georgica di Treia e della Colombaria di Firenze, Consigliere del Comitato Piemontese per la Storia del Risorgimento italiano, Presidente onorario della R. Accademia dei Rinnovati di Massa, Soprintendente del R. Archivio di Stato di Torino, Gr. Uff. dell'Ordine del Medjidiè, Uff. ✠ e Comm. ♔. — *Via S. Dalmazzo, 24.*

17 Febbraio 1907 - 19 aprile 1907,

Einaudi (Luigi), *predetto.*

10 Aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Baudi di Vesme (Alessandro dei conti), Dottore in Legge, Soprintendente alle Gallerie ed ai Musei medioevali, ecc. del Piemonte e della Liguria, Direttore della R. Pinacoteca di Torino, Vice Presidente della Regia Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie. — *Via dei Mille, 54.*
10 Aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Schiaparelli (Ernesto), Dottore in lettere, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro onorario dell'Istituto Khediviale egiziano e della Società Asiatica di Francia, della Società di Archeologia biblica di Londra, Direttore del R. Museo di Antichità di Torino, Uff. ❁, Comm. ♔.
10 Aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Patetta (Federico), Dottore in legge, Professore di storia del diritto nella R. Università di Torino, Secio effettivo della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, Socio corrispondente della R. Deputazione di storia patria per l'Umbria e della R. Deputazione di storia patria per le provincie modenesi, Socio fondatore della Commissione Senese di storia patria, Socio effettivo della Società piemontese di archeologia e belle arti. — *Via S. Massimo, 44.*
3 Maggio 1914.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Villari (S. E. Pasquale), Senatore del Regno, Socio dell'Istituto Storico di Roma, Presidente onorario del Consiglio degli Archivi, Professore emerito e Presidente onorario della Sezione di Filosofia e Lettere nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio residente della R. Accademia della Crusca, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, della Pontaniana di Napoli, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio straordinario del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Baviera, Socio straniero dell'Accademia di Berlino, dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Scienze morali e politiche), Dott. on. in Legge della Università di Edimburgo, di Halle, Dott. on. in Filosofia dell'Università di Budapest, Professore emerito della R. Università di Pisa, Cav. dell'Ordine supremo della SS. Annunziata, Gr. Uffiz. ❁ e Gr. Cord. ♔, Cav. ✠, Cav. del Merito di Prussia, Membro del Consiglio dell'Ordine Civile di Savoia e del Consiglio dell'Ordine dei Ss. Maurizio e Lazzaro, ecc.
16 Marzo 1890 - 30 marzo 1890.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen e di Pietroburgo, Dottore *ad honorem* delle Università di Oxford, di Cracovia e di Atene, Uff. ✻, Comm. ♕, Cav. ✠. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*
20 Marzo 1892 - 26 marzo 1892.

Savio (Sacerdote Fedele), Professore di Storia ecclesiastica nella Pontificia Università Gregoriana, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio della Società Storica Lombarda. — *Roma, Via del Seminario, 120.*
20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Dottore in Leggi, Professore ordinario di Diritto romano nella R. Università di Roma, Professore onorario della Università di Camerino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia di Napoli, di Bologna, di Modena e di Messina, Socio onorario della R. Accademia di Palermo, ecc., Gr. Uffiz. ✻, ♕. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*
29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Dottore in Lettere, Dottore " honoris causa „ dell'Università di Giessen, Professore ordinario di lingue e letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico residente della Crusca, Socio ordinario della R. Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio Urbano della Società Colombaria, Socio onorario della R. Accademia di Padova, della Società Dantesca americana, della " New Language Association of America „, della " Société néophilologique „ dell'Università di Pietroburgo, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, dell'Ateneo Veneto, della Società Reale di Napoli, della R. Accademia di Palermo, della R. Accademia delle Scienze di Berlino, della R. Società delle Scienze di Göttingen, dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et Belles-Bettres), della Società Reale di Scienze e Lettere di Göteborg, dell'Accademia R. Lucchese, ✠, Uff. ✻, Gr. Uff. ♕. — *Firenze, Piazza d'Azeglio, 13.*
29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Guidi (Ignazio), Dottore, Professore di Ebraico e di Lingue semitiche comparate nella R. Università di Roma, Socio e Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche della R. Accademia dei Lincei, ✠, Uff. ✻, ♕, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*
12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Pigorini (Luigi), Senatore del Regno, Direttore dei Musei Preistorico e Etnografico, Professore nella R. Università di Roma, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei. — *Via del Collegio Romano, 26.*
12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

ACCADEMICI STRANIERI

Meyer (Paolo), Membro dell' Istituto, Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*École des Chartes* (Parigi). — 4 Febbraio 1883 - 15 febbraio 1883.
Maspero (Gastone), Membro dell'Istituto, Professore nel Collegio di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893 - 16 marzo 1893.
Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — 31 Gennaio 1897 - 14 febbraio 1897.
Bréal (Michele Giulio Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) (Parigi). — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.
Wundt (Guglielmo), Professore nell'Università di Lipsia. — 29 Marzo 1903 – 9 aprile 1903.
Foerster (Wendelin), Professore nell' Università di Bonn, Comm. ✠. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.
Duchesne (Luigi), Membro dell' Istituto di Francia, Direttore della Scuola Francese in Roma. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Pinloche (Augusto), Prof. nel Liceo Carlomagno di Parigi. — 15 Marzo 1896.
Chiappelli (Alessandro), Professore emerito della R. Università di Napoli. — 15 Marzo 1896.
Masci (Filippo), Professore nella R. Università di Napoli. — 14 Giugno 1903.
Zuccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 Maggio 1908.
Gentile (Giovanni). Prof. nella R. Università di Pisa. — 17 Maggio 1914.
Martinetti (Pietro). Prof. nella R. Accademia scientifico letteraria di Milano. — Id. id.
Windelband (Guglielmo), Prof. nell'Università di Heidelberg. — Id. id.
Bergson (Enrico Luigi), Membro dell' Istituto di Francia. — Id. id.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Schupfer (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 14 Marzo 1886.
Gabba (Carlo Francesco), Prof. nella R. Univ. di Pisa. — 3 Marzo 1889.
Buonamici (Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Pisa. — 16 Marzo 1890.
Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Pavia. — 21 Giugno 1903.
Toniolo (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Pisa. — 10 Giugno 1906.
Brandileone (Francesco), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Fadda (Carlo), Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Filomusi-Guelfi (Francesco), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.
Polacco (Vittorio), Prof. nella R. Università di Padova. — Id. id.
Stoppato (Alessandro), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Simoncelli (Vincenzo), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.
Iannaccone (Pasquale), Prof. della R. Univ. di Padova. — 17 Maggio 1914.
Montalcini (Camillo), Prof., Segretario generale degli uffizi amministrativi della Camera dei Deputati. — Id. id.

Sezione di Scienze storiche.

Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 Marzo 1886.
Chevalier (Canonico Ulisse), Romans. — 26 Febbraio 1893.
Bryce (Giacomo), Londra. — 15 Marzo 1896.
Venturi (Adolfo), Professore nella R. Università di Roma. — 31 Maggio 1908.
Luzio (Alessandro), Direttore del R. Archivio di Stato in Mantova. — Id. id.
Davidsohn (Roberto), Socio della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia della Crusca. — 17 Maggio 1914.
Meyer (Edoardo), Prof. nell'Università di Berlino. — Id. id.
Lippi (Silvio), Direttore dell'Archivio di Stato di Cagliari. — Id. id.

Sezione di Archeologia ed Etnografia.

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milano. — 14 Marzo 1886.
Poggi (Vittorio), Prefetto della Biblioteca civica a Savona. — 2 Gennaio 1887.
Barnabei (Felice), Roma. — 28 Aprile 1895.
Orsi (Paolo), Professore, Direttore del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 Maggio 1908.
Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Geografia.

Dalla Vedova (Giuseppe), Professore nella R. Università di Roma. — 28 Aprile 1895.
Bertacchi (Cosimo), Professore nella R. Univ. di Torino. — 21 Giugno 1903.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Marre (Aristide), Vaucresson (Francia). — 1° Febbraio 1885.
Amélineau (Emilio), Professore nella *École des Hautes Études* di Parigi. — 28 Aprile 1895.
Salvioni (Carlo), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 Maggio 1908.
Parodi (Ernesto Giacomo), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — Id. id.
Schiaparelli (Celestino), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Del Lungo (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 Marzo 1890.
Novati (Francesco), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 21 Giugno 1903.
Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Roma. — id. id.
Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio delle Querce in Firenze. — id. id.
D'Ovidio (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Napoli. — id. id.
Biadego (Giuseppe), Bibliotecario della Civica di Verona. — id. id.
Cian (Vittorio), Professore nella R. Università di Torino. — id. id.
Vitelli (Gerolamo), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — 31 Maggio 1908.
Flamini (Francesco), Professore nella R. Università di Pisa. — Id. id.
Gorra (Egidio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.
Fraccaroli (Giuseppe), Professore. Milano. 26 Febbraio 1911.
Sabbadini (Remigio), Professore nella R. Accademia scientifico letteraria di Milano. Id. id.
Zuretti (Carlo Oreste), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano — Id. id.

MUTAZIONI

AVVENUTE

nel Corpo Accademico dal 31 Dicembre 1913
al 31 Dicembre 1914.

ELEZIONI

SOCI

Segre (Corrado) rieletto a Segretario della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 17 novembre 1913, approvata l'elezione con R. Decreto 21 dicembre 1913.

Einaudi (Luigi) eletto alla carica triennale di Tesoriere nell'adunanza a Classi Unite dell'11 gennaio 1914, approvata l'elezione con R. Decreto 5 febbraio 1914.

Naccari (Andrea), **Parona** (Carlo Fabrizio), **Mattirolo** (Oreste), **Somigliana** (Carlo), **Renier** (Rodolfo), **De Sanctis** (Gaetano), **Ruffini** (Francesco), **Stampini** (Ettore) — Eletti nell'adunanza a Classi Unite del 18 genn. 1914 per comporre la 1ª Giunta del XIX premio Bressa, quadriennio 1911-1914 (Internazionale).

Renier (Rodolfo), **Stampini** (Ettore), **Sforza** (Giovanni) — Eletti nell'adunanza della Classe di scienze morali, storiche e filologiche del 1° febbraio 1914 per comporre la Commissione del premio Gautieri per la Letteratura (triennio 1911-1913).

Carle (Giuseppe), **Sforza** (Giovanni) — Nell'adunanza del 1° febbraio 1914 della Classe di scienze morali, storiche e filologiche furono riconfermati per un nuovo triennio a delegati della Classe nel Consiglio di Amministrazione dell'Accademia.

D'Ovidio (Enrico) eletto a Direttore di Classe nell'adunanza dell'8 febbraio 1914 della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, ed approvata l'elezione con R. Decreto 12 marzo 1914.

Mattirolo (Oreste) riconfermato nell'adunanza dell'8 febbraio 1914 della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali quale rappresentante della Classe nella Commissione per la biblioteca accademica.

Patetta (Federico), Prof. della R. Università di Torino, eletto Socio nazionale residente nell'adunanza del 3 maggio 1914 della Classe di scienze morali, storiche e filologiche e approvata la elezione con R. Decreto 11 giugno 1914.

Gentile (Giovanni) . . .
Martinetti (Pietro) . .
Windelband (Guglielmo)
Bergson (Enrico) . . .
Eletti Soci corrispondenti nella sezione di *scienze filosofiche* nell'adunanza della Classe di scienze morali, storiche e filologiche del 17 maggio 1914.

Iannaccone (Pasquale) .
Montalcini (Camillo) . .
Idem, idem, nella sezione di *scienze giuridiche e sociali*.

Davidsohn (Roberto) . .
Meyer (Edoardo) . . .
Lippi (Silvio) . . . .
Idem, idem, nella sezione di *scienze storiche*.

D'Ovidio (Enrico), riconfermato per un nuovo triennio nell'adunanza a Classi Unite del 21 giugno 1914 quale rappresentante dell'Accademia nel Consiglio di Amministrazione del Consorzio universitario.

MORTI

20 Gennaio 1914.

Rosenbusch (Enrico), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di mineralogia, geologia e paleontologia).

1° Febbraio 1914.

Günther (Alberto), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di zoologia, anatomia e fisiologia comparata).

24 Febbraio 1914.

Palma di Cesnola (conte Alessandro), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di archeologia ed etnografia).

26 Aprile 1914.

Suess (Edoardo), Socio straniero della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

6 Giugno 1914.

Lieben (Adolfo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di chimica generale ed applicata).

7 Giugno 1914.

Lorenzoni (Giuseppe), Socio nazionale non residente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

2 Settembre 1914.

Gatti (Giuseppe), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di archeologia ed etnografia).

20 Settembre 1914.

Kerbaker (Michele), Socio nazionale non residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

27 Ottobre 1914.

Lasinio (Fausto), Socio corrispondente della Classe di scienze, morali, storiche e filologiche (Sezione di linguistica e filologia orientale).

29 Ottobre 1914.

Guccia (Gio. Batt. Nobile dei Marchesi di Ganzaria), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di matematiche pure).

1° Novembre 1914.

Tardy (Placido), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di matematiche pure).

8 Novembre 1914.

D'Ancona (Alessandro), Socio nazionale non residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

26 Dicembre 1914.

Fileti (Michele), Socio nazionale residente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

PUBBLICAZIONI PERIODICHE RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

Dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1914.

NB. Le pubblicazioni notate con * si hanno in cambio; quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

* **Acireale.** R. Accademia di scienze, lettere ed arti. Rendiconti e Memorie. — Memorie della Classe di lettere, ser. 3ª, vol. VIII, 1912-1913.

* **Aix.** Faculté de Droit. Annales, T. VI, 1-2. — Faculté des Lettres. Annales, T. VI, 1-2.

Albany. Education Department. Ninth Annual Report 1913.

* **Albuquerque.** University of New Mexico. Bulletin. Educational Ser., vol. I, 8.

America. American Philological Association. Transactions and Proceedings, 1912, vol. XLIII.

— American Urological Association. Twelfth Annual Meeting at Boston. Transactions, vol. VII, april 15-17, 1913.

* **Amsterdam.** Académie Royale des sciences. Verhandelingen Afd. Natuurkunde, 1e Sect., Dl. XI, 5, 6; 2e Sect., XVII, 2, 6. — Verhandelingen Afd. Letterkunde, N. R., Dl. XIII, 2; XIV, 1. — Zittingsverslagen Natuurkunde, vol. XXI, 1, 2. — Proceedings (Section of Science), vol. XV. — Verslagen en Mededeelingen-Letterkunde, 4e Reecks Dl. XI, Jaarboeck, 1912. — Prijsvers Amaryllis. — Beschreibung der griechischen autonomen Münzen.

* **Angers.** Société d'Études Scientifiques. Bulletin, Nouv. Sér., XLII-IIIe an., 1912-1913.

* **Baltimore.** Johns Hopkins University. Circular, 1912, N. 8-10; 1913, 1-9. — American Chemical Journal, vol. XLVIII, 5-6; XLIX, 1-6; L, 1-6. — American Journal of Mathematics, vol. XXXV, N. 1-4; XXXVI, 1. — Studies historical and political Science, Ser. XXX, 3; XXXI, 1-4; XXXII, 1. — American Journal of Philology, vol. XXXIII, 132; XXXIV, 133-136.

* **Barcelona.** Real Academia de Ciencias y Artes. Nómina del Personal Académico. — Memorias, 3ª época, vol. X, 24-30; XI, 1-11. — Boletín, 3ª época, vol. III, 5.

* **Basel.** Université. Catalogue des Écrits académiques suisses, 1912-1913. — Tesi di Laurea per l'anno scolastico 1912-1913.

* **Bassano**. Museo Civico. Bollettino, anno XI, 1-2.

* **Batavia**. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Oudheidkundig Verslag, 1913, Vierde kwartaal; 1914, Eerste kwartaal. — Verhandelingen, Dl. LX, Tweede Stuk. — Notulen, Dl. LI, 3, 4. — Tijdschrift, Dl. LVI, Afl. 1-2. — Dialect Djawa Banten.

— R. Magnetical and Meteorological Observatory. Observations, vol. XXXIII, 1910. — Observations made at secondary Station in Netherlands East-India, vol. I. — Regenwaarnemingen in Nederlandisch-Indié, 1911-1912, Dl. II Uitkomsten.

— Observatory, Java. Seismological Bulletin, 1913 september–dicember.

* **Bergen**. Bergens Museums. An account of the Crustacea of Norway, vol. VI, Copepoda, Cyclopoida, p. III & IV Cyclopidae. — Aarbok, 1913, 3 Hefte.

* **Berkeley**. University of California. Chronicle, vol. XV, 1-3. — Memoirs, vol. III. — Agricultural sciences, vol. I, 4, 5. — American Archaeology and Ethnology, vol. X, 5. — Botany, vol. IV, 16-19; V, 3-5. — Economics, vol. III, 1-3. — Geology, vol. VII, 9-20. — Pathology, vol. II, 11-14. — Physiology, vol. IV, 18. — Zoology, vol. X, 9-10; XI, 3-7.

* **Berlin**. K. Preussischen Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte, 1913, XLI-LIII; 1914, I-XXXIV. — Physikalisch-mathematische Klasse Jahrg. 1914, Abhandlungen, N. 1, 2. — Philosophische-historische Classe Jahrg. 1913. Abhandlungen, 8-10; 1914, 1-5.

— Zentralbureau der Internationalen Erdmessung. Veröffentlichung, N. F., N. 26.

— Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Die Tätigkeit im Jahre 1913.

** — Historischen Gesellschaft. Jahresberichte der Geschichtswissenschaft, XXXV, Jahrg. 1912.

* **Bologna**. Accademia delle Scienze dell'Istituto. Classe di Scienze morali. Sez. di Scienze storico-filologiche, ser. I, t. VIII. Sez. di Scienze giuridiche, ser. I, t. VIII. — Rendiconti, ser. 1ª, vol. VII, 1913-1914.

* — Società Medico-Chirurgica. Bollettino delle scienze mediche, ser. III, vol. III (1903), 6-7; ser. IX, vol. II, 1-11.

* — Biblioteca Comunale. L'Archiginnasio, Bullettino, An. VIII, 5-6; IX, 1-5.

* **Bordeaux**. Société des Sciences Physiques et Naturelles. Procès-verbaux des séances, An. 1912-1913.

* — Faculté des Lettres et des Universités du Midi. Annales, 4e sér. — Revue d'études anciennes, t. XVI, 1-3. — Bulletin hispanique, t. XVI, 1-3. — Bulletin italien, t. XIV, 1-3.

* **Boston**. American Academy of Arts and Sciences. Proceedings, vol. XLVIII, 18-21; XLIX, 1-11. — Memoirs, vol. XIV, 1.

* **Brescia**. Ateneo. Commentari per l'anno 1914. Indice degli indici dei Commentari.

* **Brooklyn**. Museum of the Brooklyn Institute of Arts and Sciences. Science Bulletin, vol. II, n. 1-2.

* **Bruxelles**. Académie Royale de Belgique. Annuaire 1914. — Classe des sciences. Bulletin, 1913, 4-12; 1914, 1-4. — Mémoires, Collection in-8°, 2e sér., t. III, 7-8. — Biographie Nationale, t. XXI, 2.

* **Bruxelles.** Observatoire Royal de Belgique. Annuaire, 1914. — Annales astronomiques, Nouvelle sér., t. XIII, 2; XIV, 1.
* — Institut Royal Météorologique de Belgique. Annuaire météorologique pour 1914.
* — Société Royale d'Archéologie. Annuaire, 1914; Annales, t. XXVII, 1-4.
* — Société des Bollandistes. Analecta Bollandiana, t. XXXII, 4; XXXIII, 1-2.
— Société Royale de Botanique de Belgique. Bulletin, t. LII.
* — Société Entomologique de Belgique. Annales, t. LVII.
* — Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Procès-Verbaux, t. XXVI, 9-10; XXVII, 1-6; — Mémoires, t. XXVI, 3; XXVII, 1.
* — Société Royale Zoologique et Malacologique de Belgique. Annales, t. XLVII, 1912.
* **Bucarest.** Société Roumaine des Sciences. Bulletin, an. XXII, 6; XXIII, 1-2
— Observatorul Astronomic şi Meteorologic. Buletinul lunar, anul XXII, n. 12; XXIII, 1-6.
* **Budapest.** Kgl. Ungar. Geologischen Reichsanstalt. Erläuterungen. Blätter zone 24, Kol. XXV, 10 u. 11, XXIX, 11-12, XXX (1:75000). — Mitteilungen, XXI Bd., 2-3.
* — Ungarisch-geologischen Gesellschaft. Geologische Mitteilungen, XLIII, Köt. 4-9.
Buenos Aires. Dirección General de Estadística (Provincia de Buenos Aires). Boletín, an. XIII (1912), 147-155.
Buenos Aires (Ville de). Direction générale de la Statistique municipale. Annuaire Statistique de la ville, an. XXII, 1912. — Bulletin mensuel de Statistique, an. XXVII, n. 10-12; XXVIII, 1-4, 7, 8.
* — Museo Nacional de historia natural, t. XXIV.
* — Sociedad Científica Argentina. Anales, t. LXXVI, 5-6; LXXVII, 1-2.
* — Sociedad Química Argentina. Anales, t. I, 4; II, 6-7.
— Oficina Meteorológica Argentina. Boletines, 1912, 2-3.
Cagliari. R. Università. Istituto Economico giuridico. Studi, an. VI, 1914, p. 2ª.
* **Calcutta.** Geological Survey of India. Memoirs, vol. XL, p. 2; XLIII, p. 1. — Palaeontologia Indica. Memoirs, New Ser., vol. V, Memoir, n. 1. — Records, vol. XLIII, p. 3, 4; XLIV, 1.
* — Asiatic Society of Bengal. Journal and Proceedings, vol. VIII, 11; IX, 1-6.
— Board of Scientific Advice for India. Annual Report for the year 1912-1913.
* **Cambridge.** Cambridge Philosophical Society. Proceedings, vol. XVII, p. 4-6; XVIII, 1. — Transactions, vol. XXII, 4-5.
* — **Cambridge** (U. S. A.). Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Annual Report, 1912-1913. — Bulletin, vol. LIV, 19; LVIII, 1-7. — Bulletin (Geological Ser., vol. X), LVI, 2. — Memoirs, vol. XXXIV; XL, 6-8.
* **Cape-Town.** Royal Society of South-Africa. Transactions, vol. III, p. 3 IV, p. 1-2.

* **Catania**. Accademia Gioenia di scienze naturali. Atti, ser. 5ª, vol. VI. — Bollettino delle Sedute, n. 28-32.

* — Società degli Spettroscopisti italiani. Memorie, vol. III, ser. 2ª, 1-10.

— Istituto di Storia del Diritto romano. Rassegna Universitaria catanese, vol. VIII, 3.

* **Chambéry**. Société Savoisienne d'histoire et d'archéologie. Mémoires et Documents, t. LIII-LIV.

* **Charleroi**. Société Paléontologique et Archéologique, Documents et Rapports, t. XXXIV.

* **Chicago**. Field Museum of Natural History. Report Series, vol. IV, 3. — Anthropological Ser., vol. XII, 1, 2; XIII, 1. — Botanical Ser., vol. II, 8. — Geological Ser., vol. IV, 2, 3. — Zoological Ser., vol. VII, 13; X, 7, 8.

— John Crerar Library. Nineteenth Annual Report, 1913.

* **Cincinnati**. Lloyd Library. Bibliographical Contribution, n. 11-13. — Mycological Notes, n. 38. — Synopsis of the Genus Cladoderris.

* **Copenhague**. Académie R. des sciences et des lettres. Bulletin, 1913, 6; 1914, 1-2. — Mémoires, Section des Sciences, 7ᵉ sér., t. XI, 2 3. — Section des lettres, 7ᵉ sér., t. II, 3.

De Bilt. Koninklijk Nederlandsch-Meteorologisch Institut, n. 102. Mededeelingen en Verhandelingen, 17.

* **Delft**. Dissertazioni per lauree, n. 7.

* **Dublin**. Royal Irish Academy. Proceedings, vol. XXXI, 64, 47, 9; Sect. A, Sect. B, vol. XXXII, 3; Sect. C, vol. XXXII, 6-9, 11.

* **Dublin**. Royal Dublin Society. Scientific Proceedings, vol. XIV (N. S.), n. 8-16. — Economic Proceedings, vol. II, 7.

* **Edinburgh**. Royal Society. Proceedings, vol. XXXIII, p. 4; XXXIV, 1-2.

* — Royal Physical Society. Proceedings, vol. XIX, 5-6.

Ekaterinburg. Observatorium. Wöchentliches Bulletin der Seismischen Station 1-er Ordnung, Jahrg. I, 1913 (vom 4 October un.).

Finland. Meteorologischen Zentralanstalt (Kuopio-Helsingfors). Meteorologisches Jahrbuch Bd. VIII, 2 (1908); X, 1 (1910); X, 2 (1911). — Beilage zum finnländischen Meteorologischen Jahrbuch. Jahrg. 1906.

* **Firenze**. R. Accademia della Crusca. Vocabolario. 5ª Impressione, vol. XI, fasc. 1. — Atti, 1912-1913.

* — R. Accademia economico-agraria dei Georgofili. Atti, 5ª ser., vol. XI, 1-3; XII, 1.

* — R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento. Sezione di Scienze fisiche e naturali. I 5000 elbani del Museo di Firenze. — Osservazioni astronomiche fatte all'equatoriale di Arcetri nel 1913, fasc. 32. — L'Istituto Botanico di Firenze dal 1900 al 1913. Relazione del professore P. Baccarini.

** — Unione statistica delle città italiane. Annuario statistico, an. V, 1913-1914.

Formosa. Bureau of Productive Industries. Government of Formosa. Icones plantarum formosanarum nec non et Contributiones ad Floram Formosanam, vol. III.

* **Freiburg i. Br.** Naturforschende Gesellschaft. Berichte, XX. Bd.
* **Gap.** Société d'Étude des Hautes-Alpes. Bulletin, 4e sér., 1913, 1-4 trimestre, 1914, 1-2 trimestre. — Tables de Vingt Ans, 2e et 3e sér. (1892-1911).
* **Genève.** Société de Physique et d'Histoire naturelle. Compte rendu des Séances, XXX, 1913. — Mémoires, vol. XXVIII, 1.
* **Genova.** Società di letture e conversazioni scientifiche. Rivista ligure di scienze, lettere ed arti, an. XL, fasc. 6; XLI, 1-5.
* — R. Scuola Navale superiore. Relazione del Consiglio Direttivo sull'andamento della Scuola nell'anno 1912-13.

— R. Istituto Idrografico. Carta idrografica d'Italia e sue Colonie, 1877, 1912-13, 6 fol.i, n.i 209 B, 271, 317, 323, 330.

* **Giessen.** Universitäts-Bibliothek. Tesi di Laurea dell'anno scolastico 1912-13 e 1913-14.
* **Göttingen.** K. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physikalische Klasse. Nachrichten, 1913, 1-3; 1914, 1-3. — Abhandlungen, N. F. Bd. X, 1. — Philologisch-historische Klasse. — Nachrichten, 1913, 2-3 u. Beiheft.; 1914. — Abhandlungen, N. F. Bd. XV, 2-4. — Geschäftliche Mitteilungen, 1914, 1.
* **Granville.** Scientific Laboratory of Denison University. Bulletin, XVII, art. 5-7.
* **Halle.** K. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Abhandlungen, Bd. 98, 99. — Leopoldina, XLIX. Jahgr. 1913.
* **Hamburg.** Hamburgischen Wissenschaftlichen Anstalten. Jahrbuch XXX, Jahrg. 1912; Beiheft XXX, 1912, n. 1-11.
* **Harlem.** Société hollandaise des sciences. Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, sér. III, A. III.
* — Fondation de P. Teyler van der Hulst. Verhandelingen van Teylers Godgeleerd Genootschap, N. S. Dl. 18.
* **Heidelberg.** Naturhistorischer Medizinischen Vereines. Verhandlungen, N. F. Bd. XII, 4; XIII, 1.
* — Universitäts-Bibliothek. Tesi di Laurea dell'anno scolastico 1912-13.
* **Helsingfors.** Societatis Scientiarum Fennicae Acta, vol. XXXVIII, 2; XLI, 9; XLII, 4; vol. XLIII, 2, 3, M. t.; XLIV, 1, 2, 4, 6; XLV, 1. — Ofversigt, vol. 55: 1-2, Matematik och Naturvetenskaper; B. Humanistiska vetenskaper; C. Redogörelser och förhandlingar. — Bidrag, H. 76, 2-4, 6.

Hermannstadt. Siebenbürgischen Vereins für Naturwissenschaften. Verhandlungen und Mitteilungen, LXIII. Bd., Jahgr. 1913, 4-6.

* **Hobart.** Royal Society of Tasmania. Papers and Proceeding, 1913.

Irkoutsk. Station séismique de 1re Classe. Bulletin hebdomadaire, 1913, 2e année.

* **Jena.** Medizinisch-Naturwissenschaftlichen Gesellschaft. Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, N. F., XLIV. Bd., 1-4; XLV, 1-4.
* **Jowa City.** University of Jowa. Laboratories of Natural history. Bulletin, vol. VI, 4.

Karlsruhe. Gr. Technischen Hochschule. Tesi di laurea dell'anno scolastico 1912-13.

* **Kasan**. Société Physico-Mathématique. Bulletin, 2e sér., t. XVIII, 3-4 XIX, 1-2.

* **Kiel**. Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen, N. F., 16. Bd., Abth. Kiel.

Kodaikánal. Observatory. Bulletin, XXXII, XXXIV, XLII.

* **Krakowie**. Akademii Umiejetności Rozprawy vydzialu matematyczno-przyrodniczego. Nauki matematyczno-fizyczne, ser. III A, t., 12, 13. — Nauki biologiczne, ser. III B, t. 12, 13. — Rozprawy vydzial filologiczny, ser. III, t. VII.

* **Kristiania**. Videnskapsselskapet Forhandlinger Aar 1912. Skrifter I Matematisk-Naturvidenskbellig Klasse, Bd. I, II.

* — Kgl. Frederiks Universitets Hundredaarsjubilœum 1911 Festberetning.

* **Kyōto**. College of Science and Engineering (Kyoto Imperial University). Memoirs, vol. V, 9; VI, 1-2.

Lancaster. Po. International Association for promoting the Study of Quaternions and allied systems of Mathematics. Bulletin, June 1913.

La Plata. Ciudad industial. La Plata, 1913; 1 vol. 8°.

* **Lawrance**. University of Kansas. Science Bulletin, vol. VI, n. 2-7.

* **Leipzig**. Gesellschaft für Erdkunde. Wissenschaftliche Veröffentlichungen. VIII. Bd. — Mitteilungen, Jahr. 1913.

* — Kgl. Sächsische Gesellschaft. Mathematisch-physikalische Klasse: Abhandlungen, XXXIII. Bd., n. 1-2. — Berichte, 1913, 4, 5; 1914, 1. — Philologisch-historischen Klasse. Abhandlungen, XXX. Bd., n. 2-4. — Berichte, 1913, LXV. Bd., 3, 4; 1914.

— Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft. Preisschriften XIX der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion.

Léopol. Société Polonaise pour l'avancement des sciences. Bulletin, XIII, 1913.

* **Liège**. Société Géologique de Belgique. Annales, t. XXXIX, 5; XL, 3; XLI, 1. — Publications relatives au Congo Belge et aux régions voisines, an. 1912-1913, fasc. 3.

Lisboa. Instituto de Anatomia da Universidade. Archivo de Anatomia et de Anthropologia, 1912, 1; 1913-1914, 2.

* — Comissão do serviço geológico de Portugal, t. IX.

* **Lisbonne**. Société Portugaise des sciences naturelles. Bulletin, vol. V, 3; VI, 2. — Moluscos de Portugal. I Moluscos terrestres fluviais e das âguas salobras por O. Nobre, 2° fasc., 8°.

* **London**. Royal Society. Proceedings, ser. A, vol. LXXXIX, 612-614; XC, 615-623; XCI, 624; ser. B., vol. LXXXVII, 594-599; LXXXVIII, 600-603. — Year-Book 1914. — Philosophical Transactions, ser. A, vol. 213; ser. B, vol. 204.

— Royal Society. International Catalogue of Scientific Literature. Annual Issue; 11 vol. 8°.

** — Royal Society. Catalogue of Scientific Papers 1800-1900. Subject index, vol. III, Physics, p. 1, Generalities, Heat, Light, Sound, 1 vol. 8° gr. Part II, Physics-Electricity and Magnetism, 1 vol. 8° gr. — Catalogue of Scientific Papers. Fourth Ser. (1884-1900), vol. XIII, A-B.

* **London**. British Association for the advancement of science. Report of the Eighty-Third Meeting of Birmingham, 1913. London, 1914; 1 vol. 8°.

* — Royal Society of Literature. Transactions, 2nd ser., vol. XXXII, p. 3; XXIII, 1. Report and List of Fellows, 1914.

* — Royal Institution of Great Britain Proceedings, vol. XX, 2-3.

* — Royal Astronomical Society. Monthly Notices, vol. LXXIV, n. 2-9; LXXV, 1. Memoirs, vol. LX, 4.

* — British Museum (Natural History). Catalogue of Ungulate Mammals, vol. II. — Revision of the Ichneumonidae, part III, Catalogue of Lepidoptera Phalaenae, vol. XIII (Texte and Plates). — Monograph of the Genus Sabicea. — Catalogue of the Cretaceous Flora, part I.

* — Chemical Society. Proceedings, vol. XXIX, 422 Index; XXX, 423-432. — Journal: December, 1913; January-July, 1914. — 1913 Suppl. Number.

* — Geological Society. Quarterly Journal, vol. LXIX, p. 4; LXX, p. 1-3. — List June 30th, 1914. — Geological literature... during the Year ended December 31st, 1912.

* — Linnean Society. Journal: Botany, vol. XLI, 284-285; XLII, 286; Zoology, vol. XXXII, 217. — Transactions: Botany, 2nd Ser., vol. VIII, p. 3-6; Zoology, 2nd Ser., vol. XVI, p. 2-3.

* — London Mathematical Society. Proceedings, ser. 2, vol. XIII, p. 2-7; XIV, 1.

* — R. Microscopical Society. Journal 1913, 6; 1914, 1-5.

* — Zoological Society. Proceedings, 1913, p. 4; 1914, 1, 2. — Transactions, vol. XX, 5-10. — Reports of the Council and Auditors... for the Year 1913.

* — British Association. A Binary Canon, showing Residue of Powers of 2 for divisors under 1000, and Indices to Residues; compiled by Allan Cunningham. London, 1900; 1 vol. 4°.

* **Louvain**. Université catholique. Publications académiques de l'an. 1912-1913. — Annuaire 1914. — Bibliographie de l'Université, 6e supplément. — E. Van Dievoet, Le bail à terme en Belgique. Louvain, 1913. — Em. J. Robyns, Les chèques à virements postaux. Paris, 1913. — J. Buelens, Les employés en Allemagne. Anvers, 1913. — C. J. Colinet, L'organisation professionnelle des bourses de valeurs mobilières en Belgique. Bruxelles, 1913. — V. Falon, Les plus-values et l'impôt. Bruxelles, 1913. R. Standertskjöld-Nordenstam, Le régime juridique des exploitations rurales en Finlande. Louvain, 1913. — P. Thuysbaert, Het land van Waes. Kortrijk, 1913. — J. B. Poukens, Syntaxe des inscriptions latines d'Afrique. Louvain, 1912. — A. Mansion, Introduction à la physique Aristotélicienne. Louvain, 1912. — F. Aveling, On the consciousness of the Universal and the Individual. Louvain, 1913.

* **Lugano**. Società Ticinese di scienze naturali. Bollettino, an. VIII.

* **Lyon**. Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts: Mémoires, Sciences et Lettres, 3e sér., t. XIV.

* — Société d'Agriculture, Sciences et Industrie. Annales, 1912.

* — Université. Annales, Nouvelle Sér., Sciences, Médecine, fasc. 34–36. — Droit, Lettres, fasc. 26–28.

* **Lyon**. Diocèse de Lyon. Bulletin historique, XIV, an. 84-85.

Madras. Kodaikanal and Madras Observatories. Annual Report of the Director for 1913.

* **Madrid**. Real Academia de la Historia. Boletín, t. LXIV, 1-6; LXV, 1-6.

* — Real Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales. Anuario 1914. — Revista, t. XII, 1-7.

— Instituto Nacional de Ciencias Fisico-Naturales. Comision de Investigaciones Paleontológicas y Prehistorica, n. 2, 3.

* — Sociedad Matemática Española. Revista, an. 2°, n. 15; 3°, 23–30.

* **Mainz**. Verein zur Erforschung der rheinischen Geschichte und Altertümer. Mainzer Zeitschrift, Jahrg. I a IX (1912-1914).

* **Mantova**. R. Accademia Virgiliana. Atti e Memorie, vol. VI, p. 1-2; VII, 1.

* **Marseille**. Faculté des Sciences. Annales, t. XXI.

* **Messina**. R. Accademia Peloritana. Atti, vol. XXIV, fasc. 2 e XXV.

México. Observatorio Astronómico Nacional de Tacubaya. Anuario 1914. — Boletín, n. 4.

— Observatorio Meteorológico Magnetico Central. Boletín mensual 1913, Marzo-Junio.

* — Sociedad Científica " Antonio Alzate ". Memorias y Revista, t. XXXI, 7-10; XXXIII, 1-10.

— Escuela Nacional Preparatoria, Buletín, t. IV, 4-5.

* **Milano**. Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti, ser. II, vol. XLVI, fasc. 18-20; XLVII, 1-16. — *Memorie*. Classe di scienze matematiche e naturali, vol. XXI, fasc. 6-8. — Classe di lettere e scienze morali e storiche, vol. XXIII, fasc. 1 — Fondazione scientifica Cagnola. Atti, vol. XXIII, 1908-1912.

— R. Osservatorio Astronomico di Brera. Anno 1915. Articoli generali del Calendario ed effemeridi del sole e della luna per l'orizzonte di Milano, 8°. — Pubblicazioni, n. LI.

* — Società Italiana di scienze naturali e Museo Civico di Storia naturale. Atti, vol. LII, 2-4; LIII, 1-2.

— Città. Bollettino statistico mensile 1913, novembre-dicembre; 1914, gennaio-ottobre. — Riassunto dei Bollettini statistici mensili dell'anno 1913. — Dati statistici a corredo del Resoconto dell'Amministrazione comunale, 1913, 1 vol. 4°.

* **Minneapolis**. University of Minnesota. Bulletin, n. 1. — Studies in Economic, n. 1. — Studies in Public Health, n. 1. — Current Problems, n. 1.

* **Modena**. Regia Accademia di scienze, lettere ed arti. Memorie, ser. III, vol. XI.

* — Società dei Naturalisti e Matematici. Atti, ser. 4, vol. XV.

Monaco. Institut Océanographique. Bulletin, nos 274, 276-278. Table des nos 253-278. — Résultats des Campagnes scientifiques accomplies par Albert Ir Prince Souverain de Monaco, fasc. XLV.

* **Moncalieri**. Osservatorio del Real Collegio Carlo Alberto. Osservazioni meteorologiche, 1913 dicembre, 1914 gennaio-novembre. — Osservazioni sismiche, 1913, n. 13-16; 1914, 1-8.

Montevideo. Instituto Nacional Fisico-Climatologico. Boletín mensual, año 1912, vol. X; n. 109-120; XI, 121-124.

* **Montpellier**. Académie des Sciences et Lettres. Bulletin mensuel, 1913, 8-12; 1914, 1–7.

* **Moscou**. Société Impériale des Naturalistes. Bulletin, an. 1912-1913, 1-3.

* **München**. Kgl. Bayerische Akademie der Wissenschaften. Jahrbuch 1913. — Register zu den Abhandlungen, Denkschriften und Reden, 1807-1913. — Sitzungsberichte, Philosophisch-philologische und historische Klasse, Abhandlung 9-11 u. Schlussheft, Jahrg. 1913, 1, 1914. — Mathematisch-physikalische Klasse, 1913, 3. — Abhandlungen, Philosophisch-philologische und historische Klasse, XXVI. Bd., 6 Abth. — Mathematisch-physikalische Klasse, Bd. XXVI, Abth. 7-10. — Beiträge zur Naturgeschichte Ostasiens, II Suppl.-Bd., 10. Abth.; III Suppl.-Bd., 2-3. Abth. — Ueber Fürsorge und Verständnis für römische Inschriften in Bayern.

* — Ornithologische Gesellschaft in Bayern. Verhandlungen, Bd. XII, 1.

* **Nancy**. Académie de Stanislas, 1912-1913, 6e sér., t. X.

* **Nantes**. Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France. Bulletin, 3e sér., t. III, 1r-4e trimestre 1913.

* **Napoli**. Società Reale. Annuario 1914. — Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti: Rendiconto, N. S., an. XXVII, gennaio-dicembre 1913. Atti, N. S., vol. II. — Accademia delle scienze fisiche e matematiche: Rendiconto, ser. III, vol. XIX, fasc. 11-12; XX, 1-6. Atti, ser. II, vol. XV. — Accademia di scienze morali e politiche: Rendiconto, an. LII, 1913.

* — R. Istituto d'Incoraggiamento. Atti, 4a ser., vol. VI (dono del Socio G. Grassi); 6a ser., vol. LXV, 1913.

* — R. Istituto d'Incoraggiamento. Stazione sperimentale per le malattie infettive del bestiame. Annali, vol. I (1911-1913); II (1914).

* — Accademia Pontaniana. Atti, vol. XLIII.

* — Società di Naturalisti. Bollettino, vol. XXVI.

* **Neuchâtel**. Société Neuchâteloise des sciences naturelles. Bulletin, t. XL, 1912-13.

* **New-York**. New York Public Library. Bulletin, 1913, 12; 1914, 1-10.

* — New York Academy of Sciences. Annals, vol. XXII, pp. 339-423; XXIII, pp. 1-143; XXIV, pp. 1-170.

* — American Mathematical Society. Bulletin, vol. XX, 4-10; XXI, 1-3. — General Index, vol. XI–XX, 1904-1914. — Transactions, vol. XV, 1-4. — List of Officers and Members, January 1914.

— Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching. Eighth Annual Report of the President and of the Treasurer, 1913.

Oberlin (Ohio). Wilson Ornithological Club. Wilson Bulletin, 85-88.

Ottawa. Department of Mines. Geological Survey Victoria Memorial Museum. — Guide Book, n. 1, Excursion in the Eastern Quebec and the Maritime Provinces, p. I, II; n. 2, Eastern Townships of Quebec and the Eastern part of Ontario; n. 3, Neighbourhood Montreal and Ottawa; n. 4, Southwestern Ontario; n. 5, Western Peninsula of Ontario and Manitoulin Island; n. 8, Transcontinental Excoursions CI Toronto to Victoria and return via Canadian Pacific and Canadian Northern Railways, part. I, II, III; n. 9, C2 Toronto to Victoria and return via Canadian Pacific, Grand Trunk Pacific and National transcontinental

railways; n. 10, Modern British Columbia and Yukon Territory and along the North Pacific Coast, 11 vol. in 16°. — Summary Report, 1912. — Museum Bulletin, n. 2.

Ottawa. Mémoire n. 17, District du Lac Larder, Ont.; Mémoire n. 4, Chemin de fer Transcontinental National dans l'Ouest de Quebec; n. 1328, L'Ile Graham, Colombie Britannique. Le Radium et ses Minerais, Minerais, Bulletin, 1. — Memoirs 41, 54.

— Rapport sommaire de la Division de la Commission Géologique pour l'année civile 1909; 1911. Parties M. et MM., Rapport annuel, vol. XIII, 1900. — Rapport sur une partie des territoires du Nord-Ouest du Canada. Texte et cartes. — Géologie d'une étendue adjacente à la rive orientale du Lac Timiskaming Quebec. Texte et cartes. — Rapport d'une exploration de la rivière Ekwan, des Lacs Sutton Mill, etc.

— Rapport sur les gisements de Gypse des Provinces maritimes. — Rapport sur l'utilisation de la Tourbe pour la production de la force motrice. — Rapport sur les Pierres de Construction et d'Ornement du Canada, vol. I.

— Department of Mines Mines--Branch. Summary Report, 1912. — The production of Copper, Gold, Lead, Nikel, Silver, Zinc and other Metals; 8°. — Austin Brook iron-bearing district New Brunswick; 8°. — Magnetite Occurrences along the Central Ontario Railway. Text, Maps; 8°. — Preparation of Metallic Cobalt by riduction of the oxyde. Part. I. — Annual Report on the Mineral production of Canada during... 1912, 1913. — Moose Mountain Iron-Bearing district Ont.; 1914. Text and Maps. — Magnetite occurrences near Calabogie, in Renfrew county. Ontario; 1914. — Lode mining in Yukon, 1914. — The Copper Smelting Industrie of Canada, 1913.

* **Padova**. R. Università degli Studi. Annuario 1913-14.

* — R. Accademia di scienze, lettere ed arti. Atti e Memorie, nuova ser., vol. XXIX.

* — Accademia scientifica veneto-trentina-istriana. Atti, 3ª ser., vol. VI.

* **Palermo**. Circolo Matematico. Annuario biografico, 1914. — Rendiconti, t. XXXVII, 1-3; XXXVIII, 1. — Supplemento, vol. IX, 1-4. — Adunanza solenne del 14 aprile 1914. Onoranze al fondatore prof. dr. G. B. Guccia. — Indice delle pubblicazioni, n. 5, 1914.

* — Società di scienze naturali ed economiche. Giornale, vol. XXX.

— Orto Botanico e Giardino Coloniale. Bollettino, N. S., vol. I.

Parà. Museu Goeldi (Museu Paraense) historia natural e ethnografia. Boletín, vol. VII, VIII.

* **Paris**. Ministère de l'Instruction Publique. Annales du Musée Guimet. Bibliothèque d'Étude, t. XXVIII. — Archéologie du sud de l'Inde, t. I, II.

— Ministère de l'Instruction Publique. Catalogue des Thèses et Écrits académiques, XXVIII fasc., an. scolaire 1912-13.

— Ministère de l'Instruction Publique. Inventaire sommaire des Archives départementales: *Allier*, Sér. D, sér. E. — *Alpes Maritimes*, Archives ecclésiastiques, sér. G, H. — *Arièges*, Répertoire numérique, sér. H. —

Charente Inférieure, Répert. numér., sér. V. — *Cher*, Sér. E. Suppl., t. I. — *Corrèze*, Répert. numérique, sér. K et L. — *Côte d'Or*, Période revolutionnaire, sér. L, t. I. — *Dordogne*, Répert. num., sér. T. — *Drome*, Répert. num., sér. V. — *Hautes-Alpes*, Ville de Gap, t. II, sér. BB et CC; sér. E, t. II; sér. G, t. VII; sér. H, t. I. — *Haute-Garonne*, sér. E, Suppl. — *Loir et Cher*, Clergé séculaire, sér. G. — *Lot*, Répert. numér., sér. V. — *Lozère*, Répert. num., sér. Y. — *Manche*, Répert. numér., sér. U. — *Pas-de-Calais*, Répert. num., sér. X. — *Var*, Archives civiles, sér. E, t. II. — *Vosges*, Table générale alphabétique de la sér. G.

* **Paris**. Ministère des Travaux Publics, des Postes et des Télégraphes. Annales des Mines, XI^e^ sér., t. IV, livrs. 11-12; V, 1-7.

* — Bureau International des Poids et Mesures. Travaux et Mémoires, t. XV.

* — Institut de France. Annuaire pour 1914. — Procès-Verbaux des Séances de l'Académie tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois d'août 1835. Tome III, IV.

* — Muséum National d'Histoire naturelle. Bulletin, an. 1912, n. 8; 1913, 1-8; 1914, 1-2. — Nouvelles Archives, 5^e^ sér., t. V, fasc. 1-2.

* — École Polytechnique. Journal, 2^e^ sér., 17^e^ cahier.

** — Société Anatomique. Bulletins et Mémoires, 1890-1913; 23 vol. 8°, 1914; 6^e^ sér., t. XVI, 1-2.

* — Société Nationale des Antiquaires de France. Mémoires 8^e^ sér., t. III. — Bulletin 1913, 4^e^ trimestre.

* — Société Géologique de France. Bulletin, 4^e^ sér., t. XII, 7-8; XIII, 1-5.

* — Société Mathématique de France. Bulletin, t. XLI, 3-4; XLII, 1-2. — Comptes rendus des Séances de l'année 1913.

* — Société de Géographie. La Géographie. Bulletin, XXVII, 5-6; XXVIII, 1-3; XXIX, 1-5.

— Société Philomathique. Bulletin, sér. X^e^, t. V, 3, 4.

— Société de Spéléologie. Spelunca. Bulletin et Mémoires, IX, n. 71-73.

* — Société Zoologique de France. Bulletin, t. XXXVIII.

* **Pavia**. Società Pavese di Storia patria. Bollettino, an. XIII, 3-4; XIX, 1-2.

* **Perugia**. Università degli Studi. Facoltà di Medicina, Annali, ser. IV, vol. III, fasc. 4°; IV, 1. — Facoltà di Giurisprudenza. Annali, ser. III, vol. I (1912); ser. III, vol. XII (1914), 1-2.

— R. Deputazione di Storia patria per l'Umbria. Bollettino, an. XX, 1.

** **Philadelphia**. Academy of Natural Sciences. Index to the scientific contents of the Journal and Proceedings, 1812-1912. — Proceedings, vol. LXV, p. 1, 2. — Journal, 2nd ser., vol. XVI, p. 1.

* — American Philosophical Society. Proceedings, vol. LII, 208-212. — An historical account of the origin and formation.

* — Wagner Free Institute of Science. Annual Announcement, 1913-14. — Transactions, vol. VII, p. 2.

* **Pisa**. Società Toscana di scienze naturali. Processi verbali, vol. XXII, 5; XXIII, 1-2. — Memorie, vol. XXIX.

* — R. Università degli Studi. Annuario per l'anno accademico 1913-1914.

Pisa. Commissione tecnica per lo studio delle condizioni presenti del Campanile di Pisa. Relazioni.

Pistoia. Società Storica pistoiese. Bullettino, an. I-XV; 1899-1913, 15 vol. 8° (Dono del Socio R. Renier).

Pompei. Santuario. Calendario, 1914.

* **Portici**. R. Scuola Superiore di Agricoltura. Annali, ser. 2ª, vol. X, XI.

* **Porto**. Academia Polytecnica. Annaes scientificos, vol. VIII, 4; IX, 1-2.

Potsdam. Association Géodésique internationale. Rapport sur les Travaux du Bureau Central de l'Association en 1913 et programme des travaux pour l'exercice de 1914, 4°. — Comptes Rendus des séances de la XVII^e^ Conférence générale réunie à Hambourg du 17 au 27 septembre 1912.

— K. Preussischen Geodätischen Institut Veröffentlichung, N. F., n. 59, 62, 63.

Prag. K. K. Sternvarte. Magnetische und Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1913.

* **Pusa**. Agricultural Research Institute. Memoirs of the Department of Agriculture of India. Botanical Ser., vol. VI, 4, 6, 7. — Chemical Ser., vol. III, 5-9. — Entomological Ser., vol. IV, 6; V, 1. — Report, 1912-13. — Report on the Progress of Agriculture in India, for 1912-13.

* **Reims**. Académie Nationale. Travaux, vol. 131, 132.

* **Rennes**. Société Scientifique et Médicale de l'Ouest. Bulletin, t. XXII, 1-4.

* **Rio de Janeiro**. Bibliotheca Nacional. Annaes, vol. XXX, 1908. — Relatorio que ao Sr. Dr. Augusto Tavares de Lyra Ministro de Justiça e Negocios interiores apresentou em 15 de Fevereiro de 1908 o Director Dr. M. Peregrino da Silva, 1912. — Geographia-Atlas do Brazil. — Atlas dos Estados Unidos do Brazil. — Graça Aranha, Chanaan. Traduit du portugais par C. Gazet. Paris, 1910; 1 vol. 8°. — A. I. Barbosa Vianna, O Recife Capital do Estado de Pernambuco. Recife, 1900; 1 vol. 8°. — Coelho Netto e Olavo Bilac, A Patria Brazileira Lisboa. Paris, 1911; 1 vol. 8°. — Joaquim Leitao, Do civismo e da arte no Brasil. Lisboa, 1900; 1 vol. 8°. — Oliveira Lima, Aspectos da litteratura colonial Brazileira. Leipzig, 1896; 1 vol. 8°. — Joao Ribeiro, Historia do Brasil. S. Paulo, Rio de Janeiro, 1909; 1 vol. 8°.

— Observatorio Nacional. Annuario para o año de 1914 (an. XXX).

* **Roma**. Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio. Annali di statistica, ser. V, vol. 8°. — Statistica delle elezioni generali politiche alla XXIV legislatura (26 ottobre e 2 novembre 1913). — Statistica delle cause di morte nell'anno 1911 e 1912. — Tavole di mortalità secondo le cause di morte per la popolazione italiana (1901-10). — Censimento della popolazione del Regno d'Italia al 10 giugno 1911, vol. II. — Annuario statistico italiano, ser. 2ª, vol. III, 1913.

— Ministero delle Colonie. Commissione per lo studio agrologico della Tripolitania; La Tripolitania settentrionale; 2 vol. 8°.

— Ministero delle Finanze. Statistica speciale di importazione e di esportazione, 1913 novembre-dicembre; 1914 gennaio-ottobre. — Bollettino di legislazione e statistica doganale e commerciale, 1913 settembre-dicembre, 1914 gennaio-maggio. — Movimento commerciale del Regno

d'Italia nell'anno 1912, vol. I, p. 2ª; II, p. 2ª-3ª; 1913, vol. I, p. 1ª-2ª. — Movimento della Navigazione del Regno d'Italia nell'anno 1912; vol. I, Tavole analitiche; II, Tavole riassuntive; 1913; vol. I, II. — I Trattati di Commercio, Dogana e Navigazione fra l'Italia e gli altri Stati, in vigore al 1° settembre 1911. Cenni storici intorno ai trattati precedenti, dalla proclamazione del Regno; 2 vol. in 4° gr.

* **Roma**. Ministero di Grazia e Giustizia e dei Culti. Statistica Giudiziaria civile e commerciale per gli anni 1908 e 1909. — Statistica Giudiziaria penale per gli anni 1908 e 1909, 1910. — Notizie complementari alla Statistica giudiziaria penale. Roma, 1914; 1 vol. 4°. — Statistica della criminalità per l'anno 1909. — Atti della Commissione di statistica e legislazione, 1912-1913; 2 vol. 8°. Idem, Relazioni e verbali delle discussioni della Sessione del luglio 1913; 1 vol. 8°.

— Ministero dell'Interno. Statistica delle carceri e delle colonie per domiciliati coatti, an. 1912; 8°. — Statistica dei Riformatorî, an. 1912; 8°.

** — Calendario generale del Regno per l'anno 1913; 1 vol. 8°.

* — Ministero dell'Istruzione Pubblica. Stato di previsione della spesa per l'esercizio finanziario dal 1° luglio 1912 al 30 giugno 1913 e 1913-1914. — ** Annuario, 1914. — Monografie delle Università e degli Istituti Superiori. Roma, 1911-1913; 2 vol. 8°.

* — Ministero dei Lavori Pubblici. Edifici pubblici e Case degli impiegati nei paesi colpiti dal terremoto; 1 vol. 4°. — Le opere pubbliche in Calabria. Prima relazione sull'applicazione delle leggi speciali dal 30 giugno 1906 al 30 giugno 1913; 1 vol. 8°.

— Ministero della Marina. I Servizi sanitari e la Chirurgia di guerra durante la campagna di Libia e d'Egeo sulle Navi-ospedale e negli Ospedali dipartimentali. Roma, 1913; 1 vol. 8°. — Catalogo analitico per soggetto delle opere, atlanti, carte e periodici della biblioteca centrale; 1° Suppl.

* — Senato del Regno. Biblioteca. Bollettino delle pubblicazioni di recente acquisto, 1913; an. IX, 5-6. — Catalogo metodico degli scritti contenuti nelle pubblicazioni periodiche italiane e straniere. Parte 1ª, Scritti biografici e critici, N. Ser., vol. 1°. Roma, 1914; 8°.

* — Camera Italiana dei Deputati. Segretariato Generale. — Raccolta degli Atti Parlamentari della Legislatura XXIII (1909-1913). — Discorsi Parlamentari " Bertani ", " Spaventa ", " Cavallotti ". — Catalogo Metodico degli Scritti contenuti nelle pubblicazioni italiane e straniere. Indice generale a tutto il 1906. — Manuale del Deputato per la Legislatura XXIV. — La Legislatura XXIII.

* — R. Accademia dei Lincei. Annuario 1914. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali: Memorie, ser. 5ª, vol. IX, 15-17; X, 1-11; Rendiconti, ser. 5ª, vol. XXIII. — Classe di scienze morali, storiche e filologiche: Memorie. Rendiconti, ser. 5ª, vol. XXIII, 1-6. — Notizie degli scavi di antichità, ser. 5ª, vol. X, 5-12; vol. XI, 1-6; supplemento. — Rendiconto dell'adunanza solenne del 7 giugno 1914.

* — Biblioteca Nazionale centrale " Vittorio Emanuele ". Bollettino delle Opere moderne e straniere acquistate dalle Biblioteche pubbliche governative del Regno, an. 1913.

* **Roma**. Società italiana di matematica. Bollettino della "Mathesis", an. V, 3; VI, 1-3.
* — R. Ufficio Geologico. Memorie descrittive della Carta Geologica d'Italia, vol. 16°.
* — R. Comitato Geologico italiano. Bollettino, vol. XLIV, 1.
— Scuola di Roma. Bollettino della Direzione centrale, fasc. III, IV, 1914.
— R. Commissione Geodetica italiana. Determinazioni di gravità relativa compiute nel 1912 a Roma, Arcetri, Livorno, Genova, Vienna e Potsdam, 1913; 4°.
* — Istituto di Diritto Romano. Bollettino, an. XXVI, 1-6.
— Società degli Agricoltori italiani. Bollettino quindicinale, an. XIX, 1-23.
* — Imperiale Istituto Archeologico Germanico, Sezione Romana. Bullettino, vol. XXIX, 1, 2.
* — Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei. Atti, an. LXVII, Sessioni 1ª-7ª (dicembre 1913, giugno 1914). — Memorie, vol. XXXI.
* **Rovereto**. I. R. Accademia Roveretana degli Agiati, an. CLXIII, sez. IV, vol. II; an. CLXIV, ser. IV, vol. I.
* **Saint-Louis**. Washington University Studies, vol. I, p. I; p. II, 1.
* — Missouri Botanical Garden. Annals, vol. I, 1-3.
* **St-Pétersbourg**. Académie Impériale des sciences. Bulletin, 1914, 1-11. — Mémoires, VIIIᵉ sér., vol. XXVI, 1; XXVIII, 3; XXIX, 6; XXXI, 2-9; XXXII, 1. — Zentral Seismische in Pulkova. Tre carte sismiche.
* — Musée Géologique Pierre le Grand. Travaux, 1913, t. VII, 4.
* — Observatoire Central Nicolas. Publications, vol. XVII, 3; XVIII, 6; XX, XXIV.
* — Comité Géologique. Bulletins, t. XXXI, 3-8. — Mémoires, N. S., n. 62, 1 und 2 Liefg. 72, 74, 76, 79, 86.
* — Società Fisico-Chimica russa. Giornale, t. XLV, 7-9; XLVI, 1-3.
* **San Francisco**. California Academy of Sciences. Proceedings, Fourth ser., vol. II, p. 1-202; III, 265-454; IV, 1-13.
* **Santiago de Cile**. Instituto Central Meteorológico y Geofísico de Cile. Publicaciones, n. 4-6.
* **Sendai**. Tōhoku Imperial University. The Science Reports: 1st ser. (Mathematics, Physics, Chemistry), vol. II, 3-5; III, 1-5. — Second ser. (Geology), vol. I, 5.
* **Siena**. R. Accademia dei Fisiocritici. Atti, ser. VI, vol. V, 1-10.
* — Università degli Studi. Annuario accademico 1913.
* — Circolo Giuridico della R. Università. Studi Senesi, vol. XXX, 1-3.
* **Stockholm**. R. Académie Suédoise des Sciences. Handlingar (Mémoires), Bd. L, 2. — Archiv för matematik, astronomi och fysik, Bd. VIII, 3-4; IX, 1-2. — Archiv för kemi, mineralogi och geologi, Bd. IV, 6; V, 1-2. — Archiv för botanik, Bd. XII, 3-4; XIII, 1. — Archiv för zoologi, Bd. VIII, 1. — Meteorologiska iakttagelser i Sverige, 1912, LIV. — — Meddelanden från K. Vetenskapsakads Nobelinstitut, Bd. II, 3, 4. — Årsbok, 1913. — Svensk Naturskyddsbibliografi, 1901-1912. — Prix Nobel en 1912.
* — Kungl. Biblioteket. Schweden. Historisch-Statistisches Handbuch im

Auftrage der kgl. Regierung herausgegeben von J. Guinchard, 2 Auflage, Deutsche Ausgabe. Stockholm, 1913-14; 2 vol. 8°.

Stonyhurst. Stonyhurst College Observatory. Results of Meteorological, Magnetical and Seismological Observations, 1913.

* **Strassburg**. K. Universität und Landes-Bibliothek. Tesi di laurea dell'anno scolastico 1912-1913.

— Internationalen Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt Veröffentlichungen, 1912, 1-6.

* **Stuttgart**. Vereins für vaterländische Naturkunde Jahreshefte, 70 Jahrg. 1914; Beilage, VI.

* **Svizzera**. Société Helvétique des sciences naturelles. Nouveaux Mémoires, vol. XLVIII. — Actes, 96e Session du 7 au 10 septembre 1913 à Frauenfeld, Ie et IIe partie.

* — Commission géologique. Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse, II sér., livrs. XX, 2; XLIII; 1 Carton livr. 41.

* **Sydney**. Royal Society of New South Wales. Journal and Proceedings, Vol. XLVII, p. II, III; XLVIII, 1.

— University. Bibliographical Record, 1851-1913.

— Royal Zoological Society of New South Wales. The Australian Zoologist, vol. I, p. 1.

Teddington. National Physical Laboratory. Report for the Year 1913-14.

* **Thonon**. Académie Chablaisienne. Mémoires et Documents, t. XXVI.

Tiflis. Stazione sismologica. Bollettino settimanale, anno 1913. (In lingua russa).

* **Tōkyō**. Imp. Earthquake Investigation Committee. Bulletin, vol. VI, 2-3; VII, 1; VIII, 1.

* — Imperial University. College of Science. Journal, vol. XXXII, 11-12; XXXIII, 2; XXXIV, 2; XXXV, 1, 2, 4, 5; XXXVI, 1-4. — General Index, vol. I-XXV.

— Imperial Academy. Memoirs, sect. II, vol. I, 1.

* — Medizinischen Fakultät der Kaiserlichen Universität. Mitteilungen, XI. Bd., 2-3; XII. Bd., XIII. Bd.

* **Topeka**. Kansas Academy of science Transactions, vol. XXVI.

— University-Geological Survey of Kansas. Bulletin, 1.

* **Torino**. R. Accademia di Agricoltura. Annali, vol. LVI.

* — R. Accademia di Medicina. Giornale, an. LXXVI (1913), 6-12; LXXVII (1914), 1-8.

* — R. Deputazione sopra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie e la Lombardia. Miscellanea di Storia italiana, 3a ser., t. XVI. — Biblioteca di Storia italiana recente, vol. V.

* — Istituto Giuridico della R. Università. Berra (G.), L'avaria marittima nella sua genesi storica. Torino, 1914; 8°. — Biglino (G.), Accertamento ed aliquota del reddito del capitale. Alba, 1913; 8°. — Chironi (G. P.), L'inesistenza del negozio giuridico e la possibilità di sanarla. Milano, 1914; 8°. — Id., L'indipendenza dei brevetti. Milano, 1914; 8°. — Id., Del danno morale. Milano, 1913; 8°. — Manzini (V.), Dei termini processuali penali. Torino; 8°. — Ricca Barberis (M.),

Sull'estensione della clausola " Libero e franco allodio „ nella compravendita. Milano, 1914; 8°. — Id., Il contratto di locazione di cose e lo " Ius Tollendi „ del conduttore. Milano, 1914; 8°. — Scaletta (U.), Lo sciopero nei pubblici servizi. Torino, 1914; 8°. — Sraffa (A.), La tassa di circolazione sulle carature delle accomandite semplici. Milano, 1912; 8°. — Tomatis (B.), La successione legittima del coniuge superstite nel Diritto romano con breve raffronto nel Diritto antico e nella legislazione comparata. Torino, 1913; 8°.

* **Torino**. Società degli Ingegneri ed Architetti. Atti, an. 1913, 3-6; 1914, 1-4.
* — Società piemontese di Archeologia e Belle Arti. Atti, vol. VIII, 2.

— Museo di Zoologia ed Anatomia comparata. Bollettino, vol. XXVIII, 1913 (n. 665-679).

* — Osservatorio Astronomico della R. Università in Pino Torinese. Annuario Astronomico, 1913-1914, 1914-1915.
* — Società Meteorologica italiana. Bollettino bimensile, ser. III, vol. XXXII, 7-12; XXX, 1-5.
* — Club Alpino italiano. Rivista mensile, vol. XXXII, 12; XXXIII, 1-11.

— Istituto di Patologia Generale della R. Università. Lavori eseguiti dal 1903 al 1913; 2 vol. 8°.

* — R. Politecnico. Annuario, 1912-1913.
* — Consiglio Provinciale. Atti, 1913; 1 vol. 8°.
* — Municipio. Annuario, 1912-1913. — Atti, an. 1912, vol. 61, 1913, vol. 62. — Il Comune di Torino nel quinquennio 1909-1914; vol. I-II, 1914; 4°.
* — Città di Torino. Servizio d'igiene e di sanità. Bollettino statistico, ann. XLII (1913), 1-13.

— Camera di Commercio e Industrie. Industrie e Commerci del Distretto nell'ann. 1912.

— Federazione Nazionale dei Dottori in scienze commerciali. Albo professionale per le provincie di Torino, Cuneo, Alessandria e Novara.

— Cassa di Risparmio. Resoconto dell'anno 1913; fol.

— Scuola Professionale degli orefici. Relazione della Direzione, anno scolastico 1913-1914.

* **Toronto**. Canadian Institute. Year Book and Annual Report for the session 1912-13. — Transactions, vol. X, 1.
* — University. Studies, vol. XVIII. Review of historical publications relating to Canada.
* **Tortosa**. Observatorio de Fisica cósmica del Ebro. Boletín mensual, vol. IV, 3-12; V, 1. — Memorias, n. 5.
* **Toulon**. Société d'Histoire Naturelle. Annales, 1913, 4.
* **Toulouse**. Université. Annuaire pour l'année 1913-1914 et Livret de l'étudiant. — Faculté de Lettres. Bibliothèque méridionale, 2e sér., t. XVI, L'Art dramatique à Valencia... par Henri Mérinée.
* — Université. Faculté des sciences, Annales, 3e sér., t. III, 1911; IV, 1914.
* — Université. Annales du Midi, XXVe année, n. 98-100, 1913; 101-102, 1914.
* **Trieste**. Società di Minerva. Archeografo Triestino, vol. VII, 3a ser., fasc. 2°.

* **Udine**. Società Storica friulana. Memorie storiche forogiuliesi, an. IX, 2-4.
* **Upsala**. Kungl. Vetenskaps Akademies. Zoologiska Bidrag Från Uppsala med understöd af R. Bünsows Zoologiska fond, Bd. I, II.
* — Observatoire météorologique. Observations séismographiques de juillet à décembre 1906, et de janvier 1907 à août 1912. — Bulletin mensuel, vol. XLV.
* — Kungl. Universitetes Bibliotek. Urkunder rörande Stockolms historia, I, 4. — Vilhelm Ekmans Universitetsfond, n. 16. — Tesi di laurea dell'anno 1912-13.

— Kgl. Humanistika Vetenskaps-Samfundet. Skrifter, Bd. 15-16.

* **Urbana**. Illinois State Laboratory of Natural History. Bulletin, vol. IX, 11-12; X, 1-4.

Utrecht. K. Nederlandsch Meteorologisch Institut. Ergebnisse Aerologischer Beobachtungen, 1, 1909-1912.

* **Venezia**. R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Atti, t. LXXII, 10; LXXIII, 1-8. — Concorsi a premio proclamati nell'adunanza solenne del 31 maggio 1914.

— R. Comitato Talassografico Italiano. Bollettino bimestrale, n. 27-30, vol. IV, n. 1-4. — Memorie, XL-XLIII.

* — R. Magistrato alle Acque. Ufficio idrografico. Pubblicazioni, 44 e 45, 58-61. — Bollettino, 1913, 10-12; 1914, 1-8. — Livellazione di precisione, 28, 57.
* **Vercelli**. Società Vercellese di Storia e d'Arte. Memorie e Studi, an. V, 3-4; VI, 1-3.
* **Verona**. Accademia di Agricoltura, Scienze e Lettere. Statuto. — Atti e Memorie, ser. 4ª, vol. XIII. — Osservazioni meteoriche 1912.
* — Museo civico. Bollettino, an. VII, 1913, fasc. 28, 29, 30.
* **Warszawa**. Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Prace Wydzialu II: Nauk antropologicznych, spotecznych, historyi i filozofil, n. 10. — Prace Wydzialu III: Nauk matematycznych i przyrodniczych, n. 3-6. — Comptes rendus des séances: I et II Classe. Rok. VI, n. 1-6; III Classe. Rok. VI, 1-6. — Komisya Historyezna-Zeszyt, 1.

Washington. Department of Commerce. U. S. Coast and Geodetic Survey. Special publication (Geodesy), 13, 16, 17; (Astronomy), 14. — Annual Report of the Superintendent, ...to the Secretary of Commerce for the fiscal year ended June 30, 1913.

* — Department of Commerce. Bureau of Standards. Bulletin, vol. VIII, 4; IX, 1, 4; X, 1-3. — Technologie Papers, n. 12, 13, 18, 25.

— Library Congress. Report; 1913. — Publications issued by the Library since 1897. January, 1914.

* — Smithsonian Institution. Smithsonian Miscell. Collections, vol. LVII, 11, 12; LIX, 19; LX, 23, 30; LXI, 1-9, 11-17, 19-23; LXII, 1. — Opinions rendered by International Commission on Zoological nomenclature. Opinions 52 to 56. Annual Report of the Board of Regents 1912.
* — Smithsonian Institution. United States National Museum. Contributions from the U. S. National Herbarium, vol. XVI, 10, 11, 13; XVII, 4, 5; XVIII, 1, 2.

* **Washington.** Smithsonian Institution. U. S. National Museum. Bulletin, 71, 83. — Proceedings, vol. XLIII, XLIV, XLV
— Smithsonian Institution. Astrophysical Institution. Annals, vol. III.
* — Smithsonian Institution. Bureau Ethnology. Bulletin, 53, 54. — 28 Annual Report, 1906-1907.
* — Carnegie Institution. Publications, 54, 74 VII, 163, 167, 168, 172, 173 p. I, II, 177-181, 184, 186-188, 190, 195. — Year Book, n. 12 (1913).
* — Naval Observatory. Report (Annual) for the fiscal Year 1913.
— Library of the Surgeon General's Office, U. S. Army. Index-Catalogue. Authors and Subjects, 2nd ser., vol. XVIII.
* — National Academy of Sciences. Memoirs, vol. XI. — A History of the First Hale-Century, 1863-1913.
* — United States Geological Survey (Department of the Interior). Bulletins, 522, 525, 539, 542, 545, 555. — Water Supply Papers, 292, 295, 302, 303, 305, 307, 308, 314, 315, 317-320, 333, 334, 337. — Professional Paper, 76, 78, 79, 80, 85-A, 85-B, 85-C. — Thirty-Fourth Annual Report. — Geological Atlas of the United States, fol. 185, 187, 190.

Weltevreden. K. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandisch-Indie. Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandisch-Indië, Dl. LXXII, 1913.

* **Wien.** K. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse: Denkschriften, LXXXII. Bd. — Sitzungsberichte, CXXII. Bd., Abtheilung I, 3-7; II *a*, 5-8; II *b*, 6-8; III, 4-10. — Philosophisch-historischen Klasse. Denkschriften, LVII. Bd., Abt. 2. — Sitzungsberichte, 172. Bd., Abh. 2 (Index); 173. Bd., Abh. 1, 2, 6; 174. Bd., Abh. 3; 175. Bd., Abh. 1. — Historische Kommission. Archiv für österreichische Geschichte, 102. Bd., Hälfte 2; 104. Bd., 1.
* — K. K. Zoologisch-Botanischen Gesellschaft. Verhandlungen, LXIII Bd.
* — K. K. Geologische Reichsanstalt. Verhandlungen, 1913, 13-18; 1914, 1. — Jahrbuch, 1913, LXIII. Bd., 3, 4.

* **Würtzburg.** Physikalisch-Medicinische Gesellschaft. Sitzungsberichte, 1913, 3-9. — Verhandlungen, N. F., Bd. XLII, 6; XLIII, 1.

* **Zagreb.** Jugoslavenska Akademija źnanosti i umjetnosti. Codex diplomaticus regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae, vol. XI. — Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium, vol. XXXIV. — Rad. Histor.-filolog. i filozofičko-juridički. Knjiga 199. — Riečnik hrvatskoga ili srpskoga jezika. Svzezak, 32. — Stari pisci hrvatski. Knjiga XXII. Starine. Kng. XXXIV. — Zbornik za narodni život i običaje juznih slavena. Kng. XVIII, Svez. 2. — Pravna povijest dalmatiskih gradova. Dio. I.
* — Societas scientiarum naturalium croatica. Glasnik, God. XXV, 4; XXVI, 1-3.
* — K. Hrvatsko-Slavonsko-Dalmatinskoga. Zemaljskoga Arkiva. Vjesnik Godina XV, 4.

* **Zürich.** Naturforschende Gesellschaft. Vierteljahrsschrift, Jahrg. 1913, 1-2.

PERIODICI 1914.

* **Acta** mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm; 4°.
** **Almanacco** italiano. Piccola enciclopedia popolare della vita pratica. Firenze; 16°.
American Chemical Journal. Baltimore; 8°.
American Journal of Mathematics. Baltimore; 8°.
American Journal of Philology. Baltimore; 8°.
** **Annalen** der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
** **Annales** de Chimie. Paris; 8°.
** **Annales** scientifiques de l'École Normale supérieure. Paris; 4°.
* **Annals** and Magazine of Natural History. London; 8°.
* **Annals** of Mathematics, second series. Charlottesville; 4°.
** **Antologia** (Nuova). Rivista di scienze, lettere ed arti. Roma; 8°.
** **Archiv** für Entwickelungsmechanik der Organismen. Leipzig; 8°.
** **Archiv** für Protistenkunde. Jena; 8°.
** **Archives** des Sciences physiques et naturelles, etc. Genève; 8°.
** **Archivio** storico italiano. Firenze; 8°.
* **Archivio** storico lombardo. Milano; 8°.
* **Archivio** storico sardo. Edito dalla Società storica sarda. Cagliari; 8°.
* **Archivio** storico per la Sicilia orientale. Catania, 8°.
* **Archivum** Franciscanum historicum. Ad Claras Aquas; 8°.
* **Ateneo** veneto. — Rivista mensile di scienze, lettere ed arti. Venezia; 8°.
** **Athenaeum** (The). Journal of English and Foreign Literature, Science, the Fine Arts, Music and the Drama. London; 4°.
* **Athenaeum**: Studi periodici di letteratura e storia. Direttore Carlo Pascal. Pavia; 8°.
* **Beiblätter** zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
** **Berliner** philologische Wochenschrift. Berlin; 8°.
* **Biblioteca** nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Firenze; 8°.
** **Bibliotheca** mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik. Stockholm; 8°.
** **Bibliotheca** Philologica Classica. Berlin; 8°.
** **Bibliothèque** de l'École des Chartes; Revue d'érudition consacrée spécialement à l'étude du moyen âge, etc. Paris; 8°.
** **Bibliothèque** universelle et Revue suisse. Lausanne; 8°.
Bollettino di filologia classica diretto da G. Cortese e L. Valmaggi, An. I-XX, Torino, 1894-1914; 8° (Dono del Socio Prof. R. Renier).
** **Bollettino** Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica. Roma; 8°.

* **Brixia Sacra**. Bollettino bimestrale di Studi e documenti per la Storia Ecclesiastica bresciana. Brescia; 8°.
** **Bullettino** (Nuovo) di Archeologia cristiana. Roma; 8°.
* **Bullettino** di Archeologia e Storia dalmata. Spalato; 8°.
** **Centralblatt** für Mineralogie, Geologie und Paleontologie in Verbindung mit dem neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paleontologie. Stuttgart; 8°.
* **Cimento** (Il nuovo). Pisa; 8°.
Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des sciences. Paris; 4°.
* **Conferenze** e Prolusioni. Periodico quindicinale. Roma; 4°.
Cosmos, Comunicazioni sui progressi della Geografia. Roma; 8°.
* **Elettricista** (L'). Rivista mensile di elettrotecnica. Roma; 4°.
** Ἐφημερὶς ἀρχαιολογική. Ἐν Ἀθήναις. 4°.
Eranos. Acta philologica Suecana. Göteborg; 8°.
** **Euphorion**, Zeitschrift für Literaturgeschichte. Leipzig; 8°.
Felix Ravenna. Bollettino Storico Romagnolo edito da un gruppo di studiosi. Ravenna; 8°.
** **Fortschritte** der Physik. Braunschweig; 8°.
* **Gazzetta** chimica italiana. Roma; 8°.
* **Gazzetta** Ufficiale del Regno. Roma; 4°.
* **Gegenbaurs** Morphologisches Jahrbuch. Leipzig; 8°.
Geografia (La), Comunicazioni dell'Istituto geografico De Agostini. Novara; 8°.
* **Giornale** del Genio civile. Roma; 8°.
** **Giornale** della libreria, della tipografia e delle arti e industrie affini. Milano; 8°.
** **Giornale** storico della Letteratura italiana. Torino; 8°.
Giornale storico della Lunigiana. La Spezia; 8°.
** **Guida** commerciale ed amministrativa di Torino. 8°.
* **Historische** Zeitschrift. München; 8°.
* **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. Berlin; 8°.
** **Jahrbuch** (Neues) für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie, etc. 1909, I. II. Beil. Bd. VIII, 1, 2. Stuttgart; 8°.
** **Jahresberichte** der Geschichtswissenschaft im Auftrage der historischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben von E. Berner. Berlin; 8°.
* **Journal** (The American) of Science. Edit. Edward S. Dana. New-Haven; 8°.
** **Journal Asiatique**, ou Recueil de Mémoires, d'Extraits et de Notices relatifs à l'histoire, à la philosophie, aux langues et à la littérature des peuples orientaux. Paris; 8°.
** **Journal** de Conchyliologie, comprenant l'étude des mollusques vivants et fossiles. Paris; 8°.
** **Journal** de Mathématiques pures et appliquées. Paris; 4°.
** **Journal** des Savants. Paris; 8°.
** **Journal** für die reine u. angewandte Mathematik. Berlin; 4°.
* **Journal** of Physical Chemistry. Ithaca; 8°.

** **Minerva**. Jahrbuch d. gelehrten Welt. Strassburg; 16°.
** **Modern** language notes. Baltimore; 4°.
* **Monatshefte** für Mathematik und Physik. Wien; 8°.
* **Morphologisches** Jahrbuch. Leipzig; 8°.
** **Moyen Age** (Le). Bulletin mensuel d'histoire et de philol. Paris; 8°.
** **Nature**, a weekly illustrated Journal of Science. London; 8°.
* **Navigazione** (La) aerea: Rivista italiana di aeronautica. Roma; 8°.
* **Nieuw Archieff** voor Wirskunde. Uitgegeven door hel Wiskundig Genootschap te Amsterdam; 8°.
** **Palaeontographica**. Beiträge zur Naturgesch. der Vorzeit. Stuttgart; 4°.
** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographisch. Anstalt. Gotha; 4°.
* **Physical Review** (The); a journal of experimental and theoretical physic. Published for Cornell University Ithaca. New-York; 8°.
* **Prace** matematyczno fizyczne. Warzawa; 8°.
** **Quarterly** Journal of pure and applied Mathematics. London; 8°.
** **Raccolta** Ufficiale delle leggi e dei decreti del Regno d'Italia. Roma; 8°.
** **Revue** archéologique. Paris; 8°.
** **Revue** de la Renaissance. Paris; 8°.
* **Revue** de l'Université de Bruxelles; 8°.
** **Revue** des Deux Mondes. Paris; 8°.
** **Revue** du Mois. Paris; 8°.
** **Revue** générale des sciences pures et appliquées. Paris; 8°.
** **Revue** numismatique. Paris; 8°.
** **Revue** politique et littéraire, revue bleue. Paris; 4°.
** **Revue** scientifique. Paris; 4°.
* **Revue** semestrielle des publications mathématiques. Amsterdam; 8°.
Riforma (La) Sociale. Rassegna di questioni economiche, finanziarie e sociali (Dono del Socio Prof. Einaudi).
** **Risorgimento** italiano. Rivista storica. Torino; 8°.
* **Rivista** di Artiglieria e Genio. Roma; 8°.
** **Rivista** di Filologia e d'Istruzione classica. Torino; 8°.
** **Rivista** d'Italia. Roma; 8°.
** **Rivista** di filosofia. Continuazione della *Rivista Filosofica*, Pavia; 8°.
* **Rivista** internaz. di scienze sociali e discipline ausiliarie. Roma; 8°.
* **Rivista** italiana di Sociologia. Roma; 8°.
* **Rivista** storica benedettina. Roma; 8°.
* **Rivista** storica italiana. Torino; 8°.
Rosario (Il) e la Nuova Pompei. Valle di Pompei; 8°.
** **Science**. New-York; 8°.
* **Science Abstracts**. Physics and Electrical Engineering. London; 8°.
** **Scientia**. Rivista di scienza. Organo internazionale di sintesi scientifica. Bologna, 8°.
* **Sperimentale** (Lo). Archivio di Biologia. Firenze; 8°.
** **Stampa** (La). Gazzetta Piemontese. Torino; f°.
Tôhoku (The) Mathematical Journal. Edited by T. Hayashi.

* **Tridentum**. Rivista mensile di studi scientifici. Trento; 8°.

* **Wiskundige** Opgaven met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap. Amsterdam; 8°.

Yale Review. New Series. Edited by Wilbur L. Cross. New Haven; 8°.

** **Zeitschrift** für Gletscherkunde für Eiszeitforschung und Geschichte des Klimas. Berlin; 4°.

** **Zeitschrift** für physikalische Chemie. Leipzig; 8°.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

NB. Le pubblicazioni segnate con * si hanno in cambio; quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

Dal 14 Giugno al 15 Novembre 1914.

Cauchy (A.). Œuvres, 2ª Ser., T. XI (*Dono del Governo Francese*).

Dehaut (E. G.). Matériaux pour servir à l'histoire zoologique et paléontologique des îles de Corse et de Sardaigne. Fasc. V. Paris, 1914; fol° (*dall'A.*).

Gabba (L.). Notizie intorno ai Concorsi a premi del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere di Milano. Pavia, 1914; 8° (*Id.*).

Gay (F. P.) and **Rusk** (G. Y.). Studies on the locus of antibody formation. Washington, 1913; 8° (*dagli AA.*).

Guarducci (F.). Il ripristinamento del centro trigonometrico di 1° ordine sul nuovo campanile di S. Marco di Venezia. Bologna, 1914; 4° (*dall'A.*).

Guareschi (I.). Sulla legge della dilatazione dei gas di Volta. Notizie storiche. Leipzig, 1914; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Kilian (W.). Liste des publications scientifiques. Grenoble, 1910; 8°.

— Sur la faune du calcaire de l'Homme d'Armes (Drôme) Aptien inférieur. Dijon, 1911; 8°.

— Observations géologiques dans les Alpes françaises. Paris, 1911; 8°.

— et **Reboul** (P.). Sur quelques Holcodiscus nouveaux de l'Hauterivien de la Bégüe par la Palud (Basses-Alpes). Paris, 1912; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Pirotta (R.). Commemorazione del Socio Edoardo Strasburger. Roma, 1913: 8°.

— Organicazione ed organizzazione. Genova. 1913; 8°.

— L'ereditarietà della fasciazione nella " Bunias orientalis " L. Roma, 1914; 8°.

— L'alternanza di generazioni nelle piante inferiori. Pavia, 1914; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Reina (V.) e **Guarducci** (F.). Azimut assoluto del segnale trigonometrico di Monte Soratte sull'orizzonte di Monte Mario (Roma) determinato negli anni 1898-1904-1906 e 1909. Bologna, 1914: 4° (*dagli AA.*).

Rutherford (E.). Discussion on the Structure of the Atom; 8° (*dall'A.*).

Taramelli (T). Sulla storia geologica del Garda. Novara, 1914; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Schumann (R.). Ueber die Lotabweichung am Laaerberg bei Wien. Wien, 1914; 8° (*dall'A.*).

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe:
I[a] parte: Fauna palaeartica, livr. 115-116.
II[a] „ Exotica, livr. 191-195.

Termier (P.), **Kilian** (W.), **Lory** (P.) et **Jacob** (Ch.). Notice explicative de la feuille Vizille (2[e] édition) de la Carte géologique détaillée de la France. Paris, 1913; 8° (*dal Prof. Kilian Socio corrispondente dell'Accademia*).

Wanach (B.). Funkentelegraphischer Zeitdienst. Leipzig, 1914; 8°.

Dal 21 Giugno al 22 Novembre 1914.

Bertacchi (C.). Relazione sull'esplorazione italiana e sulle maggiori opere geografiche dovute a iniziativa privata in quest'ultimo quarto di secolo. Torino, 1914; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Bertagnolli (G.). Discorso letto il 2 maggio 1914 nella ricorrenza del XVII anniversario delle feste centenarie per Antonio Rosmini. Rovereto, 1914; 4°.

Biadego (G.). Carta dotale di Flora Betteloni (1534). Verona, 1914; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

** *Bibliotheca* Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana: Poetae latini minores; Sallustius in Ciceronem, M. Tullius Cicero; Pro Milone; Pro Marcello – Pro Ligonio – Pro Rege Deiotaro; Ps.-Xenophon; Demosthenes Orationes; Schola in Theocritum vetera; Hero Alexandrinus, vol. V Stereometrica et de Mensuris. Lipsiae, in Aedibus B. G. Teubneri; 8 vol. 16°.

Cavallo (P.). Il lago di Garda. Monografia geografica. Casale Monferrato, 1914; 8° (*dall'Autrice*).

De Magistris (Carlo Pio). Lettere di Vittorio Amedeo II nel periodo dell'assedio di Torino del 1706. Torino, 1914; 8° (*dall'A.*).

Gonella (E.). Il Museo Nazionale di Artiglieria in Torino. Roma, 1914; 1 vol. in 8° e Atl. 4° obl. (*Dono della Direzione della " Rivista di Artiglieria e Genio „*).

** *Indice* generale per materie degli *Atti* inseriti nella " Raccolta ufficiale delle leggi e dei decreti del Regno d'Italia „ nel decennio 1901-1910, 1 vol. 8°.

** **Litta**. Famiglie celebri italiane (Seconda serie) Fascicoli 63, 64. Carafa di Napoli; 65, Foscarini di Venezia; 66, Provana di Collegno.

Marre (A.). Notice des travaux scientifiques et littéraires. Arras, 1911; 16° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Monumenta Germaniae historica: Legum sectio IV. Constitutiones et acta publica Imperatorum et Regum. T. VI, Partis prioris, fasc. II.

Muratori (L. A.). Rerum Italicarum Scriptores, fascicoli 125-127.

Overberg (Cyr van) et **De Jonche** (Ed.). Collection de Monographies ethnographiques. Bruxelles, 1907-1913; 10 vol. in 8°.

** **Pagliaini** (A.). Catalogo generale della Libreria italiana dal 1900 a tutto il 1910. Primo supplemento, vol. II, fascicoli VIII-XI. Milano; 4°.

Scuola (La Regia) Tecnica C. Cavour di Ventimiglia nel Cinquantenario del Regno. Sanremo, 1912; 8° (*Dono Boselli*).

Zocco-Rosa (A.). La figura di Appio Claudio nella Storia del " Jus Flavianum ". Catania, 1914; 8° (*dall'A.*).

Dal 15 al 29 Novembre 1914.

Ardizzone (G.). Medaglie commemorative degli XI Congressi degli scienziati italiani. Raccolte e riprodotte. Firenze, 1914; 4° (*dall'A.*).

Caterina (P.). Production de l'acier et de la fonte au four électrique breveté. Salerne, 1911; 8° (*Id.*).

Colonnetti (G.). Sul problema dell'arco elastico con o senza cerniere. Roma, 1914; 8° (*Id.*).

Guareschi (I.). Storia della Chimica. Legge della dilatazione dei Gas di Alessandro Volta. Seconda edizione corretta ed aumentata con la ristampa della Memoria originale di Volta: Della uniforme dilatazione dell'aria ecc., 1793. Torino, 1914; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

— Storia della Chimica. Domenico Guglielmini e la sua opera scientifica. Introduzione. Brevi cenni sullo stato della scienza e particolarmente della Chimica nella seconda metà del secolo XVIII. Ristampa della Memoria " Riflessioni filosofiche dedotte dalle figure de' Sali (1688) ". Torino, 1914; 8° (*Id.*).

Guidi (C.). Il *Frettage* nelle travi inflesse. Roma, 1914; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

— e **Colonnetti** (G.). Notizie di alcune esperienze istituite sopra una travata continua in cemento armato. Roma, 1914; 8° (*dal sig. Prof. G. Colonnetti*).

Jadanza (N.). Trattato di Geometria pratica. Lezioni date nel R. Politecnico di Torino. Seconda edizione corretta ed ampliata. Torino, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Mangin (L.). Sur la flore planctonique de la rade de Saint-Vaast-la-Hougue (1908-12). Paris, 1914; 4° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Wetmore (A.). A peculiarity in the Growth of the tail feathers of the giant Hornbill (Rhinophax Vigil). Washington, 1914; 8° (*dall'A.*).

Dal 22 Novembre al 6 Dicembre 1914.

Cabreira (Antonio). Seus Serviçoes e consagrações. Factos e Documentos coligidos e publicados em comemoração do 25° aniversario do estabelecimento da 2ª epoca de exames de instrução secundaria por iniciativa dos seus Condiscipulos no Liceu de Lisboa, em 1888-1889. Lisboa, 1914; 1 vol 8°.

De Ruggiero (G.). La filosofia contemporanea. Bari, 1912; 1 vol. 8°.
— Critica del concetto di cultura. Catania, 1914; 1 vol. 16°.
— La Redenzione come svolgimento dello Spirito. Palermo, 1912; 8°.
— La scienza come esperienza assoluta. Bari, Palermo, 1912; 8°.
— La filosofia dei valori in Germania. Trani, 1911; 8°.
— Lo svolgimento della filosofia di H. Bergson. Roma, 1912; 8° (*dall'A.*).
Formichi (C.) Michele Kerbaker, 1835-1914. Note biografiche. Torino, 1914; 8° (*dall'A.*)
Kant (E.). Pensiero ed esperienza a cura di G. De Ruggiero. Bari, 1913; 1 vol. 8° (*dono del Sig. G. De Ruggiero*).
Lachelier. Psicologia e Metafisica. Traduzione di Guido De Ruggiero. Bari, 1915; 1 vol. 8° (*dal Traduttore*).
Leibnitz (G. G.). Opere varie scelte e tradotte da Guido De Ruggiero. Bari, 1912; 1 vol. 8° (*Id.*).
Sabbadini (R.). Storia e critica di testi latini: Cicerone, Donato, Tacito, Celso, Plauto, Plinio, Quintiliano, Livio, e Sallustio. Commedia ignota. Catania, 1914; 1 vol. 8°.
— Le scoperte dei Codici latini e greci ne' secoli XIV e XV (II). Firenze, 1905; 1 vol. 8°.
Sabbadini (R.). Le scoperte dei Codici latini e greci ne' secoli XIV e XV. Nuove ricerche col riassunto filologico dei due volumi (V). Firenze, 1914; 1 vol. 8°.
— Le due edizioni di Columella messe a riscontro. Milano, 1911; 8°.
— Giovanni Colonna biografo e bibliotecario del secolo XIV. Torino, 1911; 8°.
— Nicola da Cusa e i Conciliari di Basilea alla scoperta dei Codici. Roma, 1911; 8°.
— Poggio scopritore di Codici latini in Germania. Pavia, 1913; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Dal 29 Novembre 1914 al 10 Gennaio 1915.

Asch (W.) u. **Asch** (D.). Die Silicate in chemischer und technischer Beziehung. Berlin, 1911; 1 vol. 8° (*dagli AA. pel XIX premio Bressa*).
Berlese (A.). La *Diaspis pentagona* ed il modo di combatterla. Roma, 1912; 8°.
— La *Prospaltella berlesei* How. contro la *Diaspis pentagona* Targ. Milano, 1914.
— La distruzione della *Diaspis pentagona* a mezzo della *Prospaltella berlesei*. Firenze, 1914; 8° (*dall'A. per il XIX premio Bressa*).
Cirinei (E.). Il Teorema di Galileo Galilei sulla utilità della lunghezza della leva. S. a. l.; 4° (*Id.*).
Forbes (S. A.). Fresh water Fishes and Their ecology. Urbana, 1914; 8° (*dall'A.*).
Ivaldi (G.). Le leggi della Natura. Sampierdarena, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. pel XIX premio Bressa*).
Koebe (P.). Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven. III, IV. Leipzig, 1912, 1914; 2 fasc. 8°.

Koebe (P.). Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Berlin, 1911; 4°.
— Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. Berlin, 1914; 4°.
— Das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nichteuklidische Geometrie. Milano, 1913; 4°.
— Referat über automorphe Funktionen und Uniformisierung. Leipzig, 1912; 8°.
— Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung. Göttingen, 1912; 8°.
— Ueber eine neue Methode der konformen Abbildung und Uniformisierung. Göttingen, 1912; 8°.
— Zur Theorie der konformen Abbildung und Uniformisierung. Leipzig, 1914; 8° (*dall'A. per il XIX premio Bressa*).
Puig y Soler (D.). Dinamica atmosferica y Barografia de Europa. Barcellona, 1913; 1 vol. in 4° (*Id.*).
Somigliana (C.). Sur une classification des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables. Paris, 1914; 8° (*dall'A.*).
Spezzani (C.). Primo contributo alla conoscenza delle *Laboulbeniali italiane*. Firenze, 1914; 8° (*Id.*).

Dal 6 Dicembre 1914 al 17 Gennaio 1915.

Arnò (C.). La prima legislatura ai tempi del Ministero Balbo-Pareto. Parte 2ª. Porto-Maurizio, 1914; 8° (*dall'A.*).
Bertolini (C.). Bibliografia dell'antico diritto greco e romano, VII. Roma, 1914; 8° (*Id.*).
Bonelli (G). Archivio Silvestri in Calcio. Notizia e Inventario-Regesto, vol. II. Torino, 1914; 1 vol. fol. (*dono del Comm. Emilio Silvestri*).
Brugi (B.). Per la storia della giurisprudenza e delle università italiane. Torino, 1915; 8° (*dall'A.*).
Carbonelli (G.). I diritti di pedaggio delle droghe in Asti nel secolo decimoquarto. Roma, 1914; 8° (*Id.*).
Contessa (C.), I regni di Napoli e di Sicilia nelle aspirazioni italiane di Vittorio Amedeo II di Savoia, 1700-1713. Torino, 1914 (*Id.*).
Misciattelli (P.). Mistici Senesi, 2ª edizione. Siena, 1914; 1 vol. 8° (*dall'Autore per il premio Gautieri per la Letteratura, triennio 1911-1913*).
Muratori (L. A.). Rerum italicarum Scriptores: T. III, fasc. 2, P. I (129); XVIII, p. I, fasc. 132–134; T. XIX, fasc. 1-3, P. III (128, 130, 131). — Archivio Muratoriano, n. 14.
Peano (G.). Vocabulario commune ad Latino–Italiano–Français–English–Deutsch pro uso de interlinguistas. Editione II; 1915, Academia pro interlingua, Cavoretto–Torino; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Academia*).
Rajna (Pio). Alessandro D'Ancona. " Il Marzocco „ del 15 novembre 1914 (*dall'A. Socio nazionale non residente dell'Accademia*).

Valdarnini (A.). Scritti filosofici e pedagogici. Firenze, 1885; 8°. — Saggi di filosofia sociale. Torino, 1890; 8°. — Saggi di filosofia speculativa. Bologna, 1899; 8°. — Filosofia speculativa e civile. Nuovi saggi. Asti, 1903. — Il metodo sperimentale da Aristotile a Galileo. Asti, 1909; 8°. — Un precursore italiano di Alberico Gentile, 1914; 4°. — Pensiero ed azione di Carlo Cattaneo, 1914; 8° (*dall'A.*).

Dal 10 Gennaio al 7 Marzo 1915.

Cabreira (A.). Relatorio dos trabahos da Academia de Sciencias de Portugal no ano de 1913-14. Lisboa, 1914; 8° (*dall'A*).

Coblentz (W. W.). Measurements on Standards of radiations in absolute value. Washington, 1914; 8°.

— Various modifications of bismuthsilver thermopiles hawing a continuous absorbing surface. Washington, 1914; 8° (*Id.*).

Commissao de Linhas Telegraphicas Estrategicas de Matto-Grosso ao Amazonas. Relatorio do Snr. Coronel C. M. da Silva Randon comprehendendo os " estudos e reconhencimento „ que serviram de base à construcção da linha telegraphicas, ecc. Vol. 1° (di 21 opuscoli di lavori diversi). Rio de Janeiro, 1910-1914; 4° (*Dono del Presidente della Commissione Colonnello da Silva Randon*).

De Miranda (A.). La guérison radicale du diabète. Lisbonne, 1914; 8°. (*dall'A.*).

Favaro (G. A.). Il passo del micrometro del telescopio zenitale di Carloforte nel periodo 1900,0-1912,5. Catania, 1914; 4° (*Id.*).

Guerrieri (E.). Sulla curva di luce e sulla variazione del periodo di Y Cygni. Catania, 1914; 4° (*Id.*).

Memoriale dei Laureandi fuori corso del R. Politecnico di Torino. Torino, 1915; 8°.

Pascal (A.). Sopra i minori del determinante generalizzato di Scholtz-Hunyady. Napoli, 1914; 4° (*dall'A.*).

Stieltjes (T. J.). Œuvres complètes. Publiées par les soins de la Société Mathématique d'Amsterdam. Tome I. Gröningen, 1914; 1 vol. in-4°.

Dal 17 Gennaio al 14 Marzo 1915.

Arnò (Carlo). L'art. 462 Cod. civ. e l'attrazione reale. Torino, 1915; 8° (*dall'A.*).

Baratono (A.). Discorsi su l'Educazione. Genova, 1914; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Filosofia, triennio 1912-1914*).

Biadego (G.). Commemorazione dei Soci Ettore Calderara, Luigi Adriano Milani, Alessandro D'Ancona, Francesco Cipolla. Venezia, 1914; 8°.

— In memoria di Francesco Cipolla. Venezia, 1914; 8°.

— Rodolfo Renier. Verona, 1915; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Boselli (P.). Girolamo Rossi. Commemorazione. Torino, 1914; 8° (*dall'A. Presidente dell'Accademia*).

Carabellese (P.). L'Essere e il problema religioso. Bari, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la filosofia, 1912-1914*).

Carandini (F.). Vecchia Ivrea. Ivrea, 1914; 4° (*dall'A.*).

****Catalogo** generale della Libreria italiana dall'anno 1847 a tutto il 1899; Indice per materie, puntata 4-8. Milano. Associazione tip.-ital., 4°.

Cocchia (E.). La Sfinge Etrusca: preconcetti teorici e ostacoli reali che rendono impenetrabili e misteriose le origini del popolo Etrusco. Napoli, 1915; 8° (*dall'A.*).

Del Lungo (I.). Parole del Presidente inaugurando la nuova sede della Reale Accademia della Crusca nell'adunanza pubblica del 3 gennaio 1915. 8°.

— L'edizione nazionale delle Opere di Dante e la Società Dantesca Italiana. Firenze, 1914; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Ferraris (C.). La responsabilità dello Stato e degli Enti locali pei loro impiegati nelle legislazioni germaniche. Milano, 1914; 8° (*dall'A.*).

Lamanna (E. P.). La religione nella vita dello spirito. Firenze, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Filosofia per il triennio 1912-1914*).

Litta. Famiglie Celebri Italiane (2ª serie). Carafa di Napoli, fasc. LXVII. " Ruffo di Calabria „, fasc. LXVIII.

Mattiauda (B.). In memoria del Comm. Vittorio Poggi. (N. 3 del " Corriere Ligure „), in-fol.

****Pepys** (Samuel). Clerc of the acts and Secretary to the Admiralty. The diary. London, 1913; 16 vol., 16°.

****Philodemi** ΠΕΡΙ ΠΑΡΡΗΣΙΑΣ libellus. Edidit Alexander Olivieri. Lipsiae, Teubner, 1914; 8°.

Revelli (P.). Per la geografia storica d'Italia. Firenze, 1915; 8° (*dall'A.*).

Vernazza (G.). Lezione Storica sopra la Città di Alba pubblicata da Luigi Provana di Collegno. Alba, 1915; 8° (*dono del Conte L. Provana di Collegno*).

Zaccante (G.). Aristotile nella Storia della coltura. Milano, 1915; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Dal 7 Marzo al 28 Aprile 1915.

Bassani (F.). Sopra un pesce fossile degli scisti calcareo-marnosi triassici del Galletto presso Laveno sul Lago Maggiore. Roma, 1914; 8°.

— Sopra un Pholidophorus del Trias superiore del Tinetto nel golfo della Spezia. Roma, 1914; 8°.

— La Ittiofauna della Pietra leccese (Terra d'Otranto). Napoli, 1914 (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Boccardi (G.). La variazione delle latitudini e le Osservazioni di Pino Torinese. Roma, 1914; 4° (*dall'A.*).

Chapman (S.). The Lunar diurnal magnetic variation, and its change with Lunar distance. London, 1915; 4° (*Id.*).

Enciclopedia (Nuova) di Chimica scientifica, tecnologica e industriale, ecc. diretta dal Dott. Icilio Guareschi. Vol. I: Chimica generale e Chimica fisica, Torino, 1906; 1 vol., 4° (*dono del Socio nazionale residente I. Guareschi*).

Gautier (R.). Résumé météorologique de l'année 1912 pour Genève et le Grand Saint-Bernard.

— — Idem, 1913. Genève, 1914; 2 vol., 8° (*dono del sig. Gautier, Direttore dell'Osservatorio di Ginevra*).

— et **Duaime** (H.). Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice pendant l'année 1912. Genève, 1913; 8°.

— — Idem, 1913. Genève, 1914; 8° (*Idem*).

Guareschi (I.). Vincenzo Fino. Commemorazione. Torino, 1915; 8°.

— In memoria di Alessando Cugini. Torino, 1914; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Haton de la Goupillière. Sur les sommes de puissances semblables des nombres entiers. Paris, 1915; 4° (*dall'A.*).

— Sur une propriété des progressions arithmétiques. Paris, 1914; 4° (*dall'A.*).

Jhering (H. von). Molluscos (Annexo N. 5) de Estudos e reconhecimento de Linhas Telegraphicas Estrategicas de Matto-Grosso ao Amazonas. Rio de Janeiro, 1913; Testo e Atl. (*dall'Escriptorio Central da Commissao*).

** *London*: Royal Society. Catalogue of Scientific Papers. Fourth Series (1884–1900). Vol. XIV; 1 vol., 4°.

Longo (B.). L'Orto e l'Istituto botanico della R. Università di Siena. Siena 1915; 8° (*dall'A.*).

Mattirolo (O.). Il Mariscus Elatus Vahl Cyperacea americana resasi spontanea in Piemonte. Torino, 1915; 8°.

— Notes sur l'histoire de la " Pierre à Champignons „ (Pietra Fungaia). Paris, 1914; 8°.

— Plantae Tripolitanae-Tuberaceae. Firenze, 1914; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Meyer (E. v.). Storia della Chimica dai tempi più remoti all'epoca moderna. Edizione italiana con note dei Dott.ri M. Giua e C. Giua Lollini e introduzione del Prof. Dott. I. Guareschi. Milano, 1915; 1 vol., 24 (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Onoranze centenarie ad A. Sobrero. 31 Maggio 1914; 1 vol., 4° (*dono del Socio residente I. Guareschi*).

** **Nernst** (W.). Theoretische Chemie vom Standpunkte der Avogadroschen Regel und der Thermodynamik, 7ª ediz. Stuttgart, 1913; 1 vol., 8°.

Panetti (M.). Sulla tecnica delle costruzioni asismiche. Torino, 1914; 8°.

— Indirizzo e caratteri nella costruzione dei dirigibili moderni. Saluzzo, 1915; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Pascal (A.). L'apparecchio polisettore di Tommaso Ceva e una lettera inedita di Guido Grandi. Milano, 1915; 8°.

— Sui determinanti ottenuti da un altro operando una medesima trasformazione lineare sugli elementi di una o più colonne. Napoli, 1915; 4°.

— Sopra una lettera inedita di Girolamo Saccheri. Venezia, 1914; 8° (*dall'A.*).

Pinto (L.). Emanuele Fergola. Commemorazione. Napoli, 1915; 8° (*dall'A.*).

Ricerche di biologia dedicate al Prof. Alessandro Lustig nel 25° anno del suo insegnamento universitario 1914. Firenze, 1915; 1 vol., 8° (*dal Comitato ordinatore delle Onoranze*).

Taramelli (T.). Sul significato geologico del canale di Leme nell'Istria. Pavia, 1915; 8° (*dall'A. Socio nazionale non residente dell'Accademia*).

Dal 14 Marzo al 2 Maggio 1915.

Ambrosini (G.). Trasformazione delle persone giuridiche con speciale riguardo alle Istituzioni di beneficenza e d'istruzione, alle Confraternite ed ai Legati di culto. Vol. II: Diritto moderno. Torino, 1914; 1 vol., 8° (*dall'A.*).

Arnò (C.). La prima legislatura ai tempi del Ministero Casati-Plazza. Roma, 1914; 8° (*Id.*).

Borgialli (A.). Cinquant'anni di vita italiana 1861-1911. Roma, 1913; 1 vol., 8° (*Id.*).

Catalogo completo delle edizioni Hoepli 1871-1914. Milano, 1914; 1 vol., 8° (*dall'editore Ulrico Hoepli*).

Cosentini (F.). Filosofia del diritto. Torino, 1914; 1 vol., 8° (*dall'A. per il premio Gautieri riservato alla Filosofia, triennio 1912-1913*).

Gentile (G.). La riforma della dialettica hegelliana. Messina, 1913; 1 v., 8°.

— Sommario di pedagogia come scienza filosofica. Bari, 1913-14; 2 vol., 8°.

— Studi Vichiani. Messina, 1915; 1 vol., 8° (*Id.*).

Gould (C. P.). Money and Transportation in Maryland, 1720-1765. Baltimore, 1915; 1 vol., 8°.

** **Martinori** (E.). La moneta. Vocabolario generale. Roma, 1915; 1 vol., 4°.

Mignone (C.). Le false basi della nostra vita. Città di Castello, 1914; 1 v., 8° (*dall'A. per il premio Gautieri riservato alla Filosofia, triennio 1912-1914*).

Negri (G.). Opere, a cura di Michele Scherillo: I. Nel presente e nel passato. Milano, 1905; 1 vol., 8°. — II. Meditazioni vagabonde. Saggi critici. Milano, 1906; 1 vol., 8°. — III. Rumori mondani. Milano, 1907; 1 vol., 8°. — IV. Segni dei tempi. Milano, 1909, 1 vol. 8°. — V. L'Imperatore Giuliano l'Apostata. Milano, 1914; 1 vol., 8°. — VI. Ultimi saggi. Problemi di religione, di politica e di letteratura. Milano, 1904; 1 vol., 8° (*dono dell'editore Ulrico Hoepli*).

Peyron (B.). Codices italici manu exarati qui in Bibliotheca Taurinensis Athenaei ante diem XXVI Januarii MCMIV asservabantur. Taurini, MCMIV; 1 vol., 8° (*dono degli eredi Peyron*).

Picco (S.). L'operosità scientifica di Rodolfo Renier. Roma, 1915; 8° (*dall'A.*).

Savio (S.). I primordi del cristianesimo nell'Umbria. Perugia, 1914; 8°.

— Lettera sulla questione dei Corpi dei SS. Vittore e Satiro a Milano. Roma, 1915; 8° (*dall'A. Socio nazionale non residente dell'Accademia*).

Sforza (G.). Un libro sfortunato contro i Turchi. Venezia, 1915; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Stampini (E.). Ovidio maestro e poeta di abbigliamento muliebre. Conferenza. Torino, 1914; 16° (*dall'A. Socio Segretario dell'Accademia*).
— I sei Carmi di Sulpicia figlia di Servio tradotti in versi italiani col testo a fronte. Torino, 1915; 8° (*Id.*).

Dono del Prof. Scherillo.
(Edizioni Hoepli).

Alfieri (V.). Le tragedie. Milano, 1912; 1 vol., 8°.
Ariosto (L.). Orlando Furioso. Milano, 1915; 1 vol., 8°.
Arte, Scienza e Fede ai giorni di Dante. Conferenze Dantesche tenute a cura del Comitato milanese della Società Dantesca italiana. Milano, 1901; 1 vol., 8°.
Boccaccio (G.). Il Decamerone. Nel quale si contengono cento novelle, in dieci dì, dette da donne e da tre giovani uomini; esposte ed illustrate per le persone colte e per le scuole da Michele Scherillo. Milano, 1914; 1 vol., 8°.
Con Dante e per Dante. Discorsi e conferenze tenute per cura del Comitato milanese della Società Dantesca italiana 1908. Milano; 1 vol., 8°.
Dante. La Divina Commedia commentata da G. A. Scartazzini, 7ª ediz. Milano, 1914; 1 vol., 8°.
Dai tempi antichi ai tempi moderni. Da Dante al Leopardi. Raccolta di scritti critici, di ricerche storiche, filologiche e letterarie. Con facsimili e tavole. Milano; 1 vol., 4°.
— La vita nuova, per cura di M. Scherillo. Milano, 1911; 1 vol., 4°.
— La stessa edizione in 8°.
Foscolo (U.). Prose e poesie. Milano, 1913; 1 vol., 8°.
Goldoni (C.). Commedie scelte. Milano, 1912; 1 vol., 8°.
Leopardi (G.). I Canti e con la vita del Poeta. Milano, 1911; 1 vol., 8°.
Manzoni (A.). I promessi sposi, storia milanese del secolo XVII, preceduti da uno studio sugli anni di noviziato poetico del Manzoni, di Michele Scherillo. Milano, 1908; 1 vol., 8°.
— Le tragedie, gl'inni sacri e le odi a cura di M. Scherillo. Precede uno studio sul decennio dell'operosità pratica del Manzoni. Milano, 1907; 1 vol., 8°.
Parini (G.). Le poesie, 3ª edizione ritoccata. Milano, 1913; 1 vol., 8°.
Pellico (S.). Prose e tragedie scelte. Milano, 1910; 1 vol., 8°.
Petrarca (Fr.). Il canzoniere, 2ª ediz. interamente rinnovata. Milano, 1908; 1 vol., 8°.
San Francesco. I Fioretti e il Cantico del Sole. Milano, 1915; 1 vol., 8°.
Tasso (T.). La Gerusalemme Liberata. Milano, 1912; 1 vol., 8°.

Dal 28 Aprile al 13 Giugno 1915.

Commissão de Linhas Telegraphicas Estrategicas de Matto-Grosso ao Amazonas. Annexo N. 5, Historia Natural-Zoologia. Mammiferos; 4°.

Finney (J. M. T.). The significance and effect of Pain. Baltimore, 1914; 8° (*dall'A.*).

Helmert (A.). Rapport sur les travaux du Bureau Central de l'Association Géodésique internationale en 1914 et Programme des travaux pour l'exercice de 1915. Leid, 1915; 4° (*Id.*).

Issel (A.). Commemorazione del Marchese Senatore Giacomo Doria. Genova, 1915; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Leme (A. Betim Paes). Quatro Mappas do Annexo N° 5 de Historia Natural, " Mineralogia e Geologia ". Rio de Janeiro, 4 carte f°. (*dalla Commissão de Linhas Telegraphicas Estrategicas de Matto-Grosso ao Amazonas*).

Pascal (A.). A. Maire, L'œuvre scientifique de Blaise Pascal; 8° (*dall'A.*).

Taramelli (T.). La traspirazione tellurica ed i terremoti nell'Appennino centrale e meridionale. Pavia, 1915; 8° (*dall'A. Socio nazionale non residente dell'Accademia*).

Dal 2 Maggio al 20 Giugno 1915.

Banca Commerciale Italiana: Cenni storici sul movimento economico dell'Italia — La legislazione economica della guerra in Italia o all'estero. Milano, 1915 (An. VII, vol. IX).

— Elenco delle cedole e dei titoli estratti pagabili presso le sue succursali ed agenzie. Aprile 1915.

Biadego (G.). Effigenio Perina. Verona, 1915; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Billia (L. M.). L'esiglio di Sant'Agostino. Torino, 1912; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Filosofia, triennio 1912-1914*).

Bodrero (E.). Protagora. Bari, 1914; 2 vol. 8° (*Id.*).

Boselli (P.). Relazione del Presidente della Commissione per il riordinamento del Pio Istituto della Santa Casa di Loreto, a S. E. il Ministro Guardasigilli e Progetto di Statuto proposto dalla Commissione. Torino, 1914; 8° (*dall'A. Presidente dell'Accademia*).

Carboneri (Gio.). La circolazione monetaria nei diversi Stati. Con tavole di ragguaglio e illustrazioni nel testo. Vol. I: Monete e biglietti in Italia dalla Rivoluzione francese ai nostri giorni. Roma, 1915; 1 vol. 8° (*dono del Ministero del Tesoro*).

Comitato Nazionale del Risorgimento. Adunanza del 5 marzo 1915. Sunto dei discorsi di S. E. l'On. Pasquale Grippo, Ministro della Pubblica Istruzione, e di S. E. l'On. Paolo Boselli, Presidente del Comitato. Roma, 1915; 8° (*da S. E. Boselli*).

** **De Ruggiero** (G.). La filosofia contemporanea. Germania, Francia, Inghilterra, America, Italia. Bari, 1912; 1 vol. 8°.

Inguanez (D. M.). L'esamerone di Sant'Ambrogio, ridotto in versi da Alessandro Monaco di Montecassino. Roma, 1913 (*dall'A.*).

** **Libanii** Opera recensuit Richardus Foerster. Vol. VIII: Progymnasmata — argumenta orationum Demosthenicarum. Lipsiae, 1915; 1 vol. 16°.

** **Litta**. Famiglie celebri italiane, 2ª serie, Fasc. LXIX. Tornaldo di Napoli, Tavv. V, VI — Fasc. LXX, Provana di Collegno, Tavv. X, XI.

Meozzi (A.). Le dottrine politiche e religiose di B. Spinoza. Parallelo con T. Hobbes. Firenze, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Filosofia, triennio 1912-1914*).

Ministero degli Affari Esteri. Documenti diplomatici presentati al Parlamento Italiano dal Ministro degli Affari Esteri (Sonnino). Austria-Ungheria. Seduta del 20 maggio 1915.

Muratori (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 135, 3° del T. XXIV, p. 1.

Nicolini (F.). G. B. Vico. La scienza nuova giusta l'edizione del 1744. Bari, 1911-13; 2 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Filosofia, triennio 1912-1914*).

Orano (P.). Il precursore di Carlo Marx. Roma, 1899; 1 vol. 8°.

— Psicologia sociale. Bari, 1902.

— Cristo e Quirino (Il problema del Cristianesimo). Firenze, 1913; 1 vol. 8°.

— Altorilievi. Ancona, 1913; 1 vol. 8°.

— I moderni. Milano, 1908-1914; 4 tomi in 3 vol. 8° (*dall'A.*).

— Napoleone Parboni. Roma, 1915; 8° (*Id.*).

— Discordie. Studi e polemiche. Lanciano, 1915; 1 vol. 8° (*Id.*).

— La rinascita dell'anima. Bari, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Filosofia, triennio 1912-1914*).

****Pascal** (C.). Le credenze d'oltretomba nelle opere letterarie dell'antichità classica. Catania, Francesco Battiato, editore, 1912; 2 vol. 8°.

Pelazza (A.). Guglielmo Schuppe e la Filosofia dell'Immanenza. Milano, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Filosofia, triennio 1912-1914*).

Putelli (R.). Intorno al Castello di Breno. Breno, 1915; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

****Raccolta** dei Trattati e delle Convenzioni fra il Regno d'Italia e i Governi esteri. Vol. 2°. Torino, 1869; 1 vol. 8°.

Rasi (P.). Genesi del pentametro e caratteri del pentametro latino. Venezia, 1912; 8°.

— Bibliografia Virgiliana (1910-1911). Mantova, 1913; 8°.

— Una poetessa del secolo di Augusto. Padova, 1913; 8°.

— Divinum Rus. Carmen. Amstelodami, 1914; 8°.

— Gli studi recenti sull'epitafio di Allia Potestas e la natura del carme. Venezia, 1914; 8°.

Stampini (E.). Il codice evangelico k della Biblioteca Universitaria di Torino, riprodotto in fac-simile per cura della Regia Accademia delle Scienze di Torino. Torino, 1913. Recensione estratta dalla *Rivista di filologia e d'istr. classica* (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

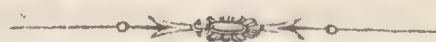
Sforza (G.). Un viaggio attraverso i Balcani nel 1575. Siena, 1915; 8° (*Id.*).

Tangorra (V.). Trattato di Scienza della finanza. Vol. I. Roma, Milano, Napoli, 1915; 8°.

****Varisco** (B.). Conosci te stesso. Milano, 1912; 1 vol. 8°.

Zini (Z.). La doppia maschera dell'universo. Torino, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Filosofia, triennio 1912-1914*).

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 15 Novembre 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Salvadori, Naccari, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Fusari, Balbiano e Segre, Segretario.

Viene letto e approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente, inaugurando i lavori della Classe, accenna alla tremenda guerra che, durante le ferie accademiche, si è scatenata sul mondo; ed augura che la scienza possa presto contribuire ad evitare simili flagelli all'umanità.

Il nuovo Ministro della Pubblica Istruzione, S. E. Grippo, nell'assumere il suo ufficio ha inviato all'Accademia un telegramma di saluto. Si delibera di ricambiare deferenti saluti.

Nel settembre scorso l'Accademia fece avere i propri auguri al Socio straniero Noether, in occasione delle sue feste giubilari pel 70° compleanno. Si comunicano i ringraziamenti da lui inviati.

Il 7 luglio moriva in Padova il Socio nazionale Lorenzoni, che apparteneva all'Accademia dal 3 febbraio 1895. Si dà incarico al Socio Jadanza di commemorarlo in una prossima adunanza.

Altre due dolorose perdite ha fatto la Classe fra i Corrispondenti della Sezione matematica: il 29 ottobre moriva a Palermo il Prof. Guccia, il 1° novembre a Firenze il Prof. Tardy.

Quest'ultimo era nostro Socio corrispondente fin dal 16 luglio 1854; il Guccia dal 15 maggio 1910.

Il Socio D'Ovidio legge un cenno necrologico del Tardy, che verrà inserito negli *Atti*.

Il Socio Segre ricorda brevemente alla Classe le benemerenze del Prof. Guccia. Aveva questi dedicato tutto sè stesso all'incremento e alla elevazione del Circolo matematico di Palermo, da lui fondato; ed era riuscito ad ampliarlo sì da costituire come una grande Società internazionale di matematici. Con uno zelo e un'attività mirabili dirigeva la pubblicazione dei *Rendiconti* del Circolo, i quali eran diventati, mercè sua, un periodico scientifico internazionale di prim'ordine, che faceva onore all'Italia. Il Socio Segre propone, e la Classe approva, che siano inviate al Circolo matematico di Palermo vive condoglianze per la grande perdita che ha fatto.

Il Socio Balbiano legge la sua commemorazione del Socio straniero Lieben. Sarà stampata negli *Atti*.

Sono giunti i seguenti opuscoli donati dagli Autori, Soci corrispondenti:

Taramelli, *Sulla storia geologica del Garda*.

Pirotta, *Organicazione ed organizzazione*. — *L'alternanza di generazioni nelle piante inferiori*. — *Commemorazione di E. Strasburger*. — *L'ereditarietà della fasciazione nella Bunias orientalis L.* (col Dottor M. Puglisi).

L. Mangin, *Sur la flore planctonique de la rade de Saint-Vaast-La-Hougue 1908-1912*.

W. Kilian, *Cinque opuscoli di Geologia e Paleontologia*.

Viene inoltre segnalato un volume donato dal Cav. G. Ardizzone, in cui son riprodotte le medaglie commemorative degli 11 Congressi degli scienziati italiani.

I Soci Guareschi e Mattirolo rilevano ulteriormente, fra i libri giunti all'Accademia, due splendidi volumi di E. T. Reichert, pubblicati dalla Carnegie Institution, relativi all'amido.

Il Socio Guareschi presenta in omaggio all'Accademia due suoi lavori: la 2ª edizione della Memoria: *Legge della dilatazione dei gaz* di A. Volta con la ristampa della Memoria originale del Volta (1793), e *Domenico Guglielmini e la sua Opera scientifica, con introduzione e brevi cenni sullo stato della scienza e particolarmente della chimica nella seconda metà del secolo XVIII*, e colla ristampa della Memoria originale del Guglielmini: *Riflessioni filosofiche dedotte dalle figure dei sali* (1688); e ne discorre brevemente.

Pure in omaggio offrono: il Socio Jadanza la 2ª edizione del suo *Trattato di Geometria pratica*, e il Socio Guidi un suo opuscolo: *Il " frettage " nelle travi inflesse.*

Per la stampa negli *Atti* son presentate le seguenti Note:

C. F. Parona, *Per la Geologia della Tripolitania. Appunti paleontologici;*

Salvatore Cherubino, *Sulle curve iperellittiche con trasformazioni birazionali di 2ª specie in sè*, dal Socio Jadanza;

Angelo Scribanti, *Le azioni taglianti e flettenti nella nave sull'onda,* dal Socio Guidi.

Fra le *Memorie* vengono accolte, con successive votazioni unanimi, questi altri lavori, presentati dagli Autori:

I. Guareschi, *Ruggero Bacone. Il metodo sperimentale e Galileo;*

T. Salvadori, *Notizie storiche intorno alla collezione ornitologica del Museo di Torino;*

O. Mattirolo, *Sopra 12 avvelenamenti per " Veratrum album " Linn. avvenuti per scambio con " Gentiana lutea " Linn.*

Infine il Socio Foà offre, ancora per le *Memorie*, uno scritto del Dottor Carlo Gamna intitolato: *Ricerche sperimentali sulla funzione emolitica ed ematopoetica della milza.* Riferiranno su di esso i Soci Foà e Fusari.

LETTURE

PLACIDO TARDY

Cenno necrologico del Socio E. D'OVIDIO.

Placido Tardy, nostro Socio corrispondente sin dal 1854, si è spento il primo giorno di questo novembre in Firenze dopo rapida malattia, mentre la saldezza della sua fibra ci lusingava di poterlo salutare centenario fra non più che due anni, così come nel 1907 il congresso della Società italiana pel progresso delle scienze, adunato in Parma, lo salutava Nestore dei matematici italiani.

Nacque egli in Messina il 23 ottobre 1816. Studiò matematica prima nel Collegio di Lucca, poscia a Milano con Gabrio Piola, e più tardi a Parigi frequentando i corsi del Libri, del Liouville e del Poisson. Nel 1841, in seguito a pubblico concorso, fu nominato professore di Calcolo infinitesimale nell' Università di Messina. Ma dopo gli avvenimenti politici del 1848 egli abbandonò l'isola nativa, e si recò a Genova. Ivi fu nel 1851 assunto a professore, e poi anche a direttore degli studi, nella Scuola della Marina militare sabauda, insegnandovi prima Analisi e dal 1868 Meccanica razionale. Nel 1859 ebbe anche la cattedra universitaria di Calcolo infinitesimale, che tenne con gran lustro.

Verso il 1854 il Governo borbonico aveva bensì tentato con larghe offerte di richiamarlo in Sicilia; ma egli rifiutò di patteggiare con l'oppressore della sua patria.

Dell'Ateneo ligure fu anche Rettore autorevole. Da ultimo, nel 1882, già avanti negli anni e rimasto vedovo di quella eletta e colta signora che fu sua consorte, lasciò l'insegnamento col titolo di professore emerito, e si ritirò a Firenze presso i suoi amati nipoti signori Cini. Ivi raccolse la sua scelta biblioteca, che per sua provvida volontà rimane ora a vantaggio del pubblico; ivi trascorse serena la sua vecchiaia, solo crucciato dell'indebolirsi della vista, che gl'impediva di profondarsi nelle predilette letture.

Le pubblicazioni matematiche del Tardy sono quasi tutte sparse a non brevi intervalli negli " Annali di Matematica ", nei volumi della Società dei XL, nel " Giornale di Battaglini ", nelle " Nouvelles Annales de Mathématiques ", nei nostri " Atti ". La prima credo sia del 1843, l'ultima del 1904. Più frequenti s'incontrano in quel periodo che è caratterizzato dalla instaurazione degli " Annali di Matematica ", la quale fu gran merito di una nobile schiera di scienziati d'ogni parte d'Italia: Tortolini, Brioschi, Betti, Genocchi, Tardy, e qualche altro, ai quali si accompagnarono Cremona, Casorati, Beltrami, Battaglini, Codazzi ed altri.

Non sono in grado, per la strettezza del tempo, di fare un'analisi delle accennate pubblicazioni, nè presumo che l'elenco che unisco a queste brevi parole commemorative sia completo. Debbo limitarmi a dire che le *Memorie* e *Note* del Tardy in complesso han tratto all'Idrodinamica, all'Analisi algebrica e infinitesimale, alla Teoria dei numeri, sia risolvendo nuovi problemi, sia perfezionando soluzioni già date; che l'Autore rivela in queste scritture, come spiccavano nelle sue lezioni, profonda dottrina, varia erudizione, maestria nel maneggio dei metodi analitici, e a volte novità di concetti.

L'alto valore scientifico del Tardy apparve fin dai giovani anni, e fu degnamente pregiato da quegl'insigni uomini che ho testè nominati, i quali lo vollero amico e cooperatore nella meritoria impresa di diffondere e coordinare le ricerche matematiche in Italia. E di buon'ora egli fu ascritto alla Società italiana dei XL, ai Lincei, alla nostra Accademia, all'Istituto Lombardo e ad altri sodalizî scientifici.

All'omaggio dovuto a Placido Tardy come esimio scienziato si associa il profondo rimpianto dell'Uomo veramente

mirabile pel fervido amor patrio, per la profonda bontà, per la signorile cortesia, per la rara modestia. Chi lo conobbe non potè non venerarlo ed amarlo, e custodirà la sua nobile imagine, dolce nella memoria.

Elenco delle pubblicazioni di P. TARDY

Ricerche sulle funzioni discontinue (Messina, 1843).
Sopra alcuni punti della teoria dei liquidi (Firenze, 1847).
Alcune osservazioni sopra una nuova equazione d'Idrodinamica (" Annali di scienze matematiche e fisiche ", 1850).
Sulle equazioni alle differenze finite (" Ibid. ", 1850).
Trasformazione di un prodotto di n fattori (" Ibid. ", 1851).
Sulla risoluzione algebrica di talune equazioni (" Ibid. ", 1851).
Sopra un teorema di poligonometria (" Ibid. ", 1852).
Sui differenziali a indice qualunque (" Annali di matematica pura e applicata ", 1858).
Sulle derivate di ordine superiore delle funzioni composte (" Giornale di matematiche ", 1864).
Formole relative ai coefficienti binomiali (" Ibid. ", 1865).
Sulle quadrature (" Memorie dei XL ", Modena, 1865).
Sopra alcuni teoremi aritmetici (1869).
Formule de Leibnitz (" Nouvelles Annales de Mathématiques ", 1869).
Teoremi aritmetici (" Annali di matematica ", 1870).
Relazioni fra le radici di alcune equazioni fondamentali determinanti (" Atti dell'Accademia di Torino ", 1884).
Sulle serie aritmetiche di numeri interi. Nota I e II (" Ibid. ", 1904).

L'opera scientifica di Adolfo Lieben in Italia.

Cenni commemorativi del Socio L. BALBIANO.

Adolfo Lieben, nato il 3 dicembre 1836 a Vienna, morì in quella capitale il 6 giugno 1914. Nei settantotto anni di sua vita terrena, esplicò l'attività del suo ingegno multiforme in diverse parti d'Europa — in Germania, nel laboratorio del Bunsen ad Eidelberga — in Francia, nel laboratorio del Wurtz a Parigi — in Italia, nel laboratorio del Cannizzaro a Palermo e per quattro anni in questa nostra Università, dove insegnò chimica dal 1867 al 1871 succedendo nella cattedra a Raffaele Piria. Chiamato in seguito all'Università tedesca di Praga, rientrò finalmente nel 1875 nella sua città nativa e dettò lezione fino al 1906 nell'Università, anno in cui lasciò l'insegnamento per avere raggiunto il settantesimo d'età che la legge dell'impero austro-ungarico impone come limite massimo di attività professorale.

Ventenne appena si addottorò presso la facoltà filosofica di Eidelberga discutendo la tesi " Sull'omogeneità delle soluzioni „, di cui la parte sperimentale fu eseguita sotto la direzione del Bunsen. Nel primo periodo della sua carriera egli percorse i principali paesi d'Europa, rendendosi così padrone delle loro lingue in modo da pensare nelle medesime. La conoscenza dei principali idiomi è un organo essenziale di coltura per chi aspira a percorrere il campo della ricerca e sarebbe certamente un modo più pratico di utilizzare l'energia psichica l'accordo su una lingua universale per le pubblicazioni scientifiche, ma l'ora attuale non è certo propizia all'avverarsi di questo sogno a cui convergono sotto la guida dell'Ostwald — l'apostolo dell'energetica — molti brillanti ingegni delle diverse parti del mondo.

Il periodo dell'attività scientifica di Lieben durò dal 1855 al 1909 — più di mezzo secolo — e si manifestò principalmente in ricerche sperimentali nel campo della chimica organica. Iniziatosi, ancora studente, coll'osservazione che il pulviscolo atmosferico è l'agente determinante la rapida precipitazione dell'eccesso del soluto nelle soluzioni sovrasature, il ciclo si compie coll'osservazione che la forma gialla del sale d'argento dell'acido levulinico è dovuta ad una sostanza bruna dal comportamento enzimatico, prodottasi nell'idrolisi del sale primitivo bianco.

In questo mezzo secolo di lavoro scientifico, egli portò il contributo del suo intelletto, eminentemente analitico, alla risoluzione di importanti problemi strutturali, e fu con giusto orgoglio riconoscente che i suoi allievi della scuola chimica — da lui fondata nell'Università di Vienna — poterono nel giorno del suo giubileo professorale annunziare al mondo scientifico plaudente, che dal 1875 al 1906, più di 370 memorie erano uscite da quella scuola, in gran parte opera personale del Maestro, altre da lui suggerite e sempre ajutate dal suo consiglio (1). Dell'opera complessiva del nostro Socio, mi permettano i colleghi dell'Accademia di occuparmi in modo particolare di una parte — quella che il Lieben compì in Italia e specialmente in questa nostra Università — e di farne risaltare, con riconoscenza di discepolo, l'importanza per la teoria e per la pratica.

*
* *

Nel 1861 — entusiasta delle idee strutturistiche svolte dal Kekulé nel congresso di Karlsruhe dell'anno prima — ritornato a Vienna nel laboratorio di Schrötter — e meditando sulla struttura della glicerina dimostrata da Wurtz — egli emise un'idea semplice e feconda sulla costituzione degli ossiacidi del fosforo, idea fondata sulla diversa basicità di questi acidi e sull'ammissione di un radicale trivalente comune, il “ fosforile „.

---

(1) Rilevo dall'articolo di S. Zeisel stampato nella “ Chemischer Zeitung „, 30 juni 1914, pag. 831.

La modestia del giovane chimico riassumeva le sue conclusioni colle seguenti parole: “ *sono ben lungi dal credere che le idee suesposte siano l'ultima soluzione del problema della costituzione degli acidi del fosforo* „. Ebbene, da cinquantatrè anni s'insegnano nelle scuole e si stampano nei trattati di chimica di tutto il mondo le formule strutturali proposte dal Lieben.

* * *

Dal congresso di Karlsruhe il nostro chimico viennese ritornò convinto dalla parola chiara, efficace, colla quale il Cannizzaro invitò i chimici a prendere la legge di Avogadro per base della determinazione dei pesi delle molecole, discutendo ed eliminando le cause che dal 1811 al 1860 avevano impedito di apprezzare ed adottare il principio generale dello scienziato torinese.

Fra queste cause — principalissima — era la densità anormale di alcuni vapori, ed il più accanito oppositore, il Saint-Claire Deville, aveva fornito egli stesso al Cannizzaro il mezzo sperimentale — colla scoperta del fenomeno della dissociazione — per eliminare il principale ostacolo alla generalizzazione della legge suddetta.

Sperimentatore abilissimo e sagace, il chimico francese opponeva nuovi fatti per intralciare l'applicazione della legge di Avogadro e fra il Deville ed il Than, chimico ungherese, era nata una controversia sperimentale sul fenomeno che avviene nel mescolare nei rapporti molecolari acido cloridrico ed ammoniaca preventivamente riscaldati alla temperatura di 350°. Il primo, notando uno sviluppo di calore, sosteneva l'avvenuta parziale combinazione fra le due sostanze a quella temperatura, e concludeva pel rigetto puro e semplice dell'ipotesi. Il secondo invece negava un ulteriore innalzamento di temperatura, perciò non avvenuta combinazione e quindi dissociazione completa e l'anormalità della densità, dovuta al miscuglio, non infirmava la legge.

Con una nota scritta da Palermo e presentata dal Wurtz nella seduta del 27 gennaio 1865 alla Società chimica di Pa-

rigi, Lieben discute i risultati delle esperienze del Deville e con acume critico ammirevole fa intervenire il concetto introdotto alcuni anni prima dal Berthelot sulle reazioni limiti nel caso dell'eterificazione. Nel 1894 l'inglese Baker dimostra che una traccia di acqua influisce cataliticamente sull'andamento della dissociazione del sale ammonico. Il Deville adoperava nelle sue esperienze gas cloridrico ed ammoniaca non perfettamente disseccati ed era l'acqua, catalizzatrice a seconda della quantità, che interveniva nel fenomeno nel senso che il Lieben aveva intuito.

Su questo argomento delle densità gassose anormali egli ritornò nel 1880, quando le importanti e geniali ricerche di Vittorio e Carlo Meyer sulla diminuita densità del cloro determinata a temperatura elevata fra 1240° e 1567°, avevano per un momento fatto balenare ai due chimici tedeschi l'idea della complessità di questo elemento, risuscitando la vecchia ipotesi del Murio, così cara al Berzelius. Anche in questa discussione egli portò la nota critica giusta, equilibrata, ed il suo giudizio — basato sulla dissociazione molecolare e relativo equilibrio fra atomi e molecole nel sistema esposto all'elevata temperatura — venne subito accolto con favore da tutti i chimici.

***

Dal congresso di Karlsruhe fra il Lieben ed il Cannizzaro era nata una cordiale amicizia che durò, intensificandosi cogli anni, fino al passaggio al di là nel mistero degli attori. Il Cannizzaro, che molte volte ebbe la mano felice nella scelta dei suoi collaboratori, invitò il Lieben a venire nel laboratorio di Palermo, offrendogli, a nome del Ministero italiano, un posto nell'insegnamento superiore, posto che il Lieben occupò nell'anno accademico 1863-64.

In quel frattempo il giovane chimico si accingeva ad un lavoro sperimentale di gran lena, che ebbe il suo completo svolgimento nel periodo di sua dimora torinese.

Nell'azione esauriente del cloro a freddo sull'etere etilico, egli era riuscito ad ottenere un etere biclorurato che, col suo

amico Bauer, aveva fatto reagire coi composti organo-metallici dello zinco, nell'intento di sostituire l'alogeno col radicale alchile. In prima fase di reazione la sostituzione avviene a metà e dal composto monoclorurato, l'azione dell'acido iodidrico sostituisce il cloro collo jodio ed il composto jodurato diviene atto alla sostituzione coll'ossidrile mediante l'ossido di argento. Si presentò in tal modo al ricercatore un metodo generale di sintesi di alcoli, che permetteva di risalire nella serie di questi composti a termini più ricchi in carbonio. Nel caso speciale dell'etere etilico ottenne un alcool a *quattro* atomi di carbonio, differente da quello che il Wurtz aveva poco tempo prima isolato dalla flemma dell'alcool greggio ed identico a quello ottenuto dal De-Luynes dall'eritrite.

In quel tempo la storia delle isomerie degli alcoli era un argomento molto intricato. Mancavano molti termini per completare le serie; i loro prodotti di ossidazione erano non completamente studiati e male definiti; arrivò quindi, guida preziosa nel labirinto, l'ingegnosa idea del Kolbe di riferire la costituzione di questi composti, che formavano una serie importantissima, al primo termine, all'alcool metilico o spirito di legno e farne dei derivati di sostituzione del medesimo. Il concetto intuitivo del Kolbe doveva però ricevere la sanzione sperimentale e qui si presenta nella sua piena luce il merito del Lieben e l'importanza del lavoro che lo occupò quasi esclusivamente nel suo soggiorno nella nostra città.

Il Kolbe, a seconda del numero degli atomi d'idrogeno paraffinico dell'alcool metilico sostituiti, aveva diviso gli alcoli in primari, secondari e terziari e sviluppando questo concetto al lume del concatenamento atomico ideato dal Kekulé, per la serie degli alcoli saturi a *quattro* atomi di carbonio si poteva prevedere l'esistenza di quattro termini isomeri, non parlandosi ancora in quel tempo di isomerie spaziali.

Tre di questi composti erano stati isolati o preparati; mancava il quarto isomero previsto dalla teoria " l'alcool butilico normale, il propilcarbinolo „. Lieben si accinse alla sua preparazione. Giunto nel laboratorio di Torino vi trovò un uomo modesto, ma di abilità sperimentale grandissima — Antonio Rossi, che gli succedette poi nella cattedra — il quale pure coltivava con attività e successo il campo di ricerca degli alcoli e già

era passato dall'alcool etilico all'omologo superiore e nella serie parallela, dall'alcool amilico di fermentazione era salito all'alcool caproico a sei atomi di carbonio. Le energie dei due sperimentatori si associarono e dalla loro somma scaturì quel complesso di lavoro sperimentale sugli alcoli normali che anche oggi viene citato come modello in tutti i trattati di chimica organica e che formò il fondamento sul quale altri chimici — degno di speciale menzione il Krafft — poterono stabilire la costituzione degli acidi a diciotto atomi di carbonio come lo stearico ed oleico, che si trovano nelle sostanze grasse così sparse e necessarie nella vita animale e vegetale.

La condotta sperimentale di questo lavoro è — riportata al tempo in cui fu eseguito — semplicemente meravigliosa. La preparazione d'ingenti quantità di acido butirrico di fermentazione puro — sostanza che allora il commercio non offriva che a prezzo elevato ed anche in piccola quantità — è un'operazione difficile e noiosa per le esalazioni di odore poco aggradevole che nel periodo fermentativo si sprigionano. La costanza dei due chimici vinse tutte le difficoltà e da quel laboratorio installato nel chiostro del convento di S. Francesco da Paola, ristretto di locali umidi e scuri, provvisto di dotazione assai modesta, uscì il lavoro che costituisce una delle pietre miliari sperimentali della strutturistica kekulejana della chimica del carbonio. Ciò dimostra che i fattori principali per la creazione d'importanti lavori non sono nè l'ampiezza e comodità di locali o l'esuberanza di mezzi pecuniari dei laboratori, ma si richiede solo studio, costanza ed una certa dose di energia psichica in chi dirige l'istituto.

***

Nello stesso periodo torinese Lieben incidentalmente scoprì una reazione dell'alcool etilico, che acquistò in seguito una certa importanza, quantunque non sia caratteristica di questa sostanza, ma comune a molti composti organici.

Trattando una soluzione — anche diluitissima — di alcool con poche goccie di soluzione acquosa di idrato potassico e sovrasaturando con soluzione di iodio nel ioduro potassico, si

ha deposito di lamelle gialle, caratteristiche di iodoformio. Con questa reazione egli potè dimostrare che dopo mezz'ora dall'ingestione di vino, una piccola quantità di alcool si riscontra nelle urine del bevitore, alcool che scompare dopo due o tre ore dall'introduzione nell'organismo.

L'importanza tecnica di questa reazione — che passò nella letteratura della chimica analitica col nome di " *reazione del Lieben* „ — sta nel fatto ben accertato da Krämer, che l'alcool metilico purissimo in quelle condizioni non dà jodoformio, mentre l'acetone — una sostanza che inquina sempre l'alcool metilico commerciale — lo dà. Ora l'industria delle materie coloranti del catrame dal carbon fossile, per metilare l'anilina deve impiegare alcool metilico che non contenga acetone, perciò la *reazione di Lieben* serve a stabilire se l'alcool è privo o no di questo prodotto dannoso.

L'osservazione di Lieben, pubblicata negli Atti della nostra Accademia nel 1869, fu perciò il germe di una serie di studi analitici — quello citato del Krämer, quello del Messinger — che resero quantitativo il processo ed è questa la miglior prova della sua importanza.

* * *

Rientrato nel 1871 in patria egli continuò ed allargò le ricerche sugli alcoli normali e nel periodo viennese, cominciato col 1875, ripigliò lo studio dei prodotti di condensazione delle aldeidi, uno dei primi problemi col quale aveva iniziato la sua carriera di ricercatore.

L'azione delle soluzioni saline, dotate di debole affinità, sull'aldeide, gli aveva fatto scoprire nel 1860 un prodotto di condensazione che il Kekulé, nel 1869, dimostrò essere l'aldeide crotonica. Lieben indagò in tutti i sensi questa reazione, specialmente dal punto di vista dell'aldolizzazione — fenomeno scoperto dal Wurtz — e ne ricavò risultati importanti. Però il lavoro di maggior interesse che produsse nel periodo di attività viennese, fu quello sull'acido chelidonico — un acido che si trova nel " *Chelidonium majus* „ il favagello, e che in seguito allo studio analitico fatto col suo allievo Haitinger, di-

mostrò appartenere al gruppo dei composti eterociclici e propriamente essere un derivato del Pirone.

La conclusione analitica di questo lavoro venne splendidamente confermata colla sintesi di questo acido interessante fatta dal Claisen nel 1891. I risultati sintetici brillano agli occhi del pubblico — anche dotto — di luce più viva e gaia, che quelli lunghi e pazienti dell'analisi, ma lo storico imparziale non deve lasciarsi abbagliare e con coscienza, esercitando la critica, deve mettere in evidenza e far risaltare il merito dei due tipi di ricerca.

Il lavoro analitico, che precede il sintetico, per stabilire la costituzione di una sostanza naturale, richiede una somma di energia psichica superiore a quella del sintetico, al quale ha tracciato la via. La sola analisi lascia però nell'animo dello scienziato un dubbio sulla verità, dubbio che viene disperso colla conferma della sintesi; perciò si spiega la tendenza umana di dare — specialmente nel campo di ricerca chimico — maggior importanza alla sintesi che all'analisi, perchè l'uomo è sempre avido di quello che ritiene verità ed aspira vederla nella sua nudità sublime.

* * *

La caratteristica principale del lavoro scientifico del Lieben è la *schiettezza* veramente ammirevole. Dalla sua opera emana un profumo di verità che riposa. Nella scienza chimica tedesca primeggia la qualità che suol chiamarsi " *profondità* ". Il chimico tedesco quando affronta un argomento lo scruta in ogni sua parte finchè lo sviscera e costruisce un edifizio completo, armonico, di quanto chimici di altre nazionalità hanno soltanto abbozzato. Così Lieben ha sviscerato e completato diversi capitoli della storia delle combinazioni del carbonio. I capitoli degli alcoli, delle aldeidi, dei glicoli, trovarono nel nostro Collega uno storico sperimentale attivo, efficace, profondo.

Se le qualità dello sperimentatore assegnarono al nostro Socio un posto onorevole nella storia della ricerca, le sue qualità di Maestro coronarono l'opera e fecero di Lui un uomo di scienza completo. Parlatore facile e piano della nostra lingua

pronunciata con un leggero accento esotico che suonava all'orecchio come una carezza, egli era sopratutto convincente, perchè evitava con ogni cura di esporre le sue idee in modo dogmatico, indizio per lo più d'ignoranza. Da guida esperta portava l'uditorio alla visione completa del paesaggio facendone ammirare la bellezza, la grandiosità, e con piede sicuro indicava il tortuoso e difficile cammino da percorrere. Nelle sue lezioni — frutto di lunga meditazione — insegnava le ultime scoperte della scienza e sapeva far nascere negli uditori intelligenti il desiderio della risoluzione di questioni che si presentavano ancora con tratti indecisi, sfumati, sull'orizzonte. Discuteva con logica stringente le diverse soluzioni di problemi sperimentali e coll'analisi e sintesi infondeva nell'ascoltatore la fede e l'entusiasmo necessari alle future conquiste.

Tale somma di sapere era esattamente valutata dai discepoli, che alla sua partenza dall'Università di Torino vollero manifestargli, con una pergamena artisticamente miniata e con un'epigrafe dettata dal professor Leviriero, il loro amore, la loro riconoscenza, il loro rincrescimento nel distacco. Ed Egli ne fu gradevolmente commosso e conservò sempre di questa nostra patria, di questa nostra Università, il più grato ricordo.

La nostra Accademia, che lo elesse Socio corrispondente fin dal 1892, deplora oggi il passaggio nel mondo dell'ignoto dell'Uomo che nella vita la onorò.

Per la Geologia della Tripolitania.

Appunti paleontologici del Socio C. F. PARONA.

Per incarico dell'On. Ministro delle Colonie ebbi occasione nello scorso anno di fare delle ricerche geologiche nella Tripolitania settentrionale, insieme cogli ingegneri S. Franchi e C. Crema del R. Ufficio Geologico, pure membri della Commissione per lo studio agrologico della nuova Colonia. I risultati, in quanto interessavano l'agrologia, obbiettivo principale della Missione, furono riassunti nella Relazione presentata al Ministro; ed altre notizie d'ordine stratigrafico e morfologico furono comunicate con cenni preliminari alla Società Geologica Italiana (1). Con questa nota mi propongo di dare informazioni sommarie sulle faune fossili che si presentano nei terreni mesozoici del Gebel tripolitano e di stabilirne l'età.

Le indagini future lungo la scarpata del Gebel e nei valloni che lo solcano verificheranno se vi sono altri orizzonti geologici, e quali sono, fra i due piani ora noti, e cioè del Trias dei rilievi pregarianici e del Cenomaniano-Turoniano esteso e potente nell'altipiano e sul suo ciglione verso la Gefara.

Sull'esistenza di altri orizzonti del Cretacico, precenomaniani, non è il caso per ora di insistere, perchè i dati raccolti sono troppo incerti. Limitiamoci quindi a considerare i caratteri paleontologici dei piani accertati del Triassico e del Cretacico.

---

(1) Commiss. per lo studio agrologico della Tripolitania, *La Tripolitania Settentrionale*, vol. I e II, Relaz. a S. E. P. Bertolini Min. delle Colonie (1 carta e XLVI tav.), Roma, 1913; C. Crema, S. Franchi, C. F. Parona, *Sulla serie dei terreni della Tripolitania Settentrionale*, " Boll. Società Geol. Ital. ", vol. XXXII, 1914. Vedi anche: A. Stella, *Topogr., Geol. ed acque nel Gebel tripolitano* (La Miss. Franchetti), 1914.

Trias. — I rilievi pregarianici più vicini ad Azizía, a sud e a sud-ovest, risultano di una successione regolare, concordante, di banchi di calcari ed arenarie, variabili di colore e struttura, con lievissima pendenza a sud-ovest. Presso la sommità dei colli più elevati si trovano dei banchi, a grossi nuclei di selce scura e con interstrati quarzitici, che sporgono a cordonate o in balze assai evidenti. Sonvi calcari compatti fossiliferi con brachiopodi, o finamente oolitici con non rari entomostraci (*Bairdia*), e con forme nane di gasteropodi e di bivalvi; ma invano tentai di estrarre esemplari di fossili determinabili. Notevoli fra i calcari oolitici quelli con teutloporella (*Teutloporella herculea* (Stopp.) del Ladinico superiore). Le arenarie quarzitiche e le quarziti assumono in generale prevalente sviluppo alla base dei colli; ad. es., nei dossi di Fonduc Seebani.

Le quarziti e i calcari quarzitici affiorano pure al piede del colle di Azizía, con altri calcari gialli, zonati, cui seguono dei calcari giallastri scuri a crinoidi, o con traccie di bivalvi, fino alla sommità (m. 158), dove si notano dei calcari scuri con filoncelli e piccoli accentramenti di materiali ocracei e con sottili interstrati nei quali la roccia assume una particolare struttura a grumi contorti giallo-chiari. I detriti avutisi dal pozzo trivellato, aperto nel cortile del Castello di Azizía, e che fu spinto alla profondità di m. 63, dimostrano che la serie del colle, con calcari compatti, giallastro-scuri o cerei, più o meno quarzitici, si continua nel sottosuolo fino alla profondità accennata, cioè fino a pochi metri sul livello del mare.

Fra i rilievi pregarianici da noi visitati, due presentano speciale interesse: quello che a S-O di Azizía ci fu indicato col nome di Gleb-Aziz e il Kaf Batús, forse il più elevato (m. 326), in vista a S-E di Azizía, a destra della strada diretta all'Uadi Megenin ed all'U. Milgha per Tarhuna. Il Gleb-Aziz, visto dalla pianura ondulata ad ovest di Bir Kuka, si presenta perfettamente conico ed emergente sui rilievi attigui; dossi allungati e cupolari come scudi di testuggini, che è la forma dominante nei rilievi pregarianici. La serie dei terreni, con banchi fossiliferi, vi è la stessa che ritroveremo al K. Batús; e però noteremo soltanto che alla base del Gleb-Aziz si incontrano dei calcari massicci e delle arenarie, che sembrano discordanti sotto la serie sovrastante, forse in dipendenza di un affioramento di

roccie a struttura porfirica in stato di profonda decomposizione, con zone e vene di materiale terroso, bianco caoliniforme e di roccia diasprina di color rosso-vivo.

Il K. Batús ha forme più rupestri, ed è pure costituito di una successione regolare, concordante, di banchi e di strati, con prevalente leggiera inclinazione a S-O, con accenni in qualche punto a disposizione cupolare. Alla base stanno delle finissime arenarie quarzose e delle quarziti giallastre o rossastre, e alla sommità dei calcari scuri, compatti, selciosi, con grossi arnioni e lenti di selce nerastra, come a Gleb-Aziz e in tutti i rilievi più elevati della regione. Fra le arenarie e quarziti della base e i calcari selciosi si interpone una serie di banchi calcari, o calcareo-marnosi, prevalentemente giallastri, con interstrati scistosi, formanti nell'insieme, sul fianco montuoso, delle balze a gradinata. Inferiormente, sopra le arenarie, stanno dei calcari con minutissime lumachelle e dei calcari marnosi, scistosi, pure con piccoli fossili e con prevalenza di naticidi e di una forma affine, se non identica, alla *Natica gregaria* Sch.; superiormente, sotto i calcari selciosi, continuano altri calcari compatti a piccoli crinoidi, o scistosi, e questi ricchi di fossili, specialmente di forme nane di bivalvi e di gasteropodi. Ecco un saggio di questa fauna:

Dentalium undulatum Münst.
Coelostylina Slotteri (Klipst).
Eustylus sp.?
Worthemia subgranulata (Münst.)?
Cuspidaria alpis-civicae Bittn.
Cercomya? longirostris (Stopp.).
Myoconcha Wöhrmanni Waagen?
Myophoria vestita v. Alb.
Myophoria Wöhrmanni Bittn.
Palaeoneilo elliptica (Goldf.).
Leda percaudata Gümb.
Nucula strigillata (Goldf.).
Modiola Raibliana Bittn.
Modiola Paronai Bittn.?
Avicula Cortinensis Bittn.
Cassianella decussata (Münst.).

Mysidioptera Klipsteiniana Bittn.?
Terquemia obliqua (Münst.)?
Plicatula filifera Bittn.?

È una fauna del Trias superiore, con qualche elemento di quella del Retico, che presenta le più sicure corrispondenze cogli orizzonti alpini di S. Cassiano e di Raibl, con quelli appenninici delle Pietre Nere (Gargano), di Giffoni (Salernitano) e del Monte Judica in Sicilia. Il Trias superiore di tipo alpino si estende dunque a S-E, oltre i limiti dell'Italia meridionale e delle estremità, anche insulari, della Penisola Balcanica.

Nella serie di questi rilievi pregarianici abbiamo pertanto certamente rappresentati diversi membri del Trias, dalle quarziti inferiori a questi strati fossiliferi superiori, che comprendono anche probabilmente i rappresentanti del Retico. E non è fuor di luogo il ritenere che i calcari selciosi sovrastanti rappresentino qualche membro del Giura-Lias. Ricordiamo a questo proposito che, secondo PERVINQUIÈRE, sul confine tunisino-tripolitano, la serie sottostante al Cenomaniano, è costituita dal Giurassico e dal Trias, medio e inferiore (1).

Intrusioni di roccia a struttura porfirica esistono anche al K. Batús. Ne osservammo sul fianco occidentale un sottile dicco, che, diretto verticalmente, tagliava la serie stratificata, scomparendo sulla sella che sta a nord della punta più elevata del monte.

Il collega ed amico prof. E. ARTINI, che studiò i campioni di questa roccia da noi comunicatagli, la definì come una *Monchiquite* camptonitica ad augite e orneblenda, cioè come un tipico lamprofiro theralitico (2).

La riconosciuta età triassica dei terreni affioranti ai piedi del Gebel chiarisce la costituzione del sottosuolo della Gefara, almeno nella parte prospiciente il Gariàn. Il tavolato della pianura, coperto dal mantello quaternario e recente, è qui formato

---

(1) L. PERVINQUIÈRE, *Sur la Géol. de l'Extrême-Sud Tunisien et de la Tripolitaine*, " Bull. S. G. d. Fr. „, t. XII, 1912.

(2) E. ARTINI, *Note di Petrografia libica*, 1° *Monchiquite di Kaf Batús* (1 tav.), " Rend. d. R. Ist. Lomb. di Sc. e Lett. „, XLVII, 1914.

dai terreni precretacici, che al piede della scarpata scompaiono sotto i terreni più recenti dell'altipiano. Non parmi quindi ammissibile l'idea che il limite fra Gefara e Gebel coincida con una linea spezzata di frattura e di salto, come si potrebbe arguire dal repentino dislivello ch'esso segna; per quanto non si possa escludere l'esistenza di fratture in rapporto coi massicci a fonoliti di Kaf Montrus, K. El Khaléf, K. Tekut, e coi numerosi filoni basaltici.

Creta. *Cenomaniano*. — La presenza del Cenomaniano fossilifero nel Gebel tripolitano può dirsi nota fin dal 1852, da quando Beyrich, riferendo sui fossili raccolti da Overweg, fece cenno degli strati a *Exogyra* della cascatella di Tarhuna (*Scersciara*): infatti le marne arenaceo-scistose, che formano la base del gradino e la platea sotto la cascata, sono gremite di esemplari della *Ex. columba*, alla quale si associano rari esemplari di *Exog. flabellata* (1) e di *Heterodiadema libycum*. La scoperta di numerosi giacimenti fossiliferi ha ora dimostrato che il Cenomaniano, esteso e ricco di fossili in Tunisia, lo è pure in Tripolitania. Risulta di terreni a tinte forti e vivaci, gialle e rosse o violacee specialmente, con prevalenza di marne, arenarie quarzose spesso marnose o porose e d'apparenza tufacea, di calcari, talora dolomitici, terrosi o compatti, cristallini ed anche marmorei, i quali non di rado hanno i caratteri dei depositi di scogliera.

Segnatamente nella Msellata, nei dintorni di Homs e di Gusbat, i giacimenti fossiliferi cenomaniani sono numerosi e notevoli per ricchezza e varietà di fossili. Presso Homs sono da ricordare i calcari con grossi banchi ad orbitoline (*Orbitolina bulgarica* Desh., *Orb. Paronai* Prev.) e strati con *Radiolites Lefebvrei* e *Exogyra flabellata* delle cave dell'Uadi Lebda, ed i calcari con *Exogyra columba* e *Ichthyosarcolites triangularis*, delle cave dell'Uadi Zennár, sovrastante all'orizzonte cenomaniano più basso, finora noto, dei calcari grigi con *Himeraelites* (probabilmente *Him. Douvillei* Di Stef.).

---

(1) Vedi anche: C. De Stefani e M. Sforza, *Creta sup. da Orfella al Gebel-Soda in Tripolitania*, " Rend. d. R. Acc. d. Lincei ", 1913, nota a pag. 744.

Più abbondanti sono i fossili nei giacimenti esplorati dall'ing. FRANCHI nel territorio di Gusbat. La serie nella collina della Gálaa, o Castello Spagnuolo, prossimo all'abitato, presenta uno strato a *Sphaerulites foliaceus*, cui segue una alternanza di calcari e marne arenacee con *Exogyra columba*, *Ex. flabellata* ed echinidi, con *Nerinea gemmifera* e *N. cochleaeformis*, le quali sono assai numerose sul cono terminale della Gálaa. La successione di strati colle stesse nerinee si estende presso Glil, alle colline ad ovest di Sindara, a Bir Faranía e alle testate dell'Uadi Gheerim, con buon numero di altri fossili, fra i quali *Praeradiolites Biskraensis*, *Radiolites Peroni*, *Rad. Trigeri*, *Ichthiosarcolites bicarinatus*, *Neithea Shawi*; caratteristica l'abbondanza di una forma di *Aspidiscus* (*A. Franchii* n. f.), che ritengo diversa dal noto *Aspid. cristatus* e uguale all'*Asp.* cfr. *cristatus* Kön. (Dreger, 1892) di Corcha in Albania.

Il Cenomaniano continua nel territorio di Tárhuna. A K. Doga fu raccolta la caratteristica *Archiacia sandalina* con altri echini, e a Bu Tuil si ritrovò la lumachella a *Nerinea gemmifera*; presso la su ricordata cascatella di Scersiara, sopra il calcare marnoso a *Exogyra columba*, seguono strati di marne arenacee gialle con dubbie traccie di *Ichthyosarcolites* e di *Monopleura*, che ricompaiono anche più ad occidente sulle balze dell'Uadi Milgha presso lo sbocco nel piano. Il Cenomaniano persiste anche sotto il livello delle cascate; ed infatti l'ing. CREMA notò nell'Uadi Msaaba il ripetersi delle lumachelle a *Ner. gemmifera* e degli strati a *Exogyra* con banchi a *Pterocera Heberti*.

Del pari potente e largamente sviluppato si presenta il Cenomaniano nel Garián. La serie dei terreni costituenti la scarpata del Gebel si può esaminare agevolmente percorrendo la nuova strada aperta in trincea, che da Bugheilan (m. 361) sale a Sidì-Sames (m. 609). Alla base affiorano, dalla potente conoide alluvionale di Bugheilan, arenarie quarzose bianche, o intensamente colorate in rosso o in giallo, attraversate da frequenti filoni di roccie basaltiche. Soltanto nel valloncello ad est di Bugheilan si trovarono delle bivalvi (forse *Avicula*) indeterminabili; perciò resta a stabilire l'età di questa formazione, che, con passaggi a banchi di argilla ocracea, continua ad est e ad ovest della conoide lungo il piede del Gebel. Sulle arenarie si adagia, forse con leggiere discordanze, una successione di almeno

dieci orizzonti, dello spessore complessivo di circa 250 m., stratigraficamente concordanti, nella quale a diversi livelli si ripetono tipi litologicamente simili. Notevoli, perchè fossiliferi, sono al basso i banchi, giacenti poco sopra le arenarie, di calcari cristallini, grigi o giallognoli, con *Monopleura*, e oolitici con piccole bivalvi, in alto le arenarie gialle porose, con sabbie quarzose, indubbiamente cenomaniane, che formano il ciglione dell'altipiano. Attribuire tutta quanta la potente serie al Cenomaniano può sembrare cosa azzardata: sta tuttavia il fatto che la piccola bivalve dei calcari oolitici corrisponde alla *Corbula striatula* Sow. cenomaniana; sta inoltre la probabilità che qui, come sul confine tunisino e altrove in Tunisia, il Cenomaniano sia trasgressivo e si appoggi sul Giurassico e sul Triassico. In ogni modo coi dati che possediamo non c'è concesso di segnare un livello di passaggio a terreni precenomaniani e di presumere l'età di quest'ultimi.

Le arenarie cenomaniane del ciglione di Sidi-Sames si ritrovano con fossili meglio conservati presso El Tobbi, in corrispondenza del secondo gradino che si deve superare per giungere all'altipiano di Garián. Quivi i giri della nuova strada tagliano in molti punti la roccia in trincea (Alpini di Tolmezzo), ed allo stesso livello del giacimento di Sidi-Sames riaffiorano gli strati fossiliferi delle arenarie con *Exogyra flabellata*, *Neithea Shawi*, *Lima Itieriana*, *Trigonia Ethra*, *Cardita Forgemolli*, ecc., che si ritrovano pure nei valloni che da Garián scendono verso il Bu Gannusc, e sotto il castello alle origini della valle Rumana: negli strati superiori delle serie si rinvengono traccie di *Ichthyosarcolites*.

Un altro affioramento fossilifero s'incontra lungo la strada da Garián verso l'U. Arbaa per Assaba e Ifren; oltre Teghrinna la trincea (Alpini di Feltre) taglia dei calcari bianchi con acteonelle e monopleure (?), con passaggi laterali a calcare più compatto, brecciato, rosso. Al disopra stanno arenarie e calcari marnosi gialli in cui non sono rari i fossili mal conservati, e fra questi *Hemiaster Meslei*, *Aporrhais Dutrugei*, ecc. del Cenomaniano.

Con questa facies il Cenomaniano prosegue ad occidente oltre Ifren, e a Chescem Zarzur, nello sperone occidentale del vallone di Rumia a 15 km. da Ifren, ricompaiono i banchi con

Nerinea gemmifera. Così, durante l'esplorazione compiuta questo anno dalla Missione che ebbe a capo l'ing. FRANCHI, e della quale fece parte il dott. P. ZUFFARDI, si riconobbe l'estendersi degli stessi orizzonti fossiliferi nell'altipiano di Fassato (Mezzur-Giado), nei ciglioni sopra Gennaum, nel ripiano a sud di Tecut, nell'uadi Melca ed a Nalut, con prevalenza di marne sabbiose gialle o rossastre, con abbondanza di *Goniopygus Menardi*, *Hemiaster Batnensis*, colle solite exogire, con *Trigonia Ethra*, *Dosinia Delettrei*, *Tapes numidicus*, *Cardita Forgemolli*, *Mytilus* sp. (cfr. *Septifer tegulatus* (Müll.)), *Modiola Flichei*, *Anisocardia Papieri*, *Strombus Mermeti*, *Pterocera Heberti*, ecc., spesso con aspetto di lumachelle porose ad impronte di bivalvi e modelli di piccoli gasteropodi indeterminabili. Notevole in particolare la scoperta dell'orizzonte a *Neolobites Peroni* (Cenoman. sup.) a Tirict, ad oriente di Nalut.

Nell'insieme la fauna delle assise cenomaniane del Gebel tripolitano corrisponde a quella della *facies neritica* degli Hauts Plateaux della provincia di Costantina e della parte orientale dell'Atlante Sahariano, ed è abbastanza ricca, come appare dal seguente elenco:

Stromatopora n. ff. (Osimo).
Ellipsactinia sp.
Polytremacis stromatoporoides Th. et Per.
Aspidiscus Franchii n. f.
Parasmilia Edwarsi Coq.
Trochosmilia tetracycla Seg.?
„ *crassicostata* Coq.
„ *batnensis* Coq.
Salenia batnensis Per. et Gauth.
Heterodiadema libycum Cott.
Goniopigus Menardi Ag.
„ *Messaoud* Per. et Gauth.
Discoidea Jullieni Per. et Gauth.
„ *Forgemolli* Coq.
Holectypus cenomanensis Guér.
Pyrina crucifera Per. et Gauth.
Archiacia sandalina Ag.
Hemiaster Meslei Per. et Gauth.

Hemiaster batnensis Cop.
Terebratula biplicata Br.
Alectryonia carinata Lmk.
„ *syphax* Coq.
Exogyra olisiponensis Sharp.
„ *Delettrei* Coq.
„ *columba* Lmk.
„ *flabellata* Goldf.
Lima Itieriana Pict. et Roux.
Pecten cfr. *elongatus* Lmk.
Neithea Shawi Pervinq.
Avicula mytiloides Coq.
„ *atra* Coq.
„ *Serresi* Coq.
„ *cenomanensis* d'Orb.
Gervilleia cfr. *bicostata* Seg.
Modiola capitata Zitt.
„ *Flichei* Thom. et Per.
„ cfr. *flagellifera* Forb.
Modiolaria Zuffardii n. f.
Arca (Trigonoarca) diceras Ag.
Leda africana Coq.
Trigonia Beyrichi Krumb.
„ *Ethra* Coq.
Cardita Forgemolli Coq.
Astarte Seguenzae Th. et Per.
Monopleura sp. sp.
Himeraelites cfr. *Douvillei* Di Stef.
Ichthyosarcolites triangularis Desm.
„ *bicarinatus* (Gemm.).
Sphaerulites foliaceus Lmk.
Praeradiolites Biskraensis (Coq.).
Radiolites Trigeri Coq.
„ *Peroni* (Choff.).
„ *Lefebvrei* Bayle (in Peron).
Corbis Alapetitei Pervinq.
Cardium Saportae Coq.
„ *(Trachycard.) productum* Sow.
Anisocardia Papieri Coq.

Anisocardia aquilina Coq.
Tapes numidicus Coq.
Venus? Reynesi Coq.
Dosinia Delettrei Coq.
Liopista (Psilomya) ligeriensis d'Orb.
Goniomya cfr. *Mailleana* d'Orb.
Neaera Mazzocchii n. f.
Pholas sp.
Pleurotomaria sp.
Natica (Gyrodes) subexcavata Th. et Per.
Fossarus cfr. *neritopsoides* Blank.
Nerinea gemmifera Coq.
„ *cochleaeformis* Conr.
„ cfr. *incarata* Bronn.
Nerinella (Batroptyxis) sp.
Cerithium (Cimolithium) gallicum d'Orb.
„ „ *pustuliferum* Bayle?
Aporrhais? Dutrugei Coq.
Pterocera Heberti Tb. et Per.
Strombus? incertus (d'Orb.) in Pervinq.
„ *Mermeti* Coq. (=*St. crassiliratus* Whitfield, sec. Pervinq.).
Actaeonella Zaupariensis Choff.
Colostracon cfr. *Levisi* Fraas.
Neolobites Peroni Hyatt.
Lamna appendiculata (Ag.) (Bassani).
Lepidotus sp. (Bassani).

Ma l'esposizione dei caratteri paleontologici del Cenomaniano non sarebbe completa senza un cenno sulla microfauna e microflora, sulla diffusione dei foraminiferi e delle alghe calcari.

Calcari con alveoline e loftusie. — Nei calcari con *Aspidiscus* dei dintorni di Gusbat sono abbastanza comuni le miliolidi e le rotalidi e vi si riscontrano forme riferibili ai generi *Cuneolina*, *Meandropsina*, *Idalina*, ecc., ma specialmente caratteristici sono i rappresentanti del gen. *Alveolina* (non *Lacazina*), con tre forme distinte: due coi caratteri tipici del genere, l'altra colla struttura di *Loftusia*. Sono assai piccole, e rari si presentano gli esemplari visibili a piccolo ingrandimento ed isolabili

in modo da potervi riconoscere i caratteri esterni del genere. Una forma subsferica potrebbe essere riferita alla *Alveol. cretacea* d'Arch.; l'altra alveolina è invece allungata e da considerare come n. f. (*A. Osimoi*); la terza, a struttura di *Loftusia* (*Loft. libyca*), è ancora più distintamente fusiforme, e per la stessa sua piccolezza ben si distingue dalle forme giganti della Persia e della Siria. Le due alveoline tipiche si trovano insieme negli stessi campioni di calcare; ma ad esse non si associa la *Loftusia*, che le sostituisce in altri. Evidentemente non si tratta di giacitura in strati cronologicamente diversi, ma piuttosto di distribuzione in plaghe di fondo marino di costituzione alquanto diversa, in dipendenza dalla sedimentazione più schiettamente calcare, favorevole alle alveoline tipiche, oppure arenacea, che era appunto l'ambiente nel quale il nicchio cresceva con struttura arenacea, qual'è quella di *Loftusia*.

Calcari a periloculine. — Sono compatti, cerei, contengono una o più forme di *Liostrea*, che mi è impossibile di determinare perchè dispongo soltanto di frammenti, e una ricca e ben conservata fauna di foraminiferi con prevalenza di miliolidi e con esemplari di *Polystomella* e *Calcarina* (?). Caratteristica sopratutto una grande *Periloculina*, disseminata a migliaia di esemplari, come minuti grani di miglio, sulla superficie del calcare delicatamente erosa dall'acqua o dal vento. I migliori campioni si trovano su certi blocchi delle rovine di Leptis Magna, dove anche si raccolgono i più belli e meglio isolati esemplari degli idrozoi (*Stromatopora*), che si presentano in posto nei giacimenti dell'U. Smar e di Gusbat.

Calcari con alghe. — Caratteristica per quasi tutti i calcari è l'abbondanza di *Lithothamnium* e per parecchi di essi, non esclusi quelli con alveoline, l'associazione con *Neomeris* e *Boueïna*, rappresentate da forme piccolissime, quali si presentano nelle sezioni sottili all'esame col microscopio. I minuti, diffusissimi litotamni (*Archaeolithothamnium* ?) incrostanti altri organismi, appartengono forse a un'unica forma, che parmi distinta dalle altre cretaciche considerate e descritte da Rothpletz. Nei calcari con *Aspidiscus* di Gusbat, in quelli dell'Uadi Msaaba e di Teghrinna (Gariàn), più che in altri, si presentano inoltre frequentemente dei frustuli che trovano un chiaro riscontro colla *Neomeris* (Herouvalina) *cretacea* Steinm, e colla *Boueïna Hocstet-*

teri Toula (Toula e Steinmann); tuttavia mi limito a proporre il riferimento generico, nell'impossibilità in cui mi trovo di addivenire col solo esame di sezioni ad uno studio sufficientemente completo.

Assai più rari sono altri avanzi a filamenti aggrovigliati che ritengo spettanti al gen. *Sphaerocodium*. Nè mancano forme come quelle dell'Infracretacico attribuite dal Lorenz e poi anche dall'Arbenz al gen. *Diplopora*, ed altre che ricordano il gen. *Munieria* v. Hantken (Deecke). In complesso, come per la fauna a foraminiferi, anche per riguardo alla florula algologica questi calcari, dei quali foraminiferi ed alghe insieme con altri avanzi organici e specialmente detriti di molluschi e di echinodermi sono tanta parte, ripetono la facies neritica del Barremiano e dell'Aptiano e di altri piani più recenti del Cretacico, come già ebbi occasione di notare per certi calcari dell'Appennino. Nella loro costituzione hanno stretta affinità con parecchi di quelli che Kilian ha fatto conoscere coll' “*Album de Microphotographies de roches sédimentaires* (1900) „.

Un'ultima parola resta a dire sui caratteri paleontologici del Cenomaniano, e questa a proposito dei legni silicizzati che si presentano in strati facienti parte della serie attribuita a questo piano. Nella relazione della Commissione Agrologica si è fatto già cenno ai terreni di Rumia e Ifren, dove sulla potente formazione inferiore dei gessi alternanti con calcari stanno le solite marne e arenarie, con interstratificazioni e passaggi laterali ad argille e marne intensamente ocracee, variegate gialle, rosse, nere, e con grandi banchi di arenarie quarzose, del pari colorate e con frammenti e tronchi di legni silicizzati; similmente a quanto già riscontrò il Pervinquière nel Gebel più occidentale e il Bernet nel Gebel di Fassato (1). Numerose concrezioni di ossidi di ferro e di siderite si trovano nelle marne e nelle arenarie, e quelle delle marne includono quasi tutte avanzi di un grande *Equisetites* (?).

I numerosi campioni di legni silicizzati, talora lignitizzati, appartengono tutti ad un solo tipo (*Protocedroxilon*). Altri banchi

---

(1) E. Bernet, *Contribut. à l'étude géol. de la Tripolit.*, “ Bull. S. G. d. F. „, XII, 1912, pag. 397.

arenacei, simili a questi di Ifren, con grossi tronchi, furono incontrati dal Franchi e dallo Zuffardi a Melca Tecut (Nalut): i campioni raccoltivi però spettano ad un tipo diverso di legno (*Dadoxilon*). Ma notizie più precise su questi legni sono date dal prof. G. Negri in un lavoro in corso di pubblicazione (1).

Turoniano. — Nel Gebel esiste questo piano: sonvi orizzonti di passaggio con fauna che associa forme turoniane e forme cenomaniane (*Radiol. Peroni*, *Nerinea* (Ptygmatis) *pseudonobilis* Choff. ed altre), e finora si conoscono pochi punti dove il Turoniano si presenti in affioramenti a schietti caratteri paleontologici. In Tripolitania, come in Tunisia, il Turoniano è perfettamente concordante col Cenomaniano. Fin dal 1906, studiando i fossili raccolti dal prof. Vinassa de Regny presso Homs, riferii al Turoniano i calcari ad orbitoline con *Caprinula Sharpei* Choff. e *Praeradiolites Lefebvrei* Bayl.; riferimento che ora posso riconfermare, aggiungendo *Strombus* ? *incertus* d'Orb., un *Eoradiolites* n. f. (affine all'*E. Davidsoni* (Hill)) e, con qualche riserva, *Caprinula olisiponensis* Choff. Ma esistono anche dei calcari con *Caprina*. Una piccola massa di calcare arenaceo con *Actinacis* sp., *Caprina* sp., *Radiolites Peroni* ed altri fossili affiora dal mare sulla spiaggia ad ovest di Homs, appoggiata per dislocazione locale contro gli strati di arenaria gialla cenomaniana con *Trigonia Ethra*. Più notevole è il giacimento di calcare giallo, compatto o terroso, ricchissimo di piccole orbitoline (con prevalenza di *Orbit. Kiliani* Prev., *O. ovulum* Prev.) e con *Neithea Fleuriasiana* (d'Orb.), *N. Lapparenti* (Choff.), e *Caprina* delle cave a Sud dell'Uadi Smar. Sono fossili poco ben conservati; ragione per cui restano indeterminati specificamente gli esemplari di *Caprina*, che, ad ogni modo, sono strettamente affini alla *C. Schiosensis* Boehm.

Nel Gebel abbiamo dunque, come nelle Alpi Venete e, ritengo, nell'Appennino d'Abruzzo, due livelli con orbitoline, Cenomaniano e Turoniano. Altro indizio di Turoniano nei dintorni di Homs l'abbiamo negli strati con *Radiolites radiosus* d'Orb.? dell'Uadi Zennar.

A Garián sopra le arenarie cenomaniane, gialle o rosse, al-

---

(1) G. Negri, *Su alcuni legni fossili del Gebel tripolitano*, " Boll. d. Soc. Geol. It. „ XXXIII, 1914.

ternanti con banchi di roccia coerente o sabbiosa e con interposizione di scisti marnosi fogliettati, seguono dei calcari bianchi farinosi, nei quali si raccolse un frammento di guscio di *Durania* (forse *Dur. Mortoni* Mant.); siamo quindi probabilmente al limite fra Cenomaniano e Turoniano, nel qual caso si dovrebbe ritenere d'età turoniana il calcare bianco cristallino, che qui corona la serie cretacica. Questo calcare, sul quale sta il castello di Garián, ha passaggi laterali ad un calcare grigio dolomitico e arenaceo, che per lo più si trova costituire il *substratum* del rivestimento quaternario negli altipiani di Garián, Assaba e verso Ifren. La serie cenomaniana-turoniana del Garián, quale risulta sulla scarpata, appare quindi affatto simile a quella rilevata da Pervinquière (prof. a pag. 158) sulla scarpata che a sud di Douirat scende pure alla Gefara.

Più sicura rappresentanza del Turoniano fu recentemente scoperta dall'Ing. Franchi e dal Dott. Zuffardi presso Teghrinna, ad un livello stratigraficamente superiore a quello cenomaniano su accennato, che qui pure dev'essere rappresentato, se è realmente riferibile all'*Apricardia carentonensis* (d'Orb.) l'esemplare raccolto in questa stessa località. È un banco a *Radiolites Choffati* Thom. et Peron. (= *R. Trigeri* (Coq.) secondo Toucas), con *Cerithium (Terebralia) Sancti-Arromani* Thom. et Per., *Nerinea (Ptygmatis) requieniana* d'Orb., *Trochactaeon* n. f. (aff. *Tr. cylindraceus* Stol.), *Aporrhais polycerus* (d'Orb.), *Ap. requienianus* (d'Orb.), *Pholadomya* sp., *Chaetetes* (*Pseudochaetetes* Haug.) sp. (cfr. *Ch. Coquandi* Mich.), *Phyllocoenia Pomeli* Th. et Per. Notisi che questo orizzonte turoniano fu dagli stessi geologi ritrovato (con *Cerith. Sancti-Arromani*) sull'altipiano Mezzur-Fassato e (con. *Rad. Choffati*) sulla sponda sinistra del Sofegin, circa 20 km. a sud di Misda. L'esistenza poi di strati turoniani inferiori, litologicamente non distinguibili dalle arenarie marnose gialle cenomaniane, risulta dal fatto che nel territorio fra Mezzur e Fassato e a Nalut si raccolsero *Inoceramus labiatus* Schl., *Arca* (Trigonoarca) *Thevestensis* Coq., *Solen elegans* d'Orb., *Dosinia inelegans* (Sharpe), *Avicula anomala* Sow. Nè è da tacere l'osservazione che nelle rovine di Assaba si raccolgono campioni di calcare compatto, cereo con modelli e impronte di un radiolitide riferibile al *Biradiol. lumbricalis* d'Orb., come indizio della probabile non lontana esistenza di altro giacimento turoniano.

Senoniano. Allo stato attuale delle ricerche non risulta che nella zona marginale del Gebel, nei territori di Homs, Gusbát, Tarhuna, Garián, Ifren, esistano altri orizzonti del Cretacico più recenti. È tuttavia prudente di nulla affermare al riguardo, in attesa dei risultati di ulteriori più particolareggiate ricerche, tanto più che certi calcari con *Lacazina* dei dintorni di Homs e certi fossili mal conservati, raccolti presso Teghrinna (Garián), forse riferibili ai generi *Chalmasia* e *Roudaireia*, potrebbero essere traccia di qualche giacimento senoniano.

Invece, com'è già noto, il Neocretacico è ampiamente sviluppato nelle regioni più interne della Tripolitania, come si verificò anche coll'esplorazione compiuta quest'anno dalla Missione guidata dall'Ing. Franchi. E le collezioni fatte durante questo viaggio mi dànno l'opportunità di aggiungere, come me ne autorizza cortesemente lo stesso Ing. Franchi, nuovi dati paleontologici alle notizie esposte in una recente memoria del collega De Stefani, nella quale sono riassunti i risultati degli studi precedenti (1), e nella nota, già ricordata, del Pervinquière sulla zona ai confini occidentali, dal mare a Gadames. Le collezioni in parola, nuova ricchezza del Museo geo-paleontologico di Torino, si stanno ordinando e studiando col concorso del Prof. Zuffardi, che curò sui posti la raccolta dei fossili e l'invio in Italia; ed è anche a nome suo che riferisco sull'esame sommario che finora se n'è potuto fare.

Risulta da quanto si è detto che il territorio di Nalut è ricco di fossili, e che vi è rappresentato il Cenomaniano ed il Turoniano. Vi ha inoltre il Senoniano. È forse senoniana la parte superiore della serie delle arenarie marnose, porose, gialle o rosse del distretto di Giado-Mezzur (Fassato), a giudicare da modelli e impronte che sembrano riferibili a forme senoniane, come *Nerinella subpulchella* (d'Orb.), *Siliqua Keiseri* Pervinq., e dalla diffusione di una piccolissima bivalve, corbuliforme nelle impronte incomplete, in fatto a caratteri del gen. *Neaera* nei buoni esemplari, e simile alla *Corbula striatuloides* (Quaas non

---

(1) C. De Stefani, *Fossili della Creta sup. raccolti da* M. Sforza *in Tripolitania*, " Palaeontographia Italica ", XIX, 1913. Vedi anche: G. Checchia Rispoli, *Sopra alcuni Echinidi del Cret.-Sup. della Tripolit., racc. da* F. Sanfilippo, Palermo, 1914.

Forbes), che il De Stefani attribuisce con dubbio al gen. *Cuspidaria* (= *Neaera*). I colleghi Franchi e Zuffardi hanno poi trovato (Tumiat-Nalut) l'orizzonte a *Inoceramus regularis* d'Orb., con numerosi, grandi e ben conservati esemplari in un calcare cristallino, color paglierino o rosato; a giudicare dai campioni di roccia avuti, nessun altro fossile accompagna questo inoceramo che è assai comune nel Senoniano (*Campaniano*) tunisino.

Il Senoniano fu oggetto di ricerche anche più ad oriente, nel bacino del Sofegin, e le località che hanno dato fossili in maggior copia si trovano lungo due itinerarî trasversali al bacino stesso da nord a sud; Garián — Nisda, e oltre verso Gheriat; Benin-Ulid — Bongeim — Socna; e inoltre lungo il Sofegin nel tratto da Misda alle carovaniere Beni-Ulid per Bongeim.

Seguendo il primo itinerario, s'incontra un giacimento fossilifero a Chermet Anscia, dove affiora un calcare bianco tenero, lumachella, con modelli interni e impronte di *Cerithium Dachelense* Wanner; facies maesthrictiana che ritroveremo assai meglio caratterizzata paleontologicamente presso Beni-Ulid. Proseguendo nella stessa direzione verso sud, ad ovest del monte Nero di Tescia (o Tediat el Cadem), si trova un'altra lumachella di piccole ostree, a cemento calcare bianco, d'età santoniana, come indica la fauna, costituita da: Lepadidae (cfr. *Calantica* (Scillaelepas) *valida* (Steenstrup) in Withers, e *Scalpellum curvatum* Zitt. in Wanner), *Vermetus collarius* (Wann.), *Plicatula Flattersi* Coq., *Pycnodonta Flicki* Pervinq., *Ostrea Heinzi* Th. et Per., *O. Gauthieri* Th. et Per., *Anomia* sp., *Membranipora Ficheuri* (Th. et Per.), *Reptoflustrina involvens* Th. et Per.

Nei dintorni di Misda, a sud, sonvi due affioramenti fossiliferi; nel vallone Quefat, confluente del Sofegin, e più ad est al Caf Gattar, l'uno e l'altro con forme del Coniaciano e del Santoniano. Nel calcare giallognolo marnoso del primo si raccolsero: *Hemiaster Thomasi* Per. et Gauth., *Plicatula hirsuta* Coq., *Chalmasia turonensis* Dujard., *Arca* (*Trigonoar.*) *Maresi* Coq., *Venus*? cfr. *plana* Sow., *Pholadomya* sp. (cfr. *Ph. pedisulcata* Stol.), *Fasciolaria* (*Cryptochytis*) *Bleicheri* Th. et Per., *Cerithium* sp. Marne giallastre fogliettate sono intercalate nel calcare, ed il campione in esame è ricchissimo di ostracodi (*Cytherella*). Il calcare giallo-rossastro di Caf Gattar contiene: *Echinobrissus fossula* Per. et Gauth., *Hemiaster Thomasi* P. et G., *Hem. aspe-*

ratus P. et G., *Holectypus Nachtigali* (Krumb.) Ch. Risp., *Cyphosoma* sp. sp., *Serpula filiformis* Sow., *Radiopora orbiculata* Th. et Pr., *Membranipora Ficheuri* (Th. et Per.), *Ostrea Vatonnei* Th. et Per., *O. Gauthieri* Th. et Per., *O. Heinzi* Th. et Per., *Exogyra Matheroniana* d' Orb., *Alectryonia dichotoma* Bayle, *Alectr. Nicaisei* Coq., *Chalmasia turonensis* Duj., *Plicatula Flattersi* Coq., *Arca* (*Trigonoarca*?) *Maresi* Coq., *Leda fimbriata* Coq., *Venus*? *plana* Sow., *Clavagella* cfr. *cretacea* d'Orb., *Turritella* sp., *Natica* sp., *Aporrhais* (*Phyllochilus*) *Fourneli* Coq., *Aporr.* sp. (aff. *Ap.*? *Dutrugei* Coq.), *Pterocera*? *Renoui* Th. et Per., *Actaeon* sp., *Acanthoceras*? sp. Noto anche un bell'esemplare di sifonea riferibile al gen. *Triploporella.*

A sud-est di Misda e a nord di Gheriat, nella salita dalla valle dell'Uadi Zemsem all'altipiano di Gheria, i nostri geologi scoprirono un'altra località fossilifera, notevole per la straordinaria abbondanza di esemplari (se ne raccolsero oltre 700) della *Exogyra Overwegi* v. Buch, nelle sue varietà e gradazioni di sviluppo fino a individui di grandezza eccezionale. Esemplari di *Omphalocyclus macropora* (Lmk.) stanno nel calcare marnoso giallo-rossastro o bianchiccio, o aderenti alle valve dell'exogyra; ma qui il caratteristico foraminifero può dirsi raro in confronto di quanto osserveremo per altro giacimento più orientale. Alle due forme citate si accompagnano questi altri fossili: *Exogyra Matheroniana* d'Orb., *Alectryonia dichotoma* Bayle, *Alectr. Nicaisei* (Coq.), *Alectr. larva* Lmk., *Pycnodonta vesicularis* Lmk., *Spondylus Baylei* Coq., *Lucina* (*Dentiluc.*) *subnumismalis* d'Orb., *Cipraea* sp., *Tudicla Bertoliniana* Sforza. Fatta eccezione per la *Al. dicotoma*, dagli autori attribuita al coniaciano, questa fauna si dimostra nettamente maestrichtiana. L'*Exog. Matheroniana*, colla *Natica* (*Gyrodes*) *Bouveti* Pervinq. e con una grande forma di *Tudicla*, fu raccolta anche a Giafar, sull'Uadi Marsid.

Per l'itinerario lungo il Sofegin, da Misda verso Beni-Ulid, ricordo che già accennai alla presenza del Turoniano a circa 20 km. a sud di Misda. Per ora è il solo punto noto, dove affiori il Turoniano nel bacino del Sofegin, di sotto al dominante mantello del Senoniano, che presenta un giacimento assai interessante a Chescem Mesida a sud di Beni-Ulid, sul margine dell'altipiano a destra del Sofegin e a sud di Scemega. Il Senoniano inferiore vi è rappresentato da calcare rossastro com-

patto, con *Mycetophyllia* aff. *nobilis* Stol., *Echinoconus gigas* Cott., *Echinocon.* sp., *Pycnodonta Costei* (Coq.), *Alectr. dichotoma* Bayl., *Cerithium Ganesa* (Noetl.), *Cerith.* sp. (cfr. *C. inauguratum* Stol.), *Tudicla* sp., ed il Maestrichtiano da calcare marnoso giallastro o rossastro, poco compatto o terroso, assai fossilifero.

I fossili più caratteristici sono l'*Omphaloc. macropora* e l'*Alectryonia larva* Lmk.; questa per i numerosi e superbi esemplari di perfetta conservazione e l'*Omphalocyclus* per il numero stragrande di individui. Il calcare in molti campioni risulta quasi completamente dall'agglomeramento dei suoi dischetti, il detrito di sfacelo della roccia ne è in buona parte formato e la nostra collezione dispone di qualche migliaio di individui liberi, dalle più piccole alle maggiori dimensioni. L'abbondanza dell'*Omphalocyclus* in questo giacimento è paragonabile a quella delle orbitoline nelle cave dell'Uadi Smar presso Homs (Turon. inf.). È nota la vasta distribuzione geografica di questo caratteristico foraminifero (*Omphalocyclus*), sul quale riferì recentemente anche il Vredenburg nella illustrazione delle orbitoidi cretaciche dell' India (1). La fauna maestrichtiana comprende: *Callianassa* sp., *Homarus*? sp., *Eryma*? sp., *Cytherella* sp., *Baculites* sp., *Gisortia expansa* d'Arch., *Pugnellus* cfr. *digitatus* Noetl., *Vermetus collarius* (Wanner), *Neithea* sp., *Plicatula hirsuta* Coq., *Exogyra Overwegi* v. Buch, *Alectr. larva* Lmk., *Pycnodonta vesicularis* Lmk., *Lucina subnumismalis* d'Orb., *Waldheimia* sp., *Membranipora Ficheuri* (Th. et Per.), *Vincularia* sp., *Radiopora orbiculata* Th. et Per., *Clionia perforata* Seg., *Goniaster* sp., *Cidaris* sp. sp., *Cyclolites Krumbecki* De Stef.; sonvi anche, non rare, grandi spicule calcaree di spugne. L'*Omphal. macropora*, già riconosciuto in Tunisia, fu poi indicato per la Tripolitania dal Krumbeck; il De Stefani riconobbe in seguito il *Siderolites calcitrapoides* Lmk., e segnalò la presenza di un orbitoide: ora io posso aggiungere che nella *facies* maestrichtiana di Chescem Mesida i foraminiferi sono rappresentati da una faunula abbastanza ricca di generi e di specie. Ho separato una bella serie di esemplari che il Prof. P. L. Prever si propone di studiare: intanto egli mi comunica il seguente elenco:

---

(1) E. W. Vredenburg, *The Cret. Orbitoides of India* (" Rec. Geol. Survey of India ", XXXVI, parte 3ª, 1908).

Omph. macropora Lmk. (f. megasfer. e microsfer.), *Lepidocyclina media* d'Arch., *Siderolites calcitrapoides* Lmk., *Sid. Preveri* Os., *Sid. rhomboidalis* Os., *Sid. denticulatus* Douv., *Rotalia*, *Discorbina*, *Globigerina*, *Cassidulina*, *Textularia*, *Vaginulina*, *Cristellaria*, *Lagena*, *Nodosaria*, *Saccamina*, *Astrorhiza*, *Rhabdammina*.

Di poco ad est di Chescem Mesida il Sofegin incrocia le carovaniere Beni-Ulid-Bongeim-Socna, coincidenti coll'itinerario seguito dai nostri geologi. Nel territorio di Beni-Ulid, alla confluenza dell'Uadi Merdum coll'affluente di destra Kerscenna, essi rinvennero un altro notevole giacimento maestrichtiano in un calcare bianco, tenero, farinoso con numerosi modelli interni e impronte di molluschi. La fauna si compone di numerose forme in parte determinabili: cfr. *Gryphaea Poodoorensis* Stol., *Lima* (*Plagiostoma*) sp., *Pecten* (cfr. *Pseudamus. Garudanus* Stol.), *Avicula* sp., *Modiolaria Michali* Pervinq., *Nucula tenera* J. Müll., *Cardita Beaumonti* d'Arch., *Astarte similis* Münst., *Lucina* (*Dentiluc.*) *Calmoni* Pervinq., *Corbis* sp., *Cardium productum* Sow., *Cardium pullatum* Stol.?, *Cardium* sp. (cfr. *C. alternatum* d'Orb.), *Roudaireia Drui* Mun. Chalm., *Roud. Forbesiana* Stol., var. *Byzacenica* Perv., *Cytherea* sp., *Corbula striatuloides* Forb. (Quaas), *Turritella* sp., *Turrit.* (*Torcula*) *plana* Binkh., *Cerithium Dachelense* Wann., *Aporrhais* (*Pyllochilus*) *Fourneli* Coq.

Seguendo l'itinerario verso Bongeim si ritrova la serie di Chescem Mesida a sud del corso del Sofegin presso Bir Seganna (alle falde del Chescem Tahla e nell'alto Uadi Seganna). Il Senoniano inferiore (coniaciano-santoniano), che già si presenta colla *Plicatula ventilabrum* Coq. sul pianoro del Sofegin, affiora presso Bir Seganna con calcari a *Turritella disjuncta* Th. et Per., *Harpagodes* sp. e col *Nautilus sublaevigatus* d'Orb., ai quali segue il calcare giallo rossastro con *Omphalocyclus* e *Siderolites* accompagnati da questi altri fossili: *Pseudocatopygus Sanfilippoi* Ch. Risp., *Serpula (Pomatoceras) Pacelli* Sforza, *Sabella cretacea* Portlock, *Domopora stellata* (Goldf.), *Ostrea Cellae* De Stef., *Exogyra Matheroniana* d'Orb., *Exog. Overwegi* v. Buch., *Exog.* cfr. *lateralis* Nilsson, *Alectryonia larva* Lmk., *Pecten* sp., *Septifer Jordani* Quaas, *Arca* (*Trigonoarca*) sp., *Cardita Beaumonti* d'Arch., *Lucina* (*Dentiluc.*) *subnumismalis* d'Orb., *Corbis* cfr. *medarum* Douv., *Turritella* sp., *Tudicla Bertoliniana* Sforza, *Helicoceras*?

Sul margine dell'altipiano, circa a 10 km. a levante di

Bongeim, ricompare la facies maestrichtiana di Beni-Ulid con un calcare bianco, poroso, caratterizzato da *Cardita Beaumonti* d'Arch., *Turritella* (*Turcula*) *Overwegi* Quaas, *Cerithium* cfr. *reticosum* Sow. (in Quaas), *Aporrhais saharica* Quaas.

Dopo Bongeim il viaggio, attraverso le depressioni salate e le pianure dunose fin oltre le propaggini orientali di Gebel el Tar, non offrì speciale interesse paleontologico ; e da Bongeim passiamo senz'altro all'Oasi di Hammam a nord di Socna, dove i terreni senoniani fossiliferi si ripresentano nel Gebel Tariri, facente parte di un costolone residuo dell'altipiano nella conca di Socna dal lato di N. E. Nel riguardo paleontologico la serie è qui divisibile in due membri: in basso calcari gialli compatti con *Cardita Beaumonti*, in alto calcari bianchi marnosi, compatti, con ostree inferiormente e con echini superiormente. La fauna del calcare con *Cardita Beaumonti*, a luoghi vera lumachella, comprende: *Siderolites calcitrapoides* Lmk., *Cyclolites Krumbecki* De Stef., *Alectryonia larva* Lmk., *Pecten Mayer-Eymari* Newton, *Pecten* (*Chlamys*) *Dujardini* Roem., *Gervilleia* sp., *Cucullaea Schweinfurthi* Quaas, *Crassatella Sforzai* De Stef., *Cardium* sp., *Cyprina* (*Crassatella* ?) *desensis* Noetl., *Pholadomya indica* Stol., *Turritella* (*Turcula*) *Overwegi* Quaas, *Turritella turbo* Krumb., *Vermetus collarius* (Wann.) ; notevole in particolare un esemplare di ofiuride (*Geocoma*?) per ora indeterminato. Il calcare bianco presenta negli strati inferiori numerosissimi esemplari di *Ostrea Cellae* De Stef. con rari esemplari di *Exogyra Overwegi*, *Pleurotomaria*? (cfr. *Pl. royana* d'Orb.), *Natica* sp. (s. l.); nei superiori *Hemiaster Chargensis* Wann., *Echinobrissus sitifensis* Coq., *Echinob. pyramidalis* Per. et Gauth., *Natica* (s. l.) (*Natieina* sp. Douv. 1904), *Cerithium* sp. (cfr. *C. inauguratum* Stol.). Anche questo complesso dei M. Tariri per la fauna che contiene è attribuibile al Maestrichtiano.

A sud di Socna l'esplorazione si spinse verso il Gebel es Soda fino alle falde settentrionali dei Monti Neri, dove nei dintorni di Bir Cateifa (o Bir Godefa), e più precisamente alle falde del Chescem es Sultan alla destra della strada di Bir Cateifa, il Senoniano si ripresenta fossilifero in certi calcari bianchi cristallini con modelli di *Cardita Beaumonti* e *Gisortia expansa* d'Arch., e specialmente nei calcari marnosi gialli, o giallo rossastri, presso lo sbocco dell'uadi di Bir Cateifa nel contrafforte di

sinistra, e sulla destra dell'uadi sotto il forte, dove affiorano anche degli scisti marnosi, rossi, fogliettati, senza fossili. Questi calcari marnosi, compatti o teneri, che si potrebbero distinguere col nome del fossile più comune, *Turritella turbo* Krumb., contengono una fauna abbastanza ricca per numero e varietà di fossili: *Nautilus sublaevigatus* d'Orb., *Voluta* (Aulica) *stromboides* Mun. Chalm., *Pugnellus digitatus* Noetl., *Vermetus collarius* (Wann.), *Turritella Forgemolli* Coq., *Turr. turbo* Krumb., *Turr. septemcostata* Krumb. (rara e forse var. della precedente), *Dentalium decemcostatum* Quaas, *Tapes (Baroda) fragilis* d' Orb., *Cytherea Rohlfsi* Quaas, *Cardita Beaumonti* d' Arch., *Plicatula hirsuta* Coq., *Pycnodonta vesicularis* Lmk., *Alectryonia Tissoti* Th. et Per.?, *Alectr. larva* Lmk., *Hemiaster* sp., *Heterolampas* sp.? (cfr. *H. Maresi* Cott.), *Codiopsis* sp.? (cfr. *C. disculus* Per. et Gauth.), *Cyclolites Krumbecki* De Stef.

Sonvi inoltre dei foraminiferi, che facilmente mi riuscì di isolare dalla roccia tenera e che appartengono alle seguenti forme: *Omphalocyclus macropora* Lmk., *Siderolites calcitrapoides* Lmk., *Sid. van den Broecki* Os., *Sid. Vidali* Douv., *Sid. denticulatus* Douv., *Amphistegina* n. f., *Nummulites* (*Paronaea*) f. (strettamente affine alle *N. Fraasi* De la H.). Caratteristica è l'abbondanza dei piccolissimi esemplari del *Sid. denticulatus*, qui assai più comune dell'*Omphalocyclus*; ma particolarmente interessante la presenza della *Nummulites* e dell'*Amphistegina* rappresentate da buon numero di esemplari. Il collega Prever, al quale devo le determinazioni, riferirà e discuterà con maggior competenza su questo rinvenimento, che merita l'attenzione degli studiosi, anche perchè nessun fatto può autorizzare il sospetto che il giacimento fossilifero abbia subìto rimestamenti e che le nummulitidi si trovino accidentalmente a far parte della fauna maestrichtiana di Bir Cateifa. Già il Pervinquière ha notato che la fauna maestrichtiana della Tunisia offre manifeste affinità con quella terziaria, presentando tipi nuovi precursori di quelli terziari; e il De Stefani a proposito della fauna sincrona della Tripolitania fa pure osservare il prevalere in essa di tipi rigorosamente e talora esclusivamente terziari. A queste forme di molluschi e di echinidi, maestrichtiane per età ma di tipo terziario, si aggiungono ora nummuliti e amfistegine a stringere maggiormente i legami paleontologici fra

Neocretacico ed Eocene e ad accentuarne il significato. A questo riguardo torna opportuno di ricordare che Kossmat cita fra i fossili dell'orizzonte più recente (*Nerinea* Beds con *Nautilus danicus*) del Cretacico di Pondicherri (Southern India) una nummulitide, riferita con dubbio al gen. *Amphistegina*, che, a giudicare dalle figure (sezioni), si direbbe piuttosto una vera nummulite (1).

***

L'esame delle collezioni paleontologiche raccolte dai miei colleghi e da me nei terreni cretacici della Tripolitania dà modo di confermare l'estensione del Maestrichtiano già riconosciuta dai precedenti osservatori, e di aggiungere che vi sono inoltre rappresentati gli altri sottopiani inferiori del Senoniano, il Turoniano e, su grande estensione e con grande potenza, il Cenomaniano. Tutti si succedono in sistema di strati concordanti, depositatosi in un mare nel quale le condizioni di sedimentazione e di vita devono essersi mantenute abbastanza uniformi attraverso il meso ed il neo Cretacico. Finora non abbiamo dati paleontologici sufficienti per ammettere nella regione considerata l'esistenza del Daniano.

Il Turoniano ed il Cenomaniano, quest'ultimo prevalentemente, costituiscono il fronte del Gebel verso la grande pianura ed il mare, quale si presenta nel poderoso bastione marginale, che, con andamento irregolare per profonde rientranze e forti sporgenze, incombe alla Gefara; ed il Senoniano forma il grande pianoro del Gebel, che lentamente declina verso sud. Per quanto si può arguire dai dati paleontologici ora in possesso, il tavolato dei terreni senoniani si stende regolarmente verso sud-est, fin oltre Socna, senza notevoli accidenti di dislocazione, coi quali si possa ritenere collegata in rapporti genetici la rete degli uadi ond'è solcato l'altipiano e che pel Sofegin e pel Semsem-Bey manda le sue acque, ora scarse, verso la Gran Sirte.

Per il Senoniano di questo altipiano è da avvertire la mancanza della facies ippuritica: invece, come abbiam visto,

---

(1) F. Kossmat, *The Cretac. Deposits of Pondicherri*, " Rec. of the Geol. Survey of India ", XXX, part II, 1897, p. 97, tav. X, fig. 11, 12.

la facies dei calcari di scogliera con rudiste si presenta nella serie cenomaniana-turoniana, con forme che confermano anche con dati nuovi i rapporti, ai quali già accennai in altro mio lavoro, tra il Cretacico dell'Africa settentrionale ed i calcari di scogliera delle penisole iberica, italica e balcanica, con quella facies che il De Stefani disse *balcanica*.

Le faune senoniane premaestrichtiane e quella turoniana risultano povere in confronto di quelle del Cenomaniano e del Maestrichtiano, similmente a quanto si osserva in Tunisia. Per la fauna della estesa formazione maestrichtiana è da rilevare inoltre il variare delle associazioni di forme da luogo a luogo nei diversi giacimenti fossiliferi, e del prevalere dell'uno o dell'altro fossile, come indizio e effetto del variare nelle condizioni di esistenza.

Il De Stefani dallo studio dei fossili della collezione Sforza trasse argomento per notevoli considerazioni sul mare maestrichtiano, ed osservò che le affinità più appariscenti della fauna tripolitana sono con quella del deserto libico e dell'Egitto. Ciò è confermato da quanto espongo in questa Nota, e le affinità si riconoscono pure in confronto colle faune cenomaniana, turoniana (1) e senoniane premaestrichtiane. Emerge pure che la serie meso e neocretacica della Tripolitania nelle sue facies litologiche e paleontologiche presenta strette affinità, e per certi riguardi identità, con quelle sincrone della Tunisia meridionale e non trascurabili rapporti colle faune indiane e dell'Asia Minore: d'altra parte il numero delle forme in comune col Cretacico d'Europa appare maggiore di quanto non risultasse finora dalle conoscenze sulle faune cretaciche dell'Africa mediterranea.

Un ulteriore e più completo esame di queste faune tripolitane permetterà di giungere a conclusioni più precise, e di formularle e discuterle anche in confronto colle considerazioni suggerite al compianto Pervinquière dallo studio monografico, disgraziatamente rimasto incompiuto, delle faune cretaciche tunisine.

---

(1) Vedi R. Fourtau, *Contrib. à l'étude de la faune crétacique d'Égypte* " Bull. de l'Inst. Égypt. ", 4^{me} sér., n. 4 (1903), 1904, p. 232.

Sulle curve iperellittiche con trasformazioni birazionali di 2ª specie in sè.

Nota di SALVATORE CHERUBINO

Delle curve iperellittiche con trasformazioni birazionali (singolari) di 1ª specie in sè, mi sono occupato in una recente Nota (*): a complemento di essa, parmi utile considerare quelle ammettenti trasformazioni birazionali di 2ª specie, poichè anche queste sono operazioni che lasciano invariato il genere di una curva algebrica.

La determinazione di queste altre curve iperellittiche si riduce anch'essa a quella delle forme algebriche binarie ammettenti gruppi finiti di sostituzioni lineari, ma di 2ª specie: questi gruppi essendo, in sostanza, già noti, basta operare le loro sostituzioni sulle forme algebriche binarie ammettenti i gruppi di 1ª specie, di cui quelli sono gli ampliati.

Però, volendo le sole curve *indipendenti* rispetto a trasformazioni birazionali di 2ª specie, bisognerà scegliere i soli gruppi distinti da similitudini, ed occorre ancora avere i gruppi più ampii di sostituzioni lineari, *finiti od infiniti*, contenenti come eccezionale uno dei gruppi finiti di 2ª specie (§ 1).

Le sostituzioni di questi ultimi potrebbero scriversi, sotto forma esplicita, deducendole dalle considerazioni spaziali del sig. SCHOENFLIES (**) o del sig. FANO (***), ovvero anche dalle

(*) CHERUBINO S., *Sulle curve iperell. con trasf. biraz. singolari in sè e sui loro moduli alg.* [" Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. 49 (1913-14)]. Richiamerò questa in seguito con (A).

(**) SCHOENFLIES A., *Krystallsysteme und Kristallstructur*. Leipzig, 1891 [Cfr. specialmente I Ab., V Kap.].

(***) FANO G., *Ueber endliche Gruppen linearer Transf. einer Veränd.* [" Monatshefte für Math. und Physik ", t. VII (1896), pag. 297-320]. In questo lavoro trovasi anche la bibliografia dell'argomento.

proprietà delle reti poligonali piane trattate dai signori Fricke e Klein (*).

Qui ho però fatto uso esclusivamente della conoscenza delle sostituzioni dei gruppi finiti di 1ª specie: e, da osservazioni assai semplici, ho dedotte anche le tabelle dei gruppi che trasformano in sè i gruppi finiti di sostituzioni lineari di 1ª e di 2ª specie.

Non mi consta che i risultati conseguiti siano altrove menzionati, perciò non credo inutile segnalarli in questa Nota (**).

§ 1. — Trasformazioni birazionali di 2ª specie di una curva algebrica.

Sopralineando una variabile, intenderemo passare alla variabile complessa coniugata. Sopralineando un simbolo di funzione, intenderemo che nella funzione stessa tutte le costanti (coefficienti e parametri) sieno scambiate con le loro complesse coniugate.

Sia C, di equazione $f(w, z) = 0$, una curva algebrica di genere p, e

$$Q \equiv \{ z' = \varphi_1(\overline{w}, \overline{z}),\ w' = \varphi_2(\overline{w}, \overline{z}) \}$$

una trasformazione birazionale di 2ª specie. Questa può considerarsi prodotto delle due operazioni

$$I \equiv \{ z' = \overline{z},\ w' = \overline{w} \}, \qquad P \equiv [z' = \varphi_1(w, z),\ w' = \varphi_2(w, z)],$$

(*) Fricke R. und Klein F., *Vorles. ü. die Th. der automorphen Funct.* Leipzig, 1897 [Cfr. specialmente I Ab., II Kap., § 11, pag. 137, e II Ab., I Kap.].

(**) Le sostituzioni esplicite dei gruppi finiti di 2ª specie non le trovo neppure in trattati recenti come quelli del Bianchi [Sostituzioni, Pisa (1899); variabile complessa, Pisa (1901)], del Dickson (Leipzig, 1901) [Cfr. specialmente parte II, cap. XII, pag. 260], del Vivanti (Milano, 1906), del de Séguier (Paris, 1904-12). Quanto agli altri risultati relativi a questi gruppi ed a quelli di 1ª specie, non ne ho trovato traccia nelle citate pubblicazioni, nè in altre da me consultate, e nemmeno nelle due edizioni dell'*Enciclopedia* [Articolo di A. Wiman nella ed. ted., Bd. 1, Heft 5, pag. 523. Articolo di H. Burkhardt e H. Vogt nell'ed. franc., I_1, fasc. 4, pag. 532; cfr. specialmente § 18, pag. 593 e segg.].

(operate nell'ordine in cui sono scritte) ed anche delle altre due

$$\overline{P} \equiv [z' = \overline{\varphi}_1 (w, z),\ w' = \overline{\varphi}_2 (w, z)], \qquad I \equiv \{z' = \bar{z},\ w' = \overline{w}\};$$

cosicchè può scriversi

$$PI = I\overline{P},$$

restando con ciò definito il simbolo $\overline{P}$.

Operando Q nella curva C, si operi prima $\overline{P}$ e si ottenga la curva C' di equazione

$$f(w', z') = F(w, z) = 0;$$

essendo $\overline{P}$ birazionale di 1ª specie (*), come P, questa C' ha ancora il genere p. Operando su questa la I, si ottiene la curva $\overline{C'}$, la cui equazione può scriversi indifferentemente

$$F(\overline{w}, \bar{z}) = 0, \qquad \overline{F}(w, z) = 0.$$

Questa $\overline{C'}$ è dello stesso ordine ed ha egual numero di punti critici di C', perciò ha pure egual genere p. Dunque: anche *le trasformazioni birazionali di 2ª specie lasciano invariato il genere* (**).

Sia ora C una curva iperellittica di genere p e di equazione

$$w^2 = f(z),$$

ed operiamo su essa la trasformazione birazionale di 2ª specie $Q = PI = I\overline{P}$: si può sempre supporre che l'operazione $\overline{P}$ tras-

---

(*) In generale, se le relazioni razionali $z' = \varphi_1 (w, z)$, $w' = \varphi_2 (w, z)$, in un certo intorno di z_0, w_0, z_0', w_0' che le soddisfa, definiscono le w, z come funzioni implicite di z', w', le relazioni $z' = \overline{\varphi}_1 (w, z)$, $w' = \overline{\varphi}_2 (w, z)$ definiranno anch'esse, nel corrispondente intorno di $\overline{z_0}$, $\overline{w_0}$, $\overline{z_0'}$, $\overline{w_0'}$, le w, z come funzioni implicite di z', w' [Basta osservare che le prime equivalgono alle altre $\overline{z'} = \overline{\varphi}_1 (\overline{w}, \bar{z})$, $\overline{w'} = \overline{\varphi}_2 (\overline{w}, \bar{z})$].

(**) Bastava, del resto, osservare che l'operazione Q dà luogo ad una corrispondenza continua (non algebrica) fra le curve C e $\overline{C'}$, per concluderne che il genere rimane invariato.

formi la curva C in una C' la cui equazione abbia la stessa forma normale

$$w^2 = F(z).$$

Come è noto, C e C' avranno i gruppi di diramazione, $f(z) = 0$ ed $F(z) = 0$, fra loro proiettivi; cosicchè, se

$$z' = \frac{\bar{a} z + \bar{b}}{\bar{c} z + \bar{d}}$$

è la proiettività che trasforma il primo nel secondo, la $I\bar{P} = Q$ risulta definita dalle relazioni

$$\left\{ z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \qquad w' = \frac{\pm \bar{w}}{(c\bar{z} + d)^{p+1}} \right\},$$

e trasformerà la C in una $\bar{C}'$ di equazione

$$w^2 = \bar{F}(z).$$

E se Q trasforma C in se stessa, la $z' = \dfrac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$ è una sostituzione lineare di seconda specie che trasforma in se stesso il gruppo di diramazione $f(z) = 0$ della C: le sostituzioni come queste formano uno dei noti gruppi di sostituzioni lineari fratte di 2ª specie.

Due curve algebriche C, C' le diremo *indipendenti* o *distinte* se l'una non può aversi come trasformata dell'altra mediante una operazione birazionale di 1ª o di 2ª specie.

Se si ha $C' = SC$ e se la C *ammette* il gruppo G che la trasforma in sè, la C' ammetterà il gruppo SGS^{-1}: perciò, fra i gruppi di trasformazioni birazionali, di 1ª o di 2ª specie, ammessi da curve algebriche, volendo considerare solo curve indipendenti, 2 gruppi simili si riterranno come *non distinti* (*).

Dippiù, se 2 curve algebriche ammettono lo stesso gruppo G e sono *dipendenti*, la operazione S che trasforma la prima nella

---

(*) Il concetto, che noi vogliamo compendiare in questa locuzione, risulterà chiaramente illustrato e definito dalla conclusione del § 7.

seconda, trasforma G in se stesso. Quindi, le operazioni birazionali, trasformanti in sè il gruppo relativo a una, dànno luogo a tutte le curve algebriche, fra loro dipendenti, che ammettono quel gruppo.

Poichè, come risulta da ciò che precede, lo studio della dipendenza o indipendenza birazionale delle curve iperellittiche dipende dallo studio analogo per i rispettivi gruppi di diramazione, noi ci limiteremo a studiare questi ultimi ed, insieme, i gruppi poliedrali finiti da essi ammessi.

E tanto sarà sufficiente a risolvere il nostro problema.

§ 2. — **Qualche osservazione sui gruppi di 2ª specie.**

Con

$$P \equiv [z_i' = f_i(z)], \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

indichiamo una trasformazione sulle n variabili complesse z_1, z_2, ..., z_n. Come precedentemente, indichiamo con $\bar{P}$, e diremo *coniugata* di P, la trasformazione definita dalle relazioni

$$[z_i' = \bar{f}_i(z)], \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Beninteso, le f_i sono funzioni uniformi ed invertibili ed un gruppo di tali operazioni contiene l'identità, e perciò l'inversa di ogni sua trasformazione.

È ovvio che le coniugate delle operazioni di un gruppo G formano un gruppo $\bar{G}$, che sarà detto *coniugato* di G.

Si indichi con I l'operazione di 2ª specie definita dalle

$$z_i' = \bar{z}_i, \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

e si tenga presente che

$$PI = I\bar{P}, \qquad I^{-1} = I; \qquad IGI = \bar{G}.$$

È noto che, se G è un gruppo di 1ª specie, da esso si può ottenere un gruppo di 2ª specie ampliando G mediante una operazione $Q = PI$ che lo trasformi in se stesso ed il cui qua-

drato appartenga a G: tale gruppo di 2ª specie indicheremo con la notazione $\}G; PI\{$.

Si verifica subito che $P\bar{P} = (PI)\,I\bar{P}$ appartiene a G e che P trasforma $\bar{G}$ in G, quindi $\bar{P}$ trasforma G in $\bar{G}$. Viceversa, se P soddisfa alle condizioni ora dette, la $Q = PI$ è capace di ampliare G in un gruppo di 2ª specie: per convincersene, basta osservare le due identità

$$Q^2 = PIPI = P\bar{P}I^2 = P\bar{P},$$

$$G = QGQ^{-1} = P.IGI.P^{-1} = P\bar{G}P^{-1}. \tag{1}$$

Diciamo che G è *riflessibile*, quando $G = \bar{G}$. Un gruppo riflessibile è ampliabile mediante la I: il gruppo di 2ª specie $\}G; I\{$ lo chiamiamo il *riflesso* di G.

Anche un gruppo di 2ª specie, come $\Gamma \equiv \}G; PI\{$, può esser *riflessibile*: perchè ciò accada, occorre e basta sia riflessibile G e che P^2 sia contenuta in G.

È interessante, per i problemi come il nostro, dato un gruppo Γ, *finito oppur no*, determinare il *più ampio* gruppo di operazioni dello stesso tipo che contenga Γ come invariante.

Sia G un gruppo di 1ª specie e Σ il gruppo *più ampio*, ancora di 1ª specie, che contiene G come invariante. È facile convincersi che il $\bar{\Sigma}$ è il *più ampio* gruppo di 1ª specie che trasforma $\bar{G}$ in se stesso.

Ne segue che, *se* G *è riflessibile, lo è anche* Σ.

Inoltre, se $G = \bar{G}$ (di 1ª specie), ogni operazione di 2ª specie capace di ampliare G è contenuta in $\}\Sigma; I\{$. Infatti, *ogni* operazione di 2ª specie $Q = PI$, che trasformi $G = \bar{G}$ in se stesso, per la (1), avrà la P (di 1ª specie) che pure trasforma G in se stesso; cioè P starà in Σ e Q in $\}\Sigma; I\{$. Quindi:

Se il gruppo di 1ª specie G, *finito oppur no, è riflessibile e* Σ *è il più ampio gruppo di 1ª specie che contiene* G *come invariante, il riflesso di* Σ *contiene tutti i gruppi di 2ª specie ampliati di* G.

Si può anche riconoscere che, qualunque sia il gruppo G di 1ª specie, *se* G *è ampliabile mediante* Q = PI, *lo è anche* Σ.

Basta osservare che, se S è una operazione di Σ, la $S' = P\overline{S}P^{-1}$ trasforma G in se stesso:

$$S'GS'^{-1} = P\overline{S}P^{-1}.P\overline{G}P^{-1}.P\overline{S}^{-1}P^{-1} = P.\overline{S}\overline{G}\overline{S}^{-1}.P^{-1} = P\overline{G}P^{-1} = G,$$

cioè S' appartiene a Σ.

Rimanendo invariati i significati ora attribuiti ai simboli Q, G e Σ, dall'ultima osservazione si deduce:

Tutti i gruppi che contengono come invariante un gruppo di 2ª *specie* } G; Q { *sono contenuti nel* } Σ; Q {.

Infatti, le operazioni di 1ª specie di ognuno di tali gruppi dovranno stare in Σ, e, *dovendo essi contenere il* } G; Q {, *l'operazione ampliatrice può sempre ridursi alla* Q *stessa.*

È poi facile concludere che:

Il più ampio gruppo, contenente come invariante il } G; Q }, *è l'ampliato mediante* Q *del più ampio sottogruppo* σ *di* Σ *che trasforma* Q *in un'operazione del sistema* GQ. È evidente che σ contiene ancora come invariante il G.

Infine, osserviamo che, se $G' = SGS^{-1}$ e G è ampliabile mediante Q, il G' sarà ampliabile mediante SQS^{-1}, onde

$$\} G' ; SQS^{-1} \{ = S \} G ; Q \{ S^{-1}.$$

Dunque: *Se due gruppi di 1ª specie sono simili, quelli di 2ª specie dedotti dall'uno sono ordinatamente simili ai gruppi di 2ª specie ottenuti dall'altro.*

§ 3. — Gruppi di 1ª specie trasformanti in sè i 5 gruppi poliedrali finiti (*).

Per brevità, diciamo *gruppi poliedrali finiti* i 5 gruppi finiti di sostituzioni lineari non omogenee di 1ª specie, e li denoteremo rispettivamente con $G_n^{(1)}$, $G_{2n}^{(2)}$, $G_{12}^{(4)}$, $G_{24}^{(8)}$, $G_{60}^{(20)}$ considerandoli sotto la forma normale solita (**).

(*) I risultati di questo § trovansi già enunciati nella (A), al § 2. Qui ne fornisco un cenno di dimostrazione.

(**) V., ad es., Klein, *Das Ikosaeder*. Leipzig, 1884, I, 2, § 7, pag. 42 (1ª forma).

Quelli più ampii, *finiti o non*, anche di 1ª specie, che li contengono come invarianti, li denoteremo coi simboli $\Sigma_n^{(1)}$, $\Sigma_{2n}^{(2)}$, $\Sigma_{12}^{(4)}$, $\Sigma_{24}^{(8)}$, $\Sigma_{60}^{(20)}$.

La determinazione di questi ultimi si può far dipendere dalla osservazione che segue. Detto G un qualunque gruppo *finito* di operazioni e Σ il più ampio, di operazioni dello stesso tipo, che lo contenga come invariante, si osservi che le operazioni di Σ, trasformando quelle $A_1, A_2, \ldots, A_m$ di G, eseguono su esse delle semplici permutazioni, e che il Σ può porsi in isomorfismo, in generale meriedrico, col gruppo di queste permutazioni. Quest'ultimo non può che esser finito, perciò Σ *è finito od infinito secondo che tale è* il rapporto di meriedria nello isomorfismo ora stabilito, cioè secondo che è o no finito *il numero delle operazioni che trasformano quelle di* G, **ciascuna** *in sè*.

Ed il Σ sarà anche *finito* se tale è il numero delle operazioni trasformanti in sè un sottogruppo di G.

I coefficienti di una sostituzione lineare $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ di 1ª specie, che trasformi in sè la sostituzione generica $z' = e^{\frac{2r\pi i}{n}} . z$ del gruppo ciclico, debbono soddisfare alle equazioni

$$\epsilon_r \, ad - bc = \rho\epsilon_r , \qquad ab\,(1 - \epsilon_r) = 0 ,$$
$$- cd\,(1 - \epsilon_r) = 0 , \qquad - \epsilon_r \, cb + ad = \rho \, . \, 1 ;$$

dove $\epsilon_r = e^{\frac{2r\pi i}{n}}$ e ρ è un fattore di proporzionalità. Tenendo conto della condizione $ad - bc \neq 0$, si ottengono le infinite operazioni

$$z' = \kappa z ,$$

dove k è un numero qualunque, non nullo.

Volendo poi le sostituzioni che trasformano una operazione $z' = e^{\frac{2r\pi i}{n}} . z$ del G_n in un'altra $z' = e^{\frac{2r'\pi i}{n}} . z$, distinta dalla prima, si risolverà un sistema analogo ottenendo le infinite operazioni

$$z = \frac{\kappa'}{z} ,$$

con k' numero arbitrario, non nullo.

Il $\Sigma_n^{(1)}$ *è* dunque *infinito*.

Passiamo al gruppo diedrale $G_{2n}^{(2)}$. Esso contiene il $G_n^{(1)}$ le cui operazioni sono ciascuna trasformata in sè dalle $z' = kz$: perchè una sostituzione come questa trasformi in sè anche una $z' = -\frac{e^{\frac{2r\pi i}{n}}}{z}$, k dovrà soddisfare alla condizione

$$-\epsilon_r \kappa^2 = -\epsilon_r \,.\, \rho\,, \qquad \rho = 1.$$

Dunque $k = \pm 1$, ed il $\Sigma_{2n}^{(2)}$ è finito.

Per $n = 2$, si trova $\Sigma_4^{(2)} = G_{24}^{(8)}$, cioè: *il gruppo ottaedrale è il più ampio gruppo di sostituzioni lineari contenente come invariante il gruppo trirettangolo.*

Per n qualunque, si trova invece $\Sigma_{2n}^{(2)} = G_{4n}^{(2)}$, cioè: *il gruppo più ampio di sostituzioni lineari, contenente come sottogruppo eccezionale un gruppo diedrale, è il diedrale di ordine doppio.*

Certo il $\Sigma_{2n}^{(2)}$, per $n > 2$, non può che essere un gruppo diedrale (*): poniamo sia $\Sigma_{2n}^{(2)} = G_{2\lambda n}^{(2)}$. Ogni $z' = \sigma_s z$ ($\sigma_s = e^{\frac{2s\pi i}{\lambda n}}$, $s = 0, 1, 2, \ldots, \lambda n - 1$) già trasforma, ciascuna in sè, una metà delle sostituzioni di $G_{2n}^{(2)}$: perchè trasformi le rimanenti $z' = -\frac{\epsilon_r}{z}\left(\epsilon_r = e^{\frac{2r\pi i}{n}}, r = 0, 1, \ldots, n-1\right)$, ciascuna in sè o fra loro, si trova che deve essere

$$\sigma_s^2 = e^{\frac{4s\pi i}{\lambda n}} = \epsilon_{r'-r} = e^{\frac{2(r'-r)\pi i}{n}} \qquad (r, r' = 0, 1, \ldots, n-1),$$

e questa relazione si riduce a

$$\frac{2s}{\lambda} = r' - r + \lambda n.$$

Occorre dunque che $2s$ sia multiplo di λ, *per qualunque* s, perciò $\lambda = 1$, oppure $\lambda = 2$. Per $\lambda = 2$, si ha il $G_{4n}^{(2)}$, che risulta appunto il chiesto $\Sigma_{2n}^{(2)}$.

Gli altri 3 gruppi finiti contengono rispettivamente un $G_4^{(2)}$,

---

(*) Il $G_8^{(2)}$ ed il $G_{10}^{(2)}$ sono, rispettivamente, in $G_{24}^{(8)}$ ed in $G_{60}^{(20)}$, ma non come invarianti.

un $G_8^{(2)}$ ed un $G_{10}^{(2)}$, perciò i gruppi che li contengono come eccezionali sono finiti. Ecco la tabella:

1. $\Sigma_n^{(1)} \equiv \left[G_n^{(1)}\,;\, z' = \kappa z\,;\, z' = \frac{\kappa'}{z}\right]$; k' qualunque, non nullo;

$$\kappa \neq 0\,, \neq e^{\frac{2r\pi i}{n}} \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1).$$

2. $\Sigma_{2n}^{(2)} = G_{4n}^{(2)} \equiv [G_{2n}^{(2)};\, V]\,,\; V \equiv [z' = e^{\frac{\pi i}{n}} z]\,;\; n > 2.$

3. $\Sigma_4^{(2)} = G_{24}^{(8)} \equiv [G_4^{(2)};\, V_i]\,;\; i = 1, 2, \ldots, 5\,;\; V_1 \equiv [z' = iz]\,,$

$$V_2 \equiv \left[z' = \frac{z+1}{z-1}\right],\quad V_3 \equiv \left[z' = i\,\frac{z+1}{z-1}\right],$$

$$V_4 \equiv \left[z' = \frac{z+i}{z-i}\right],\quad V_5 \equiv \left[z' = i\,\frac{z+i}{z-i}\right].$$

4. $\Sigma_{12}^{(4)} = G_{24}^{(8)} \equiv [G_{12}^{(4)};\, V_1]$.

5. $\Sigma_{24}^{(8)} = G_{24}^{(8)}$.

6. $\Sigma_{60}^{(20)} = G_{60}^{(20)}$ (*).

§ 4. — Gruppi poliedrali finiti di 2ª specie.

I gruppi poliedrali finiti di 1ª specie son tutti identici ai loro coniugati, cioè sono *riflessibili*. Volendo da essi ottenere gruppi di 2ª specie *non riflessi*, bisogna aggregar loro una sostituzione di 2ª specie $Q = PI$, dove P sia contenuta nel relativo Σ, ma non nel G, ed inoltre $P\overline{P}$ cada in G. In tal modo si ottengono i gruppi della tabella seguente, i quali, *a meno di similitudini*, sono tutti i gruppi finiti di 2ª specie di sostituzioni lineari non omogenee (cfr. l'ultima osservazione del § 2).

1. *Gruppi iperciclici di 2ª specie:*

$$\left\{ G_n^{(1)};\, z' = \bar{z} \right\};\quad \left\{ G_n^{(1)};\, z' = \kappa\bar{z} \right\};\quad \left\{ G_n^{(1)};\, z' = \pm \rho\, e^{\frac{r\pi i}{n}} \cdot \frac{1}{\bar{z}} \right\},$$

dove $|\kappa| = 1$, ρ è reale positivo, $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

(*) Non credo facile prevedere *a priori* i due risultati ultimi, dalla considerazione delle corrispondenti reti piane, perchè i bitriangoli di queste, come per le altre, hanno due angoli eguali.

Negli ultimi $2n$ gruppi, il segno — dà luogo a un gruppo non identico a quello ottenuto col segno $+$, *solo quando* n *è dispari.*

2. *Gruppi diedrali di 2ª specie* (distinti):

$$\boldsymbol{D}_1^{(n)} \equiv \{ G_{2n}^{(2)} ; z' = \bar{z} \} ; \qquad \boldsymbol{D}_2^{(n)} \equiv \{ G_{2n}^{(2)} ; z' = e^{\frac{\pi i}{n}} . \bar{z} \} .$$

3. *Gruppi trirettangoli di 2ª specie:*

$$\{ G_n^{(2)} ; z' = \bar{z} \} ; \qquad \{ G_4^{(2)} ; z' = i\bar{z} \} ;$$

$$\left\{ G_4^{(2)} ; z' = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} \right\} ; \qquad \left\{ G_4^{(2)} ; z' = i \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} \right\} .$$

4. *Gruppi tetraedrali di 2ª specie* (distinti):

$$\boldsymbol{T}_1 \equiv \{ G_{12}^{(4)} ; z' = \bar{z} \} ; \qquad \boldsymbol{T}_2 \equiv \{ G_{12}^{(4)} ; z' = i\bar{z} \} .$$

5. *Gruppo ottaedrale di 2ª specie:*

$$\boldsymbol{O}_1 \equiv \{ G_{24}^{(8)} ; z' = \bar{z} \} .$$

6. *Gruppo icosaedrale di 2ª specie:*

$$\boldsymbol{I}_1 \equiv \{ G_{60}^{(20)} ; z' = \bar{z} \} .$$

Fra i gruppi iperciclici e trirettangoli di questa tabella, ve ne sono alcuni simili. I soli *distinti* sono i seguenti:

1. *Gruppi iperciclici di 2ª specie distinti:*

$$\boldsymbol{C}_1^{(n)} \equiv \{ G_n^{(1)} ; z' = \bar{z} \} ; \qquad \boldsymbol{C}_2^{(n)} \equiv \left\{ G_n^{(1)} ; z' = \frac{1}{\bar{z}} \right\} ;$$

$$\boldsymbol{C}_3^{(n)} \equiv \left\{ G_n^{(1)} ; z' = \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{\bar{z}} \right\} ; \qquad \boldsymbol{C}_4^{(n)} \equiv \left\{ G_n^{(1)} ; z' = -\frac{1}{\bar{z}} \right\} ;$$

$$\boldsymbol{C}_5^{(n)} \equiv \left\{ G_n^{(1)} ; z' = -\frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{\bar{z}} \right\} .$$

Gli ultimi due coincidono coi due precedenti, *quando* n *è pari.*

2. *Gruppi trirettangoli di 2ª specie distinti:*

$$V_1 \equiv D_1^{(2)} \equiv \left\} G_4^{(2)};\ z' = \bar{z} \right\}; \qquad V_2 \equiv D_2^{(2)} \equiv \left\} G_4^{(2)};\ z' = i\bar{z} \right\}.$$

I gruppi distinti elencati in questo § li diremo *normali* (*).

§ 5. — Gruppi poliedrali più ampii contenenti come invarianti quelli finiti di 2ª specie normali.

Questi gruppi li indicheremo, per brevità, con le notazioni $\Sigma(C_1^{(n)})$, $\Sigma(C_2^{(n)})$, ecc. Essi si ottengono senza difficoltà, tenendo presenti le osservazioni del § 2. Eccoli:

1. Per gli iperciclici:

a) n *pari:*

$$\Sigma(C_1^{(n)}) \equiv \left\} z' = \pm \rho e^{\frac{r\pi i}{n}} z;\ z' = \pm \rho' e^{\frac{r\pi i}{n}} \cdot \frac{1}{z};\ z' = \bar{z} \right\} \equiv$$

$$\equiv \left\} C_1^{(n)};\ z' = \rho z;\ z' = \frac{\rho'}{z} \right\};$$

con ρ, ρ' numeri *reali positivi variabili*, $r = 0, 1, \ldots, n-1$.

(*) Per riconoscere le simiglianze fra gruppi della tabella precedente, oltre le osservazioni del § 2, mi è stata utile quest'altra:

Perchè il gruppo $\}$ G; PI $\{$ *sia simile al* $\}$ G; I $\{$, *occorre e basta che esista una operazione* S *tale che* $S^{-1}P\bar{S} = g$, *con* g *operazione di* G. *La* S *bisogna ricercarla fra le operazioni del* Σ *di* G, *non appartenenti a* G *e che non contengano una* $g \neq 1$ *come fattore* (G e Σ son di 1ª specie).

Così si riconosce che i gruppi iperciclici $\} G_n^{(1)};\ z' = \kappa\bar{z} \{$ sono tutti simili al riflesso $\} G_n^{(1)};\ I \{$.

Per gruppi non riflessi, mi son valso della seguente osservazione, che è più generale:

Perchè i 2 gruppi di 2ª specie $\}$ G; PI $\{$, $\}$ G; P'I $\{$ *siano simili, occorre e basta che esista una operazione* S, *di 1ª o di 2ª specie, trasformante* G *in se stesso, e tale che* $S^{-1}P\bar{S} = gP'$, *con* g *operazione di* G (G di prima specie).

Così ho riconosciuto che gl'infiniti gruppi iperciclici $\left\} G_n^{(1)};\ z' = \pm\rho e^{\frac{r\pi i}{n}} \cdot \frac{1}{\bar{z}} \right\{$ si riducono a 4 soltanto, e che i 3 gruppi trirettangoli di 2ª specie, non riflessi, si riducono ad uno solo.

$$\Sigma(C_2^{(n)}) = \Sigma(C_3^{(n)}) \equiv \left\{ z' = \kappa z;\ z' = \frac{\kappa'}{z};\ z' = \bar{z} \right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{ C_2^{(n)};\ z' = \sigma z;\ z' = \frac{\sigma'}{z} \right\} \equiv \left\{ C_3^{(n)};\ z' = \sigma z;\ z' = \frac{\sigma'}{z} \right\},$$

con κ, κ', σ, σ' *variabili*, ma $|\kappa| = |\kappa'| = |\sigma| = |\sigma'| = 1$, $\sigma \neq e^{\frac{2r\pi i}{n}}$ $(r = 0, 1, \dots, n-1)$.

b) n *dispari:*

$$\Sigma(C_1^{(n)}) \equiv \left\{ z' = \pm \rho e^{\frac{r\pi i}{n}} z;\ z' = \pm \rho' e^{\frac{r\pi i}{n}} \frac{1}{z};\ z' = \bar{z} \right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{ C_1^{(n)};\ z' = \pm \rho z;\ z' = \pm \frac{\rho'}{z} \right\},$$

con ρ, ρ' *variabili reali positivi*, $r = 0, 1, \dots, n-1$.

$$\Sigma(C_4^{(n)}) = \Sigma(C_5^{(n)}) \equiv \left\{ z' = \kappa z;\ z' = \frac{\kappa'}{z};\ z' = \bar{z} \right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{ C_4^{(n)};\ z' = \sigma z;\ z' = \frac{\sigma'}{z} \right\} \equiv \left\{ C_5^{(n)};\ z' = \sigma z;\ z' = \frac{\sigma'}{z} \right\},$$

con κ, κ', σ, σ' *variabili*, ma $|\kappa| = |\kappa'| = |\sigma| = |\sigma'| = 1$, $\sigma \neq e^{\frac{2r\pi i}{n}}$ $(r = 0, 1, \dots, n-1)$.

2. Per i diedrali:

$$\Sigma(D_1^{(n)}) = \Sigma(D_2^{(n)}) = D_1^{(2n)} \equiv \{ D_1^{(n)};\ z' = e^{\frac{\pi i}{n}} \bar{z} \} \equiv \{ D_2^{(n)};\ z' = \bar{z} \}.$$

3. Per i trirettangoli:

$$\Sigma(V_1) = O_1 \equiv \{ V_1;\ V_i \},$$
$$i = 1, 2, \dots, 5 \text{ (v. § 3, tabella)}.$$
$$\Sigma(V_2) = D_1^{(4)} \equiv \{ V_2;\ z' = \bar{z} \}.$$

4. Per i tetraedrali:

$$\Sigma(T_1) = \Sigma(T_2) = O_1 \equiv \{ T_1;\ z' = i\bar{z} \} \equiv \{ T_2;\ z' = \bar{z} \}.$$

5-6. Per l'ottaedrale e l'icosaedrale:

$$\Sigma(O_1) = O_1; \qquad \Sigma(I_1) = I_1.$$

§ 6. — Forme algebriche binarie ammettenti un gruppo poliedrale omogeneo finito di 2ª specie normale.

Si tenga presente il § 1 della (A), ove trovansi esplicitate le più generali forme algebriche binarie, ammettenti gruppi di 1ª specie finiti di trasformazioni lineari in sè (beninteso a meno di proiettività).

È evidente che, per ottenere da esse quelle di cui il titolo di questo §, basta far uso della tabella del § 4; cioè porre la condizione che ciascuna forma del § 1 (A) ammetta anche la trasformazione che amplia il relativo gruppo di 1ª specie in uno di 2ª.

In tal modo, si ottien subito la seguente tabella, in cui trovansi le *forme algebriche binarie più generali, a meno di sostituzioni di 1ª o di 2ª specie, ammettenti gruppi finiti di trasformazioni lineari di 2ª specie.*

I. *Quelle ammettenti gruppi poliedrali omogenei finiti riflessi son tutte le forme del § 1* (A), *quando i coefficienti acquistino valori reali* (*).

II. Le più generali forme algebriche binarie ammettenti gruppi poliedrali omogenei finiti di 2ª specie, non riflessi, sono le seguenti:

1. *a)* pel $C_2^{(n)}$:

$$f(z_1, z_2) = z_1^a . z_2^a . (z_1^{\lambda n} + p_1 z_1^{(\lambda-1)n} z_2^n + p_2 z_1^{(\lambda-2)n} z_2^{2n} + \ldots + \\ + \overline{p}_2 z_1^{2n} z_2^{(\lambda-2)n} + \overline{p}_1 z_1^n z_2^{(\lambda-1)n} + z_2^{\lambda n});$$

b) pel $C_3^{(n)}$:

$$f(z_1, z_2) = z_1^a . z_2^a . (z_1^{\lambda n} + p_1 z_1^{(\lambda-1)n} z_2^n + p_2 z_1^{(\lambda-2)n} z_2^{2n} + \ldots + \\ + (-1)^2 p_2 z_1^{2n} z_2^{(\lambda-2)n} + (-1) p_1 z_1^n z_2^{(\lambda-1)n} + z_2^{\lambda n}),$$

ed occorre che λ sia *pari*: posto $\lambda = 2s$, si ha $p_s = 0$, *se* s *è dispari*;

(*) Risultato già noto: v. Klein F., *Das Ikosaeder*, I, 2, § 15, pag. 61.

c) pel $C_4^{(n)}$ (n dispari):

$$f(z_1, z_2) = z_1^{\alpha} . z_2^{\alpha} . (z_1^{\lambda n} + p_1 z_1^{(\lambda-1)n} z_2^{n} + p_2 z_1^{(\lambda-2)n} z_2^{2n} + \ldots + \\ + (-1)^2 \bar{p}_2 z_1^{2n} z_2^{(\lambda-2)n} + (-1)\, \bar{p}_1 z_1^{n} z_2^{(\lambda-1)n} + z_2^{\lambda n}),$$

anche qui occorre che λ sia *pari*: posto $\lambda = 2s$; *se* s *è pari*, p_s è reale; *se* s *è dispari*, p_s è immaginario puro;

d) pel $C_5^{(n)}$ (n dispari):

$$f(z_1, z_2) = z_1^{\alpha} . z_2^{\alpha} . (z_1^{\lambda n} + p_1 z_1^{(\lambda-1)n} z_2^{n} + p_2 z_1^{(\lambda-2)n} z_2^{2n} + \ldots + \\ + p_2 z_1^{2n} z_2^{(\lambda-2)n} + p_1 z_1^{n} z_2^{(\lambda-1)n} + z_2^{\lambda n}).$$

2. Pel $D_2^{(n)}$:

$$f(z_1, z_2) = z_1^{\alpha} z_2^{\alpha} . (z_1^{2n} - z_2^{2n})^{\beta} . (z_1^{2\lambda n} + \sqrt{-1}\, p_1 z_1^{(2\lambda-1)n} z_{2n} + \\ + p_2 z_1^{(2\lambda-2)n} z_2^{2n} + \ldots + p_2 z_1^{2n} z_2^{(2\lambda-2)n} + \\ + \sqrt{-1}\, p_1 z_1^{n} z_2^{(2\lambda-1)n} + z_2^{2\lambda n}),$$

dove i parametri $p_1, \ldots, p_\lambda$ sono tutti *reali*.

3. Pel T_2:

$$f(z_1, z_2) = z_1^{\alpha} z_2^{\alpha} (z_1^4 - z_2^4)^{\alpha} . (z_1^4 + 2\sqrt{-3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4)^{\beta} . \\ . (z_1^4 - 2\sqrt{-3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4)^{\gamma} . \prod_1^{\lambda}{}_r (z_1^{12} + 6\alpha_r \sqrt{-3}\, z_1^{10} z_2^2 - \\ - 33\, z_1^8 z_2^4 + 12\, \alpha_r \sqrt{-3}\, z_1^6 z_2^6 - 33\, z_1^4 z_2^8 + \\ + 6\, \alpha_r \sqrt{-3}\, z_1^2 z_2^{10} + z_2^{12}),$$

con gli α_r ($r = 1, 2, \ldots, \lambda$) *parametri reali*; oppure con $\lambda = 2s$ e gli α_r ($r = 1, 2, \ldots, 2s$) *a 2 a 2 complessi coniugati*.

Le forme qui elencate, per distinguerle da tutte le altre, da esse dipendenti, le diremo *normali*.

§ 7. — Indipendenza delle forme precedenti.

Sappiamo (§ 1) che, per ottenere *tutte* le forme (cioè tutte le curve iperellittiche) ammettenti *uno stesso* gruppo normale G, basta operare, sulla forma normale corrispondente, le trasformazioni del $\Sigma(G)$, non contenute in G.

Così operando, si riconosce che anche *due forme normali* ammettenti lo stesso gruppo (tabella ultima) *possono essere dipendenti.*

Riuniamo qui i risultati riguardanti queste ultime, i quali possono facilmente controllarsi, nel modo anzidetto:

I. *Le forme algebriche binarie ammettenti gruppi proiettivi* (di 1ª specie) *di trasformazioni lineari in sè e proiettivamente indipendenti* (§ 4 (A)), *quando posseggano coefficienti reali, dànno luogo a tutte le forme distinte ammettenti gruppi finiti riflessi di sostituzioni lineari* (*).

II. Benchè sia ovvio, avvertiamo che *due forme cicliche od ipercicliche aventi eguali i coefficienti, ma in ordine inverso, sono dipendenti.* Inoltre: 1 *a), b).* **Tutte** *le forme normali dipendenti che ammettono lo stesso gruppo* $C_2^{(n)}$ *o* $C_4^{(n)}$ *si ottengono da una di esse moltiplicando i suoi coefficienti ordinatamente per le* $\lambda+1$ *potenze* ϵ^s $(s=0, 1, \ldots, \lambda)$, *dove* ϵ *è una radice* λ^{ma} *della unità, ma non radice* n^{ma}; *ovvero prima scambiando fra loro i coefficienti equidistanti dagli estremi e poi moltiplicando per le stesse potenze* (**).

1 *c). Due forme normali ammettenti lo stesso gruppo* $C_3^{(n)}$ *sono dipendenti* **solo** *quando i coefficienti dell'una sono eguali ai coefficienti dell'altra, in ordine inverso.*

1 *d). Per il* $C_5^{(n)}$, *e* **solo** *per* $\lambda=2$, *sono dipendenti due forme normali che differiscano nel segno del coefficiente* p_1: *le altre sono sempre distinte.*

2-3. *Due forme normali ammettenti il* $D_2^{(n)}$ *od il* T_2 *sono dipendenti* **solo** *se i coefficienti dell'una sono i complessi coniugati dei coefficienti dell'altra.*

Per altre osservazioni, rimandiamo al § 4 della (A), richiamando l'attenzione su quanto riguarda le forme ammettenti gruppi trirettangoli.

Come conclusione, osserveremo che i risultati fin qui ottenuti permettono anche, in generale, di riconoscere se 2 curve

---

(*) Per convincersi rapidamente di ciò, si osservi che, se PI trasforma f in φ e queste forme ammettono un gruppo riflesso, si ha: $PIf=Pf=\varphi$.

(**) Altrettanto avviene per le forme algebriche binarie normali che ammettono uno stesso gruppo proiettivo ciclico di 1ª specie (osservazione omessa, per brevità, in (A)).

iperellittiche C, C', ammettenti gruppi poliedrali finiti (di 1ª o di 2ª specie), sono oppur no *dipendenti*.

Per brevità, ragioniamo direttamente sulle curve, anzichè sui loro gruppi di diramazione.

Per la dipendenza fra C e C', occorre che i gruppi Γ, Γ' da esse ammessi siano *simili*: questi risulteranno anzi simili allo stesso gruppo *normale* G. Si abbia, per esempio, $\Gamma = SGS^{-1}$, $\Gamma' = S'GS'^{-1}$ (*): le curve $S^{-1}C = C_1$, $S'^{-1}C' = C_1'$ ammetteranno il G; perciò, o figurano in *una* delle tabelle del § 6 e del § 4 (A), ovvero sono dipendenti da 2 curve, diverse o coincidenti, di *una* di dette tabelle.

Se C_1 e C_1' dipendono, ovvero coincidono, con la stessa curva *normale*, è chiaro che C e C' risultano dipendenti.

Se invece C_1 e C_1' dipendono, o coincidono, con 2 curve normali diverse, bisognerà, mediante i criterî di questo § o del § 4 (A), riconoscere se queste ultime sono, oppur no, distinte, per concluderne la indipendenza, o meno, di C_1 e C_1', ossia di C e C'.

È evidente che C e C' non possono essere dipendenti, senza che lo siano le curve normali cui le riduciamo col processo ora indicato. E per esso, essendo note le S, S', la trasformazione che fa passare da C a C' risulta anche costruita.

Napoli, Giugno 1914.

(*) Avvertiamo esplicitamente aver noi ammesso che anche le operazioni S, S' sono birazionali (di 1ª o di 2ª specie).

Le azioni taglianti e flettenti nella nave sull'onda.

Nota di ANGELO SCRIBANTI

§ 1. — Da circa cinquant'anni la verifica della robustezza longitudinale degli scafi delle navi viene fatta mediante un procedimento, col quale i calcoli ordinariamente usati per le travi inflesse vengono trasferiti allo scafo supposto galleggiante, in note condizioni di carico, sopra il colmo o sopra la gola di un'onda di dimensioni convenzionali rispetto a quelle dello scafo in esame. Dalla cognizione della distribuzione longitudinale dei pesi costituenti la nave e dalla cognizione della distribuzione longitudinale delle spinte statiche risentite dalla carena di equilibrio sul colmo o sulla gola dell'onda, si passa alla valutazione degli sforzi di taglio e dei momenti di flessione conseguentemente agenti sulle singole sezioni dello scafo, per poi procedere alla valutazione delle sollecitazioni unitarie delle fibre dei materiali resistenti componenti lo scafo, e in particolare alla valutazione delle sollecitazioni unitarie massime, e dal valore di queste arguire la sufficienza o meno della robustezza dello scafo esaminato. Evidentemente il procedimento qui per sommi capi ricordato, ammette *a priori* che le posizioni della nave su un colmo o su una gola d'onda siano le più pericolose nelle quali essa si possa venir a trovare rispetto all'onda, ed esse di fatto lo sono per quanto concerne la sezione trasversale di mezzo dello scafo, rispetto alla quale quelle posizioni sono intuitivamente quelle che possono produrre i maggiori effetti di inarcamento o di insellamento.

Se però l'indagine dell'entità delle sollecitazioni unitarie delle fibre voglia essere estesa anche a sezioni sensibilmente discoste dalla sezione trasversale di mezzo, allora cade ogni ragione per poter presumere che quelle posizioni della nave sull'onda continuino ad essere le più pericolose nei riguardi

della robustezza dello scafo. Allora in luogo di considerare quello che accade delle sollecitazioni del materiale in conseguenza dell'essere l'onda *fissa* rispetto alla nave in certe posizioni prestabilite, diventerebbe necessario di riconoscere quello che accade allorchè l'onda è gradualmente *mobile*, ossia viaggiante, da un estremo all'altro dello scafo.

Mi propongo di esporre in questa Nota un procedimento col quale l'indagine di cui sopra è fatta in modo sistematico e con un grado di approssimazione dei risultati non disforme da quello che caratterizza tanti altri calcoli d'ingegneria navale, p. es. tutti i calcoli metacentrici.

§ 2. — Si consideri una nave di lunghezza $2L$ investita longitudinalmente da un treno di onde regolari, di lunghezza 2λ e altezza $2r$, il cui profilo viene qui per semplicità di calcolo assunto come sinusoidale e per ciò soddisfacente all'equazione

$$z = r \cos \pi \frac{X - x}{\lambda},$$

nella quale x, z si intendono essere le coordinate (fig. 1) di un punto generico del profilo ondoso, quale esso è all'istante in cui la gola dell'onda ha camminato per un percorso X in avanti della sezione trasversale di mezzo, che qui per ulteriore semplicità supporremo contenere il centro di gravità e il centro di galleggiamento della nave.

Le forze statiche determinate dall'intervento del menisco ondoso compreso fra il primitivo piano di galleggiamento e il profilo ondoso, in corrispondenza del quale la nave abbia subìto uno spostamento verticale e un'inclinazione longitudinale rispettivamente di valore

$$\xi \qquad \theta,$$

saranno quelle definite dai valori

$$v \qquad m(v)$$

rispettivamente del volume e del momento del menisco ondoso, i quali, nella consueta ipotesi metacentrica della verticalità

delle sponde della nave nei dintorni del galleggiamento originario, valgono

$$v = \int_{-L}^{+L} (\zeta + \theta x - z)\, y dx\,, \qquad m(v) = \int_{-L}^{+L} x\,(\zeta + \theta x - z)\, y dx$$

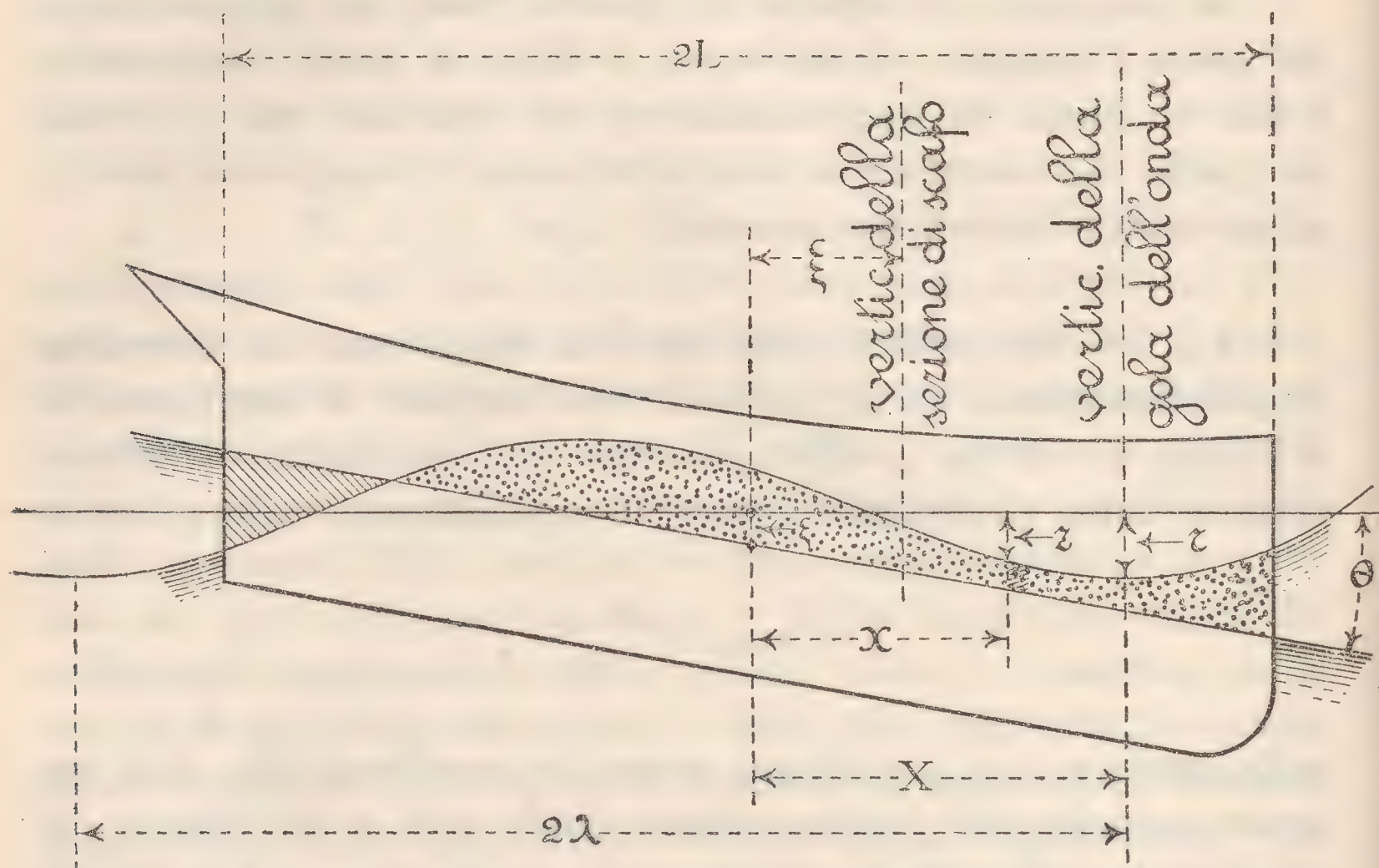



Fig. 1.

con gli integrali estesi dall'avanti all'addietro del galleggiamento. Sostituito per la quota generica z del profilo ondoso il suo valore sotto la forma

$$z = r \cos \pi \frac{X}{\lambda} \cos \pi \frac{x}{\lambda} + r \operatorname{sen} \pi \frac{X}{\lambda} \operatorname{sen} \pi \frac{x}{\lambda}\,,$$

adottate le consuete notazioni

$$A = \int_{-L}^{+L} y dx\,, \qquad M = \int_{-L}^{+L} x y dx\,, \qquad I = \int_{-L}^{+L} x^2 y dx$$

per l'area, per il momento statico e per il momento d'inerzia,

rispetto alla trasversale di mezzo, della figura di galleggiamento, e introdotte qui le notazioni

$$m = \int_{-L}^{+L} y \cos \pi \frac{x}{\lambda}\, dx\,, \qquad p = \int_{-L}^{+L} xy \cos \pi \frac{x}{\lambda}\, dx\,,$$

$$n = \int_{-L}^{+L} y \,\mathrm{sen}\, \pi \frac{x}{\lambda}\, dx\,, \qquad q = \int_{-L}^{+L} xy \,\mathrm{sen}\, \pi \frac{x}{\lambda}\, dx\,,$$

per designare certe funzioni che, insieme con l'area e i momenti statici e d'inerzia, caratterizzano la figura di galleggiamento, si troverà con breve computo che le espressioni del volume e del momento del menisco ondoso si riducono alle

$$v = \zeta A - r\left(m \cos \pi \frac{X}{\lambda} + n \,\mathrm{sen}\, \pi \frac{X}{\lambda}\right),$$

$$m\,(v) = \theta I - r\left(p \cos \pi \frac{X}{\lambda} + q \,\mathrm{sen}\, \pi \frac{X}{\lambda}\right),$$

nello scrivere le quali abbiamo già tenuto conto della circostanza che, nella fatta ipotesi circa la posizione del centro di galleggiamento, si annulla la M.

Segue che la condizione di equilibrio statico della nave sotto l'azione del menisco ondoso istantaneo è quella definita dai valori

$$\zeta = \frac{r}{A}\left(m \cos \pi \frac{X}{\lambda} + n \,\mathrm{sen}\, \pi \frac{X}{\lambda}\right),$$

$$\theta = \frac{r}{I}\left(p \cos \pi \frac{X}{\lambda} + q \,\mathrm{sen}\, \pi \frac{X}{\lambda}\right),$$

che si ottengono eguagliando a zero i surriferiti valori del volume e del momento del menisco.

§ 3. — Stabilite queste espressioni fondamentali, osserviamo che, chiamate rispettivamente

$$\Delta T^\xi, \qquad \Delta M^\xi$$

le variazioni di sforzo di taglio e di momento flettente prodotte dall'intervento del menisco ondoso sulla sezione di scafo posta a distanza ξ dalla sezione di mezzo, le entità di tali variazioni potranno essere computate sotto la forma

$$\Delta T^\xi = \omega \int_\xi^L y dx \, (\zeta + \theta x - z),$$

$$\Delta M^\xi = \omega \int_\xi^L y dx \, (\zeta + \theta x - z)(x - \xi),$$

(essendo ω il peso per unità di volume del liquido ambiente) con gli integrali estesi dalla considerata sezione trasversale all'estremità dello scafo. Svolgendo queste scritture e ponendo per semplicità le notazioni

$$A^\xi = \int_\xi^L y dx, \qquad M^\xi = \int_\xi^L xy dx, \qquad I^\xi = \int_\xi^L x^2 y dx,$$

$$m^\xi = \int_\xi^L y \cos \pi \frac{x}{\lambda} dx, \qquad p^\xi = \int_\xi^L xy \cos \pi \frac{x}{\lambda} dx,$$

$$n^\xi = \int_\xi^L y \,\mathrm{sen}\, \pi \frac{x}{\lambda} dx, \qquad q^\xi = \int_\xi^L xy \,\mathrm{sen}\, \pi \frac{x}{\lambda} dx,$$

con gli integrali estesi come sopra, si riconoscerà facilmente che le suddette espressioni delle variazioni dello sforzo tagliante e del momento flettente si trasformano nelle (*)

$$\frac{1}{\omega} \Delta T^\xi = \zeta A^\xi + \theta M^\xi - r\left(m^\xi \cos \pi \frac{X}{\lambda} + n^\xi \,\mathrm{sen}\, \pi \frac{X}{\lambda}\right),$$

$$\frac{1}{\omega} \Delta M^\xi = \zeta M^\xi + \theta I^\xi - r\left(p^\xi \cos \pi \frac{X}{\lambda} + q^\xi \,\mathrm{sen}\, \pi \frac{X}{\lambda}\right) - \xi \frac{\Delta T^\xi}{\omega},$$

(*) Il lettore osservi che in queste e in altre successive espressioni, la lettera M comparente nel membro di sinistra in ΔM^ξ sta a designare un momento flettente dovuto a spinte di carena, mentre la stessa lettera com-

le quali, se in esse si sostituiscono per ζ, θ i valori come sopra determinati, potranno prendere la forma definitiva

$$\frac{1}{\omega}\,\frac{\Delta T^{\xi}}{r}=\left(\frac{A^{\xi}}{A}\,m+\frac{M^{\xi}}{I}\,p-m^{\xi}\right)\cos\pi\frac{X}{L}+$$
$$+\left(\frac{A^{\xi}}{A}\,n+\frac{M^{\xi}}{I}\,q-n^{\xi}\right)\cos\pi\frac{X}{L}\,,$$

$$\frac{1}{\omega}\,\frac{\Delta M^{\xi}}{r}=\left(\frac{M^{\xi}}{A}\,m+\frac{I^{\xi}}{I}\,p-p^{\xi}\right)\cos\pi\frac{X}{L}+$$
$$+\left(\frac{M^{\xi}}{A}\,n+\frac{I^{\xi}}{I}\,q-q^{\xi}\right)\cos\pi\frac{X}{L}-\xi\,\frac{\Delta T^{\xi}}{\omega}\,,$$

sotto la quale esse potrebbero servire per tracciare le leggi di variazione dello sforzo di taglio e del momento flettente.

Però dato il fatto ben noto che gli sforzi di taglio hanno importanza relativamente piccola nella robustezza longitudinale degli scafi, può essere opportuno possedere un'espressione, la quale, senza passare esplicitamente per il valore della variazione dello sforzo di taglio, dia senz'altro il valore della variazione del momento flettente. Evidentemente tale espressione, nella sua forma più semplice, sarebbe

$$\frac{1}{\omega}\,\Delta M^{\xi}=(M^{\xi}-\xi A^{\xi})\,\zeta+(I^{\xi}-\xi M^{\xi})\,\theta-$$
$$-\,r\left[(p^{\xi}-\xi m^{\xi})\cos\pi\frac{X}{\lambda}+(q^{\xi}-\xi n^{\xi})\,\mathrm{sen}\,\pi\frac{X}{\lambda}\right],$$

o, sotto altra forma meno semplice ma più esplicita,

$$\frac{1}{\omega}\,\frac{\Delta M^{\xi}}{r}=\left[\frac{M^{\xi}-\xi A^{\xi}}{A}\,m+\frac{I^{\xi}-\xi M^{\xi}}{I}\,p-(p^{\xi}-\xi m^{\xi})\right]\cos\pi\frac{X}{\lambda}+$$
$$+\left[\frac{M^{\xi}-\xi A^{\xi}}{A}\,n+\frac{I^{\xi}-\xi M^{\xi}}{I}\,q-(q^{\xi}-\xi n_{\xi})\right]\mathrm{sen}\,\pi\frac{X}{\lambda}\,.$$

---

parente nei membri di destra, per es. in θM^{ξ}, sta a designare un momento statico di una porzione di galleggiamento. Sarebbe stato desiderabile dare alla stessa lettera un aspetto tipografico differente nei due casi; basta però aver richiamata l'attenzione sul fatto perchè ogni possibilità di confusione resti evitata.

§ 4. — Se in questa o nella precedente espressione noi facciamo

$$X = \text{cost},$$

cioè supponiamo il profilo ondoso irrigidito in una certa posizione, e facciamo variare successivamente la ξ, allora nella serie dei valori ΔM^{ξ} portati in ordinata sulle ξ prese come ascisse, noi veniamo a ottenere il *diagramma delle variazioni di momento flettente* per l'onda supposta *fissa* in una certa posizione lungo i fianchi dello scafo.

Se invece nelle medesime espressioni noi facciamo

$$\xi = \text{cost},$$

cioè supponiamo di fissare l'attenzione sopra una assegnata sezione dello scafo e facciamo variare successivamente la X, allora nella serie dei valori di ΔM^{ξ} portati in ordinata sulle X prese come ascisse, noi veniamo a ottenere la *linea d'influenza per le variazioni di momento flettente* prodotte sulla assegnata sezione dello scafo dall'onda *viaggiante* lungo i fianchi dello scafo.

Tutta la precedente ricerca non è che il risultato della combinazione, con semplificazioni, dei criteri e procedimenti seguìti in altro mio lavoro (*), nel quale sono studiate le variazioni di sforzo di taglio e di momento flettente prodotte in uno scafo dall'imbarco di un carico concentrato, coi criteri e procedimenti adottati dal russo Kriloff in una sua esposizione (**) della teoria del beccheggio in mare ondoso.

§ 5. — Se sulle linee d'influenza relative alle successive sezioni ξ dello scafo noi rileviamo i punti di ordinata massima e portiamo i corrispondenti valori $\Delta M^{\xi}_{\max}$ in ordinata sui valori delle ξ presi come ascisse, noi otteniamo un *diagramma delle variazioni massime di momento flettente* prodotte sulle sin-

(*) Scribanti, *Contribution à l'étude des efforts tranchants et des moments fléchissants dans les coques des navires.* " Bulletin de l'Association Technique Maritime ", vol. n° 16, année 1906.

(**) Kriloff, *Théorie du tangage sur mer houleuse.* Ibid., vol. n° 7, année 1896.

gole sezioni dello scafo dal passaggio dell'onda ossia dall'onda viaggiante.

Se, supposto disegnato coi consueti procedimenti un diagramma avente, sulle singole ascisse ξ, per ordinate i valori M^ξ dei momenti flettenti che sulla corrispondente sezione operano nella nave liberamente galleggiante in acqua calma; in altri termini, se, supposto disegnato il diagramma dei momenti flettenti in acqua calma, noi formiamo altri due diagrammi aventi in ordinata sulla stessa ascissa ξ i valori

$$M' = M^\xi + \Delta M^\xi_{\max}, \qquad M'' = M^\xi - \Delta M^\xi_{\max},$$

noi avremo con ciò ottenuto i *diagrammi dei momenti massimi*

d'inarcamento   d'insellamento

prodotti sulle singole sezioni di scafo dall'*onda viaggiante.* Che se, con riferimento a quanto in sostanza fa l'ordinario procedimento di verifica della robustezza longitudinale degli scafi, considerate le ordinate locali (*)

$$\Delta M^\xi_{X=L}, \qquad \Delta M^\xi_{X=0}$$

delle curve delle variazioni di momento flettente per la nave fissa rispettivamente

sul colmo   sulla gola

di un'onda, si fossero formati due diagrammi di ordinata locale

$$\mathfrak{M}' = M^\xi + \Delta M^\xi_{X=L}, \qquad \mathfrak{M}'' = M^\xi - \Delta M^\xi_{X=0},$$

questi diagrammi darebbero i *momenti locali*

d'inarcamento   d'insellamento

(*) È ovvio che, in conseguenza della nostra ipotesi circa la verticabilità dei fianchi dello scafo nei dintorni del galleggiamento iniziale, i valori assoluti delle variazioni sul colmo e sulla gola dell'onda risulteranno fra loro coincidenti, onde sarà qui $\Delta M^\xi_{X=L} = \Delta M^\xi_{X=0}$.

prodotti sulle singole sezioni di scafo dall'*onda fissa* in ciascuna delle posizioni estreme qui considerate. In generale risulterà, in valore assoluto,

$$M' > \mathfrak{M}', \qquad M'' > \mathfrak{M}'',$$

ossia le ordinate locali dei momenti massimi provocati, tanto in inarcamento quanto in insellamento, dall'onda viaggiante risulteranno maggiori di quelle dei momenti localmente provocati sulla nave fissa sul colmo o sulla gola dell'onda. Nell'accertamento del valore e del modo di distribuzione delle differenze fra tali ordinate sta la ragione di essere del presente studio.

§ 6. — Lo scafo investito longitudinalmente da un treno di onde regolari costituisce un caso tipico di trave soggetto ad azioni flettenti ripetute e alternate in conseguenza del continuato e ritmico passaggio di ciascuna sezione da azioni locali di inarcamento ad azioni di insellamento. Sembra pertanto pienamente plausibile che precisamente al trave scafo vengano applicate le leggi usualmente accolte circa le sollecitazioni ripetute dei travi, e che a tale uopo la verifica della robustezza longitudinale di uno scafo alla flessione venga fatta immaginando lo scafo stesso come soggetto ad un momento ideale distribuito secondo la legge

$$M_i = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\frac{M'}{M''}} M',$$

la quale non fa che trasferire al bastimento una nota legge usata per le travi ordinarie.

Per semplicità di esposizione noi abbiamo qui considerati soltanto dei momenti flettenti, prendendo successivamente in esame dei momenti flettenti locali in acqua calma, delle variazioni locali di momento flettente dovute ad una data posizione del profilo ondoso, dei momenti locali d'inarcamento e insellamento provocati da due cospicue posizioni dell'onda, dei momenti massimi di arco e di sella, e infine dei momenti massimi ideali prodotti dall'onda viaggiante. È però manifesto che, con

semplici mutazioni di parole e di simboli, avremmo potuto parlare di sforzi di taglio in acqua calma, delle loro variazioni locali, dei loro massimi positivi e negativi, e degli sforzi di taglio ideali agli effetti della ripetizione e alternazione delle azioni.

§ 7. — Nel multiforme variare delle molte grandezze dalle quali dipendono ΔT^{ξ}, ΔM^{ξ} giusta le espressioni sopra stabilite, non è facile arguire dalla semplice ispezione di queste quale sia l'andamento delle leggi esprimenti le variazioni dello sforzo tagliante e del momento flettente, sia sotto la forma di diagrammi, sia sotto quella di linee d'influenza. Gioverà dunque che noi illustriamo tale andamento mediante leggi grafiche desunte applicando le espressioni come sopra stabilite a un esempio concreto (*).

Scegliamo come tale quello offerto dallo scafo di un bastimento a vapore avente le dimensioni principali

$$\text{Lungh.} = 126^{\text{m}},00\,, \qquad \text{Largh.} = 15^{\text{m}},20\,, \qquad \text{Alt.} = 9^{\text{m}},45\,,$$

e galleggiante in acqua calma marina con un dislocamento di circa 11000 tonn., avendo per semifigura di galleggiamento quella rappresentata in fig. 2 dalle ordinate

$$y = f(x)$$

e dando luogo, nelle assunte condizioni di carico in acqua calma, a diagrammi

dello sforzo tagliante — del momento flettente

rispettivamente di ordinata generica

$$T^{\xi}\,, \qquad M^{\xi}\,,$$

come in fig. 8 e 9 (v. pag. 73 e 74).

(*) Tutte le operazioni relative all'esempio concreto qui presentato sono state eseguite dal signor Camillo Semenza, mio allievo nel Corso di Architettura navale presso la Regia Scuola Navale Superiore di Genova.

Si suppone tale piroscafo investito, nel senso di poppa-prua, da un treno regolare di onde sinusoidali di semialtezza $r = 3^m,15$ (cioè di altezza pari a un ventesimo della lunghezza dello scafo) e di semilunghezza precisamente eguale a quella dello scafo stesso ($\lambda = L = 63^m,00$).

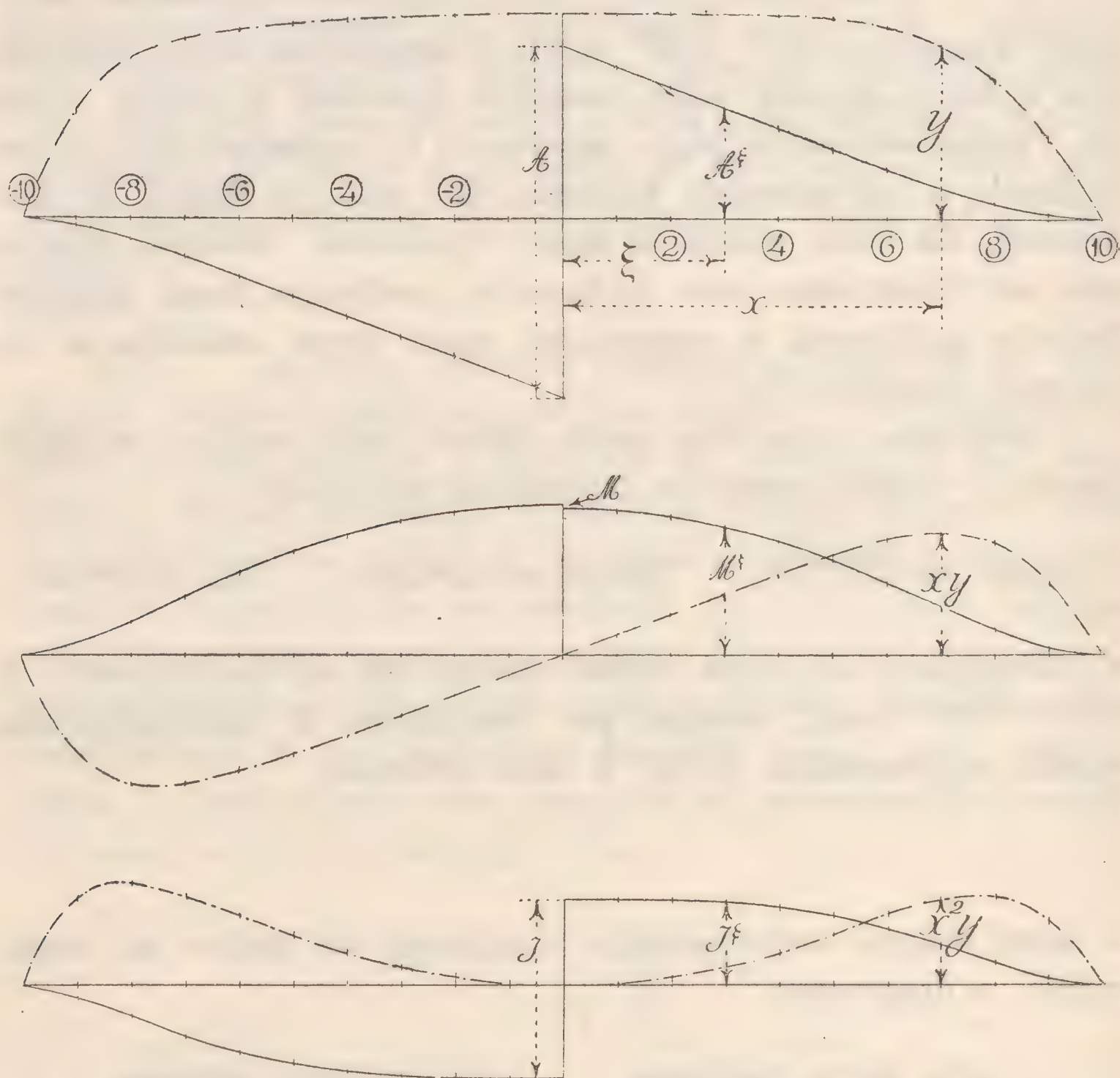



Fig. 2.

Considerate, come nelle linee a tratto e punto della fig. 2, le curve di ordinata generica

$$y\,, \qquad xy\,, \qquad x^2y\,,$$

se ne sono formate partendo da ambe le estremità, come nelle

linee piene della stessa figura, le curve integrali, ottenendo così le funzioni e grandezze

$$A^{\xi},\ A\,, \qquad M^{\xi},\ M\,, \qquad I^{\xi},\ I\,.$$

Similmente, considerate, come nelle linee a tratto e punto della fig. 3, le curve di ordinata generica

$$y \cos \pi \frac{x}{\lambda}\,, \qquad y \operatorname{sen} \pi \frac{x}{\lambda}\,, \qquad xy \cos \pi \frac{x}{\lambda}\,, \qquad xy \operatorname{sen} \pi \frac{x}{\lambda}\,,$$

se ne sono formate, partendo da ambe le estremità come nelle linee piene della stessa figura, le curve integrali, ottenendo così le funzioni e grandezze

$$m^{\xi},\ m\,, \qquad n^{\xi},\ n\,, \qquad p^{\xi},\ p\,, \qquad q^{\xi},\ q\,,$$

avuto, nella interpretazione delle stesse, il debito riguardo ai segni.

Formata una tabella dei valori numerici delle grandezze

$$m\,, \qquad n\,, \qquad p\,, \qquad q$$

e delle funzioni

$$m^{\xi}, \qquad n^{\xi}, \qquad p^{\xi}, \qquad q^{\xi}$$

corrispondentemente alle sezioni di scafo definite dalle ascisse

$$\xi/\lambda = -1{,}0\ ; -\,{,}8\ ; -\,{,}6 \ldots\ 0 \ldots\ +\,{,}6\ ; +\,{,}8\ ; +1{,}0$$

sono stati calcolati i valori

$$\zeta = \frac{r}{A}\left(m \cos \pi \frac{X}{L} + n \operatorname{sen} \pi \frac{X}{L}\right),$$

$$\theta = \frac{r}{I}\left(p \cos \pi \frac{X}{L} + q \operatorname{sen} \pi \frac{X}{L}\right)$$

della soprimmersione parallela e della inclinazione longitudinale

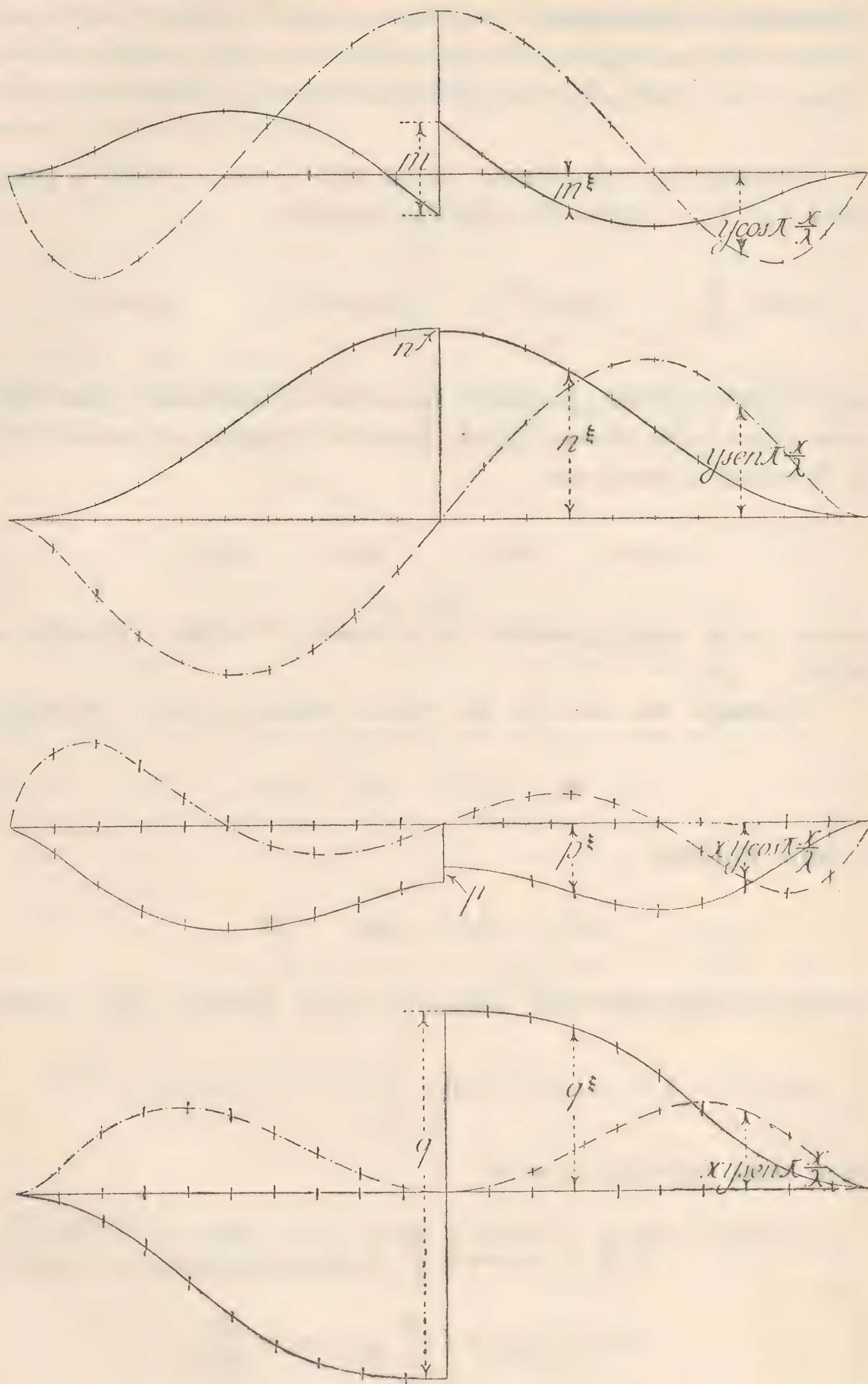



Fig. 3.

assunte dalla nave allorchè la gola dell'onda si trova in corrispondenza delle sezioni di scafo definite dalle ascisse

$$\frac{X}{L} = -1,0\,;\,-,8\,;\,-,6 \ldots\, 0 \ldots +,6\,;\,+,8\,;\,+1,0.$$

Indi in applicazione delle relazioni stabilite nel testo

$$\frac{1}{\omega}\,\Delta T^{\xi} = \zeta A^{\xi} + \theta M^{\xi} - r\left(m^{\xi}\cos\pi\frac{X}{L} + n^{\xi}\operatorname{sen}\pi\frac{X}{L}\right),$$

$$\frac{1}{\omega}\Delta M^{\xi} = \zeta\,(M^{\xi} - \xi A^{\xi}) + \theta\,(I^{\xi} - \xi M^{\xi}) -$$

$$- r\,(p^{\xi} - \xi m^{\xi})\cos\pi\frac{X}{L} - r\,(q^{\xi} - \xi n^{\xi})\operatorname{sen}\pi\frac{X}{L}$$

sono state formate tabelle dei valori numerici (*) delle variazioni

$$\Delta T^{\xi}, \qquad \Delta M^{\xi}$$

producentisi nello sforzo tagliante e nel momento flettente sulle singole sezioni ξ dello scafo in corrispondenza delle singole posizioni X della gola dell'onda.

Mediante tali valori sono stati formati come in

(*) È superfluo avvertire che, indipendentemente dall'applicazione numerica delle formole qui riportate, il calcolo delle variazioni di sforzo tagliante e di momento flettente avrebbe potuto essere condotto graficamente costruendo i diagrammi integrali primo e secondo di un diagramma ausiliario delle variazioni locali di spinta da formare mediante la cognizione della linea di galleggiamento e della posizione istantanea d'equilibrio del profilo dell'onda. A riprova, si riconoscerà agevolmente che eseguendo l'integrale di uno qualsiasi dei nostri diagrammi delle ΔT^{ξ} si cade precisamente nel corrispondente diagramma delle ΔM^{ξ}.

Fig. 4

il fascio dei *diagrammi delle variazioni dello sforzo di taglio* sulle singole sezioni dello scafo per l'onda supposta *fissa* lungo i fianchi dello scafo con la gola nella posizione indicata con $[X]$ in ciascuna linea del fascio (*).

Fig. 5

il fascio delle *linee d'influenza per la variazione dello sforzo di taglio* sulla sezione di scafo segnata con $[\xi]$ accanto a ciascuna linea del fascio e per l'onda supposta *mobile* lungo i fianchi dello scafo (*).

Similmente sono stati formati come in

Fig. 6

il fascio dei *diagrammi delle variazioni di momento flettente* sulle singole sezioni di scafo per l'onda supposta *fissa* lungo i fianchi dello scafo con la gola in corrispondenza della posizione segnata con $[X]$ accanto a ciascuna linea del fascio.

Fig. 7

il fascio delle *linee d'influenza per le variazioni di momento* sulla sezione di scafo segnata con $[\xi]$ accanto a ciascuna linea del fascio e per l'onda supposta *mobile* lungo i fianchi dello scafo.

Indi avendo tracciate previamente le curve di ordinata locale

$$T^{\xi}, \qquad M^{\xi}$$

relative al bastimento galleggiante in acqua calma come in fig. 8 e 9 (vedi pag. 18 e 19) si sono rilevati i punti di ordinata massima nelle singole linee di influenza e, mediante le loro ordinate, sono state formate le curve di ordinata

$$\Delta T^{\xi}_{\max}, \qquad \Delta M^{\xi}_{\max},$$

venendo così a ottenere i *diagrammi delle variazioni massime di*

sforzo tagliante *momento flettente*

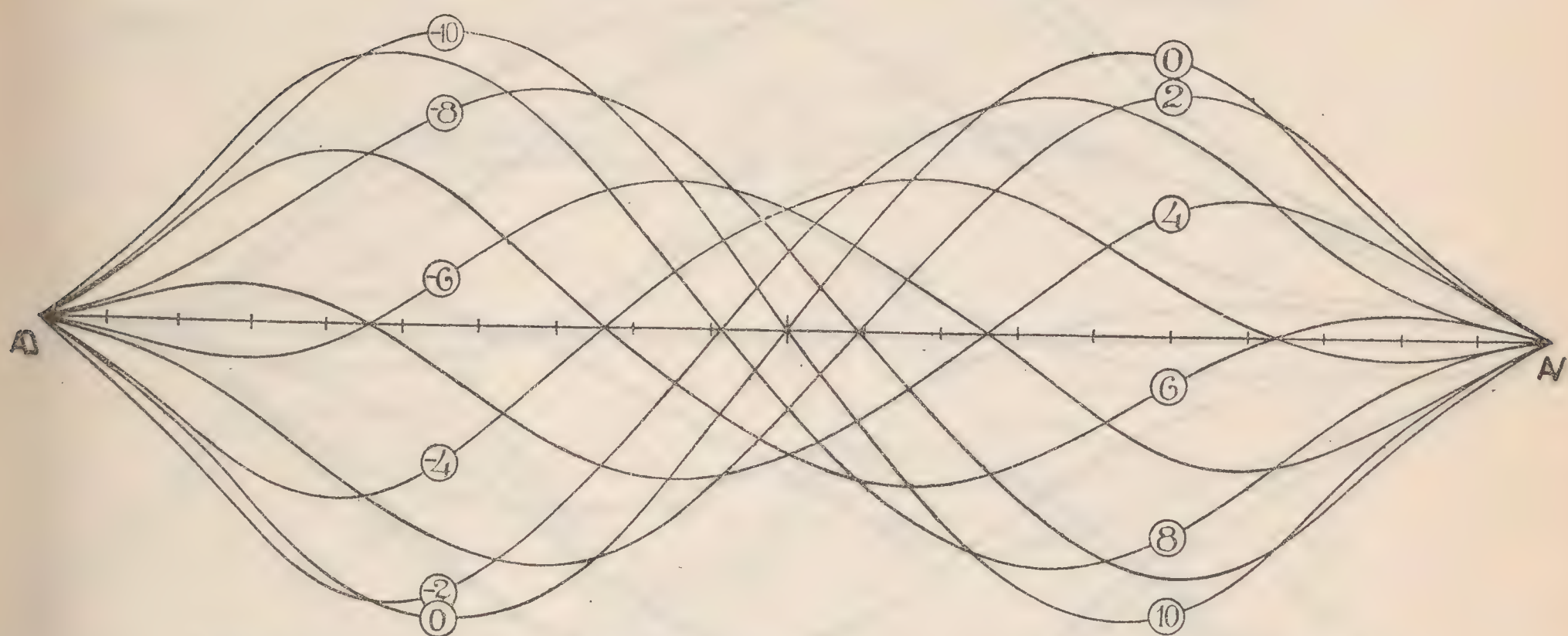
(*) Nelle figure in luogo delle notazioni $[X]$ e $[\xi]$ si sono usati i corrispondenti numeri inscritti entro un circoletto.

DIAGRAMMI DELLE VARIAZIONI DELLO SFORZO DI TAGLIO ΔT^{ξ}
PER L'ONDA CON LA GOLA IN (X)

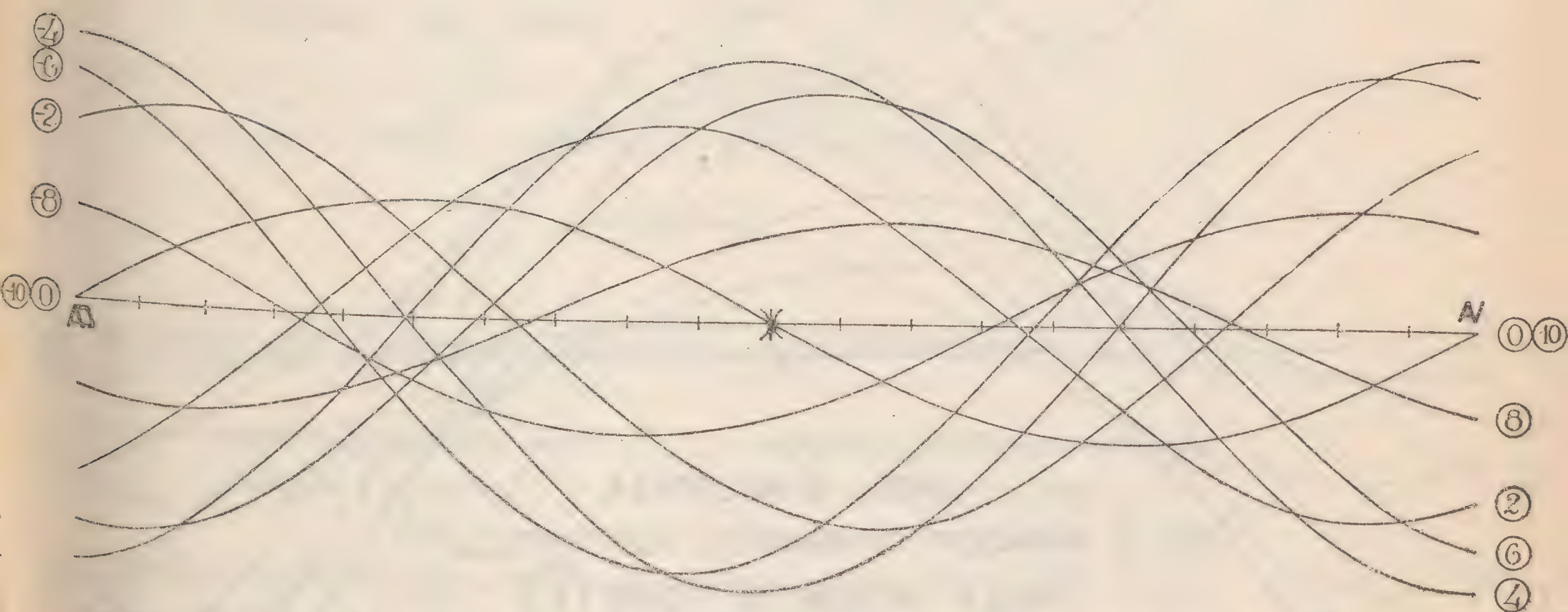
Fig. 4.

LINEE D'INFLUENZA PER LE VARIAZIONI DELLO SFORZO DI TAGLIO ΔT^{ξ}
SULLE SEZIONI DI SCAFO (ξ)

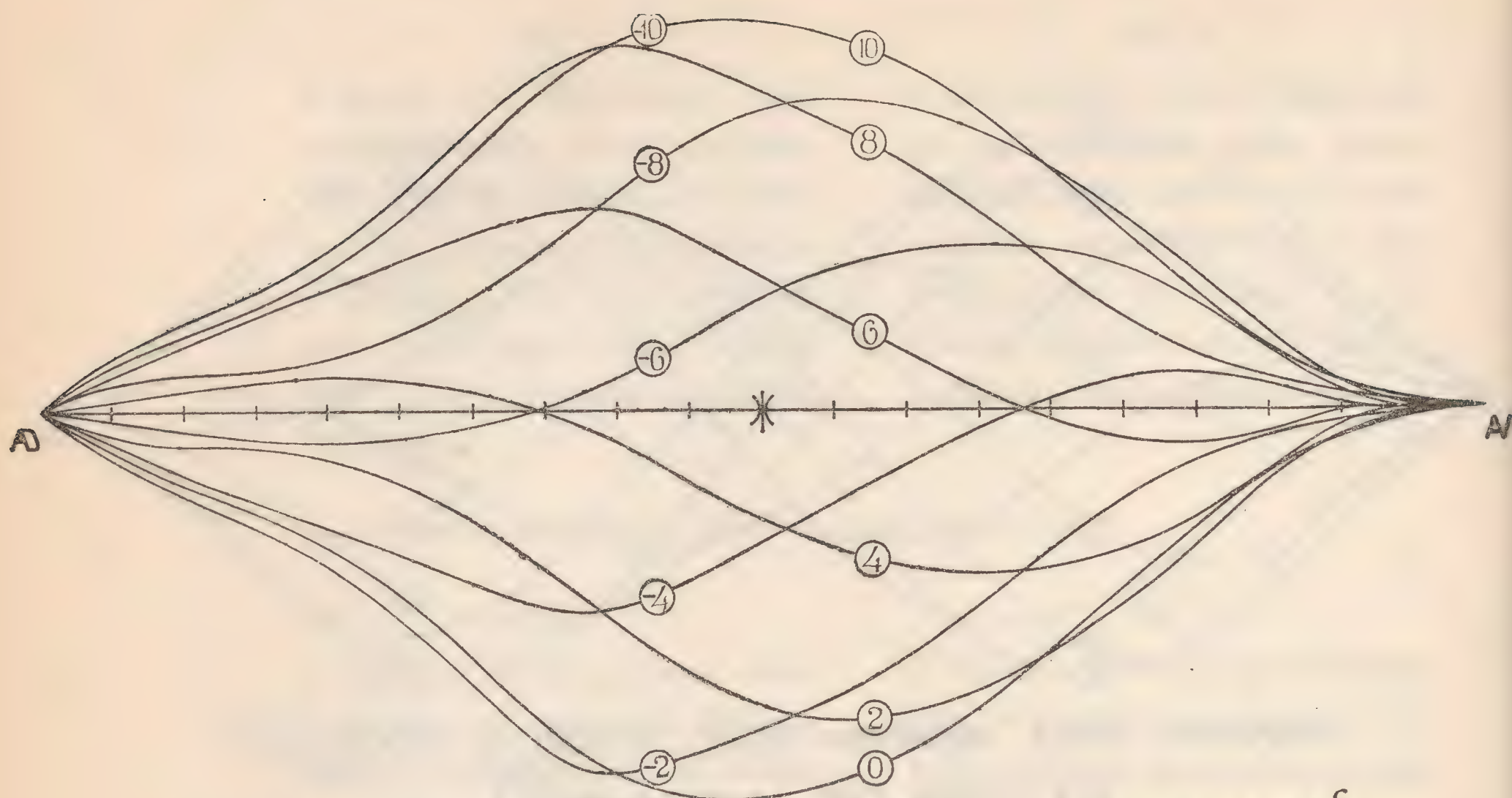
Fig. 5.

DIAGRAMMI DELLE VARIAZIONI DI MOMENTO FLETTENTE ΔM^{ξ}
PER L'ONDA CON LA GOLA IN $\textcircled{X}$

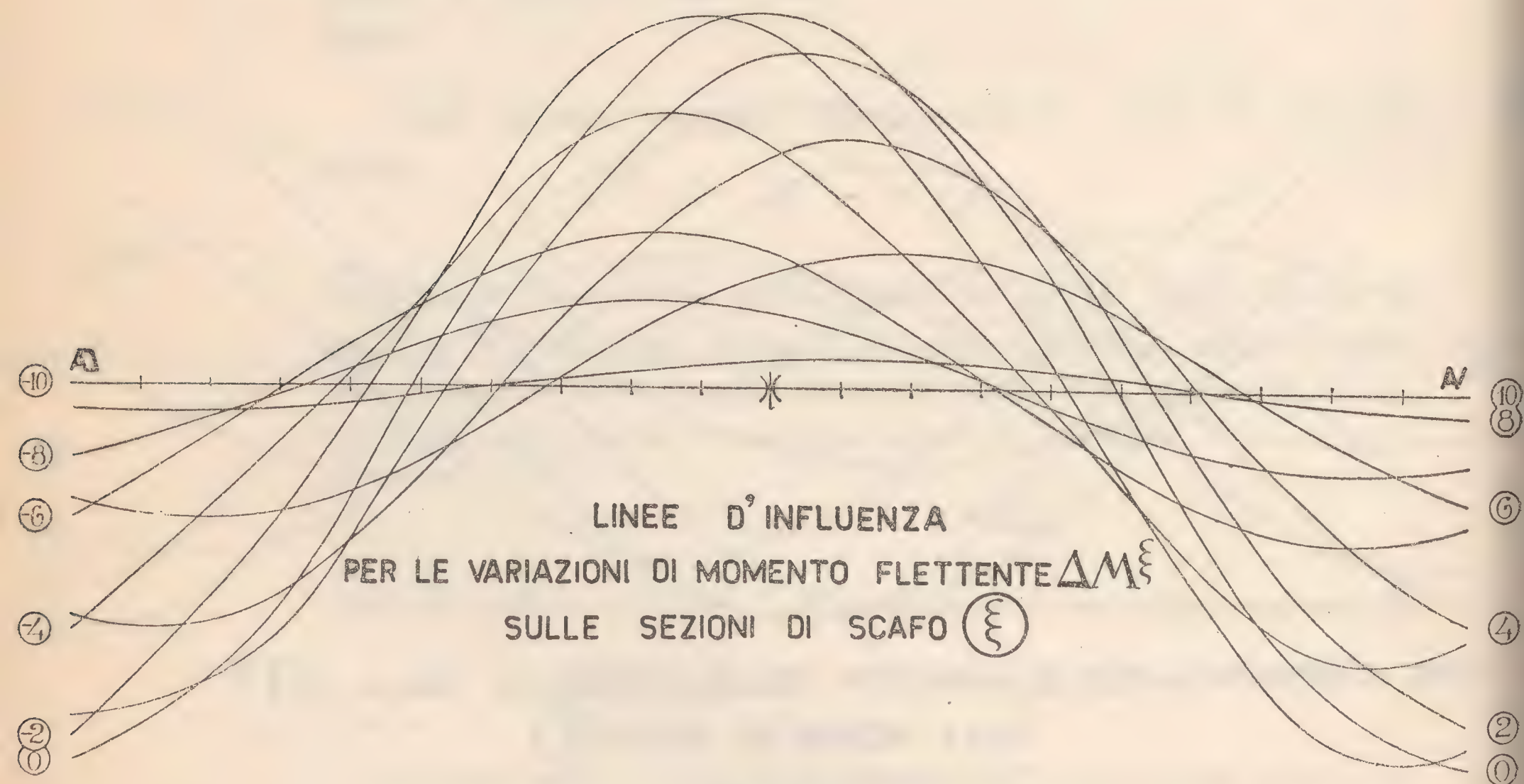
Fig. 6.

LINEE D'INFLUENZA
PER LE VARIAZIONI DI MOMENTO FLETTENTE ΔM^{ξ}
SULLE SEZIONI DI SCAFO $\textcircled{\xi}$

Fig. 7.

prodotte sulle singole sezioni di scafo dal passaggio dell'onda. Poi sulle stesse figure sono state formate le curve di ordinata locale

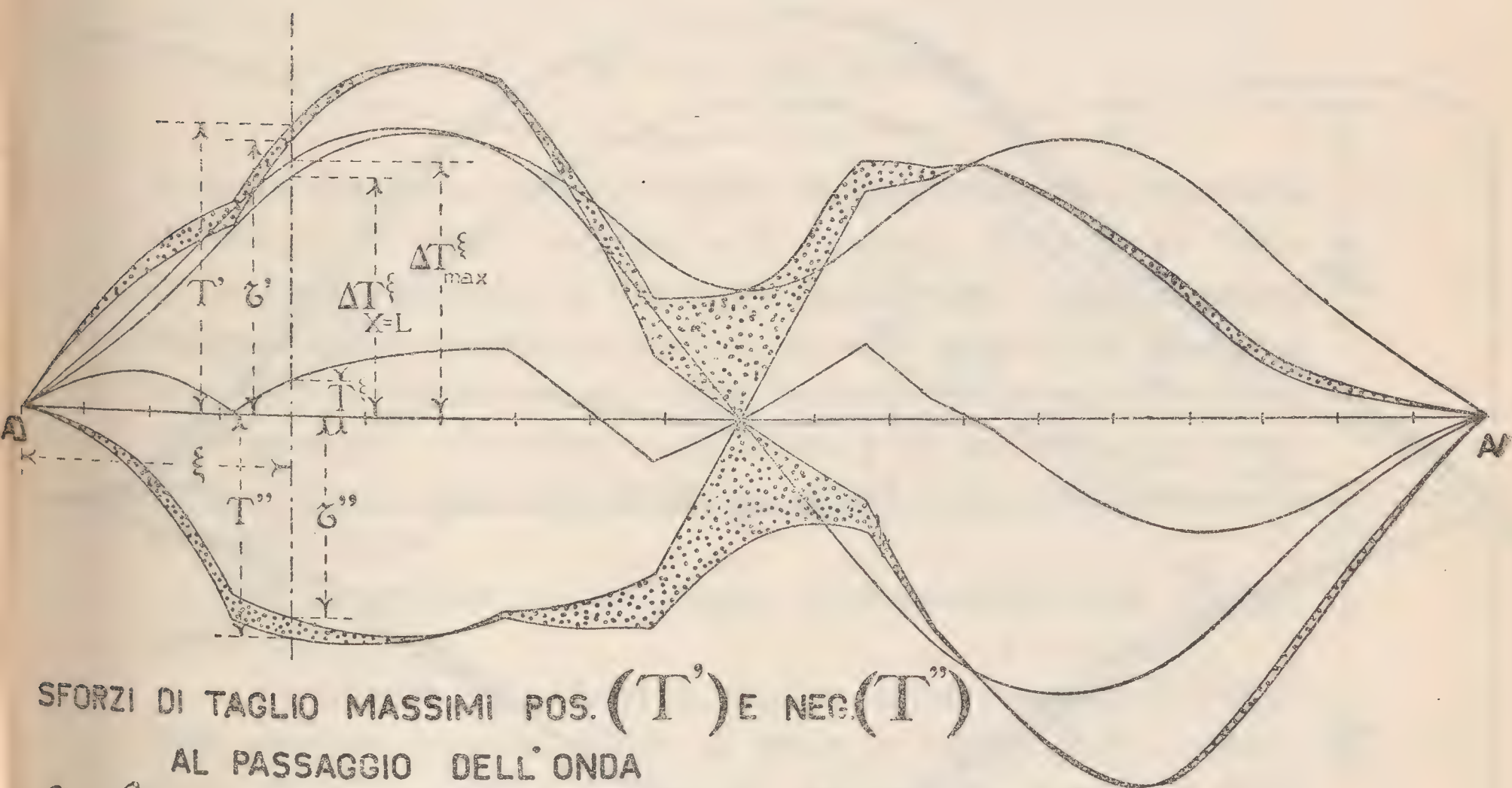
$$\left.\begin{matrix} T' \\ T'' \end{matrix}\right\} = T^{\xi} \pm \Delta T^{\xi}{}_{\max}, \qquad \left.\begin{matrix} M' \\ M'' \end{matrix}\right\} = M^{\xi} \pm \Delta M^{\xi}{}_{\max},$$

SFORZI DI TAGLIO MASSIMI POS. (T') E NEG. (T'')
AL PASSAGGIO DELL' ONDA
Confronto con gli sforzi di taglio
sul colmo (τ') e sulla gola (τ'') dell'onda

Fig. 8.

venendo così a ottenere diagrammi rappresentanti

gli sforzi taglianti massimi positivi e negativi	*i momenti flettenti massimi di arco e di sella*

prodotti dal passaggio dell'onda sulle singole sezioni dello scafo.

Sono inoltre stati riportati, sempre sulle fig. 8 e 9, i diagrammi di ordinata locale

$$\Delta T^{\xi}{}_{X=\left\{\begin{smallmatrix}L\\0\end{smallmatrix}\right.}, \qquad \Delta M^{\xi}{}_{X=\left\{\begin{smallmatrix}L\\0\end{smallmatrix}\right.}$$

indicanti le variazioni prodotte sulle singole sezioni di scafo dall'onda supposta fissa col colmo o con la gola al mezzo della nave, e sono stati formati diagrammi ausiliarii di ordinata locale

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{T}' \\ \mathfrak{T}''\end{matrix}\right\} = T^{\xi} \pm \Delta T^{\xi}{}_{X=L}\,, \qquad \left.\begin{matrix}\mathfrak{M}' \\ \mathfrak{M}''\end{matrix}\right\} = M^{\xi} \pm \Delta M^{\xi}{}_{X=L}\,,$$

MOMENTI FLETTENTI MASSIMI D'INARC. ($\mathcal{M}'$) E D'INSELL. ($\mathcal{M}''$) AL PASSAGGIO DELL'ONDA

Confronto coi momenti flettenti sul colmo ($\mathfrak{M}'$) e sulla gola ($\mathfrak{M}''$) dell'onda

Fig. 9.

rappresentanti gli sforzi di taglio e i momenti flettenti prodotti sulle singole sezioni di scafo dall'onda fissa nelle due posizioni estreme usualmente considerate, corrispondenti al caso in cui il

mezzo della nave è posto rispettivamente sul colmo e sulla gola dell'onda.

Come è accennato nel corpo della presente Nota, lo scopo ultimo di questa consiste nell'accertamento, in decorso e in entità, della differenza fra i diagrammi

$$T' \text{ e } \mathfrak{T}', \qquad M' \text{ e } \mathfrak{M}',$$

$$T'' \text{ e } \mathfrak{T}'', \qquad M'' \text{ e } \mathfrak{M}'',$$

la quale differenza misura l'errore di apprezzamento che nella valutazione di sforzi taglianti e di momenti flettenti si viene commettendo allorchè, in luogo di considerare valori massimi derivanti dalla considerazione di un'onda mobile da poppa a prua, si considerano valori locali derivanti dalla considerazione della nave sul solo colmo o sulla sola gola dell'onda. Per maggiore chiarezza tali zone differenze si trovano punteggiate nelle accennate figure.

Ora l'ispezione di tali zone punteggiate indica chiaramente che:

a) Quanto agli sforzi di taglio, ferma restando la verità della consueta nozione giusta la quale le regioni di più intenso sforzo di taglio cadono a circa un quarto della lunghezza dello scafo da ciascuna estremità, vuole essere modificata la consueta affermazione secondo la quale nei dintorni del mezzo dello scafo si avrebbe uno sforzo di taglio nullo; infatti l'ispezione della fig. 8 indica che nei dintorni del mezzo si produce, per effetto del passaggio dell'onda, una regione di sforzo di taglio non soltanto non nullo, ma anche assai apprezzabile, essendo ivi la intensità dello sforzo di taglio pari a circa un terzo dello sforzo di taglio nella sezione più sollecitata al taglio. Questa deduzione può spiegare come mai la pratica delle costruzioni navali esiga che alle chiodature dei giunti longitudinali nella regione del ginocchio al mezzo della nave si dia una attenzione essenzialmente non diversa da quella che è richiesta dalle omonime chiodature nelle regioni circostanti al quarto della lunghezza dello scafo da ciascun estremo, sezioni che sole, nell'usuale trattazione, appariscono come soggette a forte cimento di taglio.

b) Quanto ai momenti flettenti, ferma restando la verità della consueta nozione giusta la quale la regione di più intenso momento flettente cade negli immediati dintorni della sezione di mezzo dello scafo, l'ispezione della fig. 9 indica che le linee dei momenti flettenti massimi, sì di inarcamento che di insellamento, al passaggio dell'onda si mantengono, tanto dal mezzo verso prua quanto dal mezzo verso poppa, esterne a quelle dei consueti momenti di arco e di sella. Per migliore illustrazione, in fig. 9 si sono disegnate due linee ausiliarie di ordinate locali

$$\frac{M'}{\mathfrak{M}'}, \qquad \frac{M''}{\mathfrak{M}''},$$

le quali individuano anche meglio il comportamento dei momenti massimi dipendenti dall'onda viaggiante rispetto a quelli dovuti a una posizione fissa di colmo e di gola. Si riconosce subito che l'eccedenza è maggiore quanto all'insellamento che quanto all'inarcamento, che essa è maggiore a prua che a poppa e che essa, mentre è nulla o assai poco sensibile in tutta la metà centrale dello scafo, diventa assai apprezzabile ai masconi (dove, nel caso concreto, eccede di un buon terzo il valore ordinariamente stimato).

Tutte queste deduzioni concorrono a mostrare che, quando la struttura dello scafo è studiata (come sempre dovrebbe essere e come vuole la tendenza talora inconscia della pratica delle costruzioni navali) in modo da far avvicinare lo scafo a essere longitudinalmente un trave di uniforme resistenza alla flessione, sarà prudente riferirsi ai momenti massimi locali prodotti dal passaggio dell'onda anzichè agli ordinari massimi di arco e di sella dovuti a un colmo e a una gola d'onda. Inoltre qualora risulti che vi siano speciali ragioni di indebolimento nelle regioni di maggior eccedenza dei momenti massimi dovuti all'onda mobile sui momenti massimi dovuti all'onda fissa (quali ragioni possono essere determinate dalla presenza della testa di un cassero, dall'assenza di ponti sotto coperta, dalla eccezionale ampiezza di boccaporti in coperta), emerge dall'ispezione della figura che sarà sempre prudente assicurare la robustezza dello scafo in detta regione, provvedendo opportuni rinforzi locali, i quali sappiano contrastare gli effetti locali di flessione e in

specie di insellamento. Baddoppiamenti locali di cinte e trincarini e, se occorre, del ponte di coperta saranno particolarmente utili.

Mediante le coppie di valori locari

$$T', \; T'', \qquad M', \; M'',$$

sono stati calcolati i valori

$$T_i = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\frac{T'}{T''}} T', \qquad M_i = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\frac{M'}{M''}} M',$$

i quali, portati in ordinata sulle corrispondenti sezioni di scafo come in fig. 10.

SFORZI DI TAGLIO MASSIMI IDEALI (T_i) E MOMENTI FLETTENTI MASSIMI IDEALI (M_i) AL PASSAGGIO DELL'ONDA

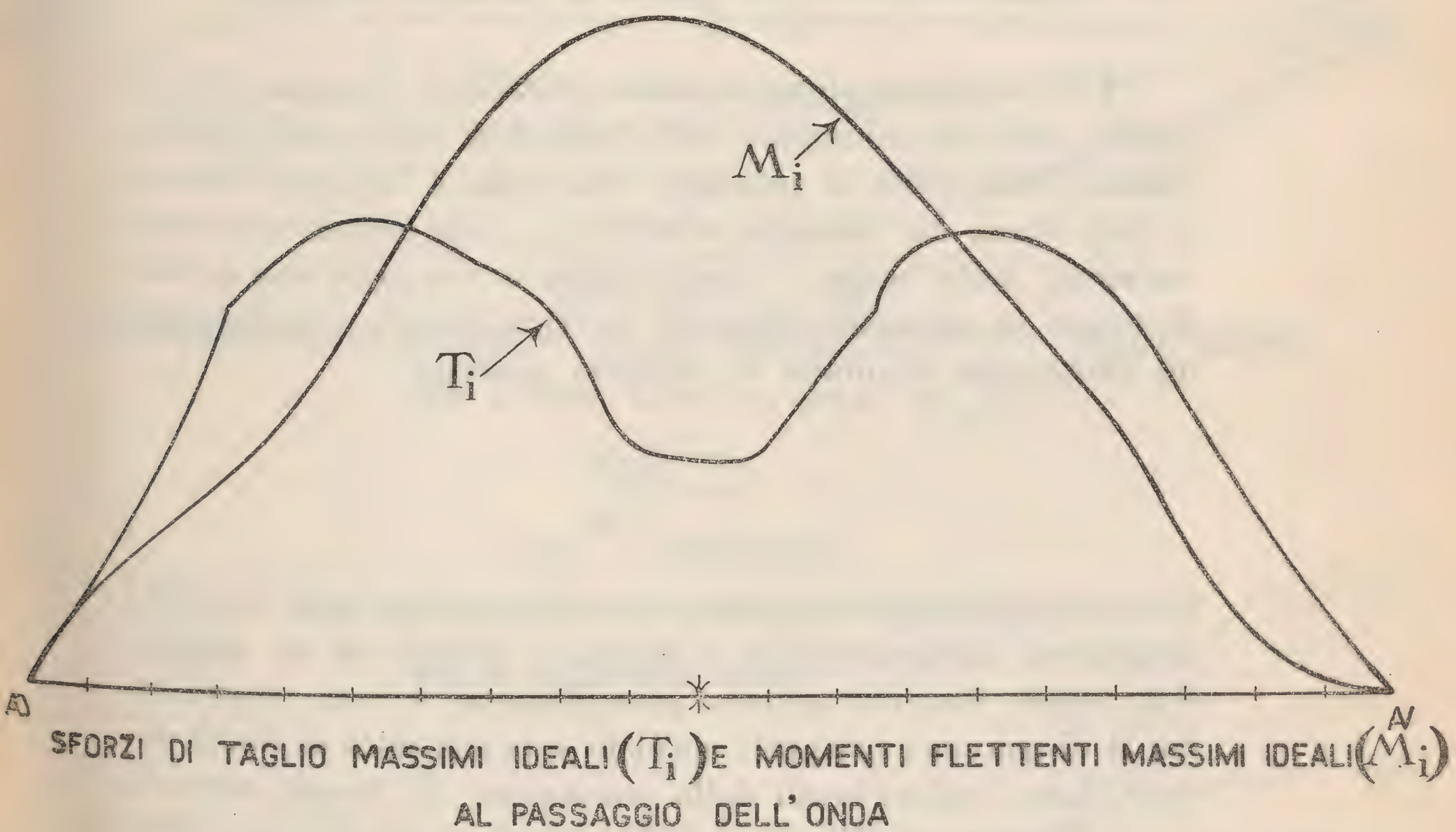



Fig. 10.

hanno dato luogo ai diagrammi

degli sforzi taglianti massimi ideali	*dei momenti flettenti massimi ideali*

nei quali è tenuto conto della ripetizione e alternazione delle azioni sollecitanti al passaggio dell' onda. Noi crediamo che questi sforzi e momenti ideali, la cui plausibilità è dubbia anche nella applicazione alle travi ordinarie, non meritino fede nella applicazione allo scafo altrimenti che nell'indicare il deflusso generico dei valori massimi degli sforzi taglianti e dei momenti flettenti lungo lo scafo, non nell'indicare l'intensità di tali valori massimi.

È bene osservare che nella grandezza nella quale tutti i precedenti diagrammi risultano tipograficamente riprodotti in queste pagine, l'interpretazione numerica delle ordinate dei diagrammi stessi può essere fatta tenendo presente che in essi si ha

1 mm = 30 t quanto agli sforzi taglianti
1 mm = 750 t × m quanto ai momenti flettenti.

§ 8. — A complemento delle precedenti ricerche si è proceduto alla determinazione delle variazioni subite dalla freccia elastica dello scafo al passaggio dell'onda. A tale uopo formato il diagramma dei momenti d'inerzia I_ξ delle sezioni trasversali resistenti dello scafo (il quale ultimo aveva nella sua sezione di mezzo un momento d'inerzia di circa 10 m^4), si è disegnato un diagramma ausiliario di ordinata generica

$$z = \frac{\Delta M^\xi}{E I_\xi}$$

(prendendo $E = 20.000.000$ $^t/_{m^2}$), e di esso sono stati formati i diagrammi integrali primo e secondo a partire da un estremo dello scafo. Secondo un noto procedimento, la zona interposta fra il diagramma integrale secondo e la sua retta di chiusa doveva dare i valori locali della (variazione di) freccia elastica.

I diagrammi delle I_ξ e delle z nonchè i due successivi diagrammi integrali vengono qui omessi per economia di spazio. Vengono invece riportati in

Fig. 11

il fascio dei *diagrammi delle variazioni di freccia elastica* sulle singole sezioni dello scafo per l'onda supposta *fissa* nella posizione indicata con $[X]$ accanto a ciascuna linea del fascio.

Fig. 12

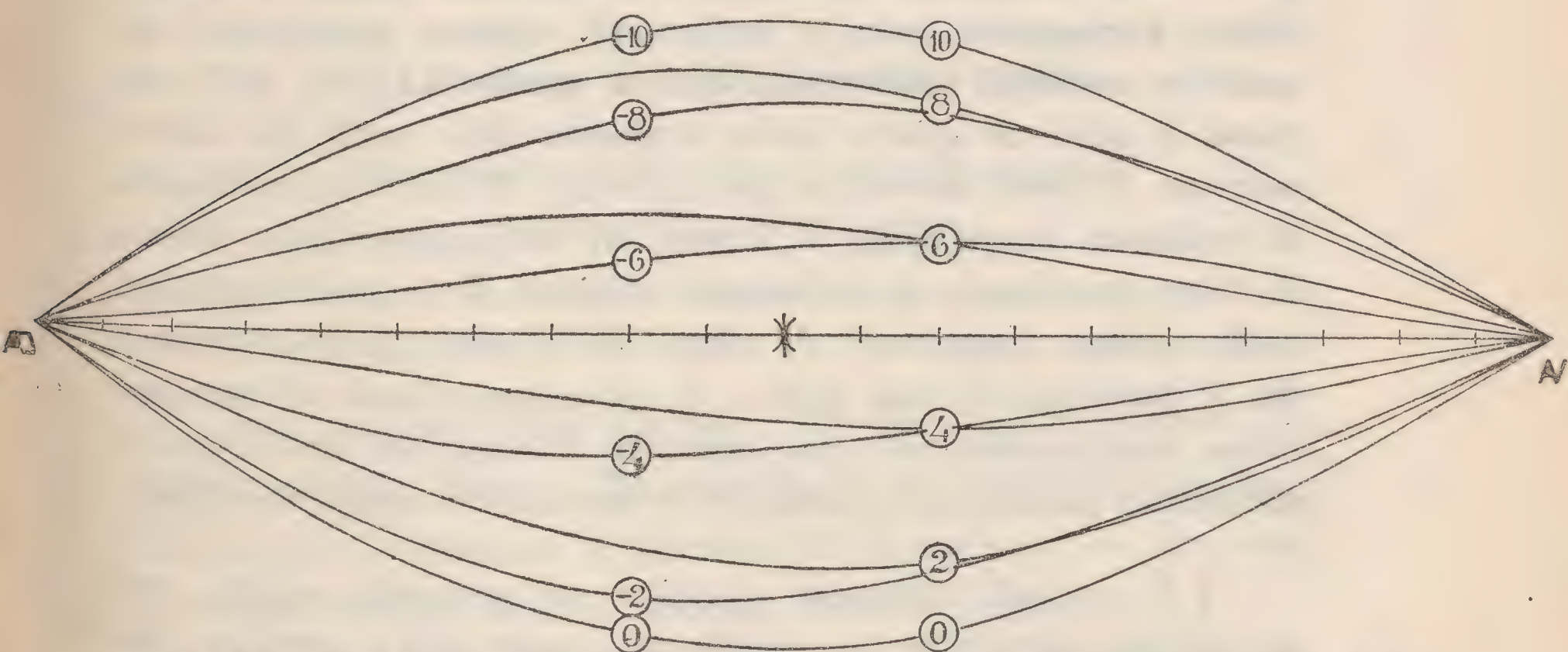
il fascio delle *linee d'influenza per le variazioni di freccia elastica* sulla sezione di scafo segnate con $[\xi]$ accanto a ciascuna linea del fascio, per l'onda supposta *mobile* lungo i fianchi dello scafo.

DIAGRAMMI DELLE VARIAZIONI DELLA FRECCIA ELASTICA DELLO SCAFO PER L'ONDA CON LA GOLA IN (X)

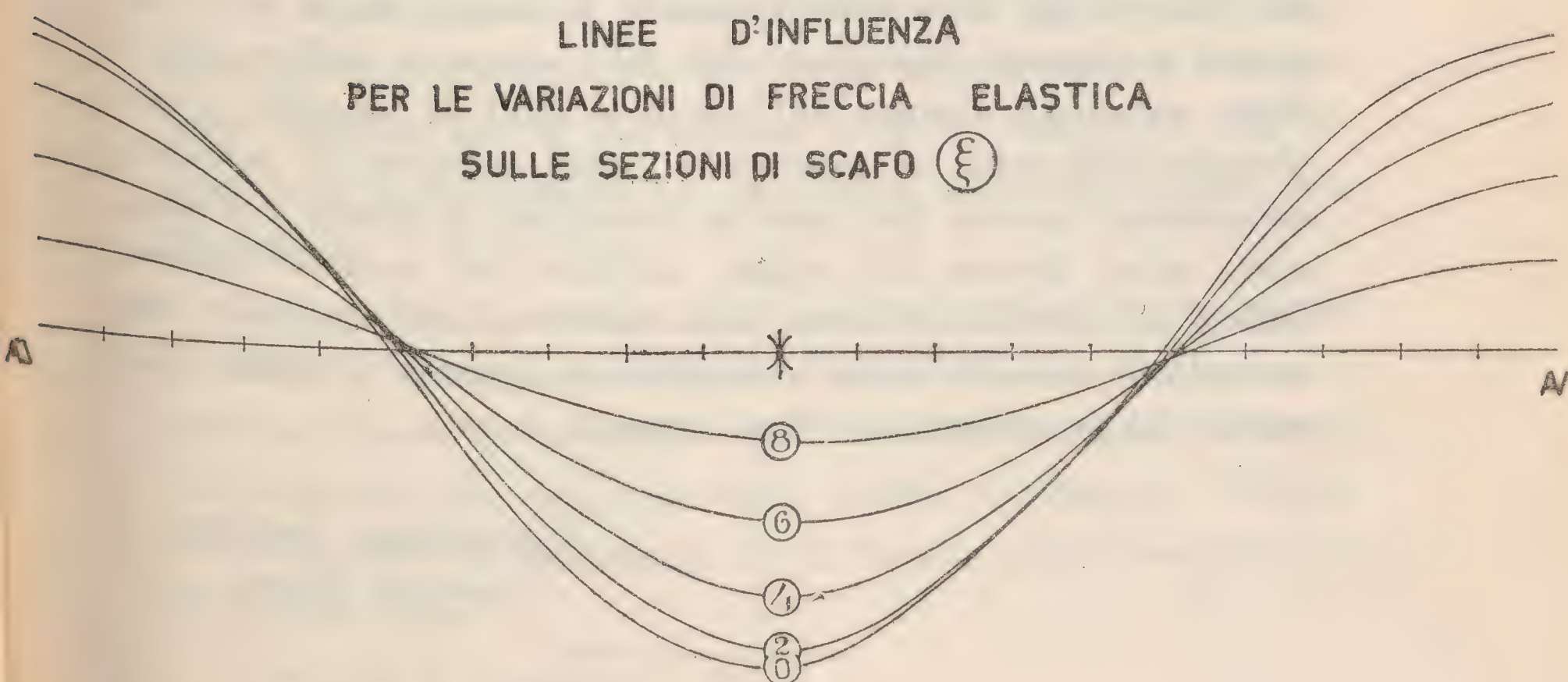
Fig. 11.

LINEE D'INFLUENZA PER LE VARIAZIONI DI FRECCIA ELASTICA SULLE SEZIONI DI SCAFO (ξ)

Fig. 12.

Il fascio dei diagrammi delle variazioni di freccia elastica indica che tutte indistintamente le sezioni dello scafo risentono, quale più quale meno, l'azione dell'onda, qualunque sia la posizione di questa. Il fascio delle linee d'influenza (il quale per ragioni di chiarezza della figura è stato limitato alle sole sezioni del corpo prodiero) indica che le posizioni dell'onda che dànno luogo a turbamenti maggiori della freccia elastica sono quelle per le quali la gola dell'onda passa per le estremità o per il mezzo dello scafo, mentre quelle che dànno luogo ai minori turbamenti (anzi a turbamenti appena apprezzabili su qualsiasi sezione) sono quelle per le quali la gola dell'onda passa a circa un quarto della larghezza dello scafo da ciascun estremo. È bene avvertire che nelle fig. 11 e 12 un millimetro di ordinata rappresenta 7,5 mm. di variazione della freccia in vera grandezza: la pulsazione elastica di un punto qualsiasi della sezione trasversale di mezzo dello scafo, quale si produce fra il passaggio di una gola e di un colmo d'onda al suo traverso, risulterebbe nel caso concreto di circa 400 mm. e cioè di una entità pienamente plausibile in uno scafo a struttura leggera.

§ 9. — Alle deduzioni stabilite nel presente scritto non intendiamo attribuire un significato quantitativo assoluto, ma piuttosto il valore di deduzioni che permettono di meglio apprezzare in modo qualitativo i fenomeni elastici intervenienti negli scafi. Invero nè il profilo delle onde marine è esattamente sinusoidale, nè gli scafi hanno i loro fianchi rettilinei verticali nei dintorni del loro galleggiamento in carico, nè le azioni taglianti e flettenti dipendenti dai fatti dinamici dell'inerzia e della resistenza opposta dall'acqua ai moti di sussulto e beccheggio dello scafo si possono *a priori* ritenere di intensità abbastanza piccola per poterla trascurare di fronte alle omonime azioni dovute alle spinte statiche del menisco ondoso. Quindi alle precedenti conclusioni non vogliamo attribuire che un valore essenzialmente comparativo rispetto a quelle ricavabili dai procedimenti ordinariamente in uso.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 22 Novembre 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: CHIRONI, Direttore della Classe, CARLE, PIZZI, STAMPINI, BRONDI, EINAUDI, BAUDI DI VESME, SCHIAPARELLI, PATETTA e DE SANCTIS in funzione di Segretario. — È scusata l'assenza dei Soci MANNO, RENIER, RUFFINI e SFORZA.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 21 giugno 1914.

Il Presidente porge un saluto ai colleghi e fa auguri di pronta guarigione ai Soci MANNO e RENIER, assenti per malattia.

Si comunicano il R. Decreto con cui fu approvata la elezione del Socio PATETTA e le lettere di ringraziamento del professor PATETTA per la sua nomina a Socio residente e dei Signori LIPPI e MARTINETTI per la nomina a corrispondenti dell'Accademia.

Il Presidente comunica con parole di cordoglio il decesso avvenuto il 20 settembre 1914 del Prof. Michele KERBAKER e quello avvenuto l'8 novembre del Prof. A. D'ANCONA, entrambi Soci nazionali non residenti della nostra Accademia; ricorda inoltre il Socio corrispondente Prof. Fausto LASINIO estintosi il 27 ottobre ultimo.

Si invita il socio PIZZI a commemorare i professori KERBAKER e LASINIO e si delibera di affidare al Socio SFORZA la commemorazione del Prof. D'ANCONA.

Sono presentati i seguenti libri od opuscoli dagli autori inviati in omaggio all'Accademia:

dal Prof. R. SABBADINI la sua *Storia e critica di testi latini* (Catania, Battiato, 1914); i due volumi su *Le scoperte dei codici latini e greci nei secoli XIV e XV* (Firenze, Sansoni, 1905 e 1914) e quattro opuscoli di argomento storico-filologico;

dal Prof. Cosimo BERTACCHI la *Relazione sull'esplorazione italiana e sulle maggiori opere geografiche dovute a iniziativa privata in quest'ultimo quarto di secolo* (Roma, Unione editrice, 1914);

dal Socio corrispondente Giuseppe BIADEGO la *Carta dotale di Flora Betteloni*, 1534 (Verona, Franchini, 1911);

dal Socio corrispondente Aristide MARRE la *Notice des travaux scientifiques et littéraires de M.r A. M.* (Arras, 1911);

dal Prof. Carlo FORMICHI, *Michele Kerbaker 1835-1914* (Torino, Celanza, 1914).

Il Socio STAMPINI, prendendo la parola a proposito degli scritti del Prof. SABBADINI, ne fa caldo elogio.

Per la inserzione negli *Atti* il socio DE SANCTIS a nome del socio RENIER assente presenta una Nota di Mario CASELLA, *La epistola di lu nostru Signuri, testo volgare siciliano del XIV secolo*, e una di Ferdinando NERI, *La famiglia di Golia.*

Per le *Memorie* Accademiche il Socio EINAUDI offre una Monografia del Dottor Giuseppe PRATO, intitolata: *La teoria e la pratica della carta-moneta, prima degli assegnati rivoluzionari: un trattato inedito di G. B. Vasco.*

Il Presidente invita i Soci EINAUDI e PATETTA a riferirne in una prossima adunanza.

LETTURE

La epistola di lu nostru Signuri.

TESTO VOLGARE SICILIANO DEL SECOLO XIV.

Nota di MARIO CASELLA.

Ad accrescere la serie degli antichi testi siciliani volgari non sarà per riuscire inopportuna la pubblicazione d'una versione anonima, condotta su un esemplare latino, della nota e diffusa *Lettera* di Cristo circa l'osservanza della domenica, quale si conserva inedita (1) alla Vittorio Emanuele di Roma nel cod. 1185, fondo Sessoriano 127, proveniente da S. Croce in Gerusalemme (2). Membranaceo, miscellaneo, della seconda metà del secolo decimo quarto, modernamente rilegato in pelle con guardie di cartone, il codice consta di 144 carte numerate di recente in penna. Si compone di due parti distinte: la prima, che abbraccia le dodici carte iniziali, costituisce un sesterno casualmente aggiunto al codice originario, che da c. 13^r corre alla 144^v; in tutto sedici fascicoli (mm. 170 × 115), di cui il primo un sesterno, gli altri (2-16) quaderni propriamente detti, meno il quinto che è un terno; a loro fanno seguito quattro carte riunite dalla cucitura per il lembo interno. Una mano posteriore recise qua e là qualche carta, altre smozzicò mala-

(1) Ne dette succinta notizia G. Ciccone, *La lettera di Cristo in antico siciliano*, in " Arch. Stor. per la Sicilia orientale ", IV, 1907; pp. 303-307.

(2) In calce alla c. 2^r si trova autografo il nome di Gioacchino Besozzi, abbate di S. Croce in Gerusalemme e più tardi cardinale, uomo dotto e assai benemerito della biblioteca Sessoriana, che aumentò di molti e pregevoli manoscritti; cfr. I. Giorgi, *Storia esterna del Cod. Vat. del ' Diurnus Roman. Pontificum '*, in " Arch. d. Società Romana di Storia Patria ", XI, 1888; p. 650.

mente (1), senza che ne appaia chiaro il motivo. I soliti richiami congiungono i varii fascicoli; se non che quello del fascicolo secondo — c. 32^{v} — non trova risposta, e dovrà perciò ammettersi la mancanza di carte intermedie. Scritture latine ascetiche, inni e preghiere da c. 13^{r} a c. 144^{v}, lasciando in bianco la c. 117 e le cc. 123^{v}-124^{v}, formano la materia del cod. originario, cui fu preposto, come abbiam detto, un fascicoletto pure di pergamena, ma più cupa e di sesto alquanto minore (mm. 162 $\times$ 112). La carta iniziale, che fu guardia un tempo — poichè il fascicoletto prima d'essere assembrato al codice ebbe senza dubbio vita indipendente — si presenta rovinata e tarlata, priva di buona parte, essendo dall'alto obliquamente lacerata a destra; nel suo 'verso' porta il nome *franciscus tullia*, cui sotto in minio era scritto *bonus filius*, ora cassato con righe traversali. Il testo volgare adespoto, anepigrafo, con rubrica e due lettere capitali in rosso, va dalla c. 2^{r} alla 10^{r}, mantenendosi regolarmente in ventidue righe per pagina, squadrata e rigata in bianco con margini sottili; la 10^{r} si ferma improvvisamente alla decima ottava riga, restando bianche le successive pagine 10^{v}-12^{v}. La scrittura gotica ci richiamerebbe alla prima metà del secolo decimo quarto; ma poichè in Sicilia i caratteri arcaici si mantengono con maggior persistenza che non nella penisola, potremo scendere di qualche decina d'anni. Che si tratti di un apografo risulta chiaramente da alcune correzioni che si riscontrano a cc. 6^{r} e 8^{r}, da parecchi errori di lettura che faremo rilevare nella trascrizione nostra, e dal fatto ch'esso resta tronco all'improvviso.

Curioso e interessante documento di letteratura religiosa, le cui origini si sprofondano nel passato, la *Lettera* di Cristo — che non ha alcun rapporto con la corrispondenza apocrifa di Abgaro — si presenta assai tardi in occidente, poichè la menzione più antica che di essa conosciamo, si trova in una epistola di Liciniano, vescovo di Cartagine, vissuto sullo stremo del sesto

---

(1) Al terzo quaderno furono dalla metà in giù tagliate la c. 40 e totalmente quella tra le odierne 43 e 44; al quarto quaderno la carta tra le 47 e 48 — quest'ultima mozza oltre la metà restando solo la parte inferiore — e le due carte finali tra le 51 e 52; il terno seguente è pure sulla fine privo di due carte tra le 55 e 56; il terz'ultimo quaderno è mancante d'una carta tra le 117 e 118.

secolo (1). Rimessa fuori come autentica da Adalberto, vescovo Gallo, veniva bollata quale impostura da papa Zaccaria, nel concilio lateranense del 745 (2). Pare però che non ostante la condanna papale, lo scritto apocrifo continuasse a diffondersi silenziosamente, risorgendo a quando a quando dall'oblio e trovando validi sostenitori della sua autenticità. Un capitolare di Carlo Magno, del 779, tra le ' pseudographiae et dubiae narrationes ', accenna anche alla ' epistola pessima et falsissima, quam transacto anno dicebant aliqui errantes et in errorem alios mittentes quod de cœlo cecidisset ' (3); dove l'allusione alla *Lettera* di Cristo, per quanti dubbi affacci il Baluze (4), mi sembra evidente. Alcuni secoli dopo, durante la prima crociata (5) essa riapparve, nè cessò di diffondersi dall'occidente — dove, secondo il Delehaye (6), ebbe origine — all'oriente, tradotta in tutte le lingue e presso tutti i popoli, fino in Etiopia, in Siria e nell'India. Ancora si pubblica a Gerusalemme in servizio dei pellegrini greci e con interessamento è accolta dai Russi, dai Polacchi, dagli Czechi, dai Bulgari e dai Rumeni.

È naturale che venendo alla luce in luoghi e in tempi diversi e accogliendo quanto era portato dalle circostanze locali e dalle varie condizioni intellettuali e spirituali, essa abbia subìto profonde alterazioni formali che, in alcune redazioni, hanno ricoperto il nucleo primitivo d'una densa e lussureggiante vegetazione (7). Nel complesso si tratta sempre d'una lettera che,

---

(1) Migne, *P. L.*, LXXII, 699.

(2) Labbé, *Sacrosanta Concilia*, VI, 1560; Fabricio, *Codex Apocryphus Novi Testamenti*, Hamburgo, 1719; I, 309; Jaffé, *Monumenta Maguntina*, pp. 142-145; Hauck, *Kirchengesch. Deutschlands*², I, 538.

(3) *M. G. Leg., Capit.*, I, 60.

(4) *Capitul. regum franc.*, Venezia, 1773; I, 774; II, 495 sg., 759. Cfr. però Fabricio, I, 309; Hauck, I, 538, n. 3.

(5) H. Delehaye, *Note sur la légende de la lettre du Christ tombée du ciel*, in " Bull. de l'Acad. royale de Belgique ", cl. des lettres, Bruxelles, 1899; pp. 187-188. S'aggiunga alle numerose redazioni della *Lettera*, fatte ivi conoscere, quella antichissima conservata nell'archivio della chiesa di Urgell e scritta nel 938 (Villanueva, *Viaje liter.*, 11, p. 174).

(6) *L. cit.*, p. 212. Il Delehaye è tornato sull'argomento in *Analecta Bollandiana*, XX, 1901; pp. 101-103.

(7) Anche in Italia la *Lettera* si diffuse in varie redazioni; cfr. [Amaduzzi], *Anecdota litter. ex mss. eruta*, Romae, 1773; I, pp. 69-74; Valentinelli, *Biblioth. manuscripta ad S. Marci Venetiarum*, II, p. 165.

scritta da Cristo in lettere d'oro o col suo proprio sangue, portata in terra dall'arcangelo Gabriele o caduta dal cielo a Roma sulla tomba di S. Pietro o a Gerusalemme o a Betlemme o in altri luoghi celebri, sancisce l'osservanza della domenica, minaccia coloro che non crederanno e rassicura i fedeli della propria autenticità. Generalmente precede un prologo e segue un epilogo.

La versione siciliana, che non si discosta di molto dallo schema tipico conosciuto, parve al Ciccone (1) simile a una redazione latina della *Lettera*, contenuta in un codice tolosano e fatta nota dal Rivière (2). Comune con questa ha i precetti di digiunare e di recitar litanie il venerdì, le minacce di scomunica contro coloro che riceveranno l'Eucarestia senz'essere in pace con sè e col prossimo e giureranno o esigeranno giuramento la domenica; comune la menzione ai Saraceni invasori e la data del 10 settembre fissata come termine della vendetta divina. Ma a parte le numerose discordanze in parecchi minuti particolari, sufficienti per negare alla redazione tolosana il valore di originale su cui fu condotta la versione siciliana, le due lettere differiscono profondamente per la disposizione della materia e per il quadro generale della narrazione (3).

---

(1) *L. cit.*, p. 304.

(2) *La lettre du Christ tombée du ciel,* in " Revue des Quest. histor. ", N. S., XXXV, 1906; p. 601.

(3) Non occorre scendere a un minuzioso esame di comparazione, che per noi ha un interesse del tutto relativo e che solo potrà giovare a colui che affronterà il complesso problema delle dipendenze e della figliazione delle numerosissime redazioni della *Lettera.* La quale, nella versione siciliana, è brevissima, ristretta a una enumerazione dei danni patiti dal popolo per non aver osservato il precetto domenicale, di cui si rafferma lo stretto obbligo. L'angelo che l'ha portata in un'adunanza di clero e di popolo, tra cui predomina il Patriarca, n'attesta l'autenticità e ne consiglia la diffusione, mentre una voce celeste che tuona minacciosa sull'assemblea, interrompendo a quando a quando, rammemora i torti del popolo, l'ira divina e la vendetta giurata, ma frenata per la pietosa intercessione della Vergine e dei Santi. Da ultimo il Patriarca espone alcuni ammaestramenti per coloro che osserveranno il culto della domenica e vorranno comunicarsi. La redazione tolosana si mantiene più contenuta: le parole gridate dal cielo, le spiegazioni dell'angelo costituiscono la parte integrale della lettera, a cui manca ogni azione dialogica. L'epilogo si chiude con poche

Un particolare che non fu ancora rilevato e che probabilmente, sebbene il Delehaye nel suo pregevole studio non vi accenni, dev'essere comune a molte redazioni della *Lettera*, è l'innestarsi che vi si fa della leggenda sul riposo dei dannati dall'ora nona del sabato all'ora prima del lunedì. Se il pensiero semiorigeniano di un'intermittenza nelle pene infernali costituisce il concetto animatore dell'*Apocalissi* greca e delle redazioni latine più antiche della *Visione di S. Paolo* (1), è certo però che la leggenda, nel suo trapasso dall'oriente all'occidente, s'uniformò ai precetti che informano la *Lettera* di Cristo, riuscendo a una maggiore determinazione della giornata concessa al riposo dei dannati, che dalla domenica di resurrezione s'estese a tutte le domeniche dell'anno. E infatti se noi guardiamo alle redazioni più recenti (2), possiamo agevolmente scorgere che la santificazione della domenica è qualcosa di ascitizio e di sovrapposto, che non penetra nell'anima della narrazione, formandone, come pensava il D'Ancona (3), la base.

E veniamo finalmente alla lingua della nostra versione. È curioso il fatto che tutte le scritture volgari siciliane dei se-

---

parole dell'angelo e del Patriarca. Il Ciccone (*l. c.*, pp. 306-307), osservando che nella versione nostra si fa accenno alle invasioni dei Saraceni, si domanda se l'apocrifa epistola abbia subìto qualche modificazione nell'isola, sorgendovi anche nel suo testo latino; ma la nostra redazione, nell'evolversi della leggenda, rappresenta qualcosa di elaborato e di tardo, accogliendo elementi estranei al suo nucleo primitivo; oltre a ciò la lettera tolosana ha la stessa menzione ai Saraceni e vivo pur là doveva essere il ricordo di essi, che dominavano ancora nella parte meridionale della Spagna.

(1) GRAF, *Il riposo dei dannati*, in *Miti, Leggende e Superstizioni del Medio Evo*, Torino, 1892; I, p. 248.

(2) BRANDES, *Visio S. Pauli*, ein Beitrag zur Visionsliteratur mit einem deutschen und zwei lateinischen Texten, Halle, 1887; p. 75 e in " Englische Studien „ VII, p. 34 sgg.; VILLARI, *Alcune leggende e tradiz. che illustrano la Divina Commedia*, in " Annali delle Università toscane „, Pisa, 1866; p. 129; K. BARTSCH, *Denkmäler der provenz. Literatur*, Stuttgart, 1856; p. 310; FRITZSCHE, *Die latein. Visionen des Mittelalters bis zur Mitte 12 Jahrhundert*, in " Roman. Forschungen „, herausg. von Vollmöller, II, p. 247 sgg.; P. SAVJ-LOPEZ, *Una redaz. franc. della ' Visio Pauli ' in Catania*, in " Arch. Stor. per la Sicilia Orient. „, III, 1906; p. 91. Cfr. " Romania „, XX, 25; XXIV, 357.

(3) *I precursori di Dante*, Firenze, 1874; p. 48; ma cfr. D'OVIDIO, *Dante e San Paolo*, in " Studi sulla Divina Commedia „, Milano-Palermo, 1901, p. 347 sgg.

coli decimo quarto e decimo quinto s'offrano a noi con un colorito costante ed uniforme di lingua letteraria non molto divergente dalla lingua letteraria moderna (1). Certo esse si presentano assai tardi, con un distacco di più d'un secolo dalla letteratura fiorita alla corte di Federigo II, letteratura che essenzialmente lirica e in alto grado convenzionale, non lascia scorgere netto e spiccato il suo fondo meridionale o, più propriamente, il suo sustrato siciliano (2). Morto Federigo II, per la cui opera personale essa aveva avuto vita, la Sicilia tace alla letteratura, indizio manifesto che quella prima poesia non aveva affatto risposto alla sua anima, svegliandone e suscitandone l'intime energie (3). Ove si tolga la *Quaedam Prophetia* (4), per quasi due secoli la Sicilia continua la sua opera passiva di traduzioni dal latino coi *Dialoghi morali* di S. Gregorio (5), con la *Vita di S. Onofrio* (6), con le *Costituzioni benedettine* (7), coi *Capitoli* della prima compagnia dei disciplinati di S. Nicolò (8), col *Libru di la Maniscalchia* (9), per citare i più noti, di tradu-

---

(1) C. Salvioni, in " Revue de dialectologie romane ", II, 1910; p. 388.

(2) E. G. Parodi, in " Bull. della Soc. Dant. It. ", N. S., XX, 1913; p. 113.

(3) E. G. Parodi, *L'eredità romana e l'alba della nostra Poesia* (estr. dagli " Atti d. R. Accad. della Crusca "), Firenze, 1913; pp. 54-55.

(4) " Arch. Stor. Sicil. ", II, 1877; p. 173 sgg.

(5) G. B. Grassi-Privitera e A. De Santis, *Lu libru dè lu Dialogu de Sanctu Gregoriu*, in *Docum. per servire alla Storia di Sicilia* pubbl. a cura della " Società Sicil. per la Storia Patria ", IV S., XI, Palermo, 1913. Senza dubbio un po' iperboliche sono le lodi che il Grassi-Privitera fa alla traduzione quale ci è conservata nel ms. XX della Vittorio Emanuele di Roma, confondendosi i criteri di datazione della traduzione — primo trentennio del sec. XIV — con quelli paleografici relativi alla trascrizione di questo prezioso apografo, il quale, a parer nostro, deve collocarsi nella seconda metà del secolo XIV. Riguardo ai fenomeni linguistici, le infiltrazioni toscane sono notevolissime.

(6) " Arch. Stor. Sicil. ", XXXIV, 1909; p. 33 sgg.

(7) " Arch. Stor. Sicil. ", XXXVII, 1912; p. 391 sgg. coi rinvii e le critiche ai precedenti editori.

(8) De Gregorio, *I capitoli della prima compagnia di disciplina di S. Nicolò di Palermo*, Palermo, 1891.

(9) De Gregorio, *Notizia di un trattato di mascalcia in dialetto siciliano del sec. XIV*, in " Romania ", XXXIII, 1904; p. 368 sgg. Basterà dar qui solo un cenno di un ' Titus Livius en paper e en lenguatge sicilia ' richiesto da Giovanni I d'Aragona nel 1390 a Bertrando de Jonquerio (Rubió y Lluch, *Documents per l'historia de la cultura catalana mig-eval*, Barcelona, 1908;

zioni e trascrizioni dal toscano col *Libro dei viziî e delle virtù* (1), col *Libro toscano* (2), mentre a poco a poco s'afferma anche la cronaca. Così il latinismo e il toscanesimo, che rapidamente procedeva, dopo le mirabili manifestazioni di Dante, Petrarca e Boccaccio, alla conquista di tutta la penisola, convergono a creare in Sicilia nel secolo decimoquarto un tipo di linguaggio colto e letterario, che nella sua forma più elevata e meno idiomatica ben rispondeva a quell'inconscia ma viva tendenza conguagliatrice propria dei dialetti geograficamente e politicamente congiunti.

Nella *Lettera* di Cristo, che pubblichiamo, non esistono novità nè potremmo aspettarcele; vi abbiamo la ricorrenza degli stessi fenomeni tipici dell'antico siciliano; così che nell'illustrazione linguistica che la segue ci è parso conveniente attenerci alla massima parsimonia senza far sfoggio inutile di riscontri comuni. Nella trascrizione ci siamo serviti della punteggiatura moderna, non giustificando alcun motivo plausibile la conservazione dell'antica; solo abbiamo staccate le parole e sciolte le abbreviature. Ma poichè trattandosi di un testo volgare, queste potevano dar luogo a qualche dubbio, abbiamo preferito tenerle tipograficamente distinte, pur attenendoci alle forme già risolte che possono illuminarci. Entro parentesi quadra chiudiamo la lezione congetturale o la dubbia lettura.

Ci sono stati d'aiuto nell'illustrazione filologica i seguenti studi:

W. WENTRUP, *Beiträge zur Kenntniss des sicilianischen Dialectes*, Halle, 1880.

Sch. SCHNEEGANS, *Laute und Lautentwickelung des sicilianischen Dialectes*, Strassburg, 1888.

Av. AVOLIO, *Introduzione allo studio del dialetto siciliano*, Noto, 1882.

De Gr. DE GREGORIO, *Saggio di fonetica siciliana*, Palermo, 1890.

Delle altre pubblicazioni che direttamente o indirettamente riguardano l'antico siciliano sarà data notizia per disteso.

I, 363). Non sarebbe forse quel ' libre de Titu ' conservato, insieme con le ' Epistolas de Senecha en sicilia ' (nn. 188, 186), nella biblioteca di re Martino I (1396-1410)? Cfr. MILÁ Y FONTANALS, *Obras completas*, II, 516, n. 22.

(1) DE GREGORIO, *Sulla fonte e la lingua del ' Libro dei vizii e delle virtù '*, in " Arch. Stor. Sicil. ", XXXV, 1910; p. 130 e rimandi.

(2) E. GORRA, *Testi inediti di storia troiana*, Torino, 1887; pp. 180, 458; E. G. PARODI, *I rifacimenti e le traduzioni ital. dell'Eneide di Virgilio*, in " Studi di Filol. romanza ", V, p. 143.

*
* *

c. 2r In no*min*e patris et filii et sp*iritus* sancti. Amen.

La epistola di lu nostru signuri Ihesu Chr*is*tu, l[a] quali dissisi
di lu chelu supra lu altaru di sanctu Petru apostolu, scripta in
tabuli di marmuri et risblandianti comu lu suli in lu mezu iornu.
5 Et lu angelu di Deu la tinia. Et tuctu lu populu, quandu la vidi,
p*er* la gra*n*di pagura ki appiru, si caderu in terra a buccuni *et*
la fachi loru p*er* terra et dichendu: kyrieleyson.

Lu incumi*n*zame*n*tu di la epistola esti kistu. “ Inp*er*zò ki vidi-
stivu lu figlolu di la virgini Maria, lu quali i*n*primamenti ma*n*dau
10 Deu a vui et non lu cridis[ti]vu, siti facti increduli et no*n* guar-
dati lu meu sanctu iornu di la duminica. Inp*er*zò ma*n*dai a vui
sarachini, [a]genti (1) ki spasiru lu vostru sangu e misiru a vui
i*n* prisuni et in carcer[i], et dunai a vui terremoti *et* fami [*et*]
*c. 2v grilli et *serpe[n]ti (2) et mali bestii *et* muski et tavani *et* mali
15 auchelli *et* pissi; tucti mali eu vi m[u]strai (3) p*er* lu meu sanctu
iornu di la duminica. Dimustray a vui granduli, lampi *et* troni
et fulgura *et* infirmitati pessimi *et* p*er*iculusi p*er* lu meu s*an*ctu
iornu di la d*umi*nica. Ma vui adiminticastivu la vostra saluti di
li animi *et* no*n* vulistivu audiri la vuchi di la mia mis*er*icordia.
20 Inp*er*zò misi in vui multi tribulacioni *et* feri pessimi, li quali
divurira*n*nu li vostri figloli; et dunaivi siccarizu grandi et ancora
multa ploia, ki li flumari essinu da lu loru locu *et* cons[u]manu
zo ki loru veni da*n*nanti. Di poy di vui manday genti malvasa
ki spasiru lu vostru sangu et misiruvi in p*r*isuni. Et multi tri-
25 bulacioni *et* duluri et plantu *et* lacrimi misi sup*r*a di vui, et
fichi a vui ma*n*iari lu lignu siccu p*er* la [i]niq*u*itati *et* li peccati
vostri
c. 3r et p*er* lu meu s*an*ctu iornu di la duminica. Eu dicu a vuy:
Auditi *et* anti*n*diti lu timuri di Deu et obs*er*vati li mei cuma*n*-
dame*n*ti *et* guardati lu meu sanctu iornu di la dominica; ka tucti

---

(1) Nel ms. dinanzi a *genti* s'apre un forellino, che lascia scorgere ai margini l'ombra di una lettera, che a me pare un *a*.

(2) Ms. *serpeti*.

(3) Una seconda mano ripassò sulla prima sillaba della parola, di cui si scorgono chiaramente le tre aste del *m* e la seconda asta dell'*u*, premise un'asta al *m* e allungò la seconda asta originaria, facendo servire l'ultima come la prima dell'*u*. Ciò spiega lo spazio rimasto tra queste due aste, divise dalla tarlatura.

li iorni su mei et [li te]mpi eu li fichi *et* dunayli a vui, [azò kì]
5 canusiti li io*r*ni *et* li te*m*pi e li uri. Om*n*i creatura canussi lu so
creaturi; et vui miseri, p*er*kì no*n* canussiti lu vostru creaturi?
Assay meglu vi fora si creati no*n* fussivu, ki aviti p*er*dutu vita
eterna. Et ancora lu iornu di la d*om*inica li [in]dinni (1) richipinu
riposu di tucti li loru piccati; *et* issu Deu esti riposu in om*n*i
10 te*m*pu. Et vui miseri no*n* canussiti la veritati e lu vostru riposu,
lu quali esti i*n* lu iornu di la duminica et i*n* li altri mei festi-
vitati et di li mei sancti; ki a li vostri animi diviti aviri cura.
Et quali previti avi kista ep*isto*la *et* no*n* la legi in la eccl*es*ia
*c. 3ᵛ mia da*n*nanti lu populu *et* a*n*nu*n*ciala* in la sua casa, si esti ini-
15 micu di Deu et no*n* guarda ni fa guardari la mia ligi. *Et* su*n*nu
alcuni ki si volinu fari p*re*viti azò ki ma*n*ginu lu populu meu,
et no*n* volinu pridicari li cuma*n*dame*n*ti di Deu; et inp*er*ò tuctu
zo sirrà supra li loru testi *et* di li loru animi in lu io*r*nu di lu
iudiciu. Et cui virrà a la ecclesia i*n* lu meu sanctu iornu di la
20 dominica, lu quali esti meu iornu, *et* farrà elemosina a li poviri
et farrà oblacioni *et* offerta a Deu, avirà misericordia di lu Deu
Patri, lu quali esti in chelu „. Et qua*n*du fu lecta la epistola di
lu angilu ki l'avia in manu, vi*n*ni la vuchi di chelu *et* dissi:
“ Criditi, c*r*iditi, impii *et* duri di cori in ver lu vostru creaturi,
25 p*er* la epistola la quali manday a vui. Et undi aviti spiranza di
fugiri? ca nullu no*n* si poti a*m*muchari davanti la fachi mia „.
Et i*n*tandu si girau la angilu in ver di lu patriarcha *et* di tuctu
lu cleru et di tuctu
c. 4ʳ lu populu, lu quali era illocu, et dissi: “ Auditi, populu, *et* certi-
ficativi; eu iuru a vui p*er* li virtuti di Deu *et* p*er* la sapie*n*cia
di lu nostru signuri Ih*es*u Chr*is*tu *et* la gluriusa Maria, matri
sua, *et* p*er* tucti li troni di li angili *et* p*er* li virtuti di li sancti
5 *et* p*er* la curuna di li martiri di Deu, ki kista epistola no*n* esti
scripta p*er* manu di ho*m*u, ma vi*n*ni scripta di li alti cheli p*er*
manu di Deu. Et cui no la cridirà sia maledictu et scuminicatu,
et la ira di Deu virrà supra di issu *et* pirirà la sua casa et tuctu
lu so beni, et no*n* avirà parti a lu regnu di vita eterna. Et killu
10 ki la cridirà *et* scrivirà *et* ma*n*dirà di chitati i*n* chitati *et* di te*r*ra
in te*r*ra, avirà la benediccioni di Deu in la sua casa *et* multipli-

---

(1) Ms. *lidinini* col penultimo *i* espunto. Il ms. tolosano (*l. cit.*) dice: “ melius vobis esset, si nati non fuissetis, quam vitam aeternam non possideatis, quia dies dominicus est omnium corporum et in eo die indigni etiam per misericordiam accipiunt indulgentiam de omnibus peccatis suis „.

kira*nn*u (1) li soy beni. Et li previti ki audira*nn*u kista epistola *et* no*n* la ligira*nn*u i*n* la ecclesia mia davanti om*n*i populu, sinnu (2) escuminicati di lu regnu di Deu „. Et di poy dissi lu
*c. 4v angilu: “ P*re*guvi, frati* karissimi, ki no*n* diiati indurari lu vostru cori a la impietati vostra; ki si zo farriti, in pocu iorni piriti p*er* la niglige*n*cia et incredulitati v*os*tra „. Et ancora vi*nn*i la vuchi di chelu et dissi: “ Auditi, genti humana, et ascultati li paroli di lu angilu meu, lu quali eu mandai a vui. Et sachati ki in-
20 pressu esti lu iornu di la p*er*dicioni vostra. Ascultati et intinditi, previti et sacerdoti, la generacioni divi periri. Eu manday a vui la mia epistola, imp*er*zò ka vui intinditi li paroli di la mia scriptura. Et p*er*kì no*n* p*r*idicati a lu populu meu? adunca p*er* mi siti honorati. Et li mei paroli p*er*kì li renu*n*ciati et no*n* a*n*nun-
25 ciati a vui mide*mm*i? ma la vostra miseria lu fa. Auditi, p*er*fidi et i*n*creduli. O populu inicu, ki ascultati tucti malifacturi et detra[ta]cturi (3) *et* spriiuri *et* falci testimonii et michidari *et* iastimaturi et adulteraturi *et* furnicaturi *et* cunchiati di omni malicia, usu-
c. 5r reri *et* larruni, o piccaturi *et* vili minzunari, et comu no*n* aviti veritati in li curagi vostri *et* inga*nn*ati l'unu a l'alt*r*u cu*m* li paroli et in li curagi vostri pensati mali *et* no*n* guardati lu meu s*anc*tu iornu di la dominica? Imp*er*ò mandirò a vui ira cu*m* fu-
5 ruri et signuria grandi et malvasa, *et* farrò terremoti p*er* li loki *et* pestilencia et fami, *et* disscurdirò tucta la terra. Eu iuru a vui p*er* lu corpu meu ka ia*mm*ay no*n* mandu li epistoli mei; et si no*n* farriti li mei volu[n]tati (4) *et* no*n* guardati lu meu sa*nc*tu iornu di la dominica, ap*ir*irò li mei cheli et pluvirò supra
10 di vui petri cu*m* focu ardenti, lu quali ardirà tucta la terra et li homini ki su supra la te*rr*a. Et mandirò a vui bestii cu*m* dui testi, li quali ia*mm*ay no*n* vidistivu *et* mangira*nn*u li mini di li vostri fi*mm*ini. Et turnirò la luchi di lu suli in tenebri multu oscuru *et* l'unu homu a l'altru alchidirà p*er* lu meu sa*nc*tu iornu
c. 5v di la dominica, lu quali vui non guardati. Iuru a vui p*er* lu meu thronu et p*er* la mia sanctissima matri *et* p*er* lu meu seiu sanctissimu, lu quali guardanu li cherubin *et* li seraphin, *et* p*er* lu meu Iuhani Baptista *et* p*er* tucti li angeli mei *et* p*er* la cu-

---

(1) Ms. *multi plibiramnu,* ma il *b* è riduzione con inchiostro più denso del *k* preesistente.

(2) Ms. *sũnu* con la prima asta del *n* espunta.

(3) Ms. *dectracturi* con un *ta* sovrapposto a *tra.*

(4) Ms. *volutati.*

runa di li martiri, ki kista epistola no*n* esti scripta pe*r* manu di
20 homu né-ndi angelu né di archa[n]gelu (1), ma esti scripta pe*r*
manu mia. Auditi, populu incredulu *et* malvasu! sey iorni dunay
a vui di lavurari *et* lu meu s*anc*tu iornu di la duminica guardari
dunay a vui pe*r* riposu in li mey vulu*n*tati. Et eu laborai pe*r*
vui; *et* vui pe*r*kí no*n* laudati a Deu? Ma dichiti: " Laboramu *et*
25 laudamu a Deu „; et no*n* esti veritati. Si eu non vi dunassi
ploia in lu tempu sou et serenitati, comu purrissivu viviri di la
vostra travagla né di la vostra fatiga? *Et* di zo ki eu dunay a
vui, perkì no-ndi dunati, dechima a Deu ni a la eccl*e*sia mia? Ni
a li poviri istinditi manu; ad issi fari beni mali
c. 6r tiniti a nenti. O miskini *et* miseri, comu vi susteni la t*err*a?
Impe*r*ò ma*n*day fami *et* pestilencia *et* mortalitati *et* omni tribu-
lacioni, azò ki pinsati ka zo aviti pe*r* li peccati vostri. Et undi
fugiriti ka locu no*n* aviti? Et undi starriti? *et* dava*n*ti la fachi
5 mia non vi putiriti amuchari. *Et* comu no*n* dimandati miseri-
cordia? O malifacturi senza mis*er*icordia, pe*r* la iniq*ui*tati *et* pe*r*
la impietati v*ostr*a, *et* pe*r* lu meu sanctu iornu di la duminica *et*
li altri festi di li mei sancti, li quali vui no*n* guardati, malidicti
siti: inprima di parti mia, secundu di lu thronu meu, lu t*er*zu
10 di tucti li angeli mei, lu qua*r*tu di tucti li apostoli, lu q*ui*ntu di
tucti li martyri *et* di tucti li altri sancti, li quali vui no*n* guar-
dati comu eu vi cuma*n*day. O vui, pe*r*fidi et increduli, no vi arri-
co*r*dati ki la ira di deu vi era supra di vui pe*r* la vostra ini-
q*ui*tati; *et* farrò t*er*remoti azò ki vi consumi supra [supra] la fachi
*c. 6v di la t*err*a pe*r* li vostri piccati. *Inperzò ki no*n* vulistivu asscul-
tari (2) li mey paroli, li quali dissi lu evangeliu meu: — lu chelu e la
t*err*a passira[n]nu (3) *et* li mey paroli no*n* ma*n*kira*nn*u ia*m*may —;
inperzò li mei paroli *et* li mei cuma*n*dame*n*ti li quali cumanday
a vui *et* no*n* li guardastivu; *et* no*n* guardastivu lu meu sa*nc*tu
20 iornu di la duminica; inp*er*zò p*re*veniriti a grandi mali et*er*nu.
O miseri, ki stinditi li vostri manu a la cruchi *et* dichiti ka siti frati
et [in] li vostri op*er*i siti crudili *et* inimichi et fachitivi cu*m*pari
et cu*m*mari et no li tiniti si comu si divi. Inp*er*zò pensay di di-
strudiri (4) li vost*r*i corpora supra la fachi di la t*err*a, ma eu mi

---

(1) Ms. *Archagelu*.
(2) Ms. *asscultari* è sovrapposto a *vulistivu*.
(5) Ms. *passiranu*.
(4) Ms. *distrurirj*; così almeno doveva leggersi, ma il penultimo *r* fu posteriormente corretto in *d*.

25 pintivi, ma no*n* p*er* vui, si no*n* p*er* li m*u*lti angeli *et* archa*n*geli *et* tucti li sancti, li quali caderu sucta li mei pedi et p*r*igarumi ki eu divissi livari la ira supra di vui. *Et* eu li exaudivi *et* fichi a vui mis*er*icordia. Et vui, miseri, ancora acuminzastivu a fari mali. O 'niqui *et* lingua di viperi *et* di s*er*penti, ge-

c. 7r neracioni pessima! A li iudei dunay la ligi in monti Sinay p*er* manu di Moyses, et finirula fina i*m*mo, *et* guardanu lu iornu di lu sabbatu; *et* vui no*n* guardati lu meu iornu s*an*ctu di la dominica i*n* lu quali eu risusitay, ni li festi di li mei sancti. Ma eu iuru

5 a vui p*er* lu meu dirictu latu *et* p*er* lu meu brazu altissimu, ca si no*n* vi pe*n*titi *et* guardati lu meu sa*n*ctu iornu di la dominica *et* li festi di li mei sancti, co*n*veni ki eu ma*n*di la ira mia supra di vui *et* bestii lupi, ki vi mangira*n*nu li vostri figloli *et* fa*r*rò ki murriti sucta li pedi di li cavalli di li sarachani. Eu dicu a

10 vui in veritati *et* iuru p*er* la mia gluriusa resurrexioni, ca si vui no*n* guardati lu meu s*an*ctu iornu di la dominica da vespiri i*n* lu iornu di lu sabbatu p*er* fina a lu iornu di lu lunidi albischendu *et* lu ve*n*niri diunari *et* orari *et* fari litanii, et si no*n* li farriti,

*c. 7v siati certi, impii *et* malvasi *et* pessimi cani* ka eu mandirò supra

15 di vui bestii cu*m* dui testi, li q*u*ali ia*m*may no*n* vidistivu, *et* petri di focu, li q*u*ali ardira[n]nu (1) supra di l'aqua. Eu pe*n*say a li dechi iorni [iorni] di lu misi di sitembru di distrudirivi li animi *et* li corpora vostri di supra la fachi di la terra; ma s*an*cta Maria, la mia matri gluriusa, *et* li altri cherubin *et* li s*an*cti se-

20 raphin, li quali no*n* cessanu ia*m*may di p*r*igari a Deu per vui, mi p*r*igaru *et* eu li exaudivi *et* fichi a vui mis*er*icordia. Ma eu iuru a vui p*er* li s*an*cti angeli *et* archangeli, ka si no*n* guardati lu meu s*an*ctu iornu di la dominica, ma*n*dirò a vui auchelli *et* bestii ki volanu, li q*u*ali ia*m*may no*n* vidistivu, et tu*r*nirò la luchi

25 di lu suli in tenebri multu oscuru. Et l'unu homu a l'altru alchidirà p*er* lu meu s*an*ctu iornu di la dominica. Et no*n* vi amustrirò la chera mia, ma la amuchirò da vui, azò ki sia plantu cu*m* gra*n*di lagrimi *et* vuchi dulurusi.

c. 8r Et in vui farrò siccari li vostri animi i*n* lu focu di lu i*n*fernu, lu quali ia*m*may no*n* avi fini. Et ma*n*dirò supra di vui genti t*er*ribili, li q*u*ali no*n* avira*n*nu mircì, no*n* piatati di vui et distrudira*n*nu multi di li vostri p*r*ovincii; et inp*er*zò ki no*n* guardati

5 lu meu s*an*ctu iornu di la dominica. Eu iuru a vui, p*er* lu brazu altisimu *et* p*er* lu meu dirictu latu *et* p*er* li virtuti di li mei angeli, ki si no*n* guardati lu meu s*an*ctu iornu di la dominica, eu

---

(1) Ms. *ardiranu*.

vi distrudirò et non sirrà nullu arricordu di vui supra di la terra. Dicuvi in veritati ka si vui riturnati et laxati tucti vostri mali 10 operi et guardati lu meu sanctu iornu di la dominica, lu quali esti la mia resurressioni, mandirò supra di vui la mia benediccioni *et* la terra farrà lu sou fructu *et* fructifikirannu li boski *et* li silvi *et* implirannu la terra di la gracia mia. Et darrò grandi *c. 8v alligriza spirituali supra di vui *et* li cosi vechi li prindiriti* novi 15 *et* pachifikirò la genti, azò ki vivati in pachi senza briga, *et* livirò la ira mia supra di vui *et* farròvi beni viviri tucti li vostri iorni *et* implirò tucti li vostri casi di omni beni. Et quandu virriti a lu iudiciu farrò a vui misericordia *et* gaudiriti cum li mei sancti in lu meu regnu per tuctu tempu. Amen. Et si sarrà alcunu 20 homu lu quali non crida kista epistola, sirrà maledictu et scuminicatu *et* confusu di lu Deu patri meu, lu quali esti in chelu. Et cui cridirà kista epistola sirrà benidictu una altra fiata. Eu dicu: Andati lu iornu di la duminica a la missa *et* guardati ki siati digni di richipiri lu corpu di Cristu. Et si (l. *ki*) avirà briga *et* mala 25 voluntati cu alcunu *et* prindirà lu corpu di Cristu sia scuminicatu. Inperzò ki pecca in spiritu sanctu, ki zoè per propria malicia *et* [non fidasi] (1) a la misericordia di Deu *et* minispreza c. 9r la iusticia, *et* cui avirà briga cu alcunu *et* volisi cuminicari, in prima vaia *et* faza pachi cum bonu vuliri et poy sie livatu di li peni eternali. Et intandu vaya *et* prinda lu corpu di Christu; *et* cui farrà iurari ad altri in lu meu sanctu iornu di la duminica 5 sarrà maledictu. Et cui iudikirà ad altru in lu meu sanctu iornu di la duminica sia maledictu *et* scuminicatu. Sachati ka eu su killu lu quali aiu potestati supra tucti li criaturi in chelu *et* in terra et in tucti li abyssi. Et tucti li creaturi tremanu sucta di lu meu putiri *et* in lu meu sanctu iornu di la duminica. Et cui 10 contrastirà contra Deu *et* dirrà ca di homu esti scripta kista epistola *et* non esti scripta per manu di Deu, sia maledictu cum tucta la sua casa *et* aia parti cum lu dimoniu in lu focu di lu infernu. Et sunnu benedicti di Deu killi kista epistola cridirannu *c. 9v cum tuctu cori. *Et* cumanduvi ki diiati guardari* lu meu sanctu 15 iornu di la duminica di la hura di vespiri a lu iornu di lu sabbatu per fina a lu lunidi albischendu claru luchi. Et cuy contrastirà sarrà malidictu di chelu in terra et in li abyssi. Et cui cridirà kista sancta epistola et andirà a li mei voluntati *et* sirvirà li mei cumandamenti cum tuctu cori *et* persevirirà in Deu et la

(1) Ms. *et confidarisi a la.*

20 sa*n*cta ecclesia difindirà et li orphani *et* li vidui *et* farrà a loru pietati avirà la mia benediccioni. Dicu i*n* veritati: Convertivi a*m*-mi et eu mi co*n*vertirò a vui *et* ritornirò la mia mis*e*ricordia i*n* ver di vui *et* la mia b*e*n*e*diccioni virrà supra di vui *et* aviriti vita eterna. Amen „. Intandi dissi lu patriarcha:
25 " P*re*guvi, fratri k*arissi*mi, ki fazati oracioni a Deu, azò ki levi la ira sua sup*ra* di vui *et* dunivi ioya dulchissima. Ancora p*re*gu a tucti vui, poviri *et* ricki, ki omni iornu di la sa*n*cta duminica a*n*dati a la ecclesia *et* obs*er*vati li cuma*n*damenti
c. 10r di lu nostru signuri Jh*e*su Chr*is*tu, azò ki multiplicanu li anni et la vita vost*ra*. Cui cherca *et* voli truvari lu nostru signuri Jh*e*su Chr*is*tu, ipsu avirà parti cu*m* illu i*n* vita eterna. Omni homu avi sapiri ca i*n* sey maineri si pecca co*n*tra di lu sp*iri*tu
5 sa*n*ctu. La prima si esti presu*n*cioni, zo esti co*n*fidarisi lu homu a la mis*er*icordia di Deu *et* stari oy fari piccatu *et* minisprezari la sua iusticia. La secu*n*da si esti disperacioni co*n*traria: ki alcuni no*n* si confidanu a la mis*er*icordia ki li vogla oy poza p*er*dunari ia*m*may. La t*er*za si esti ostinacioni qua*n*du homu esti in-
10 duratu a lu piccatu *et* non sindi voli livari. La quarta si esti minisprizari la pinitencia *et* essiri induratu a lu piccatu. La quinta si esti . . . .
. . . .

GRAFIA.

§ 1. Siamo di fronte ai soliti fatti che caratterizzano le scritture volgari siciliane del periodo più antico (1): la tradizione ortografica latina, commista con quella importata dalla dominazione aragonese, perdura tenace, mentre si va manifestando la tendenza ad avvicinarsi per quanto è possibile ai suoni.

a) Omessi i casi in cui ha valore puramente etimologico *kyrieleyson* **2**, 7; *martyri* **6**, 11; *abyssi* **9**, 8; **9**, 17, appare *y* per *i* generalmente nei dittonghi discendenti in fine di parola: *manday* **3**, 25 ecc.; *cumanday* **6**, 12 ecc.; *dunay-li* **3**, 4; *dunay*

---

(1) Di Giovanni, *Sulla grafia del ' Rebellamentu '*, in " Propugnatore „, XIX, p. 50; Palma, *Lu rebellamentu di Sichilia*, in " Arch. Stor. Sicil. „, XXXV, 1910, p. 405 sg.

5, 21 ecc.; *pensay* 6, 23 ecc.; *risusitay* 7, 4; *dimustray* 2, 16; *iammay* 5, 7; *assay* 3, 7; *sey* 5, 21 ecc.; *mey* 5, 23, ecc.; *soy* 4, 12; *poy* 4, 14 ecc.; *oy* 10, 6; *vuy* 3, 1; *cuy* 9, 16. Parimenti in *vaya* 9, 3; *ioya* 9, 26 e, come falsa ricostituzione, in *Moyses* 7, 2 e *Sinay* 7, 1.

b) Tranne in *karissimi* 4, 15; 9, 25, in cui perdura una particolare grafia attestata già nel latino medievale, troviamo davanti a vocal palatale sempre *k*: *ki* 2, 6 ecc.; *perkì* 3, 6 ecc.; *azokì* 3, 4 ecc.; *kistu* 2, 8 ecc.; *killu* 4, 9 ecc.; *loki* 5, 5 ecc.; *miskini* 6, 1; *pachifikirò* 8, 15; *iudikirà* 9, 5; *mankirannu* 6, 17 ecc., ecc. L'influsso dei monosillabi in vocal palatale determina l'oscillazione di *ca* 3, 26; 7, 10 ecc., in *ka* 4, 22; 5, 7 ecc. — Il raddoppiamento è rappresentato da *ck* in *ricki* 9, 27.

c) Il suono palatale del *c*, meno in *certi* 7, 14; *certificativi* 4, 1; *cessanu* 7, 20; *mircì* 8, 3; *provincii* 8, 4; *sacerdoti* 4, 21 che mostrano la grafia latina, è espresso dal digramma *ch*: *chelu* 2, 3 ecc.; *cheli* 4, 6; *cherca* 10, 2; *chera* 7, 27; *auchelli* 2, 15 ecc.; *sarachini* 2, 12 all. a *sarachani* 7, 9; *ammuchari* 3, 26 ecc.; *amuchirò* 7, 27; *sachati* 4, 19 ecc., ecc. Si noti *cunchiati* 4, 28; riguardo a *vechi* 8, 14 si tratterà, anzi che di un *c* palatino, di un *kj* molto schiacciato, per cui mancava un'adeguata rappresentazione grafica. — La spirante palatale è espressa con *sch* (Bologna, *Un testo in volgare siciliano*, estr. dall'*Arch. Stor. per la Sicilia orient.*, V, 1908, p. 5, n° 22, per cui Salvioni, in *Zeitschr. f. rom. Phil.*, XXXIII, 332 e *Revue de dialectol. rom.*, II, 1910, p. 393. Del resto una tale grafia pare assai diffusa, Parodi, *Il Tristano riccardiano*, in *Collez. di opere ined. o rare*, Bologna, 1896, p. cxxix): *albischendu* 7, 12; 9, 16. — Grafie puramente etimologiche sono: *patriarcha* 3, 27; 9, 24; *archangelu* 5, 20 ecc.

d) La spirante dentale, rappresentata talora da *x* in *resurrexioni* 7, 10 all. a *resurressioni* 8, 11; *exaudivi* 7, 21, non traspare in *benediccioni* 4, 11 ecc.; *tribulacioni* 2, 20 ecc.; *gracia* 8, 13; *malicia* 4, 29 ecc.; ma di qui l'erronea grafia *falci* 4, 27.

e) Il suono del *l'* è reso da *gl* (Meyer-Lübke, *Gramm. d. rom. Sprachen*, I, 437; per ciò che osserva il De Gr., 79 e *Capitoli della prima compagnia di disciplina di S. Nicolò*, pp. 39-40,

cfr. Av., 14): *figlolu* **2**, 9; *figloli* **2**, 21; **7**, 8; *meglu* **3**, 7; *vogla* **10**, 8; *travagla* **5**, 27, esclusa naturalmente la forma dotta *evangeliu* **6**, 16.

f) Il suono palatale del *g* è espresso da *i* in *ioya* **9**, 26; *maniari* **2**, 26 all. a *manginu* **3**, 16; *mangirannu* **5**, 12 ecc.

g) Dinanzi a labiale *n* e *m* s'alternano: *inperzò* **2**, 8; **2**, 11 ecc. all. a *imperzò* **4**, 22 ecc.; *inpressu* **4**, 19; *inperò* **3**, 17 all. a *imperò* **5**, 4; *inprima* **6**, 9, ma solo nelle parole composte. Regolarmente *tempi* **3**, 4; *impii* **3**, 24; *impietati* **4**, 16 ecc.

h) Raddoppiamento dinanzi a consonante: *disscurdirò* **5**, 6; *asscultari* **6**, 15.

Prospetto grammaticale.

Suoni.

Vocali toniche.

§ 2. a Nulla di rilevante; notiamo tuttavia *appiru* **2**, 6 e per *chera* **7**, 27, *Arch. Glott.*, IV, 119. — *-ariu*: *michidari* **4**, 27; *minzunari* **5**, 1; *flumari* **2**, 22 ecc., ma *usureri* **5**, 1. — *av't*: *girau* **3**, 27; *mandau* **2**, 9.

§ 3. e breve, permane senza eccezione: *feri* **2**, 20; *levi* **9**, 25 ecc.; *susteni* **6**, 1; *dechi* **7**, 17; *pedi* **6**, 26 ecc.; *preguvi* **4**, 15; *previti* **3**, 13 ecc., ecc. — *Petru* **2**, 3; *petri* **5**, 10. — *Deu* **2**, 5 ecc.; *iudei* **7**, 1; *meu* **2**, 15 ecc; *mei* **3**, 2 ecc., ma sempre *mia* **2**, 19 ecc. — *eu* **2**, 15 ecc.

§ 4. o breve, permane senza eccezione: *figlolu* **2**, 9 ecc.; *voli* *volet **10**, 2 ecc.; *cori* **3**, 24 ecc.; *fora* **3**, 7; *novi* **8**, 14; *homu* **4**, 6 ecc.; *comu* *como (Körting[3] 2364) **5**, 1; *bonu* **9**, 2; *troni* **2**, 16; *locu*, **2**, 22 ecc.; *focu* **5**, 10 ecc.; *poti* **3**, 26 — *poy* **2**, 23.

§ 5. e lungo, i breve: *mircì* **8**, 3; *crida* **8**, 20; *crudili* **6**, 22; *divi* debet **4**, 21; *fichi* **2**, 26; *ligi* 'legge' sost. **3**, 15; — *fimmini* **5**, 13; *prinda* **9**, 3 ecc., ecc.; lat. *incredulu* **5**, 21; *increduli* **2**, 10; **4**, 26; **6**, 12. — *vidui* **9**, 20, *mini* **5**, 12 (Körting[3] 6189); *richipiri* **8**, 24; *richipinu* **3**, 8 ecc., ecc.; *sindi* se ne **10**, 10; gallicismo *midemmi* **4**, 25 (Salvioni, *Rend. R. Ist. Lomb.*, S. 2ª; XL, 1907, p. 1115).

§ 6. O lungo, U breve: *suli* **2**, 4 ecc.; *hura* **9**, 15; *uri* **3**, 5; *signuri* **2**, 2 ecc.; *duluri* **2**, 25 ecc.; *iastimaturi* **4**, 28; *adulteraturi* **4**, 28; *furnicaturi* **4**, 28; *malifacturi* **4**, 26; *detra[ta]cturi* **4**, 27; *creaturi* **3**, 6 ecc.; *periculusi* **2**, 17 ecc.; *duni-vi* **9**, 26; *buccuni* **2**, 6; *larruni* **5**, 1; *prisuni* **2**, 13 ecc.; ma soltanto le forme dotte per *-tione*; *benediccioni* **4**, 11 ecc.; *tribulacioni* **2**, 20 ecc.; *oblacioni* **3**, 21; *oracioni* **9**, 25; *perdicioni* **4**, 20; *disperacioni* **10**, 6; *generacioni* **4**, 21 ecc.; *ostinacioni* **10**, 9; *presuncioni* **10**, 5; *resurrexioni* **7**, 10; *loru* **2**, 22; *terremoti* **2**, 13; **6**, 14. — *cruchi* **6**, 21; *su* sunt **3**, 4; **5**, 11; *sunnu* **3**, 15; *fussivu* **3**, 7 ecc., ecc.; *fulgura* **2**, 17; *adunca* **4**, 23 ecc. Il noto *iornu* **2**, 4 ecc.; *iorni* **3**, 4; Parodi, *Op. cit.*, p. 127; con *o* antico *ploia* **2**, 22.

§ 7. Dittonghi latini Æ, Œ: *chelu* **2**, 3 ecc.; *cheli* **4**, 6. — *peni* **9**, 3; AU: *oy* **10**, 6; **10**, 8; *pocu* **4**, 16; *cosi* **8**, 14; *poviri* **5**, 29; — romanzi: *paroli* **4**, 18 ecc.

Vocali atone.

§ 8. A. Iniziale: per *arricordati*, *acuminzastivu*, ecc. v. § 26. — per l'*-er-* del futuro v. num. seg.

§ 9. E ed I. Protonica, passato in *a*: *piatati* **8**, 3; *risblandianti* **2**, 4; *dannanti* **2**, 23; — *antinditi* **3**, 2. — Ridotto normalmente a *i*; è inutile dare esempi: *diviti* **3**, 12; *divissi* **6**, 27; *livatu* **9**, 2; *lunidi* **7**, 12; *spiranza* **3**, 25; *midemmi* **4**, 25 ecc., ecc.; ma *peccati* **2**, 26 all. a *piccati* **3**, 9; *piccatu* **10**, 11; *pentiti* **7**, 6 all. a *pintivi* **6**, 25; *pinitencia* **10**, 11; *pensai* **7**, 16; *pensati* **5**, 3; all. a *pinsati* **6**, 3. — -ERE + HABEO: *avirà* **3**, 21 ecc.; *avirannu* **8**, 3; *aviriti* **9**, 24; *cridirà* **4**, 7 ecc. e sempre; e in questa serie entra anche *-ar-*; *mandirò* **5**, 4 ecc.; *turnirò* **5**, 13 ecc.; *amustrirò* **7**, 26; *pachifikirò* **8**, 15 ecc., ecc. — Notiamo le forme del verbo 'essere': *sirrà* **3**, 18 ecc. all. a *sarrà* **8**, 20. — In iato: *criaturi* **9**, 7 all. a *creaturi* **3**, 6; **9**, 8; *creatura* **3**, 5; *creati* **3**, 7. — Costantemente le proclitiche: *di*, *di lu*, *di la*, *di li*; *ni* nec **5**, 29 all. a *ne-ndi* **5**, 20; *né* **5**, 20. — Postonica: *angilu* **4**, 15; *angili* **4**, 4 all. a *angelu* **2**, 5; *venniri* **7**, 13 ecc. — Finale, sempre *-i* e non mai l'esito italiano. In *a*: *adunca* **4**, 23; *fina* **7**, 2; *perfina* **7**, 12; **9**, 16.

§ 10. o ed u. Protonica, normalmente *u*, con rare oscillazioni; cioè solo: *duminica* **2**, 11 ecc. all. a *dominica* **3**, 3 ecc.; *lavurari* **5**, 22 all. a *laborai* **5**, 23; *laboramu* **5**, 24; *riturnati* **8**, 9 ecc. all. a *ritornirò* **9**, 22. — Passato in *a*: *canusiti* **3**, 5; **3**, 6; **3**, 10; *canussi* **3**, 5 e *alchidirà* **5**, 14 se non da **ancidere* (Monaci, in *Rend. R. Accad. d. Lincei*, IV, 5, 1889, p. 832) e taccio di *sucta* **6**, 26; **7**, 9 ecc. — Il solito *i* di *cuminicari* **9**, 2; *scuminicatu* **4**, 6; **8**, 25 ecc. (cfr a. fr. *escomenger*): *minispreza* **8**, 27; *minisprezari* **10**, 6 (cfr. prov. *menespretz*, cat. *menysprear*); notiamo pure *intandi* **9**, 24 all. a *intandu* **3**, 27.

§ 11. Dittonghi latini: *audiri* **2**, 19; *auditi* **4**, 1; *exaudivi* **7**, 21; *laudamu* **5**, 25; *laudati* **5**, 24; *gaudiriti* **8**, 18; — romanzi: *auchelli* **2**, 15. — *maineri* **10**, 4.

Consonanti continue.

§ 12. j, sempre scritto *j*, come pure il dj: *Jhesu* **2**, 2 ecc.; *Juhani* **5**, 18; *iudei* **7**, 1; *iudiciu* **3**, 19; *iudikirà* **9**, 5; *iuru* **4**, 2 ecc.; *iurari* **9**, 4; *spriiuri* **4**, 27; *iusticia* **9**, 1; *iammay* **5**, 7; — però *diunari* **7**, 13 cfr. § I, *f*. — *iornu* **2**, 4; *iorni* **3**, 4; *seiu* **5**, 16; *vaya* **9**, 3 all. a *vaia* **9**, 2; *ioya* **9**, 26; ma *mezu* **2**, 4.

§ 13. lj. *Figlolu* **2**, 9; *vogla* **10**, 8 ecc.; dotto *evangeliu* **6**, 16 cfr. § I, *e*. — rj. Per *-ariu* cfr. num. 2. — nsj: *prisuni* **2**, 13; **2**, 24 ecc. — nj: *signuri* **2**, 2; *signuria* **5**, 5. — *dimoniu* **9**, 12; *testimonii* **4**, 27.

§ 14. cj. *inperzò* **2**, 8; *zo* **2**, 23; *azoki* **3**, 4; *faza* **9**, 2; *fazati* **9**, 25; — *brazu* **7**, 5. Notiamo *fachi* **2**, 7 nella norma di **face*. — tj. *gracia* **8**, 13; *malicia* **4**, 28; *iusticia* **9**, 1; *generacioni* **4**, 21 ecc. (enumerati al num. 6) all. a *siccarizu* **2**, 21; *alligriza* **8**, 14; *minisprezari* **10**, 6; *minispreza* **8**, 27; *poza* *poteat **10**, 8. — ntj: *pestilencia* **5**, 6; *pinitencia* **10**, 11; *sapiencia* **4**, 2; *nigligencia* **4**, 17; *annunciala* **3**, 14; *renunciati* **4**, 24; *annunciati* **4**, 24 all. a *acuminzastivu* **6**, 28; *incuminzamentu* **2**, 8; *minzunari* **5**, 1. — mptj: *cunchiati* **4**, 28. — *presuncioni* **10**, 5. — ctj: *benediccioni* **4**, 11; *resurrexioni* **7**, 10 all. a *resurressioni* **8**, 11.

§ 15. bj: *diiati* **4**, 15; **9**, 14; *aiu* **9**, 7; *aia* **9**, 12. — pj: *sachati* **4**, 19; **9**, 6.

§ 16. L. Permane dinanzi a dentale: *altaru* 2, 3; *altru* 5, 2; *altri* 3, 11; *alti* 4, 6; *altissimu* 7, 5. — CL: *claru* 9, 16; *cleru* 3, 28; *ecclesia* 3, 19. — *vechi* 8, 14. — GL: *granduli* 2, 16. — PL: *ploia* 2, 22; *pluvirò* 5, 9; *implirò* 8, 17; *implirannu* 8, 13; *plantu* 2, 25. — SPL: *risblandianti* 2, 4. — BL: *oblacioni* 3, 21; *iastimaturi* 4, 28. — FL: *flumari* 2, 22.

§ 17. V: *auchelli* 2, 15; svoltosi a *g* in *pagura* 2, 6. Per *-ivi*, *-av't* cfr. n. 39. — F: *iastimaturi* 4, 28.

§ 18. SC: *dissisi* 2, 2; *pissi* 2, 15; *canussi* 3, 5; *canussiti* 3, 6 all. a *canusiti* 3, 5; *risusitay* 7, 4.

§ 19. N: tacendo di *sunnu* 3, 15; *sinnu* 4, 14; *dannanti* 2, 23; geminato in postonica di proparossitoni *venniri* 7, 13; passato a *l* in *alchidirà* 5, 14 *a n c i d e r e. — M: geminato in postonica di proparossitoni *fimmini* 5, 13; e ricordo pure *cummari* 6, 23. — MN: conservato graficamente: *omni* 3, 5 ecc.

Consonanti esplosive.

§ 20. C: intervocalico regolarmente permane: *locu* 2, 22; *loki* 5, 5; *focu* 5, 10; digrada nella sonora nel solito esempio SCH. 88: *preguvi* 4, 15; *prigaru* 7, 21; *prigari* 7, 20. — Qui notiamo *briga* 8, 24; *fatiga* 5, 27. — CR: *lacrimi* 2, 25 all. a *lagrimi* 7, 28. — CT: grafia sempre conservata *facti* 2, 10; *lecta* 3, 22 ecc., ecc.; onde anche *tuctu* 2, 5; *tucta* 5, 6; *tucti* 2, 15. — *sucta* 6, 26. — CS: *essinu* 2, 22; *dissi* 3, 23, onde pura grafia forse *laxati* 8, 9. Cfr. pure § I, *d*.

§ 21. QU-: *inicu* 4, 26 all. a *'niqui* 6, 29; *kistu* 2, 8; *kista* 3, 13; *killu* 4, 9; *killi* 9, 13; *ki* 2, 6 all. a *cuy* 9, 16; *perki* 3, 6; *ca* 3, 26 all. a *ka* 4, 22; *adunca* 4, 23; ma però *aqua* 7, 16.

§ 22. GU-: *sangu* 2, 12 (SALVIONI, in *Rend. d. R. Istit. Lomb.*, S. 2ª, XL, 1907, p. 612). — GN: [*in*]*dinni* 3, 8; quindi pura grafia *regnu* 4, 9; *digni* 8, 24; *lignu* 2, 26.

§ 23. T: *putiri* 9, 9 ecc.; *frati* 4, 15; *infirmitati* 2, 17; *iniquitati* 2, 26 ecc.; *patri* 3, 22 ecc.; franc. *larruni* 5, 1: analogico *purrissivu* 5, 26. — NT: *intandu*, 3, 27; *intandi* 9, 24 rifatto su *quandu*.

§ 24. D resta, almeno in apparenza, immutato: *granduli* 2, 16; *quandu* 2, 5; *intandu* n. preced., *undi* 3, 25; *sindi* 10, 10; *nondi* 5, 28.

§ 25. P: *richipinu* **3**, 8; *richipiri* **8**, 24. — PT: *sitembru* **7**, 17; pura grafia *scripta* **2**, 3 ecc.; *Baptista* **5**, 18. — PS: *issu* **3**, 9; *issi* **5**, 29; pura grafia *ipsu* **10**, 3. — B: *previti* **3**, 13; *tavani* **2**, 14 ecc.; ma *tabuli* **2**, 4; *laborai* **5**, 23; *laboramu* **5**, 24 all. a *lavurari* **5**, 22. — *sabbatu* **7**, 3; **7**, 12 e il solito *appiru* **2**, 6.

Accidenti generali.

§ 26. PROSTESI. Per estensione analogica di *a*: *adimenticastivu* **2**, 18; *amustrirò* **7**, 26; *ammuchari* **3**, 26; **6**, 6; *amuchirò* **7**, 27; *arricordati* **6**, 12 e il deverbale *arricordu* **8**, 8; *acuminzastivu* **6**, 28; *agenti* ' genti ' **2**, 12. — Dinanzi a *s* complicato appare *i*-: *istinditi* **5**, 29; all. a *stinditi* **6**, 25; cfr. *escuminicati* **4**, 15.

§ 27. EPENTESI: *distrudiri* **6**, 23; *distrudiri-vi* **7**, 17; *distrudirò* **8**, 8; *distrudirannu* **8**, 3; forse per estensione analogica, se non è errore, *disscurdirò* **5**, 6.

§ 28. EPITESI: *oy* **10**, 6; **10**, 8; *esti* **2**, 8. — AFERESI: *micidari* **4**, 27; *'niqui* **6**, 29. — SINCOPE nei noti futuri, oltre a *virrà* **3**, 19 ecc.; *murriti* **7**, 9, notevole *piriti* ' perirete ' **4**, 16 (cfr. per l'attrazione in protonica delle liquide tra loro PARODI, *Tristano*, CLXI). Dubbio è *convertivi* **9**, 21 ' convertitevi '. Lasciando *previti* **3**, 13 e anche *malifacturi* **4**, 26 notiamo evitata la sincope in *vóli-si* **9**, 1; *distrudiri-vi* **7**, 17; *confidari-si* **8**, 31 v. nota; **10**, 5.

§ 29. ELISIONE, generalmente evitata; solo abbiamo: *l'avia* **3**, 23; *l'aqua* **7**, 16; *l'unu* **5**, 14; *l'altru* **5**, 14. — APOCOPE: *in ver lu* **3**, 24; *in ver di* **3**, 27; **9**, 23; *no* non **4**, 7; **6**, 12; **6**, 23 ecc. — METATESI: *spriiuri* **4**, 27, lascio *troni*, **2**, 16; scambio di prefisso *preveniriti* **6**, 20. — ASSIMILAZIONE: *sarachani* **7**, 9, se non è un errore.

FORME.

Declinazione.

§ 30. ARTICOLO: *di lu* **2**, 2 ecc.; *in lu* **2**, 4; *in la* **3**, 14; *in li* **3**, 11; *per lu* **2**, 15; *per la* **2**, 26; *per li* **4**, 2; *a lu* **4**, 9; *a la* **3**, 19; *a li* **3**, 20; *cum li* **5**, 2; *da lu* **2**, 22.

§ 31. Resti di casi obliqui; *marmuri* **2**, 4; *fratri* **9**, 25. — Neutri plurali: *fulgura* **2**, 17; *corpora* **6**, 24. — Metaplasmi di declinaz.: *altaru* **2**, 3; *sitembru* **7**, 17. — di genere: dal neutro al femm.: *la vostra travagla* **5**, 27. — Resti della 4ª declinazione: *li vostri manu* **6**, 21; — della 5ª declinazione: *fachi* **2**, 7 ecc.

Pronomi.

§ 32. Personali: *eu* **2**, 15 ecc.; *vui* **2**, 18 ecc.; — forme atone: sogg. enclit.: *cridistivu* **2**, 10; *adimenticastivu* **2**, 18; *vidistivu* **5**, 12; **7**, 15; **7**, 24; *fussivu* **3**, 7; *acuminzastivu* **6**, 28; *guardastivu* **6**, 19; *vulistivu* **2**, 19; **6**, 15; *purrissivu* **5**, 26. — in enclisi e proclisi: *vi* **2**, 15; **2**, 21 ecc. — con preposiz.: *a vui* **2**, 10; *in vui* **2**, 20; *di vui* **2**, 23; *da vui* **7**, 27; *per vui* **5**, 24. — 3ª sing. *ipsu* **10**, 3 — con preposiz. *di issu* **4**, 8; *ad issi* **5**, 29 — *cum illu* **10**, 3. — Particelle pronom.: sing. maschile *lu* **2**, 10; femm. enclit. e proclit.: *la* **2**, 5 ecc.; neutro *lu* **4**, 25; plur. masch. e femm.: *li* **3**, 4 ecc.; *a loru* **9**, 20; *sindi* **10**, 10; *nondi* **5**, 28.

§ 33. Possessivi: naturalmente *meu*, *mia*, *mei*. — *so* **3**, 5; *sou* **5**, 26; *sua* **3**, 14; *soy* **4**, 12. — *loru* **2**, 7 ecc. — Dimostrativi, congiuntivi ecc.: *kistu* **2**, 8; *kista* **3**, 13; *killu* **4**, 9; *killu* **9**, 13. — *issu* **3**, 9. — *zo* **3**,18. — *ki* **2**, 6 all. a *cui* 'ille qui' **3**, 19; **4**, 7; **9**, 4; **9**, 9 ecc. — *quali* 'qualunque' **3**, 13; *tuctu* 'ogni', con soppressione dell'articolo: *cum tuctu cori* **9**, 14; *tucti mali* **2**, 15; *tucti malifacturi* **4**, 26; *tucti vostri mali operi* **8**, 9. — *nullu* 'nessuno' **3**, 26. — *omni* **3**, 9 ecc.: *davanti omni populu* **4**, 13.

§ 34. Numerali: *unu* **5**, 2; *dui* **5**, 11 ecc.; *sey* **5**, 21; *dechi* **7**, 17.

Verbo.

§ 35. Presente indicativo. 1ª singol. *-u*: *dicu* **3**, 1 ecc.; *iuru* **4**, 2; *mandu* **5**, 7; *aiu* **9**, 7 ecc., ecc. — 1ª plur. *-amu*: *laboramu* **5**, 24; *laudamu* **5**, 25. — 3ª plur. *-anu*: *cessanu* **7**, 20; *volanu* **7**, 24; *guardanu* **5**, 17 ecc. — Per gli altri tipi verbali: 3ª sing. *-i*: *avi* **3**, 13; *poti* **3**, 26; *voli* **10**, 2 ecc. — *veni* **2**, 23 ecc.; *legi* **3**, 13; *canussi* **3**, 5. — 2ª plur. *-iti*: *aviti* **3**, 7; *diviti* **3**, 12 ecc.; *dichiti* **5**, 24 ecc., ecc. — 3ª plur. *-inu*: *volinu* **3**, 16; *essinu* **2**, 22; *richipinu* **3**, 8.

§ 36. PRESENTE CONGIUNTIVO. 2ª plur. *-ati*: *pinsati* **6**, 3; *andati* **9**, 28; *observati* **9**, 28. — 3ª plur. *-inu*: *manginu* **3**, 16. — Per gli altri tipi verbali: 3ª sing. *-a*: *vaya* **9**, 2; **9**, 3; *aia* **9**, 12; *poza* **10**, 8 ecc., ecc. — 2ª plur. *-ati*: *vivati* **8**, 15; *sachati* **4**, 19; *diiati* **4**, 15; **9**, 14.

§ 37. IMPERFETTO INDIC.: 3ª sing. *avia* **3**, 23; *tinia* **2**, 5. — CONGIUNTIVO: 1ª sing. *dunassi* **5**, 25; *divissi* **6**, 27; — 2ª plur. *purrissivu* **5**, 26.

§ 38. FUTURO. Per *murriti*, *piriti*, *virrà* ecc., v. n. 28; onde le forme analogiche *farrò* **5**, 5 ecc.; *darrò* **8**, 13; *dirrà* **9**, 10; *starriti* **6**, 4; ma per converso *apirirò* **5**, 9; *putiriti* **6**, 5; *gaudiriti* **8**, 18; *preveniriti* **6**, 20. — Come forma di futuro sciolto: *avi sapiri* **10**, 4.

§ 39. PERFETTO. 3ª sing. *-au*, v. n. 2. — 3ª plur. *-aru*: *prigaru* **7**, 21; *prigarumi* **6**, 26. — 1ª sing. *-ivi*: *pentivi* **6**, 27; *exaudivi* **6**, 27. — 3ª sing. *-i*: *vidi* **2**, 5; *dissisi* **2**, 2; *vinni* **3**, 23 ecc. — 3ª plur. *-iru*: *appiru* **2**, 6; *spasiru* **spanserunt* **2**, 12; **2**, 24; *misiru* **2**, 12 ecc.; *finiru-la* **7**, 2 e, foggiato sul tema del presente, *caderu* **2**, 6; **6**, 26. — PIÙ CHE PERFETTO, con valore di condizionale, il solito *fora* **3**, 7.

§ 40. IMPERATIVO. Per *convertivi* 'convertitevi' v. n. 28; per *sachati* **9**, 6 v. n. 36.

§ 41. GERUNDIO: *dichendu* **2**, 7; lat. *albischendu* **7**, 12; **9**, 16. — PARTICIPIO PRES.: *risblandianti* **2**, 4.

§ 42. Di *esse* riunisco le forme che s'incontrano. PRES. IND.: 1ª sing. *su* **9**, 6. — 3ª sing. *esti* **2**, 8 ecc. — 2ª plur. *siti* **4**, 24 ecc.; — 3ª plur. *su* **3**, 4; **5**, 11; *sunnu* **3**, 15. — IMPERFETTO: 3ª sing. *era* **4**, 1. — FUTURO: 3ª sing. *sirrà* **3**, 18; **8**, 8 ecc. all. a *sarrà* **8**, 20 ecc. — PERFETTO: 3ª sing. *fu* **3**, 22. — 2ª plur. *fussivu* **3**, 7. — PRES. CONG.: 3ª sing. *sia* **4**, 7 ecc. all. a *sie* **9**, 2. — 2ª plur. *siati* **8**, 23. — 3ª plur. *sinnu* **4**, 14. INFINITO *essiri* **10**, 11.

§ 43. Di *facere*. PRES. IND.: 3ª sing. *fa* **3**, 15; **4**, 25. — 2ª plur. *fachiti-vi* **6**, 22. — FUTURO: 1ª sing. *farrò* **5**, 5. — 3ª sing. *farrà* **3**, 20; **8**, 12. — 2ª plur. *farriti* **4**, 16; **5**, 8. — PERFETTO: 1ª sing. *fichi* **2**, 26. — PRES. CONG.: 3ª sing. *faza* **9**, 2. — 2ª plur. *fazati* **9**, 25. — INFINITO: *fari* **3**, 16 ecc.

§ 44. INDECLINABILI. Preposizioni *a*: *andirà a li mei voluntati* **9**, 18. — *cum* **5**, 2 ecc. — *di* a indicar provenienza: *dis-*

sisi di lu chelu **2**, 3; *vinni la vuchi di chelu* **3**, 23; **4**, 18; *avirà misericordia di lu Deu* **3**, 21; nei complem. d'agente: *fu lecta la epistola di lu angilu* **3**, 22; *vinni scripta di li alti cheli* **4**, 6 cfr. **6**, 9; **9**, 10; **9**, 17. — *dannanti* **2**, 23; *davanti* **3**, 26. — *di poi di* vui: 'dietro' **2**, 23. — *in* 'contro': *misi in vui* **2**, 20, latin. *in monti* **7**, 1; — *in ver lu* **3**, 24; *in ver di lu* **3**, 27; **9**, 23. — *per* 'a cagione': *per lu meu sanctu iornu di la duminica* **2**, 15 ecc. — *supra lu* **2**, 3; *supra di* **2**, 25; **4**, 8 ecc.; *supra li loru testi et di li loru animi* **3**, 18. — *sucta li* **6**, 26; **7**, 9; *sucta di* **9**, 8. — *per fina* 'fino' **7**, 12; **9**, 16. — *senza* **8**, 15

§ 45. Congiunzioni: *et* spesso ripetuta: *et fami et grilli et serpenti et mali bestii et muski et tavani et mali auchelli et pissi* **2**, 14 cfr. **2**, 25; 4, 27 ecc. — *ni* **3**, 15; **5**, 28; *né* **5**, 27; *né* copulativo: *comu purrissivu viviri di la vostra travagla né di la vostra fatiga* **5**, 27; *nen* in: *nendi angelu* **5**, 20. — *adunca* **4**, 23. — *imperò* **3**, 17; *inperzò* **2**, 8 ecc. — *inperzò ka* **4**, 22. — *azò ki* **3**, 4. — *ka* **3**, 3 ecc.; *ki* **3**, 7 ecc.; consecutivo: *multa ploia ki li flumari essinu* **2**, 22. — *comu* comparativo **2**, 4, interrogativo **5**, 26. — *perki* **3**, 7. — Notiamo *si non* nel senso di 'bensì': *ma non per vui, si non per li multi angeli* **6**, 25.

§ 46. Avverbi: *quandu* **2**, 5. — *inprimamenti* **2**, 9. — *in prima* **6**, 9; **9**, 1. — *intandu* **3**, 27; **9**, 3; *intandi* **9**, 24 'allora'. — *iammay* **5**, 7; **5**, 12 ecc. — *fina immo* 'fino a ora' **7**, 2. — *illocu* **4**, 1 — *undi* 'dovẹ': *undi aviti la spiranza di fugiri* **3**, 25; *undi fugiriti?* **6**, 3; *undi starriti* **6**, 4. — *illocu* 'ivi', 4, 1. — *inpressu* **4**, 19. — *si* pleonastico: *si esti inimicu* **3**, 14; *si esti* **10**, 5 ecc.

§ 47. Annotazioni sintattiche. Si badi alla costruzione: *la vostra saluti di li animi* **2**, 18, per 'la saluti di li vostri animi'. — Circa la concordanza: *farrò terremoti azò ki vi consumi* **6**, 14. — *lu populu quandu la vidi... si caderu* **2**, 5; ma con un sostantivo collettivo è d'uso il plurale: *agenti malvasa ki spasiru* **2**, 12; *o populu inicu, ki ascultati* **4**, 26; cfr. **4**, 1 ecc. Ma *pocu iorni* **4**, 16, 'pochi'? — Per la soppressione dell'articolo determinativo con *tuctu* v. n. 33; in compenso abbiamo: *iurnu di la duminica* **2**, 15 ecc.; *iurnu di lu sabbatu* **7**, 2, e con 'Dio': *misericordia di lu Deu patri* **3**, 21. — Si noti *esse* col dativo: *issu Deu esti riposu* **3**, 9 e col dativo i seguenti verbi: *misiru a vui* **2**, 12; *l'unu homu a l'altru alchidirà* **5**, 14;

perkí non laudati a Deu? **5**, 24; *laudamu a Deu* **5**, 25; *iudikirà ad altru* **9**, 5; *pregu a tucti vui* **9**, 26. — Riflessivo: *si caderu* **2**, 6. — Transitivo: *non lu cridistivu* **2**, 10; *no la cridirà* **4**, 7; 4, 10; *pluvirò supra di vui petri* **5**, 9; *li vogla oy poza perdunari* **10**, 8. — Soppresso il pronome relativo: *et sunnu benedicti di Deu killi kista epistola cridirannu* **9**, 13. — Si veda l'aggettivo in funzione avverbiale: *in tenebri multu oscuru* **5**, 13; **7**, 25; *albischendu claru luchi* **9**, 16, e la forma pleonastica: *si esti presuncioni, zo esti confidarisi lu homu a la misericordia* **10**, 5.

§ 48. Glossario: *agenti* **2**, 12 'moltitudine' Traina, *Nuovo Vocab. Sicil. Ital.*, Palermo, 1868, s. *aggenti* 1. — *ammuchari* **3**, 26; **6**, 6; *amuchirò* **7**, 27 'sfuggire', Parodi, in *Bull. Soc. Dant.*, III, 153; Salvioni, in *Rend. R. Istit. Lomb.*, S. 2ª, XXXIX, 619. — *dunai* **2**, 13 ecc., sempre nel senso di 'dare'. — *essinu* **2**, 22 *e x e u n t.* — *flumari* **2**, 22 'fiume', largo corso d'acqua, od. *Ciumàra*, Traina, s. v. — *granduli* **2**, 16 'gragnuola' od. *grànnula.* — *grilli* **2**, 14, trad. 'broscus', cavallette, Traina, s. v. — *finirula (la ligi)* **7**, 2, trad. 'dimiserunt'. — *mini* **5**, 12 'poppe'. — *siccarizu* **2**, 21 'siccità'. — *spasiru (lu vostru sangu)* **2**, 12; **2**, 24 'spargere', cfr. od. '*spasu di sangu*', chiazza di sangue, Traina, s. v. — *turnirò (la luchi)* **5**, 13 'volgerò'; cfr. pure *si vui riturnati* **8**, 8, che trad. 'si conversi essetis'.

La famiglia di Golìa.

Nota del Dott. FERDINANDO NERI.

Concilio di Sens, 1239 (1): " Statuimus quod clerici ribaldi, " maxime qui vulgo dicuntur *de familia Goliae...* „; il canone sembra foggiato su di un modello comune, perchè il seguito corrisponde, quasi testualmente, alle costituzioni di un precedente concilio (Château Gontier, 1231); ma in questo si legge " maxime " qui Goliardi nuncupantur „, mentre nel canone di Sens abbiamo quel nome di Golia, sulla cui " familia „ si aggira tutta una discussione di storia del costume.

Gli altri documenti non letterari parlano sempre di *goliardi*; se non fosse questa testimonianza, il nome di *Golia* rimarrebbe limitato alle poesie che s'intitolano da lui. Inoltre, sebbene i concili trattino solo di " clerici ribaldi „, tale accenno contribuì a diffondere l'opinione moderna che goliardi fossero gli scolari, i " clerici vagantes „ del Medio evo.

(1) Per questa data, v. Le Clerc, in *Hist. litt. de la France,* XXII, p. 155, e Santangelo, *Studio sulla poesia goliardica,* Palermo, 1902, p. 3-4: l'omonimia dei vescovi " Gautier „ (di cui il primo morì nel 923: v. Eubel, *Hier. cathol. m. aevi,* 1198-1431, *Sens*) fu causa che il Labbé attribuisse quel concilio al sec. X; il Martène, VII, col. 137-38, lo riprodusse, movendo da fonte ms., con la data giusta; il Mansi, XVIII, 323-24, e XXIII, 509-12, ristampò le costituzioni due volte, sotto i due vescovi, e l'errore si ripete anche oggi: v. Faral, *Les jongleurs en France au moyen âge,* Paris, 1910, p. 266-67 e 274, dove son poi errori di stampa le date 913 e 928; come un 823 nel Migne, *Patrol. lat.,* 132, col. 717-18: non si può dire un testo fortunato! Il dubbio del Bertoni (*La poesia dei goliardi,* in " N. Antologia „, 16 agosto 1911, p. 623, n. 3) sulle costituzioni del sec. X è più che giustificato.

Premetto che, sugli studi del Novati (1) e del Santangelo, preceduti in parte dal Gabrielli (2), io sono persuaso che fra i *goliardi* dei numerosi documenti medievali e gli autori della poesia " goliardica „ non vi è nessun legame storico, necessario; come non ve n'è fra i " clerici vagantes „ e i goliardi.

Uno scritto di Gaston Paris (3) — che si cita tuttavia per un'ipotesi sulla diffusione del nome di Golia, che ne è, a mio credere, la parte meno felice — contiene un'osservazione importante su di un articolo del dizionario del Godefroy: la voce *golias* non può considerarsi, come il Godefroy diceva, per il " cas sujet de *goliart* „: essa dev'essere studiata a sè, nei suoi rapporti col nome del gigante biblico (4).

Il testo più noto è d'un racconto della *Vie des anciens Pères*, il 28° secondo la numerazione adottata dai filologi sul ms. A (Bibl. Nat. Fr. 1546), quello del chierico che volle derubare l'abbazia e si pentì e ne divenne poi egli stesso l'abate:

v. 58 Dou main jusque au soir se boutoit
Es tavernes li golias
Es bons morseas et es hanas.

---

(1) *I goliardi e la poesia latina medievale*, in *A ricolta*, Bergamo, 1907, p. 61 sgg. (riproduce, tolte le poche note, un artic. della " Bibliot. delle Scuole ital. „, gennaio 1900, p. 2–5); come avvertì il Cian nel " Bull. d. Soc. dantesca „, N. S., XI, p. 308, questo scritto espone già le idee che furono poi svolte dal Santangelo; e ad esse dichiara di conformarsi pienamente il Renier (" La Stampa „, 12 maggio 1914) in una rassegna della recentissima *Storia della Scuola in Italia* di Gius. Manacorda, che ha collocato in giusta luce la " goliardìa „ degli studenti medievali: cfr. Cian, " La Lettura „, marzo 1914, p. 232.

(2) *Su la poesia dei Goliardi*, Città di Castello, 1889, p. 8 sgg.: critica dello studio preced. dello Straccali (v. un cenno, se non erro, del Novati, in " Giorn. storico „, XIII, p. 468-69).

(3) In " Biblioth. de l'École des chartes „, vol. L (1889), p. 258-60: recens. del Gabrielli.

(4) Cfr. anche Hauréau, in " Notices et extraits des Mss. de la Bibl. Nat. „, t. XXIX, P. II, p. 271-72.

I due esempi recati dal Godefroy sui mss. Ars. 3527 e 3641 (1) parrebbero contraddetti dall'ediz. Méon (*Nouv. recueil*, II, p. 447):

> Es tavernes li gouliars
> As biaus morsiaus et as hasars;

il ms. Bibl. Nat. Fr. 23111, che è la fonte di quest'ultimo (2), legge veramente anch'esso *li goulyas* (c. 37 *a*, col. 2); e *li golias* il ms. Bibl. Nat. Fr. 1039, c. 98 *b*, col. 2; *guoliars* trovo nel ms. Bibl. Nat. Fr. 1546, c. 67 *a*, col. 2, ma, senza contare ch'esso pure ha nel titolo " Du clerc *golias* qui vost rober s'abaie „ (c. 66 *b*, col. 2), ciò che importa per noi è l'altra parola in rima, *hanas*, ch' è, attraverso le varie grafie (*hanax, hanatz, anas, henas, hennas, hennays...*), la riduzione normale di *hanaps*; ed è voce della tavola, e s'accorda benissimo coi " bons morseaux „, laddove *hasars* si scopre per una facile correzione dettata dalla forma più nota *gouliar*(*s*).

Il nome di Golias, ch' è quello del gigante biblico (" Puis " que li roi David ot Golias feru „, *Aye d'Avignon*, v. 83), si trova applicato a più di un Saracino nelle canzoni di gesta (3);

---

(1) La bibliografia, in Schwan, *La vie des anciens Pères*, in " Romania „, XIII, p. 234 sgg.: accresciuta su quella del Wolter (ed. di *Juitel: Der Judenknabe*, Halle, 1879, in " Biblioth. Normannica „, II, p. 9 sgg.), sebbene non ancora completa: v. Meyer, " Romania „, XIX, 306, e i rinvii ai voll. preced. Cfr. Paris, *La vie de Saint Alexis*, p. 221 " Del clerc goulias qui se rendi pour l'abeie reuber „. Da questo deriva il 2° dei *Dodici conti morali d'anon. senese*, ed. Zambrini, Bologna, 1862; nel principio, abbreviando (p. 6): " E' fue uno ch'ebbe nome Boccafritta, el quale consumò tutto el suo in ghiottornie et in giocare „.

(2) Con correzioni arbitrarie: Schwan, p. 233, n. 6.

(3) Ern. Langlois, *Table des noms propres de toute nature compris dans les chansons de geste imprimées*, Paris, 1904, ad nom.; cfr. Paris, *La chanson du Pèlerinage de Charlemagne*, in " Romania „, IX, p. 46-47. In *La prise de Cordres et de Sebille*, ed. Densusianu (" Soc. Anciens Textes „), v. 1160-62:

> " Deus! „ dist Hernalz, " con grant avoir ci a!
> . . . .
> Ans tant n'en ot li fors rois Golias! „

Sia notato che il catal. del Langlois registra anche un re saraceno Goulyart (in *Foucon de Candie*).

le quali ci serbano pure un'espressione che può giovare al nostro proposito. In *Maugis d'Agremont*:

> v. 1765 Puis crie Rocheflor hautement a un flaz;
> Dont crolla la bataille sor *la gent goliaz* (1);

sono gl'Infedeli, senz'altro.

In *Aliscans*, quando Rainouart, nella cucina di Laon, si adira contro quattro scudieri che lo deridono:

> v. 3735 Dist Rainouars: " Vos en faites vos gas,
> Par saint Denis, n'i a mestier baras!
> Fil à putain, mauvais laron Judas,
> Vos estes tout de la gent goulias „ (2).

Qui ha un senso ingiurioso, e non è detto che valga: " siete " dei pagani „; in ogni modo, all'ultimo di quegli scudieri Rainouart dice: " Tais, glous „ — Taci, ghiottone (3). E se dovessimo tradurre in volgare d'*oil* il " de familia Goliae „ del documento, non ci allontaneremmo forse troppo dal giusto ricorrendo a questo " de la gent goulias „ (4).

Il Godefroy registra un altro esempio più tardo (sec. XV), dai *Mémoires* di Olivier de la Marche, lib. I, cap. IX: " pour " donner exemple et doctrine aux josnes gens qui mesdits me- " moires liront cy après, qu'ilz se gardent d'estre vanteulx ne " golias en parolles, car souvent et communement le lyon en " parolles est la brebis en oeuvres „: seguo l'ediz. più recente, curata sui mss. da Beaune e D'Arbaumont per la Société de l'Histoire de France (t. I, p. 323); ma la forma *golias* si man-

(1) " Revue des langues romanes „, t. XXXVI.

(2) Ed. " Les anciens poëtes de la France „.

(3) *Glous*, *gloutons*, è l'improperio di rito in *Aliscans*: v. nelle zuffe di Guglielmo, v. 1102, 1139, 1146, 1228, 1308, 1356, ecc.

(4) Il Salvioni, *Studi di filol. romanza*, VII, p. 168, ha rilevato nella *Contemplacio de la Passio de Nostre Senhor*, testo catalano-provenzale (ms. del sec. XV) il passo: " Delivra me... com delivrist... saul de las mans de goliart giguant „ (p. 155); ma lo scambio mi par qui suggerito dalla forma lat. Goliath.

tenne in tutte le edizioni, a cominciare dalla prima, di Denis Sauvage, Lyon, 1562, p. 133 (1).

E qui un breve *excursus* in un territorio linguistico affine, ma ben distinto, e scevro, nella presente questione, da ogni influsso letterario, erudito.

In Piemonte la voce " goliardo „ è d'uso antico e non mai intermesso: in un documento del 1295, poichè si tratta di una largizione del principe nelle feste di carnevale (" Die domi-" nica sequenti, que fuit carnisprivium apud Pignarolium..... " Duobus goliardis de dono Domini... „), si può pensare ad una specie di giullari, a una qualsiasi gente di sollazzo (2); ma altrove (e al femminile " goliarda „) essa sta semplicemente per " gluto „, " glutonus „ (3); e in questo senso l'adope-

---

(1) Nell'ed. Petitot, I, p. 352 n.: *Golias ou Goliard: insolent*; la spiegazione è suggerita dal contesto.

(2) *Saggi storici del conte* F. Saraceno, Pinerolo, 1894, p. 15 (*Giullari, Menestrelli... dei Principi d'Acaia*, dalle " Curios. e ricerche di st. subalp. „, vol. III); cfr. S. Cordero di Pamparato, *Docum. per la Storia del Piemonte*, (1265-1300), in " Miscell. di Storia Ital. „, s. III, t. IX, p. 76.

(3) Gabotto, *Il " podestà dei ribaldi „ in Piemonte*, in " La Bibliot. delle Scuole ital. „, X, n. 8 (15 apr. 1904), p. 2 n., e *Miscell. valdostana* (" Bibliot. Soc. stor. subalp. „, vol. XVII), p. 328: docum. fra il 3 maggio 1304 e 3 maggio 1305. Nel più antico degli Statuti e privilegi di Susa (del 1197, Tomaso I conte di Savoia: M. H. P., Leg. mun., I, col. 5 e 9): " de glutone si probum percusserit... de probo si glutonem iniuste percusserit... „: dov'è palese il valore giuridico che questi termini, *ghiottone, ribaldo...*, esprimenti per noi un puro giudizio morale, assumevano nel Medio evo; e i documenti sui goliardi, interpretati senza queste cautele, parvero favorire l'ipotesi di un'istituzione o di una corporazione goliardica. Cfr. la carta del 1380, cit. dal Du Cange: " Se gerens pro Ribaldo, et se dicens de ordine, seu de statu Goliardorum, seu buffonum... „. Io vorrei d'altra parte guardarmi da un'assimilazione che si vien disegnando in questi studi (Santangelo, op. cit., p. 14): che i goliardi fossero giullari; no, sono " in fascio „ coi giullari, coi trutanni, coi ribaldi (Novati, p. 63): il Du Cange può dire: " Goliardi, bufones, joculatores iidem sunt „, quando s'intenda: sono la stessa gente; e ciascuno di costoro poteva essere fregiato di un titolo analogo, come a lor volta i chierici, gli studenti; ma non v'è identità.

rava il Botero alla fine del '500 (1), ed è viva ancor oggi (2).

D'altra parte, nella *Farsa de Nicolao Spranga caligario*, dell'Alione (fine del sec. XV), rilevo questi versi:

NICOLAUS

El fa ancour si bon vive an-Ast
Com a gnun leu de Lombardia.

BERNARDIN

Sy, chi vol viver da golia;
Ma per manger regularment
Y zenoeys son propria gent
Da governer una masnà:
So bel mantil anlexià,
Colla sal biancha e-l grisoret,
Doy citroyn e trey amoret...

La forma è accertata dalla posizione in rima; e *da golia* è la lezione dell'ediz. principe, 1521, conservata nelle ristampe, 1560, 1601, 1628, fin che l'edizione moderna del 1865 (" Bibl. rara ") l'alterò in *de golia* (3). E il senso par chiaro: al piacere dei gran cibi saporosi, si oppone, non senza ironia da parte di Bernardin (4), una mensa linda e regolata; *golia* sta dunque

---

(1) *Relationi universali*, P. III, Ven. 1595, p. 68: " e di conversare... più presto co' buffoni, e co' gogliardi, che con gentilhuomini, e con persone d'honore ": cfr. " Revue des études rabelaisiennes ", IX, p. 470; *sogliardi* non può essere che un errore delle stampe (ancora nelle *Relationi*, Ven. 1659, p. 408), e si spiega con la forma del *g* nella scrittura.

(2) Cfr. i dizionari dello ZALLI, nelle due ediz., del CAPELLO DI SANFRANCO (piem.-franc.), del CAVUZZI; il *Glossario etimolog. piemontese* del DAL POZZO, il *Glossario monferrino* del FERRARO, il NIGRA, *Fonetica del dialetto di Val-Soana* (" Arch. glottol. ital. ", III, 24). Del resto, *guliárd* per ghiotto è di tutte le parlate piemontesi.

(3) GIACOMINO, *La lingua dell'Alione*, in " Arch. glottol. ital. ", XV, p. 425-26: l'ediz. Daelli non ha valore filologico, e in questi stessi versi presenta un altro errore: *Lo bel mantil...* dove l'origin. ha *So*: " la sua brava tovaglia di bucato... ". Ho riveduto il testo sulla serie completa delle ediz. dell'Alione posseduta dalla Bibliot. Reale in Torino.

(4) Questo risulta dal sèguito del discorso, che non sto a citare.

per “ ghiottone „, e risponde esattamente al *goulias* francese, come il nome del gigante è in piemontese *Golia* e nel francese antico *Goulias*.

Il Paris (1) ha cercato un legame diretto, “ storico „, fra il gigante filisteo e il patrono della poesia goliardica, e lo additò in una lettera di S. Bernardo ad Innocenzo II; l'avversario è Abelardo: “ Procedit Golias, procero corpore, nobili illo suo “ bellico apparatu circummunitus, antecedente quoque eius armi- “ gero Arnaldo de Brixia „ (ep. 189). Poco dopo, sarebbero uscite sotto il nome di Golia delle satire contro Roma e contro S. Bernardo, incominciando la fortuna di quel nome e in certo modo la poesia goliardica.

Le principali obbiezioni (2) sono: che la poesia goliardica appartiene al secolo seguente, e la fioritura di satire provocata dall'epistola di S. Bernardo (a. 1140) è soltanto ipotetica; che il carattere essenziale delle poesie di Golia non è l'opposizione contro Roma, nè la reazione poetica all'ascetismo ebbe colore eretico, o anche solo anticlericale; che l'immagine di Golia, per rappresentare un nemico prepotente e minaccioso è troppo spontanea in testi ecclesiastici o eruditi (3) perchè ad uno di essi si attribuisca una fortuna così straordinaria: ancora Dante designa con quella il suo odio, Filippo il Bello, nell'epistola ad Arrigo VII (§ 8): “ rumpe moras... et Goliam hunc in funda “ sapientiae tuae atque in lapide virium tuarum prosterne „.

A cominciare dal Medio evo, il nome di Golia ha goduto di una grande popolarità: ancor oggi, nel linguaggio comune, esso denota il “ gigante „ per eccellenza. E i caratteri del gigante nella fantasia popolare sono: una statura, un vigore, ed un appetito enormi: Rainouart, al convento, si fa salsiera del mortaio, e vuota un paniere “ ou de rousoles avoit plus d'un “ millier „; Morgante vede la fame “ in aria come un nuvol

(1) Art. cit., p. 259; cfr. Bertoni, cit., p. 623-25.

(2) Novati, p. 65 sgg.; Santangelo, p. 35-36.

(3) E fra questi il passo di Beda, ricordato dal Manacorda, op. cit., vol. I, P. II, p. 71.

" d'acqua pregno „; Fracasso: " Larga merendando mangiabat " bocca vedellum „ (*Maccheronee*, IV, 69, ed. Luzio); il folk-lore conosce una quantità di marmitte e di scodelle dei giganti. Per un altro verso, le figure " eroiche „ dei ghiottoni acquistano volentieri una certa linea gigantesca: si veda il ritratto di monna Porcacchia nei sonetti 65 e segg. del *Saporetto* (1).

Il tipo ha raggiunto le cime del grottesco con i giganti rabelaisiani, e non è senza valore per noi che il nome stesso di Gargantua — che Rabelais non inventò, ma riprese dalle stampe popolari (2) — rechi in sè l'immagine della gola aperta (3). E fra i suoi confratelli è Golaffre, di cui non si può dire che l'etimologia debba essere *gula*, ma che rivela, nelle tradizioni, un carattere di voracità che lo assimila a un qualsiasi *gouliafre* (4).

Un procedimento analogico di tal sorta è lecito attribuire a *Golia*: il quale era un gigante illustre, e recava nel suo nome

---

(1) Ed. Debenedetti, " Giorn. storico „, Suppl. 15 (cfr. " Lares „, III, p. 91 sgg.); e i nomi della famiglia nel son. 64: Sparapane (v. D'Ancona, *Origini*², I, p. 639, e le *Sacre Rappresentaz.*, II, p. 302-03), Cacciancanna, Magniante, Aprecanna, Empieventre, ecc.

(2) Fra i molti indizi raccolti dal Sébillot, *Gargantua et les traditions populaires*, Paris, 1883, alcuni possono risalire ad un'antica leggenda del gigante: questo però non è certo; certo è, invece, che il nome si trova prima delle *Grandes et inestimables Cronicques du grant et énorme géant Gargantua*, e che queste precedettero l'opera di Rabelais, fornendogli i rozzi tipi ch'egli trattò con allegra e geniale violenza: v. A. Thomas, *Gargantua an* (sic) *Limousin avant Rabelais*, in " Revue des études rabelais. „, IV, p. 217 sgg., e nello stesso volume gli scritti di P. Champion, L. Pinvert e P. Albarel, p. 273, 287, 390.

(3) Rad. *garg*: v. J. Plattard, *L'œuvre de Rabelais*, Paris, 1910, p. 15, n. 6, e gli scritti che ho citato nella n. preced. (lo spagn. ha *garganta* per " gola „; l'ital. *garganella*, ecc.: cfr. Sainéan, *L'argot ancien*, Paris, 1907, p. 227: *gargue*, e il piccardo *gargouenne*). Le " Cronicques gargantuines „ narrano anch'esse di " grant Gosier „. Nel suo colorito ritratto del mitico Golia " cette manière d'Hercule tumultueux... „, il Faral (op. cit., p. 41) ne fa un avo non indegno e autenticissimo di frate Jean des Entommeures.

(4) Sébillot, op. cit., p. 239-40; Albarel, art. cit., p. 391. Nelle canzoni di gesta, *Golafre* e *Agolafre* (v. Langlois, *Table* cit.): la seconda forma si accosta a un tipo *Agol-ant*, del tutto diverso.

il più evidente richiamo alla gola (1); i poeti del tripudio, della voluttà, del vin chiaro, i " figli di Golia ", insomma, potevano raccogliersi intorno a lui come all'eroe gagliardo e giocondo:

Summa salus omnium, filius Mariae,
pascat, potet, vestiat pueros Goliae.

Il gigante, come quasi tutti i giganti, è un infedele, ciò che gli dà un tono spregiudicato e aggressivo (2):

Ad terrorem omnium surgam locuturus;

ed è anch'esso un tratto di Golia negl'inni profani; ma non è il primo, non è il carattere " genetico ".

Quel che si è detto non esclude che *goliardo* si sia formato direttamente da *gula*: quando nel campo romanzo noi troviamo a pari *golare* e *goliare*, *goloso* e *golioso*, *gorardo* o *golardo* (3) e *goliardo*, nessuna considerazione morfologica basta a risolvere il problema; e la vasta diffusione della parola, la sua forte sopravvivenza nei dialetti più lontani, e sempre nel senso di *goloso*, persuadono piuttosto che essa faccia parte fin dalle ori-

---

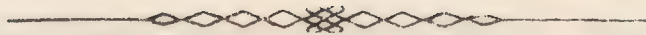
(1) Del poeta leggendario scriveva Giraldo Cambrense " qui Gulias melius, quia gulae et crapulae per omnia deditus, dici potuit... " e il Le Clerc ricorda una facezia inedita (copia del sec. XV): " Nos Gorgias ingurgitantium abbas, bachantium antistes... ": il nome è greco, ma qui si tratta di *gorge*: v. " Hist. litt. de la France ", XXII, p. 156, e Schneegans, *Gesch. der grotesken Satire*, Strassburg, 1894, p. 65, n. 2; similmente " Pater Decius " era poi il *déz*, il dado: Bertoni, art. cit., p. 637.

(2) O. Hubatsch, *Die latein, Vagantenlieder*, Görlitz, 1870, p. 15-16.

(3) Salvioni, in " Arch. glott. ", XII, p. 406 (*gorardo* in Bonvesin): *goliardia* del testo lombardo (Foerster, " Arch. ", VII, 24) sta per *gola*, *ghiottoneria*; Ascoli, " Arch. ", VII, p. 509 n.; Ulrich, in " Romania ", XXVI, p. 223; Schuchardt, in " Zeitschr. f. rom. Philol. ", XXXI, p. 21-22; Crescini, in " Giorn. ligustico ", X, p. 354, n. 8, e la nota agg. a p. 478; Bos, *Glossaire de la langue d'oïl*, p. 238, *goliart* e *gueulard*: questa voce riappare nell'*argot*, per " bissac ", e *gueularde*: " poche ", creazione-metaforica sulla stessa idea di *gueule* " d'après l'ouverture ": Nisard, *Hist. des livres popul.*, II, p. 392 n.; Sainéan, op. cit., p. 74-75 (cfr. *goulu*: " poêle " e " puits "), 317 (*gulart*: " sacco ", gergo di Montmorin).

gini della stessa famiglia, con un proprio suffisso (1); e ad essa, in fondo, che altro aveva fatto se non aggregarsi per l'esterna analogia del suono il nome antico del gigante Golia?

(1) E. Philipon, *Suffixes romans d'origine pré-latine*, in " Romania ", XLIII, p. 29 sgg., v. p. 42: contro l'orig. germanica (accettata comunemente: v. Brunot, *Hist. de la langue française*, t. I, p. 282).

Per l'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

PROGRAMMA

PER IL

XX PREMIO BRESSA

La Reale Accademia delle Scienze di Torino, conformandosi alle disposizioni testamentarie del Dottore Cesare Alessandro Bressa, annunzia che il *ventesimo premio Bressa* sarà conferito a quello **Scienziato** od **Inventore italiano**, il quale durante il quadriennio 1913-16 " avrà fatto, a giudizio della " Reale Accademia delle Scienze di Torino, la più insigne ed " utile scoperta, o prodotto l'opera più celebre in fatto di " scienze fisiche e sperimentali, storia naturale, matematiche " pure ed applicate, chimica, fisiologia e patologia, non escluse " la geologia, la storia, la geografia e la statistica ".

La somma destinata al premio, dedotta la tassa di ricchezza mobile, sarà di Lire **9000** (novemila).

Gli Autori che desiderano richiamare l'attenzione dell'Accademia sulle loro opere, potranno inviarle alla Segreteria dell'Accademia non oltre il 31 dicembre 1916. Esse dovranno essere stampate e non saranno restituite. Non si terrà conto dei manoscritti.

L'Accademia aggiudicherà il premio allo Scienziato che le sembrerà più meritevole, abbia o no presentato le sue opere.

A nessuno dei Soci nazionali dell'Accademia, residenti o non residenti, potrà essere conferito il premio.

Torino, addì 1° gennaio 1915.

Il Presidente dell'Accademia
P. Boselli

Il Segretario della Giunta
A. Naccari

PREMII DI FONDAZIONE GAUTIERI

L'Accademia Reale delle Scienze di Torino conferirà nel 1915 un premio di fondazione Gautieri all'opera di Filosofia, inclusa la Storia della Filosofia, che sarà giudicata migliore fra quelle pubblicate negli anni 1912-1914. Il premio sarà di L. 1900, e sarà assegnato ad autore italiano (esclusi i membri nazionali residenti e non residenti dell'Accademia) e per opere scritte in italiano.

Gli autori, che desiderano richiamare sulle loro pubblicazioni l'attenzione dell'Accademia, possono inviarle a questa. Essa però non farà restituzione delle opere ricevute.

DISTRIBUZIONE DELLE SEDUTE

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1914-915

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1914 - 15 Novembre	1914 - 22 Novembre
» - 29 »	» - 6 Dicembre
» - 13 Dicembre	» - 20 »
» - 27 »	1915 - 3 Gennaio
1915 - 10 Gennaio	» - 17 »
» - 24 »	» - 31 »
» - 7 Febbraio	» - 14 Febbraio
» - 21 »	» - 28 »
» - 7 Marzo	» - 14 Marzo
» - 21 »	» - 28 »
» - 11 Aprile	» - 18 Aprile
» - 25 »	» - 2 Maggio
» - 9 Maggio	» - 16 »
» - 23 »	» - 30 »
» - 13 Giugno	» - 20 Giugno

Tip. Vincenzo Bona - Torino (71222).

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. L, Disp. 2ª, **1914-1915**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 29 Novembre 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe D'Ovidio ed i Soci Naccari, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Somigliana e Segre Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio Parona offre in omaggio, a nome del Prof. F. Sacco e del Prof. A. Roccati, parecchie pubblicazioni, in gran parte geologiche, di questi scienziati. Verranno registrate nell'elenco generale delle pubblicazioni ricevute dall'Accademia.

Si presentano, per la stampa negli *Atti*, le seguenti Note (rispettivamente dai Soci Jadanza, D'Ovidio e Peano):

L. Carnera, *Nuova campionatura dei fili d'acciaio " invar " posseduti dal Gabinetto di Geodesia della R. Università di Torino;*

G. Sannia, *Sul metodo di sommazione di Cesàro;*

S. A. Toscano, *Sopra un inviluppo di circonferenze.*

Il Socio Foà, anche a nome del collega Fusari, legge la relazione sulla Memoria del Dott. Gamna, presentata nella precedente adunanza. In conformità della proposta contenuta nella relazione si delibera la stampa della Memoria nei volumi accademici.

Negli stessi volumi viene accolta, con votazione unanime, una Memoria del Socio Guareschi, da lui presentata, col titolo: " *Luigi Ferdinando Marsigli e la sua opera scientifica.* Notizie storiche sull'oceanografia con appendice su Vannoccio Biringucci ".

Infine vengono ancora offerti, per la pubblicazione fra le Memorie, due scritti:

P. Zuffardi, *Geomorfologia della Collina di Torino*, dal Socio Parona;

L. Carnera, *Orbita della Cometa 1899. V.*, dal Socio Jadanza.

Riferiranno sul primo i Soci Parona e Somigliana, sul secondo Jadanza e Naccari.

LETTURE

Nuova campionatura dei fili di acciaio “ invar „ posseduti dal Gabinetto di Geodesia della R. Università di Torino.

Nota di LUIGI CARNERA

1. — Essendo stato incaricato di eseguire un lavoro di rilievo nel golfo della Spezia, per il quale era richiesta una notevole precisione, mi parve conveniente iniziare il lavoro con la misura di una piccola base, anche per poter esperimentare i quattro fili di “ Invar „, che comperati dall'Istituto nel 1908, erano già stati usati replicatamente sia per le misure della base sperimentale di Marola, che durante la campagna idrografica fatta sulle coste del Benadir dalla R. Nave *Staffetta* nel 1910-11. Ma sgraziatamente al momento di iniziare la misura di controllo finale, che doveva esser fatta sulla base sperimentale e con la quale dovevano chiudersi i lavori coloniali, si ebbe a trovare che i quattro fili erano stati attaccati dalla ruggine, ed uno anzi in modo così forte da averne la rottura, quando si volle tentare di svolgerlo. Nel timore allora di non poter condurre a termine il mio lavoro, se continuando la ruggine l'opera sua, si fosse spezzato qualche altro filo, e nell'impossibilità di ricevere in pochi giorni da Parigi fili nuovi, mi vidi costretto a ricorrere alla cortesia del Chiar.mo Sig. Prof. N. Jadanza, per avere in temporaneo prestito i quattro fili (nn. 254, 255, 256, 257) di proprietà del Gabinetto di Geodesia della R. Università di Torino. Per la gentilezza del Professore, che qui pubblicamente ringrazio, essendomi così assicurati i mezzi per poter eseguire le misure, iniziai agli ultimi di aprile 1912 i lavori, e potei arrivare al loro termine senza nuovi incidenti facendo uso esclusivamente dei tre fili dell'Istituto. Prima di restituire però il materiale avuto a prestito mi sembrò non inopportuno eseguire una nuova determinazione della lunghezza dei fili, servendomi a tale scopo della base sperimentale di Marola, con-

vinto che non sarebbe riuscito privo di interesse un confronto fra i valori che in tal modo si sarebbero ottenuti, e quelli ricavati al *Bureau International des Poids et Mesures* di Parigi nell'anno 1908. L'intervallo di 4 anni trascorso fra le due campionature, ed il fatto che i fili erano rimasti avvolti per tutto quel tempo su di un cilindro metallico, avrebbe potuto portare un contributo alla dibattuta questione della mutabilità di lunghezza dei fili per effetto delle deformazioni di torsione e per la tensione a cui all'aumentare della temperatura vengono sottoposti i fili per effetto della dilatazione del cilindro in conseguenza del diverso coefficente di dilatazione termica. Nel tempo stesso l'accuratezza con la quale era stata misurata la lunghezza della base sperimentale, dava a sperare una conoscenza così precisa da rendere paragonabili i risultati ottenuti a Parigi, con quelli ricavati a Marola.

Compiuta ora la riduzione delle misure di lunghezza della base di Marola, fatte dal Comandante A. Alessio con l'apparecchio di Bessel, di proprietà dell'Istituto Geografico militare di Firenze, comunico nella presente nota i risultati ottenuti nelle misure di controllo fatte con i fili del Gabinetto di Geodesia.

2. — Le operazioni di campionatura dei quattro fili si svolsero il giorno 8 maggio 1912, essendo validamente coadiuvato nelle diverse operazioni dal sig. G. Ferrari, addetto all'Istituto Idrografico di Genova, oltre che da sei marinai e da un sottocapo. Sistemate agli estremi della base le due aste individuanti i punti fra i quali è compreso il tratto che vien misurato (1), vennero disposti i treppiedi portanti i punti di riferimento mobile a distanza di 24 metri uno dall'altro, servendoci a tale scopo delle piattaforme di calcestruzzo, esistenti sul terreno a maggior facilitazione delle operazioni di misura. Indi collocato su di un pilastro esistente a circa 15 metri dall'estremo sud un tacheometro, dopo averlo ben rettificato e disposto in modo che le

---

(1) Si veda in proposito l'ampia e dettagliata descrizione della base, e particolarmente degli estremi, e del modo di individuare la verticale sul punto individuante l'estremo della base del mio lavoro: *La base sperimentale di Marola*, parte prima, stampata nel volume IX degli *Annali idrografici*.

estremità superiori delle aste individuanti gli estremi di base avessero a trovarsi e mantenersi sul filo verticale del cannocchiale, quando questo si spostava di qualche grado in altezza per poter vedere così l'estremo vicino che il lontano, si allinearono successivamente i punti di riferimento mobile in modo che anche le loro estremità superiori riuscissero bisecate dal filo del cannocchiale. Ottenuto così l'allineamento si procedette alla misura delle altezze dei singoli punti di riferimento, ed a questo scopo essendo nota l'altezza sul livello del mare delle singole piattaforme di calcestruzzo da una precedente livellazione, ci si limitò a misurare l'altezza dei punti di riferimento al di sopra delle sottostanti piattaforme.

Eseguiti questi lavori preparatori si iniziarono le proprie e vere misure. Svolto con ogni cura il filo servendoci dell'apposito cilindro, si procedette prima ad un'accurata pulizia, togliendo ogni traccia di vasellina, mediante stracci imbevuti di benzina, indi essendo il personale già pratico nel sistema delle misure si procedette alla misura del primo segmento. La misura però non potendo avvenire se non assumendo come punto di partenza quello costituito dall'estremità superiore dell'asta metallica, poggiante sull'estremo reale della base, bisognò avere il modo di riferire questo a quello. È chiaro che se l'asta metallica fosse un perfetto cilindro, e il suo asse di rotazione fosse esattamente verticale, riferendo le misure direttamente al centro di figura della sua sezione superiore, si avrebbe il valore come se la misura fosse stata fatta partendo esattamente dall'estremo reale della base. Praticamente però, pur non essendo conseguibili tali condizioni eccezionali, si può arrivare a risultati scevri di errori, quando si tenga conto dell'angolo che fa l'asta con la verticale, e si elimini l'errore dell'imperfetta cilindricità dell'asta ripetendo le misure in posizione coniugale. È evidente che se facciamo due serie di misure, disponendo l'asta in modo che l'asse della livella tubolare, unita rigidamente a questa, risulti parallelo alla linea di base, e si bada che lo stesso estremo della livella si trovi una volta verso l'interno ed una volta verso l'esterno (ciò che si farà facendo ruotare l'asta di 180° intorno al proprio asse di figura) si potrà eliminare l'errore di simmetria dell'asta, ed avere nel tempo stesso dalle letture fatte sulla livella l'angolo che fa la proie-

zione dell'asta sul piano verticale contenente la linea della base con la verticale innalzantesi sull'estremo. Una seconda coppia di serie di misure fatta disponendo l'asta in modo che l'asse della livella si trovi ad esser normale al piano della base, eliminerà la dissimetria dell'asta secondo una direzione ortogonale alla prima, dandoci nel tempo stesso la deviazione laterale dell'asta rispetto al piano della base.

Se ora si pensa che trattandosi di misurare una lunghezza di 24 metri, una deviazione laterale di due centimetri altererebbe la distanza misurale di appena 0,008 mm., e che ad una tale deviazione laterale corrisponderebbe una deviazione della verticale di ben 24′30″ (l'asta essendo lunga 2875 mm.), si comprende facilmente come facendo anche una grossolana rettifica mediante la livella, si eliminerà immediatamente il pericolo di commettere errori sensibili per questa ragione, e che quindi la media delle quattro serie di misure risultando scevra dall'effetto dell'errore istrumentale di costruzione asimmetrica, solo sarà affetta dall'errore proveniente dall'angolo che fa la verticale con la proiezione dell'asse di simmetria dell'asta sul piano della base, e che è dato dalle letture fatte sulla livella quando il suo asse è parallelo alla linea di base. Per queste ragioni si misurò il primo segmento, e per ragioni perfettamente analoghe anche l'ultimo, quattro volte di seguito, disponendo l'asta dell'estremo nelle quattro posizioni diverse in modo cioè da avere l'asse della livella per due volte nella direzione normale alla linea di base (cioè nelle posizioni indicate con N ed S), e per due volte in quella parallela (indicata con le lettere E e W); in ognuna delle posizioni venne letta la posizione in cui si trovava la bolla della livella: mentre però le due prime letture servono unicamente a comprovare che la deviazione laterale era sufficientemente piccola, sì da non doverne tener conto, quelle fatte nella seconda posizione ci forniscono gli elementi per avere la riduzione della lunghezza misurata fra gli estremi fittizi, e quella che sarebbe risultata se la misura fosse stata fatta fra gli estremi reali. Ad ottenere questo valore basta conoscere il valore angolare di una parte della livella e la lunghezza delle aste: nel caso nostro, come si è detto, essendo esse lunghe 2875 mm., ed il valore angolare di una parte di livella essendo 2″.3, si ha che la correzione da apportare alla lunghezza

misurata in conseguenza dell'errore di verticalità dell'asta sarà dato da $E = mm.\ 0.01394\ i'' = mm.\ 0.03207\ i^p$ essendo i'' l'angolo di deviazione espresso in secondi, ed i^p lo stesso angolo espresso in parti delle livelle allora usate. Le misure di lunghezza dei singoli segmenti vennero fatte col solito metodo ben noto, trovandosi costantemente come osservatore anteriore il sig. Ferrari, e lo scrivente quale osservatore posteriore. Arrivati al decimo ed ultimo segmento della base, dopo fatte le quattro serie di misure il filo veniva girato, ripetendosi poi immediatamente le operazioni in modo d'ottenere così un secondo valore indipendente. La misura di ciascun segmento risulta da una serie di sei letture fatte contemporaneamente sulle due scalette, e raramente ebbe a succedere che fra i diversi valori risultanti per le differenze, vi fossero scostamenti di 0.3 mm. La temperatura dell'aria, onde poter tener conto della dilatazione dei fili, venne misurata con un termometro a fionda al principio ed alla fine di ciascuna misura.

Ultimate le misure, prima di raccogliere nuovamente il filo sul cilindro, si ripeteva l'operazione di un' accurata pulizia, facendola seguire da una nuova spalmatura di vasellina purissima, allo scopo di preservarlo da eventuali ossidazioni.

3. — Le tabelle numeriche che seguono contengono i risultati ottenuti dalle misure. La prima ci dà le altezze sul livello del mare dei singoli punti di riferimento espresse in metri e centimetri; conseguentemente tutti gli altri elementi che servono per determinare la correzione da apportare alla lunghezza trovata in conseguenza del dislivello dei punti di riferimento. Nella terza colonna è dato quindi per ciascun segmento il dislivello dei suoi due estremi, valore che diviso per 2400, cioè per la distanza compresa fra di essi, ci dà la tangente dell'angolo α, formato dalla retta congiungente gli estremi con l'orizzontale passante per uno di essi. Con questo valore (contenuto nella IV colonna) si deducono con le tavole calcolate espressamente da Benoit et Guillaume, tanto la correzione dovuta all'inclinazione del filo (1ª correzione), quanto quella dovuta alla deformazione catenaria (2ª correzione). La somma è il valore cercato della correzione complessiva, che nel caso nostro particolare rimane costante per tutte le misure fatte successivamente coi quattro fili.

TABELLA I.

Punto	Quote	Differenza	tg α	1ª Correzione	2ª Corresione
	Metri	Metri		Millimetri	Millimetri
N° 1	4.51				
		0.06	0.0025	— 0.075	0.000
„ 2	4.45				
		0.05	0.0021	0.053	0.000
„ 3	4.50				
		0.03	0.0013	0.020	0.000
„ 4	4.53				
		0.02	0.0008	0.008	0.000
„ 5	4.51				
		0.09	0.0038	0.173	0.000
„ 6	4.60				
		0.01	0.0004	0.002	0.000
„ 7	4.61				
		0.03	0.0013	0.020	0.000
„ 8	4.58				
		0.01	0.0004	0.002	0.000
„ 9	4.57				
		0.01	0.0004	0.002	0.000
„ 10	4.58				
		0.01	0.0004	0.002	0.000
„ 11	4.57				
			SOMMA . . .	**— 0.357**	0.000

Nella seconda tabella numerica si trovano tutti gli ulteriori risultati relativi alle otto misure. Anzitutto si trova l'ora (espressa in tempo dell'Europa media centrale) in cui venne iniziata e finita ciascuna misura, seguono quindi le temperature dell'aria, lette come già si disse, al termometro a fionda, poi le letture fatte alla livella annessa all'asta di ciascun estremo nelle quattro posizioni successive in cui questa ebbe a trovarsi durante le quattro misure del segmento, indi le medie delle differenze di lettura fatte dagli osservatori sulle scalette terminali del filo, e precisamente: anzitutto i quattro valori ottenuti in corrispondenza delle diverse posizioni date all'asta terminale di ciascun estremo, poi quelli ottenuti da ciascun segmento. Sulla base dei valori così dedotti si trovano nelle ultime linee, oltre alla somma delle misure fatte ai singoli segmenti, ancora le diverse correzioni dovute all'inclinazione delle aste terminali ed ai dislivelli dei punti di riferimento, ed infine la quantità che deve essere aggiunta per avere le misure alla temperatura di 15°, che è quella alla quale sono riferite le lunghezze dei fili. La

somma di tutti questi valori aggiunta al decuplo della lunghezza di ciascun filo dà quindi evidentemente la lunghezza cercata della base (Vedi Tabella II, pag. seg.).

4. — Partendo allora dalle campionature fatte a Parigi, sulla base della quale risultava esser le lunghezze dei diversi fili rispettivamente:

N. 254	millimetri	24000.81
N. 255	id.	24000.66
N. 256	id.	24000.12
N. 257	id.	24000.05

si ottiene che la distanza compresa fra i due capisaldi della base sperimentale di Marola dovrebbe essere:

dal filo N. 254 per la	I	misura	240101.64	millimetri
	II	id.	240100.35	id.
dal filo N. 255 per la	I	id.	240101.27	id.
	II	id.	240100.59	id.
dal filo N. 256 per la	I	id.	240101.43	id.
	II	id.	240101.25	id.
dal filo N. 257 per la	I	id.	240101.63	id.
	II	id.	240100.07	id.

Dal primo esame di questi valori si scorge intanto che sistematicamente i valori dedotti dalla II misura risultarono sempre minori di quelli della prima; questo fatto può trovare però una facile ed immediata spiegazione nel modo diverso col quale venivan fatte le letture nei due casi. Facendosi uso infatti di punti di riferimento mobile aventi la forma consigliata dal Benoit, a becco di flauto, si aveva che durante la prima misura una faccia del prisma terminale del filo portante la scaletta veniva a trovarsi in prolungazione del piano della faccia superiore semicircolare del cilindretto che porta la linea di fede; mentre durante la seconda non potendosi far adagiare il prisma sullo smusso del cilindro, ne derivava un modo diverso di lettura, e di conseguenza una diversità sistematica di apprezzamento nei due casi. Ammettendo quindi che nella media dei due diversi

TABELLA II.

Filo			Nº 254		Nº 255		Nº 256		Nº 257	
Misura			Iª	IIª	Iª	IIª	Iª	IIª	Iª	IIª
Ora		Principio	$8^h 50^m$	$9^h 16^m$	$10^h 5^m$	$10^h 37^m$	$11^h 25^m$	$12^h 3^m$	$12^h 30^m$	$13^h 8^m$
		Fine . . .	9 16	9 50	10 37	11 10	12 3	12 30	13 8	13 35
Temper.		Principio	15°.5	15°.8	17°.4	20°.5	18°.4	19°.7	18°.8	21°.5
		Fine . . .	15 .8	17 .0	20 .5	18 .7	19 .7	18 .8	21 .5	18 .8
Letture livelle	Estremo N.	Posiz. N.	$+24^p-41^p$	$+25^p-38^p$	$+28^p-33^p$	$+29^p-41^p$	$+25^p-32^p$	$+30^p-28^p$	$+27^p-29^p$	$+20^p-40^p$
		„ S.	+27 —39	+34 —30	+28 —33	+22 —38	+27 —29	+28 —30	+27 —29	+25 —35
		„ E.	—25 +40	—24 +40	—23 +39	—28 +31	—29 +27	—16 +42	—13 +43	—27 +32
		„ W.	—31 +34	—24 +39	—25 +37	—31 +29	—30 +27	—16 +42	—17 +39	—25 +34
		Inclinaz.	$+4^p.5$	$+7^p.8$	$+7^p.0$	$+0^p.2$	$-1^p.2$	$+13^p.0$	$+13^p.0$	$+3^p.5$
	Estremo S.	Posiz. N.	+40 —30	+45 —25	+25 —41	+42 —25	+30 —32	+29 —35	+25 —36	+33 —30
		„ S.	+39 —31	+31 —39	+40 —27	+33 —34	+27 —35	+25 —38	+31 —30	+21 —42
		„ E.	—38 +32	—39 +31	—42 +25	—24 +43	—38 +25	—31 +28	—36 +25	—36 +26
		„ W.	—28 +42	—30 +40	—24 +43	—32 +34	—24 +39	—26 +37	—36 +25	—36 +26
		Inclinaz.	$+2^p.0$	$+0^p.5$	$+0^p.5$	$+5^p.2$	$+0^p.5$	$-3^p.5$	$-5^p.5$	$-5^p.0$

Misure dei segmenti								
Estremo [N.?] „ S.	+ 41.27	+ 40.83	+ 41.17	+ 41.25	+ 42.00	+ 41.52	+ 41.95	+ 41.72
„ E.	+ 41.47	+ 41.10	+ 41.44	+ 41.40	+ 41.95	+ 41.70	+ 42.00	+ 42.28
„ W.	+ 41.28	+ 41.00	+ 41.42	+ 41.40	+ 41.72	+ 41.55	+ 41.95	+ 42.03
Estremo S. Posiz. N.	+ 61.60	+ 61.88	+ 61.30	+ 52.35	+ 52.68	+ 53.00	+ 52.83	+ 53.02
„ S.	+ 61.40	+ 61.37	+ 61.07	+ 52.35	+ 52.48	+ 52.65	+ 52.50	+ 52.58
„ E.	+ 61.83	+ 62.00	+ 62.00	+ 52.75	+ 52.95	+ 53.08	+ 52.82	+ 53.10
„ W.	+ 61.20	+ 61.28	+ 61.22	+ 52.07	+ 52.07	+ 52.44	+ 52.15	+ 52.40
Segmento I	+ 41.38	+ 41.05	+ 41.42	+ 41.42	+ 41.98	+ 41.69	+ 42.02	+ 42.04
„ II	— 28.00	— 28.03	— 27.90	— 27.87	— 27.00	— 27.20	— 26.92	— 26.97
„ III	— 20.02	— 20.29	— 20.00	— 20.17	— 19.48	— 19.70	— 19.50	— 19.72
„ IV	+ 45.53	+ 45.18	+ 45.43	+ 45.35	+ 46.23	+ 46.33	+ 46.27	+ 46.08
„ V	+ 9.70	+ 9.62	+ 10.02	+ 9.78	+ 10.62	+ 10.45	+ 10.60	+ 10.43
„ VI	— 33.30	— 33.43	— 33.17	— 33.12	— 32.35	— 32.57	— 32.24	— 32.58
„ VII	+ 44.60	+ 44.53	+ 44.83	+ 44.80	+ 45.35	+ 45.50	+ 45.65	+ 45.53
„ VIII	+ 26.93	+ 26.98	+ 27.18	+ 26.90	+ 27.65	+ 27.62	+ 27.80	+ 27.88
„ IX	— 54.63	— 54.84	— 54.32	— 45.10	— 44.72	— 44.60	— 44.75	— 44.70
„ X	+ 61.51	+ 61.63	+ 61.40	+ 52.38	+ 52.54	+ 52.79	+ 52.57	+ 52.77
Σ segmenti .	+ 93.71	+ 92.40	+ 94.89	+ 94.37	+ 100.82	+ 100.31	+ 101.50	+ 100.76
Correzione inclin. N.	+ 0.14	+ 0.25	+ 0.22	+ 0.01	— 0.04	+ 0.42	+ 0.42	+ 0.08
„ „ S.	+ 0.06	+ 0.02	+ 0.02	+ 0.17	+ 0.02	— 0.11	— 0.18	— 0.16
„ dislivelli	— 0.36	— 0.36	— 0.36	— 0.36	— 0.36	— 0.36	— 0.36	— 0.36
Riduz. alla temp. di 15° C.	— 0.01	— 0.06	— 0.20	— 0.21	— 0.21	— 0.21	— 0.25	— 0.25
Somma . . .	+ 93.54	+ 92.25	+ 94.67	+ 93.99	+ 100.23	+ 100.05	+ 101.13	+ 100.07

Tabella II.

Filo	N° 254		N° 255		N° 256		N° 257	
Misura	Iª	IIª	Iª	IIª	Iª	IIª	Iª	IIª
Ora . . . Principio	$8^h 50^m$	$9^h 16^m$	$10^h\ 5^m$	$10^h 37^m$	$11^h 25^m$	$12^h\ 3^m$	$12^h 30^m$	$13^h\ 8^m$
Ora . . . Fine . . .	9 16	9 50	10 37	11 10	12 3	12 30	13 8	13 35
Temper. Principio	15°.5	15°.8	17°.4	20°.5	18°.4	19°.7	18°.8	21°.5
Temper. Fine . . .	15 .8	17 .0	20 .5	18 .7	19 .7	18 .8	21 .5	18 .8
Letture livelle — Estremo N. — Posiz. N.	$+24^p - 41^p$	$+25^p - 38^p$	$+28^p - 33^p$	$+29^p - 41^p$	$+25^p - 32^p$	$+30^p - 28^p$	$+27^p - 29^p$	$+20^p - 40^p$
„ S.	+27 —39	+34 —30	+28 —33	+22 —38	+27 —29	+28 —30	+27 —29	+25 —35
„ E.	—25 +40	—24 +40	—23 +39	—28 +31	—29 +27	—16 +42	—13 +43	—27 +32
„ W.	—31 +34	—24 +39	—25 +37	—31 +29	—30 +27	—16 +42	—17 +39	—25 +34
Inclinaz.	$+4^p.5$	$+7^p.8$	$+7^p.0$	$+0^p.2$	$-1^p.2$	$+13^p.0$	$+13^p.0$	$+3^p.5$
Letture livelle — Estremo S. — Posiz. N.	+40 —30	+45 —25	+25 —41	+42 —25	+30 —32	+29 —35	+25 —36	+33 —30
„ S.	+39 —31	+31 —39	+40 —27	+33 —34	+27 —35	+25 —38	+31 —30	+21 —42
„ E.	—38 +32	—39 +31	—42 +25	—24 +43	—38 +25	—31 +28	—36 +25	—36 +26
„ W.	—28 +42	—30 +40	—24 +43	—32 +34	—24 +39	—26 +37	—36 +25	—36 +26
Inclinaz.	$+2^p.0$	$+0^p.5$	$+0^p.5$	$+5^p.2$	$+0^p.5$	$-3^p.5$	$-5^p.5$	$-5^p.0$
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.
Misure dei segmenti — Estremo N. — Posiz. N.	+ 41.50	+ 41.28	+ 41.65	+ 41.65	+ 42.25	+ 42.00	+ 42.17	+ 42.14
„ S.	+ 41.27	+ 40.83	+ 41.17	+ 41.25	+ 42.00	+ 41.52	+ 41.95	+ 41.72
„ E.	+ 41.47	+ 41.10	+ 41.44	+ 41.40	+ 41.95	+ 41.70	+ 42.00	+ 42.28
„ W.	+ 41.28	+ 41.00	+ 41.42	+ 41.40	+ 41.72	+ 41.55	+ 41.95	+ 42.03
Estremo S. — Posiz. N.	+ 61.60	+ 61.88	+ 61.30	+ 52.35	+ 52.68	+ 53.00	+ 52.83	+ 53.02
„ S.	+ 61.40	+ 61.37	+ 61.07	+ 52.35	+ 52.48	+ 52.65	+ 52.50	+ 52.58
„ E.	+ 61.83	+ 62.00	+ 62.00	+ 52.75	+ 52.95	+ 53.08	+ 52.82	+ 53.10
„ W.	+ 61.20	+ 61.28	+ 61.22	+ 52.07	+ 52.07	+ 52.44	+ 52.15	+ 52.40
Segmento I	+ 41.38	+ 41.05	+ 41.42	+ 41.42	+ 41.98	+ 41.69	+ 42.02	+ 42.04
„ II	— 28.00	— 28.03	— 27.90	— 27.87	— 27.00	— 27.20	— 26.92	— 26.97
„ III	— 20.02	— 20.29	— 20.00	— 20.17	— 19.48	— 19.70	— 19.50	— 19.72
„ IV	+ 45.53	+ 45.18	+ 45.43	+ 45.35	+ 46.23	+ 46.33	+ 46.27	+ 46.08
„ V	+ 9.70	+ 9.62	+ 10.02	+ 9.78	+ 10.62	+ 10.45	+ 10.60	+ 10.43
„ VI	— 33.30	— 33.43	— 33.17	— 33.12	— 32.35	— 32.57	— 32.24	— 32.58
„ VII	+ 44.60	+ 44.53	+ 44.83	+ 44.80	+ 45.35	+ 45.50	+ 45.65	+ 45.53
„ VIII	+ 26.93	+ 26.98	+ 27.18	+ 26.90	+ 27.65	+ 27.62	+ 27.80	+ 27.88
„ IX	— 54.63	— 54.84	— 54.32	— 45.10	— 44.72	— 44.60	— 44.75	— 44.70
„ X	+ 61.51	+ 61.63	+ 61.40	+ 52.38	+ 52.54	+ 52.79	+ 52.57	+ 52.77
Σ segmenti .	+ 93.71	+ 92.40	+ 94.89	+ 94.37	+ 100.82	+ 100.31	+ 101.50	+ 100.76
Correzione inclin. N.	+ 0.14	+ 0.25	+ 0.22	+ 0.01	— 0.04	+ 0.42	+ 0.42	+ 0.08
„ „ S.	+ 0.06	+ 0.02	+ 0.02	+ 0.17	+ 0.02	— 0.11	— 0.18	— 0.16
„ dislivelli	— 0.36	— 0.36	— 0.36	— 0.36	— 0.36	— 0.36	— 0.36	— 0.36
Riduz. alla temp. di 15° C.	— 0.01	— 0.06	— 0.20	— 0.21	— 0.21	— 0.21	— 0.25	— 0.25
Somma . . .	+ 93.54	+ 92.25	+ 94.67	+ 93.99	+ 100.23	+ 100.05	+ 101.13	+ 100.07

modi di lettura possa riuscire eliminata quella parte di errori sistematici, aventi carattere personale e dipendenti dalla posizione diversa in cui vennero fatte le misure, abbiamo che la lunghezza della base risulterebbe:

dal filo	N. 254	240101.00	millimetri
id.	N. 255	100.93	id.
id.	N. 256	101.34	id.
id.	N. 257	101.10	id.

Supponendo ora per un istante che le diversità di risultati possano trarre origine solamente da errori accidentali di misura, si avrebbe che l'errore medio di un valore è ± 0.18 mm., cioè notevolmente inferiore al milionesimo della lunghezza misurale. Ma d'altra parte noi sappiamo che a produrre quei valori possono aver contribuito anche altre cause, come, p. es., gli errori di campionatura, e quelli di determinazione del coefficiente termico di dilatazione: potremo quindi asserire che misurando con i fili di acciaio " Invar „ si può ottenere facilmente una precisione tale, dipendentemente dalle diverse operazioni di misura, da ottetenere con un solo filo errori inferiori al milionesimo della lunghezza totale. Basterà quindi avere il modo di assicurarsi che non abbiano ad infiltrarsi errori sensibili per effetto di campionatura o per alterazione molecolare del filo, per esser certi che i fili possono servire anche nel caso di basi geodetiche di alta precisione.

5. — Prescindendo ora da altre considerazioni che a tale proposito potrebbero esser fatte, e che troveranno invece posto in un altro mio lavoro, in cui verranno discussi i risultati di molte misure fatte con fili e nastri di acciaio, paragoniamo invece i risultati ottenuti, con quello dedotto da quattro misure eseguite nell'anno 1909 dal Com. Alessio servendosi dell'apparato di Bessel di proprietà dell'Istituto Geografico militare. Come risulta dal mio lavoro già citato, la lunghezza della base ricavata da quelle misure dovrebbe essere 240 100.99 mm., cioè di 0.1 mm. più corta di quanto si avrebbe dalla media delle misure fatte coi quattro fili qui considerati. L'ottimo accordo, se a primo aspetto può sembrare la prova migliore della bontà

del metodo, perde gran parte del valore se si pone mente al grado di incertezza di cui è affetto il valore ottenuto coll'apparecchio di Bessel. Come ho cercato di esporre nella mia memoria, lo studio accurato dei risultati ottenuti nelle diverse epoche dagli operatori che ebbero a servirsi di quell'apparecchio, porta a conclusioni che fanno ritenere giustificati non pochi dubbi, fra i quali il più grave è quello dello straordinario divario che risulta per la lunghezza della spranga O, a seconda che per determinarla si usa la tesa di Ertel o le tese di Reichel (1). È ben vero che potrebbe essere avvenuto che la spranga stessa abbia subìto delle alterazioni notevoli di lunghezza col trascorrere degli anni, ma in tal caso non avendo più ragione alcuna per ritenere che dall'epoca dell'ultima campionatura fatta in occasione della misura della base di Piombino non sieno avvenute altre variazioni, non si avrebbe alcun criterio per giudicare quale fosse la lunghezza delle spranghe nel 1909 quando ebbe ad usarle il Com. Alessio per la misura della base di Marola. In attesa quindi che le invocate campionature possano togliere dubbi ed incertezze, ricordando che l'incertezza di cui può essere affetto il valore sopra citato è dell'ordine di ± 1.9 mm. (quando si tenga conto di tutte le fonti di possibili errori ed incertezze) avremo che mentre non sarà possibile garantire la campionatura dei fili se non entro 0.2 mm., non si potrà ricavare alcuna conclusione positiva e certa dell'accordo più sopra trovato fra i valori trovati per la lunghezza della base. Tuttavia per quanto manchino elementi ad autorizzarci a riguardare come esattissimo il valore dedotto dalle misure fatte con l'apparecchio di Bessel, l'accordo dei risultati ottenuti per vie così diverse, e nelle quali errori accidentali e sistematici devono aver avuto non solo natura completamente diversa, ma essersi anche manifestati in modo completamente distinto, può darci un affidamento non piccolo, e far ritenere che l'esattezza

(1) I valori ottenuti nei due casi sono rispettivamente:

$$\left.\begin{array}{l} 1728.224 \pm 0.0024 \\ 1738.169 \pm 0.0023 \end{array}\right\} \text{linee francesi}$$

e l'accogliere uno dei valori piuttosto che l'altro porterebbe una diversità di lunghezza nel caso della base del Ticino di ben 31 centimetri.

sua sia di molto superiore a quella che risulterebbe dai dati trovati. Partendo allora dal valore della lunghezza della base trovata in seguito alle misure con l'apparecchio di Bessel, si ha che le lunghezze dei fili dovrebbero essere:

filo N. 254	24000.81	millimetri
filo N. 255	24000.67	id.
filo N. 256	24000.08	id.
filo N. 257	24000.14	id.

Paragonando queste lunghezze con quelle di Parigi, si trova quindi che mentre i fili 254 e 255 sono rimasti sensibilmente eguali, i due ultimi dovrebbero aver subìto delle lievissime variazioni (al massimo un allungamento di 0.09 mm.) delle quali però non è possibile dare garanzia, essendo l'ordine loro di grado eguale o superiore a quello della precisione stessa con la quale vennero determinati tali valori.

Genova, 10 novembre 1914.

Sul metodo di sommazione di Cesàro.

Nota di GUSTAVO SANNIA (a Torino).

1. — È ben noto in che consista il *metodo di sommazione di Cesàro* per una serie

$$(1)\qquad u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

Posto

$$(2)\qquad s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n,$$

$$(3)\qquad S_n^{(r)} = s_n + \binom{r}{1} s_{n-1} + \binom{r+1}{2} s_{n-2} + \dots + \binom{r+n-1}{n} s_0,$$

$$(4)\qquad C_n^{(r)} = \binom{r+n}{n} = 1 + \binom{r}{1} + \binom{r+1}{2} + \dots + \binom{r+n-1}{n},$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots),$$

ove r *è un numero reale maggiore di* — 1, si consideri il rapporto

$$\frac{S_n^{(r)}}{C_n^{(r)}};$$

se, per $n = \infty$, questo rapporto tende ad un limite finito s, si dice che la serie (1) è *sommabile col metodo di Cesàro*, che r è *un suo ordine di sommabilità* (*) e che s è la sua *somma*. Diremo anche più brevemente (con Hardy) che (1) *è sommabile* (C, r).

(*) Preferiamo questa dicitura all'altra comunemente usata: *la serie* (1) *è sommabile col metodo di Cesàro di ordine* r. Con questa, l'ordine r viene attribuito al metodo, anzicchè alla serie, cioè si considerano *infiniti* metodi di Cesàro corrispondenti agli infiniti valori di r. Crediamo più opportuno considerare *un solo* metodo di Cesàro nella cui definizione sia contenuto un parametro r.

Abbiamo poi detto che r è *un* ordine di sommabilità di (1), perchè, come è noto, (1) è pure sommabile per infiniti altri valori del parametro e con ugual somma.

Notiamo che, per $r > -1$, è sempre $C_n^{(r)} > 0$ e che, per $-1 < x < 1$, si ha

$$(5) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n^{(r)} x^n = (1-x)^{-(r+1)}.$$

Infine ricordiamo che dalle formole (2), (3) si deduce l'altra

$$(2') \qquad u_n = S_n^{(r)} - \binom{r+1}{1} S_{n-1}^{(r)} + \binom{r+1}{2} S_{n-2}^{(r)} - \dots + (-1)^n \binom{r+1}{n} S_0^{(r)}.$$

Il Cesàro (*) non considerò che i valori interi (non negativi) di r; ma poi la teoria è stata estesa in gran parte con la considerazione di valori qualunque di r, purchè maggiori di -1 (**), principalmente da Knopp, M. Riesz, Hardy, Bianca Ottolenghi e Chapman. Scopo di questa nota è di apportare un nuovo contributo alla detta estensione.

Ci fonderemo sopra alcuni teoremi sui limiti di successioni, interessanti per se stessi.

2. — Lemma I. *Siano*

$$a_0, a_1, a_2, \dots \qquad \text{e} \qquad b_0, b_1, b_2, \dots$$

due successioni ed r, s *due numeri maggiori di* -1. *Se, per* $n = \infty$, $\frac{a_n}{C_n^{(r)}}$ *tende a zero e* $\frac{|b_n|}{C_n^{(s)}}$ *è limitata, si ha*

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0}{C_n^{(r+s+1)}} = 0 \text{ (***)}.$$

(*) " Bulletin des Sciences Mathématiques ", 2e série, t. 14, 1890, p. 114. Per una diffusa e chiara trattazione cfr. Bromwich, *An introduction to the theory of infinite series*, art. 122-129, London, 1908.

(**) Il Chapman (" Proceedings of the London Math. Society ", serie 2a, vol. 9, parti 5a e 9a) ha considerato valori di r (non interi) minori di -1; ma i pochi risultati ottenuti sono più complicati degli analoghi relativi al caso $r > -1$ e, per certi rispetti, poco soddisfacenti dal punto di vista della teoria generale.

(***) Questo teorema è di Bromwich (loc. cit., p. 314) per r, s interi.

Dalle ipotesi segue: che esiste un numero $K > 0$, tale che risulti, per ogni n,

$$\text{(7)} \qquad \frac{|a_n|}{C_n^{(r)}} < K, \qquad \frac{|b_n|}{C_n^{(s)}} K;$$

e che, dato un numero $\epsilon > 0$, esiste un intero ν tale che per $n > \nu$ risulti

$$\text{(8)} \qquad \frac{|a_n|}{C_n^{(r)}} < \frac{\epsilon}{2K}.$$

Ora

$$\left|\sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i} b_i\right| \leq \sum_{i=0}^{i=\nu} |a_{n-i}|\,|b_i| + \sum_{i=\nu+1}^{i=n} |a_{n-i}|\,|b_i|,$$

quindi, per le (7) e (8),

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \left|\sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i} b_i\right| < K^2 \sum_{i=0}^{i=\nu} C_{n-i}^{(r)} C_i^{(s)} + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=\nu+1}^{i=n} C_{n-i}^{(r)} C_i^{(s)} \\ \qquad < K^2 \sum_{i=0}^{i=\nu} C_{n-i}^{(r)} C_i^{(s)} + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=0}^{i=n} C_{n-i}^{(r)} C_i^{(s)}. \end{cases}$$

Intanto

$$(1-x)^{-(r+1)} \cdot (1-x)^{-(s+1)} = (1-x)^{-(r+s+2)},$$

ossia, per la (5),

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} C_n^{(r)} x^n \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n^{(s)} x^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n^{(r+s+1)} x^n,$$

quindi

$$\sum_{i=0}^{i=n} C_{n-i}^{(r)} C_i^{(s)} = C_n^{(r+s+1)};$$

ne segue che la (9), divisa per $C_n^{(r+s+1)}$, diventa

$$\text{(10)} \qquad \frac{\left|\sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i} b_i\right|}{C_n^{(r+s+1)}} < K^2 \sum_{i=0}^{i=\nu} C_i^{(s)} \cdot \frac{C_{n-i}^{(r)}}{C_n^{(r+s+1)}} + \frac{\epsilon}{2}, \qquad (n > \nu).$$

Si ha poi che, per $n = \infty$,

$$\lim \frac{C_{n-i}^{(r)}}{C_n^{(r+s+1)}} = \lim \frac{C_{n-i}^{(r)}}{(n-i)^r} \cdot \lim \frac{n^{r+s+1}}{C_n^{(r+s+1)}} \cdot \lim \left(\frac{n-i}{n}\right)^r \cdot \lim \frac{1}{n^{s+1}} =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(r+1)} \cdot \Gamma(r+s+2) \cdot 1 \cdot 0 = 0 \text{ (*)},$$

quindi

$$\lim_{n=\infty} \sum_{l=0}^{i=\nu} C_i^{(s)} \frac{C_{n-i}^{(r)}}{C_u^{(r+s+1)}} = 0 ;$$

sicchè esiste un intero $\nu' > 0$ tale che risulti

$$\sum_{i=0}^{i=\nu} C_i^{(s)} \frac{C_{n-i}^{(r)}}{C_n^{(r+s+1)}} < \frac{\epsilon}{2K^2}, \qquad (n > \nu'). \tag{12}$$

Da (10) e (12) segue che

$$\frac{\left| \sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i} b_i \right|}{C_n^{(r+s+1)}} < \epsilon,$$

per n maggiore di ν e ν'; e ciò dimostra la (6).

Osserv. Tenendo conto della (11), si vede subito che il teorema equivale all'altro: *se, per* n $= \infty$, $\frac{a_n}{n^r}$ *tende a zero, e* $\frac{|b_n|}{n^s}$ *è limitata, si ha*

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0}{n^{r+s+1}} = 0. \tag{13}$$

Lemma II. *Se* r, s *sono maggiori di* -1, *si ha*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{i=n} i^r (n-i+1)^s}{n^{r+s+1}} = \frac{\Gamma(r+1)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}. \tag{14}$$

(*) Ricordiamo che, per $x > -1$,

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n=\infty} \frac{n!\, x^n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} = \lim \frac{n^x}{C_n^{(x)}}. \tag{11}$$

È noto (*) infatti che il secondo membro è il valore dell'integrale

$$\int_0^1 x^r (1-x)^s \, dx ,$$

il quale, per definizione di integrale definito, è uguale al primo membro.

LEMMA III. *Se le successioni*

$$a_1 , a_2 , a_3 , \ldots \qquad \text{e} \qquad b_1 , b_2 , b_3 , \ldots$$

sono tali che

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = a , \qquad \lim \frac{b_n}{n^s} = b ,$$

ove r, s *sono numeri maggiori di* -1, *si ha*

$$(15) \quad \lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n^{r+s+1}} = \frac{\Gamma(r+1)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)} ab \ (^{**}).$$

Posto

$$\frac{a_n}{n^r} = a + \alpha_n , \qquad \frac{b_n}{n^s} = b + \beta_n ,$$

sarà

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \lim_{n=\infty} \beta_n = 0 ,$$

e si avrà

$$(16) \left\{ \begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_{n-i+1}}{n^{r+s+1}} &= ab \cdot \frac{\sum_{i=1}^{i=n} i^r (n-i+1)^s}{n^{r+s+1}} + a \frac{\sum_{i=1}^{i=n} i^r (n-i+1)^s \beta_{n-i+1}}{n^{r+s+1}} \\ &+ b \cdot \frac{\sum_{i=1}^{i=n} i^r (n-i+1)^s \alpha_i}{n^{r+s+1}} + \frac{\sum_{i=1}^{i=n} i^r (n-i+1)^s \alpha_i \beta_{n-i+1}}{n^{r+s+1}} . \end{aligned} \right.$$

(*) Cfr. p. es. E. CESÀRO, *Elementi di Calcolo Infinitesimale*, 2ª ed., p. 417, Napoli, 1905.

(**) Questo teorema è stato enunciato da CESÀRO (" Bulletin ,, loc. cit.) per r, s interi e da CHAPMAN (loc. cit.) nella forma del testo; però senza dimostrazioni. Crediamo perciò opportuno di darne una molto semplice, fondata sui primi due lemmi.

Le variabili n^r, $n^s\beta_n$ sono tali che

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^r}{n^r} = 1 , \qquad \lim_{n=\infty} \frac{n^s\beta_n}{n^s} = 0 ,$$

quindi, per il lemma I (seconda forma) il coefficiente di a nel secondo membro di (16) tende a zero per $n = \infty$; analogamente si vede che tendono pure a zero il coefficiente di b e l'ultimo termine. In seguito a ciò ed al lemma II, la (16), al limite per $n = \infty$, si riduce alla (15).

Lemma IV. *Se la successione* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *è tale che*

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = 0 ,$$

ove r *è un numero maggiore di* -1, *e la successione* $b_0, b_1, b_2, \ldots$ *è tale che la serie* $\sum_0^\infty |b_n|$ *converge, si ha*

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0}{n^r} = 0 \text{ (*)}. \tag{17}$$

Si ha

$$\frac{\left|\sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i}\, b_i\right|}{n^r} \leqq \sum_{i=0}^{i=n} \frac{|a_{n-i}|}{n^r} |b_i| . \tag{18}$$

Ora

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n-i}}{n^r} = \lim \frac{a_{n-i}}{(n-i)^r} \cdot \lim \left(\frac{n-i}{n}\right)^r = 0 ;$$

quindi esiste un numero $K > 0$ tale che, per ogni n,

$$\frac{|a_{n-i}|}{n^r} < K ;$$

(*) Poichè la serie $\sum_0^\infty |b_n|$ converge, si ha che $\frac{|b_n|}{n^0} = |b_n|$ è limitata: si può quindi applicare il lemma I (seconda forma, con $s = 0$) alle due successioni a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$); ma con ciò si deduce soltanto che

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0}{n^{r+1}} = 0 .$$

ed inoltre, dato un numero $\epsilon > 0$, esiste un intero $m > 0$ tale che, per $n \geq m + i$, risulti

$$\frac{|a_{n-i}|}{n^r} < \frac{\epsilon}{\sigma},$$

ove σ indica la somma della serie convergente $\sum_0^\infty |b_n|$.

Dopo ciò, dalla (18), si ha

$$\frac{\left|\sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i} b_i\right|}{n} \leq \sum_{i=0}^{i=n-m} \frac{|a_{n-i}|}{n^r} |b_i| + \sum_{i=n-m+1}^{i+n} \frac{|a_{n-i}|}{n^r} |b_i| <$$
$$< \frac{\epsilon}{\sigma} \sum_{i=0}^{i=n-m} |b_i| + K \sum_{i=n-m+1}^{i=n} |b_i|.$$

Ora

$$\sum_{i=0}^{i=n-m} |b_i| \quad \text{e} \quad \sum_{i=n-m+1}^{i=n} |b_i|$$

tendono rispettivamente a σ e a zero, per $n = \infty$, quindi l'ultimo membro della precedente disuguaglianza tende ad ϵ; ne segue che il limite superiore d'indeterminazione del primo membro non può superare ϵ; ma ϵ è arbitrario, dunque tale limite è zero, e però si ha la (17).

3. — Dai lemmi precedenti si deducono facilmente quei teoremi sul metodo di sommazione di Cesàro che noi avevamo in vista.

Teorema. *Se la serie* (1) *è sommabile* (C, r), *ove* $r > -1$, si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{n^r} = 0 \quad (*). \tag{19}$$

(*) Ciò è stato osservato per la prima volta da E. Borel (Cfr. *Leçons sur les séries divergentes*, Paris, 1901, p. 91) su di una classe particolare di serie e per r intero; poi da Bromwich (loc. cit., art. 128) per r intero e per serie qualunque. L'estensione al caso di r non intero è di B. Ottolenghi per $r > 0$ (" Giornale di Matematiche ", vol. 49, p. 233) e di Chapman per $r > -1$ (loc. cit.). La dimostrazione di Chapman è lunga e complicata, la nostra è molto semplice ed elementare. Il teorema dà una condizione necessaria per la sommabilità (C, r), generalizzazione della ben nota condizione $\lim_{n=\infty} u_n = 0$, necessaria per la convergenza $(r = 0)$ di una serie.

Detta s la somma della serie (1), si ha (§ 1)

$$\frac{S_n^{(r)}}{C_n^{(r)}} = s + \epsilon_n \,, \qquad \text{ove} \qquad \lim_{n=\infty} \epsilon_n = 0 \,;$$

quindi la (2') può scriversi

$$u_n = C_n^{(r)} \epsilon_n - \binom{r+1}{1} C_{n-1}^{(r)} \epsilon_{n-1} + \ldots + (-1)^n \binom{r+1}{n} C_0^{(r)} \epsilon_0 +$$
$$+ \left[C_n^{(r)} - \binom{r+1}{1} C_{n-1}^{(r)} + \ldots + (-1)^n \binom{r+1}{n} C_0^{(r)} \right] s \,;$$

ma il coefficiente di s vale zero, perchè è il coefficiente di x^n nel prodotto delle due serie

$$(1-x)^{r+1} = \sum_0^\infty \binom{r+1}{n} x^n, \qquad \sum_0^\infty C_n^{(r)} x^n,$$

prodotto che, per la (5), vale 1; dunque

$$u_n = C_n^{(r)} \epsilon_n - \binom{r+1}{1} C_{n-1}^{(r)} \epsilon_{n-1} + \ldots + (-1)^n \binom{r+1}{n} C_0^{(r)} \epsilon_0 \,.$$

Ora la successione

$$a_0 = C_0^{(r)} \epsilon_0 \,, \; a_1 = C_1^{(r)} \epsilon_1 \,, \; a_2 = C_2^{(r)} \epsilon_2 \,, \ldots$$

è tale che, per la (11),

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = \lim_{n=\infty} \frac{C_n^{(r)}}{n^r} \,.\, \lim_{n=\infty} \epsilon_n = \frac{1}{\Gamma(r+1)} \,.\, 0 = 0 \,;$$

e la successione

$$b_0 = 1 \,, \; b_1 = -\binom{r+1}{1}, \; b_2 = \binom{r+1}{2}, \; \ldots, \; b_n = (-1)^n \binom{r+1}{n}, \; \ldots$$

è tale che la serie

$$\sum_0^\infty |\, b_n \,| = \sum_0^\infty \left| \binom{r+1}{n} \right|$$

è convergente (*); dunque possiamo applicare a tali successioni il lemma IV, che dà

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{n^r} = \lim_{n-\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0}{n^r} = 0 .$$

4. — Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie* (1) *sia sommabile* (C, r), *ove* $r > -1$, *ed abbia per somma* s *è che:* 1° *la serie* $\sum_0^\infty u_n x^n$ *converga per* $-1 < x < 1$; 2° *che il coefficiente* ρ_n *di* x^n *nella serie*

$$\sum_0^\infty \rho_n x^n = (1-x)^{-(r+1)} \left(\sum_0^\infty u_n x^n - s\right) \tag{20}$$

sia tale che

$$\lim_{n=\infty} \frac{\rho_n}{n^r} = 0 \quad (**). \tag{21}$$

(*) Infatti la formola

$$(1+x)^{r+1} = \sum_0^\infty \binom{r+1}{n} x^n,$$

valida per $-1 < x < 1$ e per ogni r, vale pure per $x = -1$ quando è $r + 1 > 0$ (e tale è il nostro caso); sicchè

$$0 = \sum_0^\infty (-1)^n \binom{r+1}{n}.$$

Ora, poichè $\binom{r+1}{n}$ vale zero se r è intero ed è alternamente positivo e negativo (a partire da un certo n) se r non è intero, ne segue che la serie

$$\sum_0^\infty \left| \binom{r+1}{n} \right| \tag{19'}$$

è convergente.

(**) Per la (11), questa condizione equivale all'altra

$$\lim_{n=\infty} \frac{\rho_n}{C_n^{(r)}} = 0 .$$

Il teorema è stato dimostrato da Bromwich (loc. cit., art. 125) per r intero; ma la dimostrazione sussiste anche per r non intero, maggiore di -1.

Corollario. *Se per* $-1 < x < 1$ *si ha una identità del tipo*

$$(22) \qquad (1-x)^{-(r+1)}\left(\sum_0^\infty u_n x^n - s\right) = (1-x^k)^{-r} P(x),$$

ove P (x) *è un polinomio,* $r > -1$ *e* k *un intero maggiore di* 1, *la serie* (1) *è sommabile* (C, r) *ed ha per somma* s (*).

Si ha, per la (5),

$$(1-x^k)^{-r} = \sum_0^\infty C_n^{(r-1)} x^{kn} = \sum_0^\infty a_n x^n,$$

ove

$$(23) \qquad \begin{cases} a_n = C_n^{(r-1)} & \text{per } n \text{ multiplo di } k \\ a_n = 0 & \text{per ogni altro valore di } n. \end{cases}$$

Poi, se m è il grado del polinomio $P(x)$, si ha

$$P(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m = \sum_0^\infty b_n x^n,$$

ove

$$b_n = 0 \qquad \text{se} \qquad n > m.$$

Ne segue che

$$(1-x^k)^{-r} P(x) = \sum_0^\infty \rho_n x^n,$$

ove

$$\rho_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

(*) Questo corollario, per r intero e per $k=2$, è di Bromwich (loc. cit.). Egli lo enuncia e dimostra anche per $k=1$; ma in tal caso esso perde ogni interesse. Perchè la (22), moltiplicata per $(1-x)^{r+1}$, dà

$$\sum_0^\infty u_n x^n = [s + P(x)]\,(1-x),$$

ove il secondo membro è un polinomio

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m;$$

ne segue che

$$u_0 = a_0,\ u_1 = a_1,\ \ldots,\ u_m = a_m,\ u_{m+1} = u_{m+2} = \ldots = 0,$$

e però la serie (1) si riduce a

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_m + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

ossia al polinomio

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_m.$$

Intanto, dalle (23), si ha che

$$\frac{a_n}{n^r} = \frac{C_n^{(r-1)}}{n^r} = \frac{C_n^{(r)}}{n^r} \cdot \frac{r}{r+n}$$

per n multiplo di k, quindi, per la (11),

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = \frac{1}{\Gamma(r+1)} \cdot 0 = 0, \tag{24}$$

se n percorre i valori multipli di k; ma, per le (23) e $\frac{a_n}{n^r} = 0$ per ogni altro valore di n; dunque la (24) è anche vera se si lascia percorrere ad n la successione di tutti i numeri naturali. Inoltre la serie

$$\sum_0^\infty |b_n| = |b_0| + |b_1| + \ldots + |b_m|$$

è convergente. Possiamo dunque applicare il lemma IV alle successioni $a_0, a_1, a_2, \ldots$ e $b_0, b_1, b_2, \ldots$: esso dà

$$\lim_{n=\infty} \frac{\rho_n}{n^r} = \lim_{n=\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0}{n^r} = 0.$$

Pel teorema precedente, ciò basta per asserire che la serie (1) è sommabile (C, r) ed ha per somma s.

5. — Il passaggio da una serie (1) ad un'altra

$$u_0 + 0 + \ldots + 0 + u_1 + 0 + \ldots + 0 + u_2 + \ldots,$$

ottenuta dalla prima mediante inserzione di zeri fra coppie di termini consecutivi può dirsi, con Chapman (loc. cit.), una *diluizione* (*).

(*) Hardy e Chapman ("Quarterly Journal of Math.", vol. 42, p. 181) si sono anche occupati dell'effetto di una diluizione su di una serie, considerata dal punto di vista di quei metodi di sommabilità che essi hanno chiamati *metodi di Cesàro–Riesz*.

Questa è *uniforme* quando il numero degli zeri inseriti è lo stesso per tutte le coppie (*).

L'operazione di diluizione è importante. Ci basti ricordare che uno dei metodi di sommazione di E. Leroy (**) per una serie (1) consiste nell'applicare il metodo di sommazione di Borel ad una serie ottenuta dalla (1) con una opportuna diluizione uniforme. Inoltre fu con una conveniente diluizione non uniforme che Lagrange (***) potè rimuovere un'obiezione fatta da Callet all'affermazione di Eulero.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}.$$

Teorema. *Se una serie* (1) *è sommabile* (C, r), $r > -1$, *con la somma* s, *tale è pure ogni serie ottenuta da* (1) *mediante una diluizione uniforme.*

Basta dimostrare che, se (1) è sommabile (C, r) con somma s, tale è pure

$$u_0 + 0 + u_1 + 0 + u_2 + \dots; \tag{25}$$

chè allora ne seguirà che anche

$$u_0 + 0 + 0 + u_1 + 0 + 0 + u_2 + \dots$$

è sommabile (C, r) con somma s; e così via.

Giusta l'ipotesi, la serie (1) soddisferà alle condizioni espresse nel teorema del § 4. Basterà dimostrare che anche la serie (25) soddisfa a tali condizioni, cioè: 1° che la serie $\sum\limits_0^\infty u_n y^{2n}$ converge per $-1 < y < 1$; 2° che, sviluppando in serie il prodotto

$$(1 - y)^{-(r+1)} \left(\sum_0^\infty u_n y^{2n} - s\right),$$

(*) Notiamo che il *preporre* degli zeri (in numero finito) ad una serie non ha alcuna influenza sulla sommabilità e sulla somma della serie; chè la serie (1) e l'altra $0 + u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ sono sempre sommabili insieme e con ugual somma. Ciò segue dal sistema del § seguente.

(**) " Annales de la Faculté de Toulouse ", 2e série, t. 2, 1902, p. 317.

(***) " Mémoires de la classe des Sciences math. et phys. de l'Institut ", tome III.

il coefficiente σ_n di y^n è tale che

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{n^r} = 0. \tag{26}$$

La prima condizione è conseguenza immediata della prima condizione a cui soddisfa la (1). Per provare la seconda, osserviamo che, ponendo $x = y^2$ nella (21), si ha

$$(1 - y^2)^{-(r+1)} (\sum_0^\infty u_n y^{2n} - s) = \sum_0^\infty \rho_n y^{2n},$$

quindi, moltiplicando per

$$(1 + y)^{r+1} = (\sum_0^\infty \binom{r+1}{n} y^n,$$

si ha

$$(1 - y)^{-(r+1)} (\sum_0^\infty u_n y^{2n} - s) = \sum_0^\infty \sigma_n y^n,$$

ove

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{2m} = \rho_m + \binom{r+1}{2} \rho_{m-1} + \binom{r+1}{4} \rho_{m-2} + \dots + \binom{r+1}{2m} \rho_0, \\ \sigma_{2m+1} = \binom{r+1}{1} \rho_m + \binom{r+1}{3} \rho_{m-1} + \dots + \binom{r+1}{2m+1} \rho_0 . \end{array}\right. \tag{27}$$

Ora la successione

$$\rho_0, \ \rho_1, \ \rho_2, \ \dots \tag{28}$$

è tale che (§ 4)

$$\lim_{n=\infty} \frac{\rho_m}{m^r} = 0,$$

e le successioni

$$\binom{r+1}{2}, \ \binom{r+1}{4}, \ \binom{r+1}{6}, \ \dots, \tag{29}$$

$$\binom{r+1}{1}, \ \binom{r+1}{3}, \ \binom{r+1}{5}, \ \dots \tag{30}$$

sono tali che le serie formate coi moduli dei loro termini convergono, perchè converge la somma (19′) di queste serie; pos-

siamo dunque applicare il lemma IV alle coppie di successioni (28), (29) e (28), (30). Otteniamo, per le (27),

$$\lim_{m=\infty} \frac{\sigma_{2m}}{m^r} = 0 , \qquad \lim_{m=\infty} \frac{\sigma_{2m+1}}{m^r} = 0 ,$$

quindi anche

$$\lim_{m=\infty} \frac{\sigma_{2m}}{(2m)^r} = 0 , \qquad \lim_{m=\infty} \frac{\sigma_{2m+1}}{(2m+1)^r} = 0 ,$$

e quindi la (26). c. d. d.

Il ragionamento precedente si può facilmente invertire; quindi si ha il

Teorema (reciproco). *Se una serie ottenuta da* (1) *mediante una diluizione uniforme è sommabile* (C, r) (r > — 1) *ed ha per somma* s, *anche la* (1) *è sommabile* (C, r) *con ugual somma.*

6. — Teorema. *Se una delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + ..., \tag{31}$$

$$u_1 + u_2 + ... \tag{32}$$

è sommabile (C, r) (r > — 1) *tale è anche l'altra, e si ha*

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... = u_0 + (u_1 + u_2 + ...) \text{ (*)}. \tag{33}$$

Siano t_n e $T_n^{(r)}$ quelle espressioni che sono formate con i termini della serie (32) come le s_n ed $S_n^{(r)}$ del § 1 sono formate con i termini della (31); sicchè, per $n = 0, 1, 2, ...$

$$t_n = u_1 + u_2 + ... + u_{n+1} ,$$

$$T_n^{(r)} = t_n + \binom{r}{1} t_{n-1} + \binom{r+1}{2} t_{n-2} + ... + \binom{r+n-1}{n} t_0 .$$

(*) Non si ritenga questo teorema come evidente. Se p. es. si considera il metodo di sommazione di Borel, in luogo di quello di Cesàro, il teorema non è più vero, o lo è soltanto in parte; cioè è vero soltanto che, se (31) è sommabile, lo è pure (32) (e non viceversa). Cfr. Hardy, " Quarterly Journal ", vol. 35, 1903, p. 22.

Poichè

$$t_n = s_{n+1} - u_0 ,$$

si ha

$$T_n^{(r)} = s_{n+1} + \binom{r}{1} s_n + \dots + \binom{r+n-1}{n} s_1 -$$

$$- \left[1 + \binom{r}{1} + \binom{r+1}{2} + \dots + \binom{r+n-1}{n}\right] u_0$$

o, per le (3) e (4),

$$T_n^{(r)} = S_{n+1}^{(r)} - \binom{r+n}{n+1} s_0 - C_n^{(r)} u_0 ;$$

ma

$$\binom{r+n}{n+1} = C_{n+1}^{(r-1)} = C_{n+1}^{(r)} - C_n^{(r)},$$

quindi

$$T_n^{(r)} = S_{n+1}^{(r)} - C_{n+1}^{(r)} u_0 ,$$

da cui

$$\frac{C_n^{(r)}}{C_{n+1}^{(r)}} \cdot \frac{T_n^{(r)}}{C_n^{(r)}} = \frac{S_{n+1}^{(r)}}{C_{n+1}^{(r)}} - u_0 .$$

Ora poichè, per la (11), è

$$\lim_{n=\infty} \frac{C_n^{(r)}}{C_{n+1}^{(r)}} = \lim_{n=\infty} \frac{C_n^{(r)}}{n^r} \lim_{n=\infty} \frac{(n+1)^r}{C_{n+1}^{(r)}} \cdot \lim_{n=\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^r = 1 ,$$

segue dalla (34) che

$$\lim_{n=\infty} \frac{T_n^{(r)}}{C_n^{(r)}} \quad \text{e} \quad \lim_{n=\infty} \frac{S_{n+1}^{(r)}}{C_{n+1}^{(r)}}$$

esistono insieme e soltanto insieme e che la loro differenza è $-u_0$. Ciò dimostra il teorema.

Se ne deduce subito l'altro più generale:

TEOREMA. *Se una delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots, \qquad u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

è sommabile (C, r) (r > -1) *tale è anche l'altra, e si ha*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots).$$

COROLLARIO. *Non si altera nè la sommabilità, nè la somma di una serie* (1) *cambiando comunque l'ordine di un numero finito dei suoi termini.*

Torino, 15 novembre 1914.

Sopra un inviluppo di circonferenze.

Nota del Dott. S. A. TOSCANO

Le linee α, β siano complanari e tra il punto generico P di α e il punto generico Q di β sia stabilita una corrispondenza univoca tale che si verifichi uno, ed uno solo, dei due fatti seguenti:

a) la retta PQ è la normale a β in Q;

b) la retta PQ è la normale ad α in P.

Se le linee α, β sono date mediante i punti P, Q funzioni di due variabili numeriche t, t', le condizioni *a)* e *b)* si traducono in due condizioni fra t e t' che restano rispettivamente individuate dalle condizioni:

$$\begin{cases} (P-Q)\times\dfrac{dQ}{dt'}=0\,, \\ (P-Q)\times\dfrac{dP}{dt}=0\,, \end{cases}$$

le quali esprimono l'ortogonalità della PQ coi vettori $\frac{dQ}{dt'}$, $\frac{dP}{dt}$ paralleli alle tangenti in Q e P rispettivamente alle linee β ed α (*). Ciascuna di queste due condizioni dà una relazione fra t e t' della forma:

$$f(t, t')=0\,,$$

e dedotta da questa t' in funzione di t si hanno P e Q in funzione della stessa variabile t e le condizioni *a)* o *b)* rimangono verificate.

(*) Si applicano in questa Nota i metodi vettoriali intrinseci svolti negli *Éléments de calcul vectoriel* dei Ch.mi Proff. C. Burali-Forti e R. Marcolongo (Paris, A. Hermann, 1910).

In ciascuno dei due casi accennati si consideri la circonferenza γ che ha centro in P e per raggio il prodotto della distanza u di P da Q per un numero reale m positivo e non nullo. Variando P in α si ha un sistema ∞^1 di circonferenze γ delle quali ci proponiamo di trovare l'inviluppo Γ.

Se tale inviluppo esiste, esso è formato, in generale, da due linee che toccano γ *in due punti* R *simmetrici rispetto alla tangente ad* α *in* P. Considerando infatti un altro punto P_1 di α e la circonferenza γ_1 relativa ad esso, questa taglia γ in due punti simmetrici rispetto alla retta PP_1: ma supponendo che P_1 tenda a P, la PP_1 tende alla tangente ad α in P e i due punti comuni a γ e γ_1 tendono evidentemente ai due punti R dell'inviluppo.

In ciò che segue, salvo avvertenza in contrario, supporremo P funzione dell'arco s di α: ed allora anche Q, per quel che sopra si è detto, sarà funzione di s. Secondo il solito indicheremo con $\boldsymbol{t}$ un vettore unitario parallelo alla tangente in P, con ρ il raggio di curvatura di α in P, con i la rotazione positiva di un angolo retto nel piano delle due curve per modo che si abbia:

$$\frac{dP}{ds} = \boldsymbol{t},$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} i\boldsymbol{t} \qquad \text{(Formola di Frenet).}$$

Per brevità indicheremo di solito con gli apici le derivate rispetto alla variabile s.

a) La retta PQ è la normale alla linea β in P.

1. — In tal caso i punti R di Γ si possono costruire, quando sono reali, in uno qualunque dei due modi seguenti (fig. 1):

1) *Si costruisce* H, *sulla retta* PQ, *distante da* P *di* $m^2 u$ *e dalla parte di* Q: *la perpendicolare condotta da* H *alla tangente ad* α *in* P, *incontra* γ *nei due punti* R *dell'inviluppo.*

2) *Sia* K *il punto nel quale la tangente ad* α *in* P *incontra la tangente a* β *in* Q: *la circonferenza di diametro* PK *taglia* γ *nei due punti* R *dell'inviluppo* (*cioè le tangenti condotte da* K *a* γ *toccano* γ *nei due punti* R).

Infatti detto λ l'angolo compreso fra $\boldsymbol{t}$ e $Q-P$, si può porre:

$$Q = P + ue^{i\lambda}\boldsymbol{t} \tag{1}$$

con u e λ funzioni di s tali che si abbia:

$$Q' \times e^{i\lambda}\boldsymbol{t} = 0\,,$$

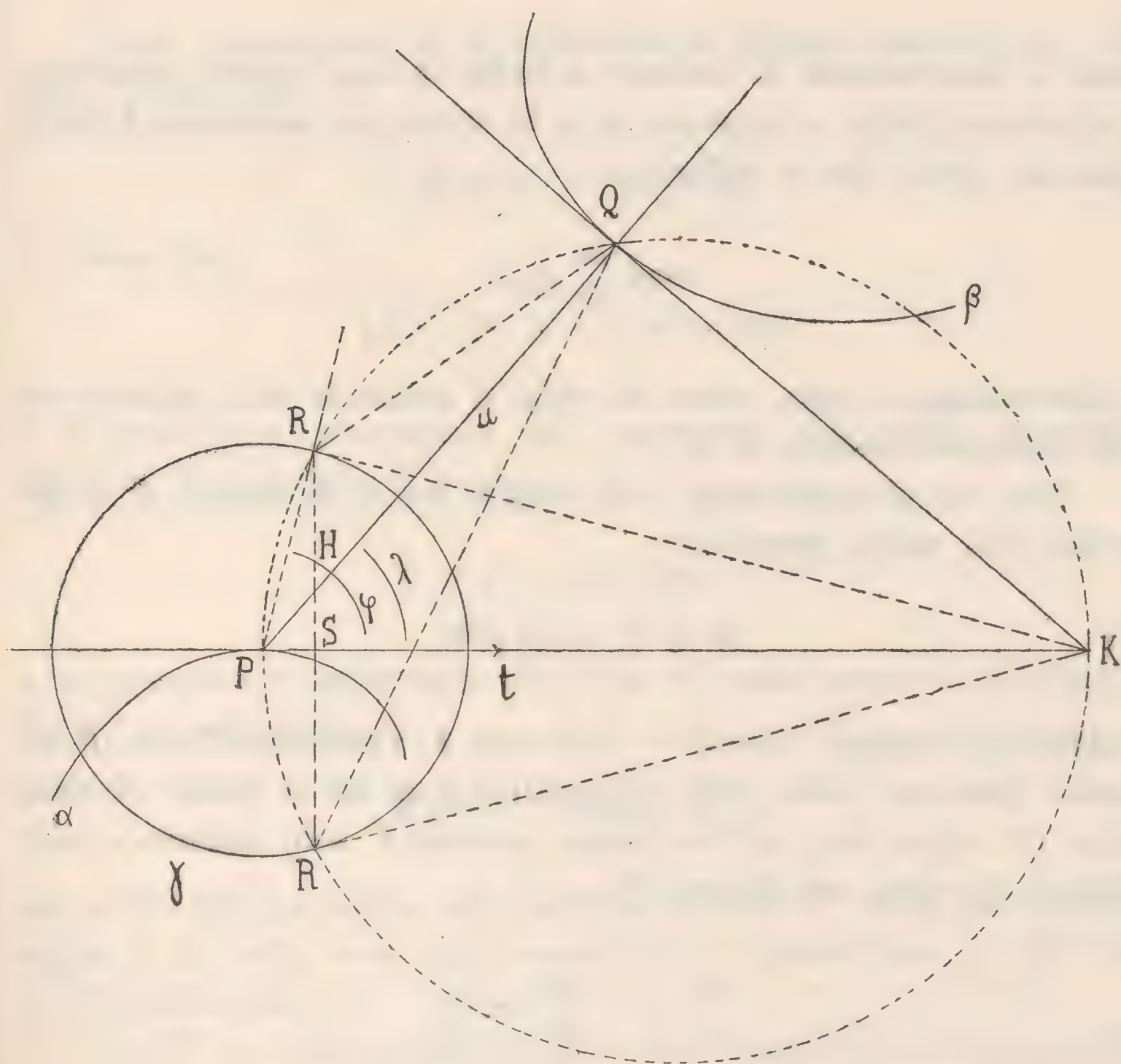



Fig. 1.

la quale esprime, nelle ipotesi fatte, la condizione *a)*. Derivando la (1) rispetto ad s e sostituendo, la precedente diventa:

$$\left\{ \boldsymbol{t} + u'e^{i\lambda}\boldsymbol{t} + \left(u\lambda' + \frac{u}{\rho}\right) e^{i\lambda} i\boldsymbol{t} \right\} \times e^{i\lambda}\boldsymbol{t} = 0\,,$$

dalla quale, eseguendo i prodotti interni, si ha:

$$\cos\lambda + \frac{du}{ds} = 0. \tag{2}$$

Da questa si vede intanto che dato λ in funzione di s è determinato:

$$u = -\int_0^s \cos\lambda\, ds + \text{cost.}$$

ossia è determinata β insieme a tutte le sue curve parallele; e viceversa data u funzione di s in modo da sodisfare alla (2) ossia in modo che si abbia:

$$\text{mod}\,\frac{du}{ds} \leqq 1$$

è determinata λ che, come si vede, è costante solo quando u è una funzione lineare di s.

Ora, la circonferenza γ di raggio mu e di centro P è descritta dal punto generico:

$$R = P + mu\, e^{i\varphi}\boldsymbol{t}, \tag{3}$$

essendo φ l'angolo che $R - P$ fa con $\boldsymbol{t}$. Variando P in α, R diventa funzione delle due variabili s e φ ed il punto R dato dalla (3) apparterrà all'inviluppo cercato Γ solo quando è soddisfatta la nota condizione (*):

$$\frac{dR}{ds} \times i\,\frac{dR}{d\varphi} = 0\,.$$

Facendo le derivate parziali della (3) e sostituendo nella precedente, si ottiene la condizione:

$$\cos\varphi + m\,\frac{du}{ds} = 0\,, \tag{3'}$$

(*) Cfr. i citati *Éléments*, pag. 85 e segg.

la quale dà, per la (2):

$$\cos\varphi = m\cos\lambda\,. \tag{4}$$

Esprimendo nella (3) trigonometricamente l'esponenziale $e^{i\varphi}$ e badando alla (4) la (3) diviene finalmente:

$$R = P + m^2u\cos\lambda\,.\,\boldsymbol{t} + mu\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,i\boldsymbol{t}. \tag{4)'$$

Tale espressione di R dimostra la prima costruzione. Infatti, posto (fig. 1):

$$H = P + m^2u\,e^{i\lambda}\boldsymbol{t}\,,$$

si vede che:

$$(H - P)\times\boldsymbol{t} = m^2u\cos\lambda$$

è la proiezione ortogonale del segmento PH sulla tangente ad α in P e quindi il punto:

$$S = P + m^2u\cos\lambda\,.\,\boldsymbol{t}$$

è la proiezione ortogonale di H su di essa tangente. Ciò posto la (4)' mostra che:

$$R = S + mu\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,i\boldsymbol{t}$$

sta sulla HS parallela alla normale ad α in P: ed R, per quanto sopra si è detto, non può essere che l'intersezione di HS con la circonferenza γ.

Se K è il punto nel quale le due tangenti a γ nei punti R tagliano la tangente ad α in P, allora dai triangoli rettangoli PRK si ha subito:

$$K = P + \frac{mu}{\cos\varphi}\,\boldsymbol{t},$$

ossia per la (4):

$$K = P + \frac{u}{\cos\lambda}\,\boldsymbol{t}.$$

Questa prova immediatamente che il triangolo PQK è rettangolo in Q, ossia che QK è normale a PQ, ossia che QK è la tangente a β in Q. Quindi i due punti R stanno sulla circonferenza di diametro PK, e la seconda costruzione per tal modo è dimostrata.

Nel caso particolare di $m = 1$, uno dei due punti R coincide evidentemente con Q e l'altro è il simmetrico di Q rispetto alla tangente ad α in P, ossia è il punto:

$$R = Q + 2u \operatorname{sen}\lambda \,.\, it \,,$$

come si vede dal triangolo PQS che in tal caso è rettangolo in S. In tal caso da (4) e (4)' si ottiene:

$$R = P + u \cos\lambda \,.\, t + u \operatorname{sen}\lambda \,.\, it = P + u\, e^{i\lambda} \,.\, t \,,$$

come si vede anche dal triangolo PQS.

2. — Affinchè i punti R di Γ siano reali è per la (4) necessario e sufficiente che sia:

$$m^2 \cos^2\lambda \leqq 1 \,, \tag{5}$$

ovvero per la (2):

$$m^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \leqq 1 \,. \tag{5)'$$

Per $m^2 \cos^2\lambda < 1$ i punti R sono distinti; per $m^2 \cos^2\lambda = 1$ essi coincidono in uno stesso punto della tangente ad α in P; è poi chiaro che per $m \leq 1$ i punti R sono sempre reali.

Dalla (4)' mediante la (2) e la (4) e supposta valida la condizione (5)' si ha facilmente come espressione generale di R:

$$R = P - mu \left\{ m \frac{du}{ds}\, t \pm \sqrt{1 - m^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2} \,.\, it \right\} . \tag{6}$$

Se P è funzione di una variabile numerica t qualunque,

allora indicando con gli apici le derivate rispetto a t e osservando che si ha:

$$P' = \frac{ds}{dt}\,\boldsymbol{t}, \qquad \frac{ds}{dt} = \operatorname{mod} P', \qquad \frac{du}{ds} = \frac{du}{dt}\,\frac{1}{\operatorname{mod} P'},$$

si ottiene dalla (6) con facili riduzioni:

$$(6)' \qquad R = P - \frac{mu}{P'^2} \left\{ mu' . P' \pm \sqrt{P'^2 - m^2 u'^2} . iP' \right\},$$

che è per tale caso l'espressione generale dei punti R di Γ.

Nel caso particolare in cui sia $m = 1$, e per P funzione di t, osservando che la proiezione ortogonale S di Q sulla tangente ad α in P è, com'è facile dimostrare:

$$S = Q + \frac{(P - Q) \times iP'}{P'^2}\, iP',$$

si ottiene direttamente, e senza bisogno di ricorrere alla (6)', come espressione del punto R di Γ diverso da Q, la seguente:

$$(7) \qquad R = Q + 2\,\frac{(P - Q) \times iP'}{P'^2}\, iP'.$$

Se, ancora per $m = 1$, α è l'evoluta di β, allora l'inviluppo Γ è formato soltanto dalla linea β.

3. — La linea β sia una retta. Valgono sempre le due costruzioni del n° 1, e K è *l'estremo della tangente cartesiana* rispetto alla retta β come asse delle x. In tale ipotesi se la retta β passa per un punto fisso O ed è parallela a un vettore unitario fisso $\boldsymbol{a}$, allora la relazione fra P e Q è evidentemente espressa da:

$$(8) \qquad Q = O + (P - O) \times \boldsymbol{a} . \boldsymbol{a}.$$

Riferiamo P al sistema di coordinate cartesiane ortogonali O, $\boldsymbol{a}$, $i\boldsymbol{a}$ e poniamo:

$$P = O + x\boldsymbol{a} + yi\boldsymbol{a},$$

essendo x e y funzioni di un parametro t. Allora è evidentemente:

$$u = -y,$$

e dalla (6)′ si ha tosto l'espressione generale dei punti R.

La linea β si riduca ad un punto fisso $Q = O$. Le due costruzioni del n° 1 valgono ancora e K è *l'estremo della tangente polare* in P rispetto al punto O (cui si riduce β) come polo e alla retta condotta per O parallelamente ad $\boldsymbol{a}$ come asse polare. In tal caso si ponga:

$$P = O + r e^{i\theta} \boldsymbol{a}$$

con r e θ funzioni di un parametro t. Allora posto nella (6)′:

$$u = -r,$$

si ha subito l'espressione generale dei punti R.

Riducendosi ancora β al punto fisso O ed essendo $m = 1$, il punto S medio fra O ed R, altrove considerato, descrive la *podaria di* α *rispetto al punto* O. Da ciò, ricordando i noti teoremi sulle podarie delle coniche rispetto al fuoco, e ricordando quanto sopra si disse per il caso particolare $m = 1$, risulta in particolare che:

L'inviluppo delle circonferenze aventi i centri in una conica Θ *e passanti per un fuoco (proprio)* F *di* Θ, *è l'omotetico della podaria di* Θ *rispetto ad* F, *essendo* 2 *il rapporto di omotetia; e quindi per la parabola è la direttrice e per l'ellisse ed iperbole la circonferenza che ha per centro l'altro fuoco e per raggio l'asse focale.*

Ancora in particolare se α è la circonferenza:

$$P = A + r e^{i\theta} \boldsymbol{a}$$

e β si riduce al punto:

$$O = A + h\boldsymbol{a},$$

si ha immediatamente per $m = 1$ applicando la (7):

$$R = A + h\boldsymbol{a} + 2\,(r - h\cos\theta)\, e^{i\theta} \boldsymbol{a}.$$

Questa mostra che l'inviluppo cercato è una *lumaca di Pascal;* il che rientra nel teorema precedentemente esposto, poichè, com'è noto, le podarie delle circonferenze sono lumache di Pascal.

4. — Dalle formole fin qui poste e dall'esame della fig. 1, si deducono facilmente le seguenti considerazioni:

Le rette QR *formano con le tangenti a* Γ *nei punti* R *lo stesso angolo* λ *che la retta* QP *forma con la tangente ad* α *in* P, come risulta subito dalla figura osservando che gli angoli $Q\widehat{R}K$, $Q\widehat{P}K$ sono entrambi inscritti in uno stesso arco della circonferenza di diametro PK. In particolare, per $\lambda = \frac{\pi}{2}$, K è all'infinito e i due punti R stanno sulla normale ad α in P.

Dalla (2) risulta, come abbiamo accennato, che λ *è costante solo quando* u *è funzione lineare di* s; ed allora dalla (4) risulta che φ *è costante solo quando è costante* λ, *cioè solo quando* u *è funzione lineare di* s. In tale ipotesi di u funzione lineare di s, cioè di λ e φ costanti, si vede immediatamente che *la linea* β *è una evolventoide* (*) λ *di* α *e le linee inviluppo* Γ *sono evolventoidi* φ *di* α. In particolare, per $\lambda = 0$, Q coincide con K, β *è una evolvente di* α e Γ è reale solo per $m \leqq 1$; per $\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$ β *è una curva parallela ad* α *e* Γ *è formato da due linee parallele ad* α. Nelle ipotesi fatte, derivando la (3) per φ costante e ricordando la (3)', si ha, dopo semplici trasformazioni trigonometriche sugli esponenziali:

$$\frac{dR}{ds} = \left(\frac{mu}{\rho} - \operatorname{sen}\varphi\right) e^{i\varphi}\,\boldsymbol{it}\,;$$

quindi se s_1 è l'arco della linea Γ si ha, com'è noto:

$$\frac{ds_1}{ds} = \operatorname{mod} \frac{dR}{ds}\,,$$

ossia:

$$\frac{ds_1}{ds} = \operatorname{mod}\left(\frac{mu}{\rho} - \operatorname{sen}\varphi\right), \tag{9}$$

(*) S. A. Toscano, *Evolutoidi ed evolventoidi delle curve piane.* " Atti del R. Istituto Veneto ", t. LXXII, parte II.

e se ρ_1 è il raggio di curvatura di Γ in R si ha, in virtù del teorema enunciato al principio di questo numero:

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{ds_1}{\rho_1},$$

ossia:

$$\rho_1 = \rho \frac{ds_1}{ds}. \tag{10}$$

Le (9) e (10) permettono di ottenere, nelle ipotesi fatte, *la equazione intrinseca delle linee* Γ.

In particolare, se α è la *spirale logaritmica* di equazione:

$$\rho = hs,$$

essendo u funzione lineare di s, sarà $\frac{u}{\rho}$ indipendente da s, ed allora dalla (9) si ha integrando:

$$s_1 = \mathrm{mod}\left(\frac{mu}{\rho} - \mathrm{sen}\,\varphi\right) s,$$

e quindi per la (10):

$$\rho_1 = hs_1,$$

ossia *le linee* Γ *sono spirali logaritmiche uguali ad* α. Ricordando che β è una evolventoide λ di α, e applicando a questo caso le note equazioni (*):

$$\begin{cases} s_2 = s\,\mathrm{sen}\,\lambda + \cos\lambda \int \frac{s}{\rho}\, ds \\ \rho_2 = \rho\,\mathrm{sen}\,\lambda + s\cos\lambda, \end{cases}$$

si vede che β è la linea di equazione:

$$\rho_2 = hs_2,$$

e quindi in tal caso anche *la linea* β *è una spirale logaritmica*, e resta pure provato che *le evolventoidi di una spirale logaritmica sono spirali logaritmiche.*

(*) S. A. Toscano, *Evolutoidi ecc.*, loc. cit., pag. 678.

b) **La retta *PQ* è la normale alla linea α in *P*.**

5. — I punti *R* di Γ in γ si possono costruire, quando sono reali, in uno qualunque dei due modi seguenti (fig. 2):

1) *Sia* C *il centro di curvatura di* α *in* P; *la normale a* β *in* Q *tagli la tangente ad* α *in* P *nel punto* M; *la parallela condotta da* Q *a* CM *tagli la tangente ad* α *in* P *nel punto* N;

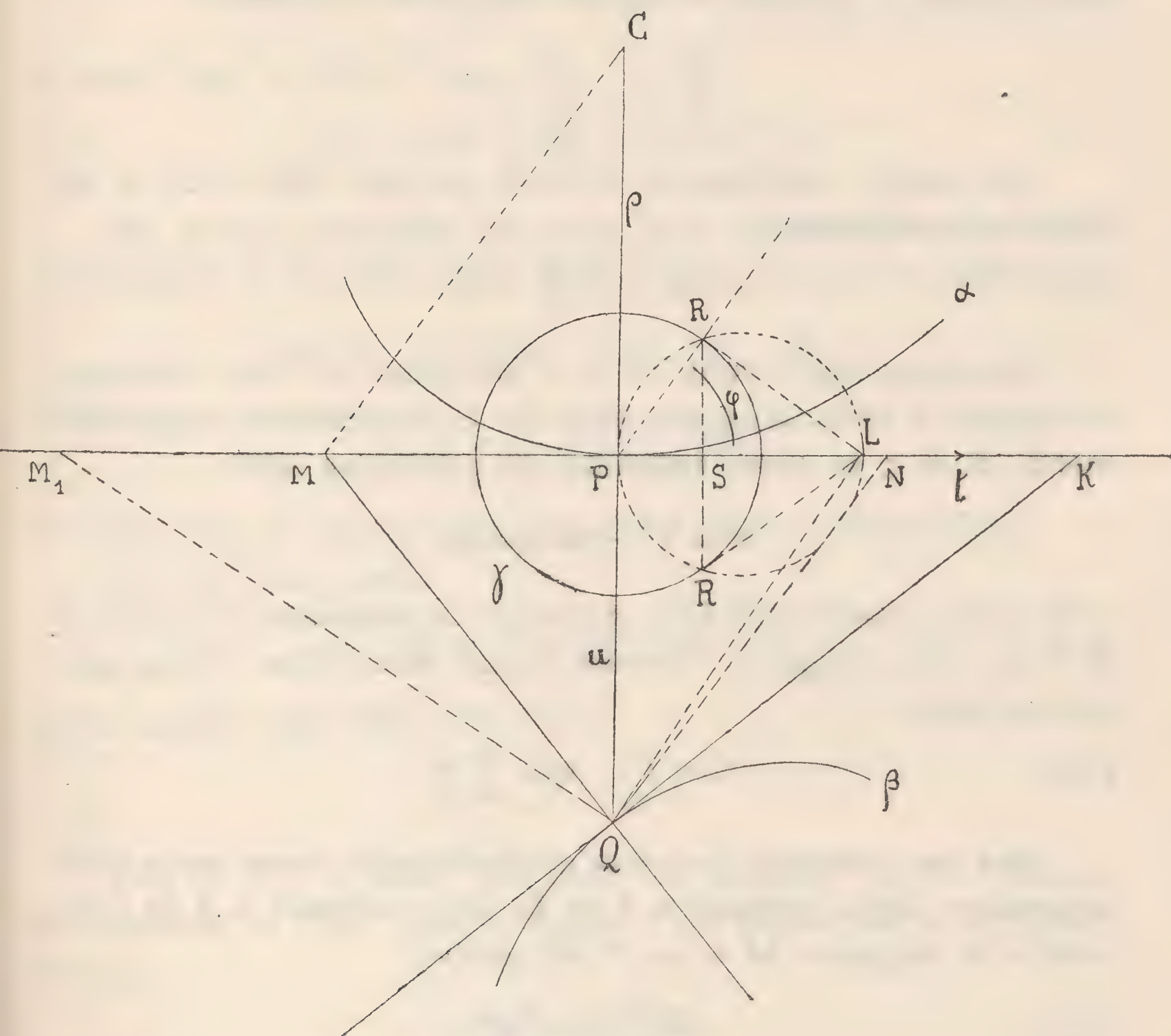



Fig. 2.

si costruisca infine il punto $S = P + m^2 (N - M)$: *esso è la proiezione ortogonale dei due punti* R *di* Γ *sulla tangente ad* α *in* P.

2) *Si costruiscano i due punti* M, N *su detti; si costruisca il punto* $M_1 = P + (M - N)$; *la perpendicolare condotta da* Q *alla retta* QM_1 *incontri la tangente ad* α *in* P *nel punto* L; *le tangenti condotte da* L *a* γ *toccano* γ *nei punti* R *di* Γ.

Dall'ipotesi fatta *b)* si ha:

$$Q = P + uit \tag{11}$$

con u funzione nota di s. Il punto generico R di γ sia:

$$R = P + mu\, e^{i\varphi} t \tag{12}$$

essendo φ l'angolo di $R - P$ con t. Variando P in α, R diventa funzione delle due variabili indipendenti s e φ, ed R apparterrà all'inviluppo Γ quando φ sodisfa alla nota condizione:

$$\frac{\partial R}{\partial s} \times i \frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0 .$$

Da questa, mediante le derivate parziali della (12) si ottiene la condizione:

$$\cos\varphi + m \frac{du}{ds} = 0 . \tag{13}$$

Troviamo ora i punti R di Γ mediante le loro proiezioni ortogonali S sulla tangente ad α in P. Proiettando ortogonalmente R di γ su detta tangente, la proiezione sarà:

$$S = P + mu \cos\varphi\, t ,$$

e se si tiene conto della (13), S diventa la proiezione del punto R di Γ su detta tangente. Tenendo quindi conto della (13) tal proiezione sarà:

$$S = P - m^2 u \frac{du}{ds} t . \tag{14}$$

Ora per costruire S occorre evidentemente tener conto della tangente o della normale a β in Q. Tale normale a β in Q incontra la tangente ad α in P nel punto:

$$M = P + yt \tag{15}$$

con y determinato dalla condizione evidente:

$$(M - Q) \times \frac{dQ}{ds} = 0 ,$$

la quale, mediante la (15), la (11) e la prima derivata della (11), dà subito:

$$y = \frac{\rho u u'}{\rho - u} . \tag{16}$$

Da questa si vede che, dal momento che y contiene ρ, bisogna tener conto, per la costruzione di S, anche del punto:

$$C = P + \rho i t$$

centro di curvatura di α in P. Ora, essendo N il punto di cui è parola nel teorema enunciato, dai triangoli simili PCM, PQN (fig. 2) si ha:

$$\frac{M-P}{\rho} = \frac{N-P}{u},$$

e quindi per la (15) si ha:

$$N - P = \frac{u}{\rho}(M - P) = \frac{uy}{\rho} t. \tag{17}$$

Ciò posto, ricavando uu' dalla (16), sostituendo nella (14), sviluppando e tenendo conto delle (15) e (17), si ha infine:

$$S = P - m^2 \{ (M - P) - (N - P) \},$$

ossia:

$$S = P + m^2 (N - M)$$

che dimostra la prima costruzione dei punti dell'inviluppo.

D'altro lato, posto:

$$M_1 = P + (M - N),$$

si ha subito dalle (15), (17), (16):

$$M_1 = P + uu' t. \tag{18}$$

Ora se L è il punto nel quale la tangente in R a Γ taglia la tangente in P ad α, dal triangolo PRL rettangolo in R (fig. 2) si ha:

$$L = P + \frac{mu}{\cos\varphi} t,$$

e per la (13) si ha:

$$L = P - \frac{u}{u'} t. \tag{19}$$

Quindi, essendo u medio proporzionale fra uu' e $\frac{u}{u'}$, si deduce da (18) e (19) che il segmento PQ è medio proporzionale fra i segmenti M_1P e PL. E quindi il triangolo M_1QL è rettangolo in Q, e quindi anche la seconda costruzione è dimostrata.

6. — Affinchè i punti R di Γ siano reali è necessario e sufficiente che per la (13) si abbia:

$$m^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 \leqq 1\,;$$

per $m^2u'^2 < 1$ i due punti R sono distinti; per $m^2u'^2 = 1$ coincidono in uno stesso punto della tangente ad α in P.

Dalle (12) e (13) si ottiene facilmente come espressione generale dei punti R di Γ:

$$R = P - mu\left\{ m\frac{du}{ds}t \pm \sqrt{1 - m^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2}\, it \right\} \tag{20}$$

che è identica alla (6) trovata nel caso generale *a)*. Per P funzione di una variabile numerica t qualunque, si ritrova la (6)' già considerata. Nel caso particolare di $m = 1$ non sempre i punti R sono reali (*).

Se per un particolare punto Q di β M è all'infinito, ossia la tangente a β in Q è la retta QC, allora le due costruzioni di R non sono applicabili. Se negl'intorni di Q i punti R sono reali e i punti M non sono all'infinito, allora il punto S dato dalla (14) è punto proprio che si costruisce mediante il particolare valore di u'.

Se per tutti i punti Q di β M è all'infinito, ossia $y = \infty$, allora si ha dalla (16) $\rho = u$ e quindi β è l'*evoluta* di α, ossia:

$$Q = C = P + \rho it\,.$$

(*) Si osservi che al punto $L = P - \frac{u}{u'}t$ del caso *b)* corrisponde il punto $K = P - \frac{u}{u'}t$ del caso *a)* considerato al n° 1. Peraltro si osservi che la curva β del caso *b)* non è analoga alla stessa curva β del caso *a)*, poichè dall'essere $m^2u'^2 \leq 1$ non segue necessariamente $u'^2 < 1$ come si è visto per il caso *a)*. E quindi non sempre esiste un λ in modo che sia soddisfatta la relazione (2) del n° 1.

Per contro se nel caso *a)* si pone $Q_1 = P + uit$ analogamente a quel che si è fatto nel caso *b)*, allora della linea β_1 descritta da Q_1 se ne può trovare, con la costruzione *b)* e con gli elementi ottenuti nella costruzione *a)*, la tangente e il centro di curvatura in Q_1.

In tal caso la (14) diventa:

$$S = P - m^2 \rho \frac{d\rho}{ds} \boldsymbol{t},$$

ed osservando che se C_1 è il centro di curvatura in C si ha:

$$C_1 = C - \frac{C'^2}{C' \times iC''} iC' = C - \rho \frac{d\rho}{ds} \boldsymbol{t},$$

così è chiaro che i punti R si possono costruire mediante i punti:

$$S = P + m^2 (C_1 - C).$$

7. — Risulta dalla (13) che φ è costante solo quando u è funzione lineare di s:

$$u = hs + k.$$

Per $h = 0$ le linee Γ sono linee parallele ad α, supporremo quindi sempre nella precedente $h \neq 0$. Allora applicando la (13) si ha:

$$\cos \varphi = - mh,$$

dalla quale si vede che le linee Γ sono reali per $m^2 \leqq \frac{1}{h^2}$: esse sono speciali *evolventoidi* di α.

Nel caso particolare di $m^2 = \frac{1}{h^2}$ ossia $\cos \varphi = \pm 1$, $\operatorname{sen} \varphi = 0$ si ha facilmente dalla (12):

$$R = P \mp \left(s + \frac{k}{h}\right) \boldsymbol{t},$$

e quindi una delle linee inviluppo Γ è una *evolvente di* α.

Se β è l'evoluta di α, cioè $Q = C$, e α è *spirale logaritmica*, $\rho = hs$, allora come nel n° 4 si prova che per $mh \leqq 1$ anche Γ è formata da spirali logaritmiche uguali ad α.

Relazione sulla Memoria del Dr. CARLO GAMNA, *Ricerche sperimentali sulla funzione emolitica ed ematopoetica della milza.*

Nelle ricerche dell'A. viene studiata la funzione della milza nell'emolisi patologica e l'influenza di questa alterata funzione della milza sull'ematopoesi. Lo studio è compiuto per mezzo di alcune serie di esperienze sull'emolisi da siero prendendo in considerazione: *a*) i rapporti tra emolisi ed alterazioni spleniche durante il decorso dell'emolisi da siero, acuta e protratta; *b*) l'azione degli estratti di milza emolitica (cioè degli estratti preparati con milze di animali soggetti ad iniezioni di siero emolitico). Come animale da esperienza servì il coniglio: il siero emolitico veniva ottenuto dalle cavie.

Sotto l'influenza del siero emolitico la milza del coniglio subisce una speciale trasformazione strutturale e funzionale per cui si fa sede, insieme ad altri organi, di una vivissima attività emolitica, la quale si compie per opera di certi elementi (endotelii e cellule proprie della polpa) a ciò già fisiologicamente deputati, e che sotto l'azione del virus emolitico esagerano grandemente la loro funzione. L'alterazione funzionale della milza così trasformata non si limita però all'esaltamento della sua attività emolitica, ma può esplicarsi anche con una speciale influenza sulla ematopoesi. Questo fatto, già rilevabile negli animali trattati con siero emolitico, è sopratutto evidente negli animali trattati con estratti di milze emolitiche. Tali estratti infatti, mentre dimostrano *in vivo* un potere emolitico assai moderato, sono capaci di provocare in animali sottoposti per un certo tempo alla loro azione una particolare forma di leucocitosi caratterizzata da un notevole aumento dei gl. bianchi mononucleati e dalla presenza di numerosi leucociti polinucleari a granuli misti, oxifili e basofili.

La produzione dei gl. bianchi mononucleati è in dipendenza di una speciale proliferazione che avviene negli organi linfoadenoidi e particolarmente nella milza, nei quali ha luogo, per lo stimolo esercitato dai suddetti estratti, un'iperplasia di cellule a carattere embrionale.

L'A. si ferma sulla questione della genesi e del significato dei gl. bianchi mononucleati, e ricorda una serie di fatti della patologia sperimentale ed umana che inducono a credere che la produzione dei mononucleati segna un comportamento suo proprio fino ad un certo punto indipendente dalle altre specie di globuli bianchi e legato a particolari condizioni del tessuto linfoadenoide.

I sottoscritti propongono la pubblicazione della Memoria suddetta.

Torino, 29 novembre 1914.

Prof. Pio Foà, *Relatore.*
R. Fusari.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 6 Dicembre 1914.

PRESIDENZA DEL SENATORE PROF. GIUSEPPE CARLE
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: PIZZI, RUFFINI, STAMPINI, BRONDI, SFORZA, BAUDI DI VESME, SCHIAPARELLI, PATETTA e DE SANCTIS in funzione di Segretario. — È scusata l'assenza del Presidente BOSELLI e dei Soci MANNO, RENIER ed EINAUDI.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 22 novembre 1914.

Si delibera di rinviare alla prossima adunanza la commemorazione del Socio nazionale KERBAKER che sarà tenuta dal Socio PIZZI.

Per l'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. L. Disp. 3ª. 1914-1915.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 13 Dicembre 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio e i Soci Naccari, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Balbiano e Segre, Segretario.

È letto e approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente con vivo rammarico comunica le notizie, non buone, della salute del Socio dell'altra Classe Renier. Augura che la forte fibra di lui riesca a trionfare della grave malattia. La Classe si associa a questo voto.

Il Presidente informa la Classe che, essendo giunto un invito a partecipare alle onoranze che domani si tributeranno all'illustre Collega Prof. Chironi, all'Università, egli vi prenderà parte come rappresentante dell'Accademia.

Il Socio Somigliana offre in omaggio una sua pubblicazione: *Sur une classification des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables.*

Il Socio Mattirolo presenta, per la stampa negli *Atti*, una Nota di S. Dezani e T. Barocelli, *Ricerche sulla fuoruscita di elettroliti dai semi germinanti.*

Il Socio PARONA, anche a nome del Collega SOMIGLIANA, legge la relazione sulla Memoria del Dott. ZUFFARDI, *Geomorfologia della Collina di Torino*; ed il Socio NACCARI, anche a nome del Collega, relatore, JADANZA, la Relazione sulla Memoria del Dott. CARNERA, *Sul calcolo della Cometa 1899 V*. Con due votazioni unanimi si accolgono le conclusioni delle Relazioni, favorevoli alla stampa delle *Memorie*.

Pure con unanimità di voti si accettano per i volumi accademici gli scritti seguenti, presentati dagli Autori:

I. GUARESCHI, *Ruggero Bacone. Il metodo sperimentale e Galileo*. Parte III. Appendice.

L. CAMERANO, *Ricerche intorno ai Camosci*. Parte III.

Infine vengono offerti, ancora per la stampa fra le *Memorie*: dal Socio MATTIROLO, *La "flora sarda" di Michele Antonio Plazza, da Villafranca*, redatta con i suoi manoscritti dal Dott. ACHILLE TERRACCIANO. Parte II; e dal Socio Segretario, per incarico del Socio PEANO: C. BURALI-FORTI, *Isomerie vettoriali e Moti geometrici*. — Si dà incarico di riferire sul 1° lavoro ai Soci PARONA e MATTIROLO, sul 2° ai Soci PEANO e SEGRE.

LETTURE

Ricerche sulla fuoruscita di elettroliti dai semi germinanti (1)

Nota di S. DEZANI e T. BAROCELLI

In un suo precedente lavoro " *Ricerche sulla tossicità del succo spremuto da semi germinanti* „ (2), uno di noi aveva potuto constatare che la conducibilità elettrica dell'acqua distillata in cui siano immersi dei semi, per iniziare in essi quel complesso di fenomeni che preludia alla germinazione, cresce durante un certo periodo di tempo in proporzione con la durata dell'esperimento, dimostrando così che avviene una fuoruscita di elettroliti dai semi stessi. Già allora l'autore richiamava l'attenzione su questo fenomeno e scriveva " meritare certo la cosa di essere ulteriormente e profondamente studiata „.

Il fatto, a dire il vero, era già stato osservato nel 1875 dal Föhl (3), il quale aveva trovato che, lasciando immersi un certo numero di semi di *Zea Mais* L. in acqua, per un periodo di cinque o trenta giorni, alla temperatura di + 7° e + 18°, questi perdevano rispettivamente dal 4,34 al 5,45 $^0/_{00}$ e dal 26,04 al 33,70 $^0/_{00}$ di sostanze minerali. Le condizioni in cui si poneva quest'autore erano però troppo lontane da quelle in cui si era posto il Dezani. Evidentemente queste condizioni dovevano influire dannosamente sulla germinabilità dei semi stessi. Noi con le presenti ricerche abbiamo voluto studiare più da vicino il fenomeno, pensando che esso potesse essere non solo di semplice natura fisica, ma potesse avere un significato di natura fisiolo-

---

(1) La parte sperimentale del presente lavoro spetta alla signorina Barocelli.

(2) Dezani, " Atti della R. Acc. Sc. di Torino „, vol. 49.

(3) Citato da W. Detmer, *Vergleichende Physiologie des Keimungsprocesses der Samen*, Jena, 1880.

gica: si trattasse, cioè, di una vera secrezione di sali o di elettroliti, che avessero esaurito il loro còmpito sia durante il periodo di vita latente del seme, sia nel periodo di rigonfiamento, nel quale hanno principio i fenomeni di idrolisi e di sintesi che conducono alla sua germinazione. Abbiamo, cioè, voluto rispondere alle seguenti domande:

1ª Di quale natura sono gli elettroliti che fuorescono dai semi? In quali rapporti essi stanno con la somma degli elementi minerali e con ogni singolo elemento contenuto nei semi?

2ª Il fenomeno è di ordine fisico o di ordine fisiologico?

Anzitutto abbiamo voluto constatare se il fenomeno possa ritenersi di ordine generale. Abbiamo perciò esperimentato con semi di svariate famiglie, sia con semi nudi — di quelli a tegumento estensibile con l'imbibizione e di quelli a tegumento non estensibile — che con semi rivestiti dai carpelli; ne sceglievamo un certo numero fra i più sani, li lavavamo rapidamente con acqua corrente, poi con una soluzione 3 $^0/_{00}$ di acido cloridrico, quindi ancora con acqua distillata, e li immergevamo, in bocce di vetro di Jena, in una certa quantità di acqua distillata variabile in relazione alla grossezza dei semi. Dopo averli lasciati per 24 ore in termostato a $+25^\circ$, si misurava la conducibilità elettrica dell'acqua in cui erano stati immersi.

Le esperienze hanno sempre risposto affermativamente, come appare dalla seguente tabella:

			$K_{+25} \cdot 10^{-6}$
Acqua prima dell'immersione dei semi			13
„	con semi di	*Baptisia australis*	96
„	„	*Aristolochia Clematitis*	625
„	„	*Phaseolus vulgaris*	1562
„	„	*Rhaponticum cynaroides*	277
„	„	*Gleditschia macrocantha*	273
„	„	*Salvia grandiflora*	384
„	„	*Lathyrus sylvestris*	209
„	„	*Triticum vulgare*	215
„	„	*Cucurbita Pepo*	304
„	„	*Paeonia Russi*	93

Ci parve inoltre interessante stabilire se il fenomeno abbia luogo pure in quei semi i quali, caduti nel terreno, si trovano a contatto non più di acqua distillata, ma di soluzioni saline. Ci fu necessario perciò preparare un liquido, la cui composizione si avvicinasse il più possibile a quella dei liquidi circolanti nel terreno. Siamo ricorsi, a questo scopo, al metodo indicato dal Dott. G. Gola (1) e, ottenuti parecchi di quei liquidi che l'autore chiama " pedolitici ", abbiamo in essi immerso un certo numero di semi di Mais, lavati come sopra è detto, ed abbiamo seguìto le loro variazioni nella conducibilità. Per questo, a operazione terminata si estraevano con una pinza ben lavata ad uno ad uno i semi, si lasciavano gocciolare, si lavavano con qualche goccia di acqua distillata e si aggiungeva l'acqua di lavaggio al liquido pedolitico, sì da riportare il suo volume al volume primitivo:

	$K_{+25} . 10^{-6}$		
	1ª Prova	2ª Prova	3ª Prova
Liquido pedolitico all'inizio	10162	10800	11363
" " dopo 48 ore . . .	10162	10000	11363
" " " " coi semi	9609	9259	10869

Come si vede, la conducibilità dei liquidi pedolitici contenenti semi è leggermente diminuita. Parrebbe, dunque, che nei liquidi circolanti nel terreno il fenomeno osservato nell'acqua distillata non abbia luogo. Ciò è poco probabile. Molto più facile è che in queste condizioni esso in realtà avvenga, ma che, contemporaneamente ad esso, si abbia un passaggio di altri elettroliti dal liquido nei semi. In altre parole, l'esosmosi dai semi sarebbe sopraffatta dal fenomeno inverso.

(1) G. Gola, *Osservazioni sopra i liquidi circolanti nel terreno agrario*, " Ann. R. Acc. Agr. Torino ", vol. LIV.

Stabilito così il fatto generale, siamo passati all'esame più particolareggiato del fenomeno. Per tutte le nostre esperienze, ci siamo serviti di semi di *Zea Mais* L. dell'annata. 20 di essi, lavati com'è detto sopra, erano posti a rigonfiare in 20 cm³ di acqua distillata a + 25°. In essa si seguivano le variazioni della conducibilità con le solite norme. La temperatura del termostato era pure di + 25°.

	$K_{+25} \cdot 10^{-6}$	
	1ª Prova	2ª Prova
Inizio	61	14
Dopo 1 ora . . .	76	—
„ 2 ore . . .	96	55
„ 5 „ . . .	144	68
„ 8 „ . . .	186	94
„ 12 „ . . .	212	195
„ 24 „ . . .	286	212
„ 48 „ . . .	410	323

Per procedere, però, ad un'analisi chimica, occorreva avere a disposizione una maggiore quantità di liquido — liquido che, per brevità, chiameremo semplicemente " lavacro „ —. Per questo, da 500 a 1000 semi, accuratamente scelti e lavati, erano posti in acqua distillata in ragione di 1 cm³ per ogni seme. L'operazione si faceva in boccie di vetro di Jena accuratamente tappate e tenute in termostato a 25°. Dopo 48 ore, si filtrava. Si otteneva così un liquido leggermente opalescente, insipido al gusto, a reazione debolmente acida (0,0085 °/₀ — 9,0036 °/₀ espressa in H_2SO_4), non coagulabile con l'ebollizione. La reazione del glucosio risultava in esso in alcuni casi positiva, in altri nega-

tiva, e pure negativa riesciva la reazione del biureto. Con molibdato ammonico dava abbondante precipitato giallo di fosfati. Di altri elementi minerali non si potè ottenere direttamente nel lavacro alcuna reazione. Il lavacro era allora riunito alle acque di lavaggio dei semi ed evaporato a bagnomaria.

Il processo analitico seguìto è, in breve, il seguente: il residuo, calcinato con le dovute cautele, veniva disciolto in acido cloridrico diluito e caldo. La necessità, poi, di non frazionare il liquido, data la piccola concentrazione dei sali in esso esistenti, ci obbligò a ricercare un metodo che ci permettesse di eseguire tutti i dosaggi sulla quantità iniziale di esso. Per questo, alla soluzione cloridrica delle ceneri, neutralizzata con ammoniaca, era aggiunto 1 cm^3 di cloruro ferrico al 10 $^0/_0$ e cm^3 5 di una soluzione di acetato ammonico ottenuta per deliquescenza del sale; si portava all'ebollizione, si raccoglieva il precipitato di acetato e fosfato ferrico e in esso si dosava il fosforo coi soliti metodi. Nel liquido filtrato dal precipitato ferrico, soprassaturo di ammoniaca, si precipitava la calce con ossalato ammonico. Nel filtrato dal precipitato di ossalato, calcinato se necessario, si precipitava la magnesia con fosfato di ammonio. Abbiamo sostituito il fosfato d'ammonio al fosfato di sodio, più comunemente usato per questa determinazione, onde non trovarci poi di fronte a un grande eccesso di sali di sodio nel dosaggio della potassa. Nel filtrato, coi metodi soliti, si dosava la potassa.

Contemporaneamente a queste analisi, che ci davano la composizione in sostanze minerali dei varî lavacri, abbiamo stabilito in quali rapporti esse stessero con la somma degli elementi minerali contenuti nei semi. A questo scopo, 50 semi della stessa partita di quelli che servivano per preparare ogni singolo lavacro (poichè i lavacri furono preparati con semi di partite di località diverse) erano pur essi lavati e quindi inceneriti coi soliti metodi. Le ceneri erano riprese con acido cloridrico e, dopo separazione della silice, sottoposte al procedimento analitico sopra descritto.

Per 1000 semi, ecco i risultati ottenuti:

	1ª Prova		2ª Prova		3ª Prova		4ª Prova	
	Lavacro	Semi	Lavacro	Semi	Lavacro	Semi	Lavacro	Semi
Ceneri	0,1120	3,2440	0,1204	3,8900	0,1546	4,7500	0,1598	4,8800
P_2O_5 .	0,0195	1,7120	0,0220	1,5900	0,0361	—	0,0355	2,7750
CaO .	0,0055	0,1200	0,0066	0,1040	0,0063	0,0560	0,0060	0,2240
MgO .	0,0055	0,4180	0,0034	0,5880	0,0070	0.7880	0,0067	0,8160
K_2O .	0,0492	0,7400	0,0738	—	0,0840	0,8080	0,0860	0,8600

Rapportando i valori ottenuti a 100 di ceneri, si ha:

	P_2O_5	CaO	MgO	K_2O
Lavacro I . . .	17.41	4.91	4.91	44.64
„ II . . .	18.27	5.48	2.82	60.83
„ III . . .	23.35	4.09	4.52	54.34
„ IV . . .	22.21	3.75	4.25	53.81
Semi I	52.77	3.69	12.90	22.81
„ II	40.87	2.67	15.10	—
„ III	—	1.19	16.58	17.22
„ IV	60.96	4.59	16.51	17.62

Se poi facciamo il rapporto fra i percento degli elementi dei lavacri e quelli dei semi, abbiamo:

	P_2O_5	CaO	MgO	K_2O
Lavacro Semi . . I . .	0.33	1.33	0.38	1.95
„ II . .	0.44	2.06	0.19	—
„ III . .	—	3.43	0.27	3.18
„ IV . .	0.36	0.81	0.25	3.06
Media . .	0.37	1.90	0.27	2.73

Osservando questi dati, vediamo che la composizione dei nostri lavacri è discretamente costante e il contenuto loro in sostanze minerali oscilla entro limiti abbastanza ristretti (0,112-0,159 per 1000 semi). Anche la percentuale dei singoli elementi si mantiene assai costante. Se ora consideriamo i rapporti fra la percentuale degli elementi che abbiamo dosato nei lavacri e quella che ritroviamo nei semi, possiamo osservare che per il fosforo ed il magnesio il rapporto è sempre di molto inferiore all'unità; per il calcio ed il potassio è invece rispettivamente quasi il doppio e quasi il triplo dell'unità. Questo vario comportarsi degli elementi minerali dei semi immersi in acqua distillata dipende evidentemente dal modo vario in cui gli elementi sono legati nei semi. Per il fosforo, dobbiamo ritenere che esso si trovi per la massima parte allo stato di composto organico: fosfatidi, nucleoproteidi, ecc., composti nei quali sappiamo che il fosforo non può essere messo in evidenza come ac. fosforico se non dopo una profonda idrolisi. Lo stesso occorre pensare evidentemente per il magnesio, sebbene finora non conosciamo ancora composti, eccetto la clorofilla, nei quali questo elemento si trovi allo stato di magnesio organico. — Per il calcio ed il potassio dobbiamo invece ammettere, data la facilità con la quale fuorescono dai semi, che essi si trovino per la maggior parte liberi o legati in forma labile. Ciò non può stupire per il calcio al quale oggi nell'economia botanica diamo, fra gli elementi minerali, l'ultimo posto; bensì per il potassio, al quale noi ascri-

viamo una parte specifica ed importante nella sintesi delle sostanze proteiche.

***

Per rispondere alla seconda domanda che ci eravamo posta, abbiamo voluto anzitutto constatare se i sali che fuorescono dai semi (dato che la fuoruscita sia da considerarsi come una escrezione di sostanze diventate inutili) abbiano azione tossica su altri semi germinanti. Per questo alcuni semi furono lasciati rigonfiare per 48 ore in lavacri, preparati come sopra si è detto; essi non mostrarono alcun ritardo nella loro germinabilità di fronte a semi lasciati rigonfiare in acqua distillata. Abbiamo allora preparato estratti più concentrati, ponendo a rigonfiare altri semi — in ragione di 1 per ogni cm^3 di liquido — nel lavacro preparato come precedentemente. Ripetemmo due volte questa operazione. I semi posti a rigonfiare in questo lavacro dimostrarono una notevole diminuzione nella loro germinabilità. Abbiamo allora voluto stabilire se la concentrazione osmotica del lavacro finale fosse già così alta da poter agire plasmolizzando le cellule dei semi in esso immersi. Ma esso diede un abbassamento del punto di congelamento di solo 0,24, a cui corrisponde una concentrazione osmotica di 0,129, concentrazione di molto inferiore a quella dei succhi dei semi stessi, già studiati dal Dezani. Essa è quindi troppo piccola per esser presa in considerazione.

Ma un fatto di altra natura ci rese dubbiosi sul valore di questi risultati. I lavacri, infatti, così concentrati per il lungo tempo della loro preparazione — 6 giorni — apparivano all'atto dell'esperienza già notevolmente alterati per incipiente putrefazione. Non si poteva di conseguenza escludere senz'altro che alla presenza di prodotti tossici formatisi in seguito alla putrefazione fosse da attribuirsi l'azione ritardatrice di questi lavacri sulla germinabilità dei semi. Ripetemmo allora l'esperienza in ambiente sterile. Per questo, in bocce sterilizzate contenenti acqua sterile, si immergevano semi di mais, lavati prima rapidamente con soluzione 5 % di solfato di rame e poi lasciati per 15 minuti in soluzione 3 % di perossido d'idrogeno. Nel resto, si operò come nel caso precedente. — Il

risultato fu ora del tutto negativo: i semi posti a rigonfiare nel lavacro concentrato sterile non presentarono più alcun ritardo nella loro germinabilità.

	Sono germinati su 20 semi							
	1ª Prova		2ª Prova		3ª Prova		4ª Prova	
	Semi in acqua	Semi in lavacro	Semi in acqua	Semi in lavacro	Semi in acqua	Semi in lavacro	Semi in acqua	Semi in lavacro
Dopo 2 giorni	17	16	18	17	17	18	18	16
„ 3 „	18	19	19	19	17	19	18	17
„ 4 „	19	19	20	19	17	19	18	18
„ 5 „	19	19	20	19	17	19	18	18

Riuscito vano questo primo tentativo, abbiamo cercato di stabilire come si comportassero a questo riguardo i semi anestetizzati. Com'è noto, quando, pur essendo presenti tutte le condizioni esterne necessarie alla germinazione, si fa agire sopra i semi posti in esperimento un anestetico (cloroformio, etere) la germinazione in essi più non si inizia: sono, cioè, così impediti tutti i fenomeni vitali di organizzazione. Contemporaneamente però, neppur si iniziano i fenomeni chimici di distruzione, quei fenomeni cioè per i quali le riserve del seme sono modificate così da poter essere utilizzate dalla giovane pianta in via di sviluppo (1). Evidentemente, se la fuoruscita progressiva di elettroliti dai semi posti a rigonfiare in acqua, fosse dovuta non solo ad un fenomeno fisico, ma ad una vera secrezione di elettroliti i quali vengono liberati man mano che si svolgono i processi della germinazione, questa secrezione dovrebbe mancare

(1) Marcacci, *La formazione e la trasformazione degli idrati di carbonio nelle piante e negli animali*, Pisa, 1890.

nei semi anestetizzati. Abbiamo perciò seguìto l'andamento del fenomeno in semi immersi in acqua distillata satura di cloroformio. Che a questo modo possa impedirsi l'inizio dei fenomeni che conducono alla germinazione, lo dimostrò il fatto che questi semi, tolti dopo 48 ore dall'acqua cloroformica e seminati su cotonina, presentarono un notevole ritardo (2 e più giorni) nel germinare.

Semi 20, lavati al solito, si pongono in cm^3 20 di acqua satura di cloroformio; 20 altri semi, di controllo, vengono posti in acqua pura. Si misurano le variazioni nella conducibilità.

Dal nostro diario riportiamo nella seguente tabella alcune delle esperienze fatte al riguardo:

	$K_{+25} \cdot 10^{-6}$					
	1ª Prova		2ª Prova		3ª Prova	
	Liquido senza cloroformio	Liquido con cloroformio	Liquido senza cloroformio	Liquido con cloroformio	Liquido senza cloroformio	Liquido con cloroformio
Dopo 1 ora	48	49	38	41	62	40
„ 24 ore	266	158	211	173	152	164
„ 48 „	277	500	297	347	277	500

I risultati ottenuti stanno, come si vede, contro a quanto ci saremmo aspettati: per l'anestesia la quantità di elettroliti che fuorescono dai semi è, invece che diminuita, aumentata.

Abbiamo sperato allora di poter portar luce alla questione, studiando il comportamento verso l'acqua distillata di semi nei quali fosse stata spenta violentemente la vitalità. Evidentemente, anche in questo caso, la fuoruscita di elettroliti dai semi, se fosse legata, almeno in parte, a processi vitali, dovrebbe mancare nei semi uccisi. Abbiamo studiato perciò anzitutto il tempo minimo sufficente ad uccidere semi di Mais a $+130°$-$140°$. Semi tenuti durante 5′ in istufa a questa temperatura perdevano

completamente la loro germinabilità. Allora abbiamo, al solito lavato alcuni di essi, li abbiamo posti in acqua distillata nel solito rapporto e misurata la conducibilità dell'acqua all'inizio dell'esperienza, e dopo 24 e 48 ore:

	$K_{+25} . 10^{-6}$			
	1ª Prova		2ª Prova	
	Semi non uccisi	Semi uccisi	Semi non uccisi	Semi uccisi
Dopo 1 ora . .	132	81	65	87
„ 6 ore . .	215	117	126	125
„ 24 „ . .	438	304	235	304
„ 48 „ . .	590	590	367	657

Come risulta dalla tabella, neppure in questo modo riesce possibile sdoppiare il fenomeno nella sua parte fisica e nell'eventuale sua parte fisiologica.

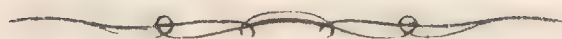
La fuoruscita di elettroliti dai semi posti a rigonfiare in acqua apparirebbe così come un semplice fenomeno di esosmosi di elettroliti già preesistenti nel periodo di vita latente dei semi. Tuttavia non possiamo dare a queste esperienze il valore che esse paiono avere a prima vista. Infatti, non sappiamo se in realtà nei semi anestetizzati rimanga completamente sospeso tutto quel complesso di fenomeni d'idrolisi che può aversi in un seme per opera dei numerosi enzimi in esso contenuti, anche all'infuori dell'iniziarsi di quegli altri fenomeni che conducono alla germinazione. È questione, questa, che meriterebbe di essere più profondamente studiata, ed è nell'intenzione nostra il farlo. Questo però possiamo affermare per esperienza diretta: che nei semi uccisi nelle condizioni in cui noi ci siamo posti, perdurano (certo con minore intensità che in quelli vivi) alcune

reazioni enzimatiche. Noi, infatti, abbiamo triturato i semi uccisi che ci erano serviti per le precedenti esperienze, abbiamo ripreso la poltiglia con acqua glicerizzata e tenuto il tutto in termostato per 24 ore. Dopo filtrazione, abbiamo ottenuto un liquido che decomponeva ancora con discreta rapidità il perossido d'idrogeno.

Le conclusioni del presente lavoro possono essere le seguenti:

1° Dai semi di *Zea Mais* L. posti a rigonfiare in acqua distillata durante 48 ore fuoresce una certa quantità di elementi minerali che rappresenta in media il 3,26 % della somma degli elementi minerali contenuti nei semi stessi. Di essi preponderano in valore assoluto il fosforo ed il potassio: in valore relativo il calcio ed il potassio.

2° Il fenomeno pare essere di ordine puramente fisico, poichè esso avviene ugualmente e con uguale intensità sia nei semi anestetizzati che in quelli uccisi violentemente col calore.

Torino, Laboratorio di Materia medica e Jatrochimica dell'Università. Novembre 1914.

Relazione sulla Memoria del Dott. P. ZUFFARDI: *Geomorfologia della Collina di Torino.*

La Collina di Torino ha fornito ampia materia agli studiosi di geologia che la illustrarono più volte ne' suoi vari aspetti. Però mancava ancora uno studio che tenendo per base il risultato della disamina geologica tendesse a spiegare la morfologia esterna della Collina di Torino, ricavandone anzi elementi nuovi per contribuire alla soluzione dei problemi proposti dalle stesse conclusioni geologiche. Tale còmpito si è assunto il Dott. Zuffardi, il quale, nella presente Memoria, approfittando delle conoscenze geologiche sulla regione e dei postulati e delle leggi che governano la evoluzione delle forme, cerca di rendersi ragione delle particolarità morfologiche della Collina di Torino, per risalire allo studio complessivo della sua evoluzione.

Egli distingue la Collina di Torino dalle Colline di Casale Monferrato secondo una linea Nord-Sud segnata dai bacini del Torrente Leona e del Torr. Traversola. Questo limite divisorio tiene effettivamente separata la Collina di Torino che ha caratteri propri ben diversi da quelli dell'altra parte, come fa rilevare l'A. nel corso del suo studio. Questo è suddiviso in due parti: *Direttrici orografiche* e *Morfologia dei versanti.*

Nella prima si studia l'andamento delle direttrici Perimetrica, Tectonica, Idrotemica e Altimetrica della Collina di Torino in rapporto con le Colline di Casale Monferrato. Da esse si rileva come complessivamente la forma arcuata di tutta la massa collinosa sia originaria, in dipendenza della Tectonica. Mentre però questa struttura è molto semplice nella Collina di Torino, diventa assai più complessa nelle Colline di Casale. A questa forma strutturale arcuata si adattano anche le direttrici idrotemica e altimetrica, descrivendo così complessivamente un

grande arco con vertice a Nord, quantunque esse non coincidano con gli assi tectonici. Anche per queste direttrici la Collina di Torino si distingue per una evidente maggiore regolarità. Qui la linea spartiacque è spostata di circa 2 Km. a Sud rispetto all'asse tectonico principale, e, a differenza delle Colline di Casale, le linee spartiacque e altimetrica coincidono.

Nella seconda parte, studiando la morfologia dei versanti, poichè la regolarizzazione del loro profilo comincia dal piede, ritesse dapprima la storia delle evoluzioni del Po e del Torrente Banna che scorrono appunto ai piedi della Collina. Poi esamina le condizioni generali dei versanti. In quello settentrionale distingue tre zone aventi caratteristiche proprie in relazione con la particolare natura dei terreni che le costituiscono, mentre presentano tutte tre una pendenza assai minore di quella della corrispondente gamba settentrionale dell'anticlinale principale. Il versante meridionale invece è più uniforme e ha minore pendenza. Esso ha la configurazione di un piano generale lievemente inclinato verso la pianura, dal quale però, nella estremità occidentale, svetta lo spartiacque, perchè composto di terreni Elveziani a *facies* conglomeratica e perciò più resistenti alla erosione.

Di particolare importanza su entrambi i versanti è la diffusione del Löess, poichè dimostra che al momento della sua deposizione, la Collina aveva in generale quasi lo stesso aspetto attuale.

Della Idrografia superficiale, che acquista naturalmente parte prevalente nel modellamento di una collina così poco estesa e di struttura così semplice, l'A. tratta separatamente. Esamina perciò le singole valli di ogni versante, ricercandone le cause delle direttrici idrografiche e le modalità del loro sviluppo ; in fine ne fa seguire le Osservazioni comparate. Tanto dai rapporti orizzontali che da quelli verticali si rileva la spiccata maturità dei bacini idrografici e la grande intensità del lavoro erosivo avvenuto. Tra le valli della Collina quelle del versante meridionale sono trasversali erosive cataclinali, quelle del versante settentrionale sono invece in parte trasversali erosive diaclinali, e in parte valli pseudoerosive di contorno.

Nella conclusione della Memoria si studia l'evoluzione geomorfologica della Collina di Torino in base ai fatti constatati.

Poichè il Loess dimostra, come s'è detto, che al momento della sua deposizione era già stata quasi raggiunta la forma attuale, ed essendo ormai comunemente ammesso che esso sia stato deposto sulla Collina di Torino nell'ultimo periodo interglaciale, l'A. ne deduce che se l'origine della Collina, e conseguentemente della sua evoluzione morfologica, fosse avvenuta nel Quaternario, si sarebbe costretti ad ammettere che tutto l'enorme lavoro erosivo constatato fosse stato compiuto nel primo terzo dell'Epoca Quaternaria. Negli altri due terzi invece, le forze che lo compirono si sarebbero dovute quasi improvvisamente smorzare, tanto da non apportare più alcun mutamento di entità paragonabile ai precedenti. Poichè questo sembra inverosimile, specialmente nelle condizioni in cui si può presumere si trovasse la Collina di Torino in Epoca Diluvio-glaciale, così sembra logico ammettere un'origine della Collina più antica. E a questo conducono anche fatti positivi, quali la impostazione dei bacini secondari, di formazione quaternaria, che presuppongono la preesistenza dei bacini maggiori a cui sono subordinati, e l'inflessione improvvisa, in senso contrario alla direzione precedente, presentata dalle valli meridionali in corrispondenza dei terreni pliocenici. Questo fatto dimostrerebbe come il sollevamento postpliocenico abbia aggiunto condizioni nuove ad altre che dovevano preesistere, alle quali appunto già obbedivano le correnti.

In conclusione la Collina di Torino sarebbe attualmente una piccola catena omoomorfa, con dissimmetria tectonica e stratigrafica e simmetria orografica, la cui morfologia presente risalirebbe a epoca prequaternaria.

Tale conclusione collima con quelle dedotte da altri in base a studi specialmente geologici e botanici.

La Memoria è corredata di due Tavole doppie. In una sono rappresentate, alla scala 1 : 100.000, le Direttrici Orografiche e i Rapporti Orizzontali tra i bacini idrografici della Collina di Torino. La stessa Tavola comprende anche una cartina schematica, in scala ridotta, che mostra i rapporti generali tra la Collina di Torino e le regioni limitrofe. Nell'altra Tavola poi sono figurati, alla scala 1 : 50.000 per le lunghezze e 1 : 10.000 per le altezze, i Rapporti Verticali tra gli stessi bacini idrografici.

Per l'importanza del tema geologico e geografico trattato, lo studio del Dott. Zuffardi, condotto con rigore di critica scientifica e notevole per osservazioni originali e deduzioni fondate, merita di essere preso in considerazione ed accolto per la stampa nelle Memorie.

C. Somigliana
C. F. Parona, *Relatore*.

Relazione sulla Memoria di L. Carnera: *Sul calcolo della Cometa 1899 V.*

Il Prof. L. Carnera si è proposto di determinare il miglior sistema di elementi orbitali per la Cometa 1899 V. L'astro, essendo di debolissima luce, poche furono le osservazioni fattene nei pochi Osservatori che dispongono di potenti strumenti, e la cometa non fu potuta seguire che per un arco eliocentrico di meno di 30°.

Innanzi tutto il Carnera si assicurò che si potevano trascurare le perturbazioni da parte dei pianeti maggiori. Anzichè attenersi a qualcuno dei vari sistemi di elementi provvisori determinati da diversi astronomi, e poco concordi tra loro, egli, con osservazioni abbraccianti un periodo relativamente lungo, determinò un'orbita parabolica, la quale gli servì di base per la rappresentazione delle diverse osservazioni onde ottenere gli O — C necessari per la formazione dei luoghi normali sui quali doveva poggiare la correzione dell'orbita. L'Autore ha fatto una diligente ricerca degli errori accidentali e sistematici dei diversi osservatori, cominciando dall'ottenere le migliori posizioni per le stelle di riferimento e dal ripetere i calcoli di riduzione.

Formati i luoghi normali per l'ascensione retta ed altrettanti per la declinazione, ha formato le equazioni di condizione per applicare il metodo dei coefficienti differenziali. Il valore della incognita x_6, sulla quale poggiano le altre, riuscendo molto incerto, l'Autore ha fatto varie ipotesi e poi ha ottenuto graficamente il miglior valore. Quindi ne ha dedotto le correzioni all'orbita da lui calcolata e così è giunto ad un sistema di elementi che rappresenta in modo molto soddisfacente i luoghi normali.

L'orbita iperbolica cui egli si ferma è quasi coincidente con quella proposta dal Prof. Terrine.

In un lavoro di calcolo di questo genere non si potevano aspettare metodi nuovi; ma l'Autore dimostra pieno possesso dei metodi classici e sagacia nell'applicarli.

L'orbita cui giunge il Carnera è la migliore che si possa dedurre dal materiale disponibile. Se in avvenire comparisse una cometa con elementi vicini a questi, bisognerebbe ricorrere a quelli del Carnera per riconoscerne l'identità.

I sottoscritti propongono la pubblicazione della Memoria del Prof. L. Carnera nei volumi delle Memorie della nostra Accademia.

A. Naccari
N. Jadanza, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 20 Dicembre 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ercole, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta e De Sanctis, in funzione di Segretario. — È scusata l'assenza di S. E. Boselli, Presidente dell'Accademia, e dei Soci Manno e Renier.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 6 dicembre 1914.

Il Presidente, dando notizie della salute dei Soci Manno e Renier, rinnova i voti per la loro pronta guarigione.

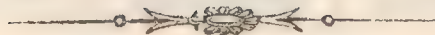
Il Socio Patetta presenta con parole di encomio il volume del Dott. G. Carbonelli, *I diritti di pedaggio delle droghe in Asti nel secolo decimoquarto* (Roma, Centenari, 1914).

Invitato dal Presidente, il Socio Pizzi legge la commemorazione del compianto Socio nazionale Michele Kerbaker. Essa sarà inserita negli *Atti*.

Per la pubblicazione negli *Atti* il Socio De Sanctis presenta a nome del Socio Renier assente una Nota del Dott. Francesco Picco intitolata *Due lettere autografe ed un sonetto di G. B. Marino*, ed a proprio nome e sotto la propria responsabilità uno studio del Dott. Bacchisio Motzo su *Aristea*.

Il Socio Einaudi legge, anche a nome del collega Patetta, la Relazione intorno alla Memoria del Prof. Giuseppe Prato su *La teoria e la pratica della carta moneta prima degli assegnati rivoluzionari.*

La Classe approva con voto palese la Relazione e poi, a scrutinio segreto (astenendosi come membro dell'altra Classe il Presidente), delibera con pienezza di voti la inserzione della monografia del Prato nelle *Memorie* accademiche.

Dopo di che, con gli auguri del Presidente ai Soci per l'anno nuovo, l'adunanza è tolta.

LETTURE

MICHELE KERBAKER

Commemorazione del Socio Prof. ITALO PIZZI

I.

A dare i dolci frutti, inverso terra
L'arbore piega i suoi rami felici,
E la nube, abbassandosi, disserra
Le correnti dell'acque irrigatrici.
Ben è questo lo stile
D'ogni signor gentile
Che sua grandezza non ostenta, quando
Spiega l'indole sua beneficando.

Così, mille e quattrocento anni fa, poetava, alla corte del re Vikramaditya in India, il sapiente Kalidasa, detto la perla del tempo suo, e così rendeva bellamente in italiano il pensiero del poeta indiano Michele Kerbaker. Il quale, nella sua lunga e laboriosa carriera di maestro nei Licei e nelle Università nostre, fu appunto quel signor gentile che spiega la generosa indole sua beneficando, ma non la ostenta, simile all'albero che piega i rami perchè tutti possano cogliere de' suoi frutti, simile alla nube che discende dalle sue alte regioni per porgere alla terra arida le sue acque ristoratrici. Sanno cotesto di lui e lo attestano concordi i suoi molti discepoli che ebbe da principio nel patrio Piemonte e i molti altri che ebbe in Napoli negli ultimi anni; lo so e lo attesto io che ebbi l'onore di averlo maestro di lettere greche e latine nel Liceo di Parma l'anno 1867. Bisognava vederlo, il gentile e venerando Maestro, di cui nessuno di noi scorderà mai la buona immagine paterna, seduto in mezzo a' suoi giovani, amorosamente e famigliarmente, e pur con ar-

dore, trattenersi con loro parlando di lettere e d'arti e passando, rapido e improvviso, da questa a quella osservazione, da questo a quel giudizio, dal citare Omero e Pindaro e Dante al ricordare un verso del Goethe o dello Shakespeare, un distico di Valmiki o di Kalidasa! Era affabile e affettuoso, ma rigoroso anche e austero nel richiedere dai discepoli ciò che reputava di poter richiedere; e se qualche difficoltà si affacciava, a nessuno era permesso di ritrarsi dall'affrontarla, non a lui, non ad altri. Bisognava passare innanzi, e si passava. Così potè introdurre gli alunni suoi nei misteri dei Vedi e della filosofia vedantina, e far gustar loro i drammi e le epopee indiane, frugar con loro e dipanare l'intricata matassa dei vetusti miti indoeuropei, scientificamente rifar la storia degli antichi idiomi di Grecia e di Roma, di Germania e d'India, e comparar fra loro i recenti rampollati dal ceppo latino. Perchè egli, cosa rara sempre, congiungeva l'arte e l'intento dell'arte alla scienza ed al rigore della scienza. Era uno scienziato sagace e acuto; era un poeta gentile.

Ma perchè era anche modesto e tale che si abbassava per far partecipe la mente giovinetta degli alunni dei tesori da lui raccolti, e perchè sapeva quanto lungo intervallo sta a separare chi cerca il sapere dal sapere stesso per quanto si sforzi di raggiungerlo, così non fu mai nè orgoglioso nè arrogante; non si proclamò mai nè scienziato rivelatore o vaticinatore di grandi cose nè superuomo; non domandò onori; non s'imbrancò tra i tanti caudatari e turiferari di quelli che stanno in alto; non volle far da padrone nelle Facoltà e nelle Accademie. Un giorno del 1890, a Napoli, parlando di certe persone, di quelle che vanno per la maggiore, di quelle che vogliono far credere che il mondo cammina perchè essi soli lo fanno camminare, con amaro e ironico sorriso, scuotendo la testa diceva, e l'ho udito io: “ E dire che tutta cotesta gente si crede ancora di essere qualche cosa a questo mondo! „. — Perciò appunto, e perchè più volte seppe dire forse troppo francamente la verità a chi andava detta, ebbe lenta e faticosa la carriera professorale, giunto soltanto a quarant'anni ad assidersi su quella cattedra universitaria che poi doveva ricevere tanto onore da lui.

II.

La vita sua, da chi volesse narrarla, si può riassumere in tre parole: studio, insegnamento, famiglia. Nacque il 10 di settembre del 1835 in Torino, e in Torino fece i primi studi e gli studi classici, e nella patria Università conseguì la laurea in lettere e in filosofia. Incominciò la carriera assumendo umili e modesti insegnamenti, chiamatovi sovente per la diligenza e per la singolare perizia didattica, ma non forse degnamente stimato quanto meritava, quando il suo maestro Giovanni Flechia, riconosciutone il valore non comune, lo propose al ministro per più alto e onorifico ufficio. Allora, fu mandato a Mondovì, poi, per l'anno scolastico 1866-67, al Liceo regio di Parma. Là, nella mia città nativa, ebbi io la fortuna e l'onore di essere uno dei suoi alunni, là io potei amarlo e ammirarlo, e la devozione di discepolo, d'allora in poi, non venne mai meno in me. Tolto da Parma, passò al Liceo Principe Umberto di Napoli, quindi a quella Università.

Di quanto fece a Napoli nelle cariche pubbliche, sarebbe lungo e anche difficile il dire adeguatamente. Basti il notare che, come fu diligentissimamente assiduo (esempio raro!) nell'insegnamento, così fu anche uno dei più operosi soci dell'Accademia Napoletana, ordinò e diresse per tempo non breve l'Istituto Orientale, fece parte a Napoli e a Roma presso il Ministero di molte commissioni in materia classica e orientale portandovi i lumi del molto sapere e la norma acquisita nella lunga esperienza.

A Napoli si accasò, ed ebbe degna compagna in una nobile dama, donna Assunta Bucci, che lo fece padre di più figli. Così, alternando le cure di padre con quelle di maestro e di studioso, per più di nove lustri serenamente visse nella nobile città che lo amava e venerava, che lo considerava come uno dei suoi, finchè, circondato dall'affetto di tutti, si spense in età d'anni ottanta il 20 settembre di quest'anno 1914.

III.

Fu mirabile studioso, e l'erudizione sua vastissima. Oltre la patria letteratura e le classiche, conosceva le recenti letterature d'Europa; della letteratura sanscrita era conoscitore profondo, reputato tale anche all'estero; dell'iranica prese soltanto qualche saggio nella parte antica; conobbe Firdusi e Saadi, nella recente; anzi, per poter comprender meglio questo elegantissimo scrittore persiano che si adorna di tante frasi e di tanti vocaboli arabi, volle prender conoscenza anche di questo difficilissimo tra gli idiomi semitici.

Lunga opera poi sarebbe quella di parlar degnamente dei suoi molti e varî scritti. La maggior parte ne è costituita dalle versioni. Gli altri sono accurate e coscienziose disamine di punti oscuri di mitologia comparata, nelle quali egli seppe, con sagace acume, rifar la storia di tanti miti indoeuropei, scovarne le origini riposte, dichiararne il significato etico, procedente dal naturalistico. Egli, in questo, appartiene, se non erriamo, a quella scuola di mitografi che ebbe già per capi Adalberto Kuhn e Massimiliano Müller, e che dagli studi recenti è stata fortemente scossa. Ma rimarranno sempre cospicui esempi di acuta e profonda indagine quegli scritti suoi, pubblicati nei volumi dell'Accademia Napoletana, intorno al dio Agni e al dio Savitar del Rigveda, alla figura di Ermes nella mitologia greca. Finissimo critico poi si manifestò in quelle dissertazioni letterarie ch'egli premise alle tante sue versioni, quando, con quella vasta sua erudizione, ragionava, per esempio, delle origini e del significato morale del Mahabharata e dei motivi etici informatori del dramma indiano, procedente in gran parte dalla rivoluzione buddhistica; e come quando, ragionando del Mahabharata e delle origini sue, anzichè intravvederne le apparenti contraddizioni nel lavorìo tardivo di capziosi diaskevasti secondo certa critica arbitraria, le rinvenne nella dottrina ovvero nel concetto profondo di un Fato inesorabile, dal quale emanano tutte le azioni e i moti di quaggiù, e dinanzi al quale sono indifferenti il giusto e l'ingiusto, il male e il bene. Il poeta epico, intanto, ne rappresenta inconscio l'apparente contrasto, non parteggia per nessuno,

pago del fascino del suo meraviglioso narrare, e lascia ai filosofi e ai critici dell'avvenire lo scervellarsi a loro posta.

E le versioni sue son pur di raro pregio! Congiungono l'accuratezza del filologo, profondo conoscitore dei testi, all'arte alata del Monti nell'epopea, all'arte cesellata del Maffei nella lirica e nella drammatica. Perchè egli non fu mai di quei tapini che al di là della lettera del testo e della glossa del testo non vedono nulla e stimano ispirazione poetica la regola arida della grammatica e ridevolmente intendono di rifare in italiano i metri stranieri dislogando le ossa all'idioma gentile e riuscendo ad un'armonia che è tutt'altro che armonia. Ma il Kerbaker, appropriandosi con intuito d'arte il pensiero del geniale poeta, lo rendeva da maestro ora in ben tornite ottave, degne dell'Ariosto, ora in facili e leggiadre strofe. Così, dal Mahabharata, tradusse la storia di Nala, la storia di Nahusa, la prima parte della Bhagavadgita, l'episodio di Drona. Queste parti del gran poema sono state date fuori; ma sappiamo che altre ne rimangono inedite tuttora, le quali, secondo quanto egli asseriva, dovevano un giorno, raccolte e ordinate, formare come un'ampia antologia che al lettore porgesse adeguata idea di quel grande poema indiano. Così la sua versione, tutta condotta in belle e spontanee ottave, come sarà pubblicata, e facciam voti perchè questo si faccia e presto, potrà collocarsi degnamente accanto a quella di un altro insigne filologo torinese, alla versione del Ramayana di Gaspare Gorresio.

Nè basta ancora! Con ugual magistero d'arte tradusse egli non pochi inni del Rigveda, e rese italiano il dramma del regal poeta Sudraka, il Carruccio di creta, meraviglioso dramma di quindici secoli fa, che, precorrendo i tempi del Dumas e dei romanzieri recenti, propugna il perdono e la redenzione della donna perduta. Elegantissime le versioni vediche, rifacenti, in meravigliosa guisa, lo stile ingenuamente primitivo di quella vetusta poesia tanto remota da noi, mentre, in questa del dramma di Sudraka, gareggiano la grazia squisitissima delle strofe nella parte poetica, e la finezza del dialogo lepidamente faceto nella prosaica, in cui mirabilmente è rifatto il porgere e l'esprimersi dei personaggi gravi e dei leggeri, il sentenziare degli uomini che noi diremmo di toga, e il gergo dei ladri, dei lenoni, dei

barattieri, il favellare elegante delle cortigiane e il blaterare svogliato dei principi ignoranti e scimuniti che parlano a sproposito di filosofia e di letteratura.

IV.

L'opera sua pertanto di maestro, di filologo, di poeta, fu doppiamente feconda. Uscirono dalla sua scuola di Napoli eminenti discepoli che ora vanno annoverati tra i più valenti cultori delle lettere sanscrite e fra i quali ricorderemo soltanto Francesco Cimmino, Carlo Formichi, Mario Vallauri, Riccardo Nobile e Giuseppina Baratti; e s'arricchì per lui di cospicue opere la patria letteratura. Sarà questa indubbiamente la sua gloria perenne, e la tradizione feconda del suo insegnamento ricompenserà nell'avvenire la poca cura che in alto si ebbe o si volle avere di lui. Italia nostra che per tanti e tanti altri facilmente trovò un posto tra i suoi senatori, non ne trovò o non seppe o non volle trovarne uno per lui. Ma è risaputo che non volle trovarlo per Cesare Cantù; ma è risaputo che, se potè trovarlo per Giuseppe Verdi, il motivo non fu già l'immortale genio di lui, sì bene il lauto censo, sorgiva di cospicuo tributo allo Stato. Confórtati adunque, venerando Maestro mio! Non ti fa e non ti farà torto l'essere rimasto fra gli esclusi e i dimenticati!

Due lettere autografe ed un sonetto di G. B. Marino.

Nota del Dott. FRANCESCO PICCO

Ricavo le due seguenti lettere di G. B. Marino da un *Recueil de 192 lettres originales* esistente tra i manoscritti italiani della Nazionale di Parigi.

Esso porta il n. 2035 e appartenne già ai *fonds Libri*, dei quali L. Delisle, nel suo *Catalogue des mss. du f. L.*, narra (cfr. p. 138) le fortunose vicende; figura ora tra i " manuscrits italiens acquis par la Bibliothèque Nationale „ (1886-1892), ed è descritto nell'*Inventaire Sommaire* di essi compilato con dotta perizia da L. Auvray (cfr. p. 5 dell' " Extrait de la Biblioth. de l'École des Chartes, 1902).

Caduto nelle rapaci mani del Libri, e solo in epoca recente restituito al libero esame degli studiosi, questo *Recueil* attende tuttavia di essere completamente esplorato; giovano al caso nostro i due autografi mariniani che contiene, i quali presentano, l'uno con l'invio d'un sonetto, l'altro con la richiesta di disegni per la *Galleria*, qualche interesse letterario, e sono del tutto ignoti sia alle antiche stampe di lettere del Marino, sia all'edizione moderna, in due voll., procurata dal Borzelli e dal Nicolini dell'intero suo *Epistolario*, negli *Scrittori d'Italia* di Bari.

I.

Molto Ill^o^ Sig^or^ mio osser.^mo^,

Al dottissimo et leggiadrissimo sonetto di V. S. corrispondo assai meglio con l'animo, che non rispondo con la penna, dove quello con l'affetto della riverenza ardisce di pareggiare il suo valore amandola ed osservandola, questa sforzandosi di seguitare la velocità del suo ingegno, ne perde di lungo tratto la traccia.

Pure perciocchè la forza dell'armonia è sì fatta, che tocco da maestra mano un liuto costringe per natural simpatia a risponder l'altro, accor-

dato in ugual proportione, dovrà essere il mio ardimento degno di scusa, se invitato dalla cortesia di V. S. mi assicuro di mandarle questa risposta in cui però altro non ha di eccellente, che il suo nome, nè altro di dolce, che le sue rime. Ma tutta questa soave violenza è stata fatta al mio stile per la conformità ch'io ho con lei nell'amore, se non nel merito. Conosco, et confesso, ch'è sconciatura, ma potrannosi le mie imperfettioni condonare alla mia fretta, perciocchè mi è convenuto accelerare il parto, acciocch'egli fussi a tempo per le stampe, le quali sono horamai del tutto finite. Et io per me vo tuttavia sollecitando la speditione di esse, per poter (sì come spero di fare fra pochi giorni) venir a riverir V. S. di persona, et goder qualche dì delle gratie sue nel mio ritorno per costà.

Intanto le bacio affettuosamente le mani del favore, che mi ha fatto, et della memoria, che serba di me, ed inchinandomi al sig. Piero Strozzi, al sig. Sertini, al sig. Gherardini, et a tutti cotesti altri sig.^{ri} a V. S. resto pregando dal cielo compiuta felicità.

Di Vinegia il dì 15 di febbraio 1602.

Di V. S. molto Ill.^{ma} servo aff.^{mo}

Gio. Batta Marino.

Alla lettera, che è a p. 278 del ms., segue immediatamente il sonetto, pur esso autografo, a cui accenna:

Al sig. Giov. Batt. Strozzi
Giov. Batt. Marino.

Solo, e fuor de la turba errante e vile
Strozzi ir ti veggio; e fra que' buon t'ammiro,
Che ne' tempi miglior quaggiù fioriro
E 'n Ciel portaro l'honorato stile.
Tu del bell'Arno tuo Cigno gentile
Note, quai già di Manto in prima usciro,
E cui forse in Arpin pari s'udiro
Spars'hai dal Gange a' termini del Thile.
Ecco, al tuo crin, che le corone honora,
Piegan la cima i lauri, ergonla i mirti,
E le sue frondi il sacro olivo infiora.
Nè meraviglia è già, poich'a seguirti
(Novo figlio d'Apollo) hebber talhora
Dal tuo celeste canto e sensi, e spirti.

Al Molto Ill.^{mo} Sig. et patron mio Oss.^{mo}
Giov. Batt. Strozzi
Firenze.

Giovan Battista Strozzi detto il *Giovane* od il *Cieco* (1551-1634), che S. A. Barbi, stampando per nozze (Firenze, Carnesecchi, 1893) alcuni suoi *Madrigali* inediti, e segnalando molte sue rime varie in numerose filze delle carte Strozzi-Uguccioni dell'Archivio di Stato, nonchè in parecchi codici della Nazionale di Firenze, distingue nettamente da altri tre omonimi contemporanei, è tra i più cari amici fiorentini del poeta napoletano.

Il suo nome — accanto a quello di un altro Strozzi, Giulio, al quale il Marino dirige da Parigi lettere affettuose (ediz. barese, lettere CLXX, CLXXVIII), e a cui invia da più luoghi, a più riprese saluti (*ivi*, lett. LXVII, CXXIII, CLXXII, CLXXXIII) — ricorre, infatti, non solo in cenni fuggevoli (*ivi*, lett. LXVII, CLXXXIII), ma tra coloro che, tessendo la propria apologia contro lo Stigliani, in lettera all'Achillini (*ivi*, lett. CLI), il Marino menziona dopo illustri defunti, come suoi autorevoli estimatori: “ ...mi basta, scrive, ch'un cardinale Ubaldini, ornamento “ delle porpore e splendore delle scienze, un monsignor Antonio “ Caetano... un Gabriello Chiabrera, un Guido Casoni, un *Giovan* “ *Battista Strozzi*, un Ottavio Rinuccini... simulacri della immor- “ talità tra' vivi, parte con vive voci in diverse corone di vir- “ tuose ragunanze, e parte con private lettere scrittemi di lor “ proprio pugno, abbiano testificato quello istesso che ora mi “ viene ratificato da voi. Questi sì che son personaggi i quali “ possono, o parlando o scrivendo, recare altrui onore o diso- “ nore „ (p. 252).

Lo colloca, adunque, il Marino nella schiera eletta de' suoi “ campioni „ poco dopo e poco prima di poeti di grido quali il Chiabrera ed il Rinuccini, mostrando di tenerlo in quello stesso conto in cui lo tenevano i suoi contemporanei. “ Un plebiscito “ di encomi latini e volgari, in prosa e in versi „, — si legge a tal proposito a pp. 62-63 di *Un accademico mecenate e poeta G. B. Strozzi, il giovane*, di A. S. Barbi, Firenze, 1900 — “ gli “ mandavano da ogni parte letterati e letterate „. Allo Stigliani, al Murtola, al Mascardi, ad altri, rammentati dal Barbi, può per questa lettera unirsi pur il Marino, che con lo Strozzi scambia rime.

Il sonetto “ dottissimo et leggiadrissimo „ dello Strozzi, donde prende le mosse la responsiva mariniana, non si trova tra le *Proposte e risposte* accolte, coi sonetti altrui, dal Marino

nella prima edizione (1602) delle proprie *Rime*, nè mette conto di rintracciarlo tra le carte manoscritte lasciate dallo Strozzi; e avvertasi che tra le *Rime* dette sarebbe stato a suo luogo, già essendovene altro dello Strozzi (p. 241 " Assembri forse al nome un picciol mare ") seguìto dalla *Risposta* (*ivi*, " Strozzi, le rime tue sì dolci e care ") del Marino stesso.

Il sonetto del Marino, che benchè edito qui si ristampa per compiutezza, come parte inscindibile della lettera, non presenta varianti degne di nota; tale, veramente, non può dirsi l'unica, che consiste nell'aggettivo *glorioso* sostituito nel testo a stampa all'*honorato* nel quarto verso del testo manoscritto. L'autore fu, in realtà, più sincero che modesto quando scrisse che è " sconciatura "; esso, se pur non merita del tutto tale epiteto (che si ritrova in lett. LXXIII: " ...è parto di *sconciatura* per esser stato " prodotto fra l'angustie "), non può tuttavia dirsi uno de' suoi sonetti migliori, nè mendicava scuse soggiungendo d'averlo composto in fretta e furia " acciocch'egli fussi a tempo per le " stampe le quali sono horamai del tutto finite ". Fu evidentemente aggiunto caldo caldo agli altri, sulle bozze, ed è l'ultimo delle *Varie*, p. 216 dell'edizione delle *Rime* edite proprio allora dal Ciotti (1602), in Venezia.

A dir vero, nel giorno in cui scrisse allo Strozzi non stette il Marino con le mani in mano: la stessa data del 15 febbraio reca, infatti, la dedica a Tomaso Melchiori della seconda parte delle *Rime*, contenente *Madriali e Canzoni*, dell'edizione, che veniva allestendo (cfr. ediz. barese, pp. 32-34).

Il desiderio espresso nella chiusa di " poter... riverir di " persona e di goder qualche dì delle gratie " dello Strozzi ebbe, a quel che pare, pronta effettuazione. Come annunzia allo Stigliani (*ivi*, lett. XX, che può datarsi quindi dallo stesso mese di febbraio, o dai primi di marzo, poichè il M. il 15 febbraio annunziava allo Strozzi la sua partenza " fra pochi dì "), egli non dovette tardar molto a partire da Venezia per Roma, dove, ultimata la stampa del suo poetico volume, fa ritorno; e sostò, verosimilmente, a Firenze, in riva al " bell'Arno " presso al caro " cigno gentile ", che vanta quale vate che sparge le note del suo canto dal sacro Gange alla lontana, ultima Tule.

II.

Mio Sig. Osserv.^{mo},

Fra tanti miei travagli non mi sono mai scordato di V. S. anzi ho conservata sempre intiera nell'animo mio la memoria del suo valore et della sua cortesia. Hora giunto in porto dopo tante tempeste, la saluto, et abbraccio caramente, et in segno della somma confidenza, che ho con lei, ardisco di fastidirla nel particolare d'una mia occorrenza.

Ho raccolto in un libro un gran numero di disegni di diversi maestri eccellenti, e sopra ciascuno di essi io vo scherzando con qualche capriccio poetico. Vorrei che ancor V. S. havesse parti in questa fatica, poichè non sarà senza sua gloria: quel che io pretendo è un disegnetto nella misura dell'incluso foglio con le figure per quel medesimo verso. La materia si rimette al suo beneplacito, purchè nè sia spirituale, nè dishonesta, ma più tosto favolosa. Se me ne favorirà di più di uno il favore sarà doppio, con conditione però che sia fornito con diligentia esquisita; ed io le ne resterò perpetuamente obligato.

Ciò che V. S. havrà fatto, potrà ravvolgere in un cannoncino acciò non si guasti, et consegnarlo al padre Panzirolo overo raccomandarlo alla posta. Et le bacio caramente le mani

Ser. aff.^{mo}
Il Cav. Marino.

Addì 14 novembre 1612.

ad Annibale Mariani.

Questa seconda lettera, che si legge a p. 275 dello stesso *Recueil*, va senza alcun dubbio attribuita al Marino con la data del 1612 e fu scritta da Torino subito dopo la sua liberazione dal carcere nel quale, com'è noto, era stato rinchiuso " sotto " pretesto, scrive, che io abbia nelle mie poesie scherzato poco " modestamente intorno alla persona del serenissimo padrone „, il duca di Savoia, Carlo Emanuele I (*ivi*, lett. LXIV); a torto il Delisle la assegna ad un cav. Mariani, sotto la data del 1682.

A torto, poichè se è bensì vero che è indirizzata ad Annibale Mariani — di un Mariani, Benedetto, probabilmente ravennate, amico del M., è menzione in una lettera, la XLI, diretta ad Andrea Barbazza — non può esser che frutto d'equivoco l'aver il D. letto nella firma di nuovo Mariani dove è, se pur non nitidissimo, " Marino „, e nella data '82 in luogo di '12.

Inducono a restituirla al poeta napoletano irrefutabili dati esterni ed interni:

1) dati esterni: la firma; la calligrafia indubbiamente sua; il leggersi in alto a sinistra, di mano differente, ma d'inchiostro dell'epoca l'indicazione, appostavi forse da chi la ricevette, o da chi la ordinò tra altre carte " *-arino* „, parola amputata di un *M*, stagliato via dal rilegatore;

2) dati interni: la richiesta, che lo scrivente fa di disegni per la *Galleria*, richiesta che si trova ripetuta in numerose lettere del Marino (cfr. tutte le lettere datate tra il 1604 e il 1619, anno in cui fu edita *La Galleria*, particolarmente il gruppo LXXII-CII), quasi con le stesse parole.

Alle frasi: " fra *tanti miei travagli*... hora giunto *in porto* " dopo *tante tempeste*... „ corrispondono, infatti, le seguenti: " ...i " *miei* passati *travagli*... è placato il furore della fortuna. Sono " uscito di carcere... posso e debbo oggimai sperare fra *tante* " *perturbazioni* qualche tranquillità e di risarcire *in porto sicuro* " i danni di sì gran naufragio „ della lett. LXXIII; all'annunzio: " ho raccolto in un libro un gran numero di *disegni di diversi* " *maestri eccellenti, e sopra ciascuno di essi io vo scherzando con* " *qualche capriccio poetico*... „ dato al Mariani fa perfetto riscontro la notizia, che dà a Bernardo Castello, dell'opera che ha " per le mani. È intitolata *La galeria* e contiene quasi tutte " le favole antiche. Ciascuna favola viene espressa in un *disegno* " *di mano di valentuomo, e sopra ogni disegno io fo un breve* " *elogio in loda di quel maestro e poi io vo scherzando intorno ad* " *esso con qualche capriccio poetico* „ della lett. LXXIX, nella quale ricorrono pure le indicazioni " torno a mandarle *la misura del* " *foglio* acciocchè non erri dove *le figure hanno da venir situate* " *per quel medesimo verso*... „, che qui ripete tali e quali.

Anche il Panzirolo è quello stesso suo fidatissimo — lo rammenta altresì in lett. LXVII, LXXVII —, a cui vuol consegnati da altri, come ora dal Mariani, alcuni disegni: " .....se " vorrà... strada più sicura potrà ritrovare costì *il signor Giovan* " *Giacomo Panzirolo mio carissimo amico e consegnarlo in sua* " *mano*... „ (lett. LXXXI), e finalmente, non trascura pur questa volta la consueta raccomandazione, che si legge proprio con la locuzione medesima in altra lettera, la LXXX al Castello: " ...ma

" avverta di *mandarlo ravvolto in qualche cannoncino acciocchè* " *non si guasti* „.

Resta così identificata per ragioni di stile e per convenienza di materia, la lettera mariniana, che viene ad accrescere la già copiosa serie di quante il M. ne scrisse allo scopo di sollecitar disegni, che vagheggiava " far... tutti intagliare con esquisita " diligenza „ e formar con essi *La Galleria*, quel poetico libro che dovrebbe risultare " curioso per la sua varietà „ e che invece gli procurerà poi tanto sdegno quando uscirà scorrettissimo dalle mani del Ciotti stampatore (cfr. lett. CXLIII della fine del 1619; CLII, gennaio 1620), sdegno sbollito soltanto il giorno in cui gli pervenne a Parigi — e precisamente " la seconda " festa di pentecoste del 1621 „ — la " seconda impres- " sione... comportabile ed assai migliore della prima „ (cfr. lettera CLXXVII).

E poichè dai minuti riscontri eseguiti appare certa la data del 1612, del resto, a chi ben riguardi, leggibile nel manoscritto, la lettera in questione viene adunque a prender posto legittimamente tra quelle, senza designazione di giorno, ma tutte della fine del 1612, con le quali ha identità di sostanza e di forma, del gruppo LXXII-LXXVII, e conferma la distribuzione e la datazione ad esse assegnate, con retto acume da Fausto Nicolini nell'edizione barese allestita dal Borzelli e da lui curata, edizione che tenni a testo nel corso di queste mie modeste indagini.

ARISTEA.

Nota del Dott. BACCHISIO MOTZO

I. — Lo storico Aristea è il pseudo-Aristea.

L'autore giudaico della lettera a Filocrate (1) intorno alla versione dei LXX dei libri mosaici si chiama da sè Aristea (§ 1 *Ἀριστέας Φιλοκράτει*), e ricorda di aver mandato antecedentemente al fratello una storia riguardante i Giudei, che aveva ricevuta o appresa dai sacerdoti di Egitto: *καὶ πρότερον δὲ διεπεμψάμην σοι περὶ ὧν ἐνόμιζον ἀξιομνημονεύτων εἶναι τὴν ἀναγραφὴν ἣν μετελάβομεν παρὰ τῶν κατὰ τὴν λογιωτάτην*

(1) Per il testo cfr. *Aristeae ad Philocratem epistula* ed. Wendland 1900 e l'edizione del Thackeray in Swete *Introduction to the Old Testament in Greek* 1902 p. 499-574; per il frammento del *π. Ἰουδαίων* cf. *Fragm. hist. graec.* ed. C. Müller III 220; Euseb. *Praep. evang.* IX 25 ed. Gifford 1903 e Freudenthal op. da cit. p. 231. — Della copiosa letteratura cfr. specialmente Freudenthal *Alexander Polyhistor und die von ihm erhaltenen Reste judäischer und samaritanischer Geschichtswerke* 1875 p. 136-143 e *passim*; Schürer *Gesch. des jüd. Volkes im Zeitalter Jesu Christi* III[4] p. 480 per Aristea lo storico e p. 608-616 per la lettera a Filocrate; Andrews *The letter of Aristeas* in Charles *Apocrypha und Pseudoepigrapha* II p. 83-93 (1913) le introduzioni del Wendland alla sua ediz. e alla traduzione in Kautzsch *Apokryphen und Pseudepigraphen des A. T.* II 1-4 e gli articoli *The historian Aristeas* e *Letter of Aristeas* in " The Jewish Encycl. „ II 92-94; Abrahams *Recent criticism of the Letter of Aristeas* in " Jewish Quarterly Review „ XIV (1902) p. 321-342; Lumbroso *Dell'uso delle iscrizioni e dei papiri per la critica del testo di Aristea* " Atti R. Accad. Scienze di Torino „ IV (1868-9) p. 229-54; *Recherches sur l'Économie politique de l'Égypte sous les Lagides* 1870 p. xiii-xxii 351-369; *Ricerche Alessandrine* Estratto da " Mem. R. Accademia Scienze di Torino „ S. II, XXVII 1871 p. 58-63; " Archiv für Papyrusforsch. „ V (1911-13) p. 402; " Bollettino archeol. d'Alessandria „ nº 13 (1910) p. 151-2. Stählin in Christs *Gesch. der griech. Literatur*[5] 2, 1 p. 447 e 473-5.

Αἴγυπτον λογιωτάτων ἀρχιερέων περὶ τοῦ γένους τῶν Ἰουδαίων (§ 6). Tra le opere intorno ai Giudei citate da Alessandro Polistore una aveva per autore Aristea: *Ἀριστέας δέ φησιν ἐν τῷ περὶ Ἰουδαίων.* Il piccolo ed unico frammento che riguarda la storia di Giobbe è conservato da Eusebio di Cesarea (*praep. evang.* IX 25) e mostra che Aristea attingeva al testo dei LXX.

Viene spontanea l'idea d'identificare il *περὶ Ἰουδαίων* citato dal Polistore col *περὶ τοῦ γένους τῶν Ἰουδαίων* ricordato nella lettera a Filocrate e i due Aristea in un sol personaggio. Ma da quando il Freudenthal (1) ha sostenuto che trattisi di due autori diversi, il suo giudizio è stato accolto come cosa certa, per citare solo alcuni tra i maggiori critici, dal Susemihl (2), dallo Schwartz (3), dallo Swete (4), dal Gifford (5), dallo Schürer (6), dal Wendland (7), dallo Stählin (8), dall'Andrews (9) e da altri. Io mi propongo di mostrare qui che le ragioni addotte dal Freudenthal non sono valevoli e che si devono ridurre i due scrittori ad uno solo.

Che al tempo di Tolemeo Filadelfo sia esistito un Aristea alto personaggio di corte, come finge di essere l'autore della lettera a Filocrate, non è inverosimile, poichè i falsari amano coprirsi con nomi celebri e quasi tutti quelli che egli ricorda sono di personaggi vissuti intorno a quel periodo storico. Ma che a un tale Aristea, se mai è esistito, non debba attribuirsi il *περὶ Ἰουδαίων* citato dal Polistore è evidente, per lasciare ogni altra considerazione, da ciò che il frammento è attinto al testo greco di Giobbe che certo non esisteva al tempo in cui appena si colloca la traduzione dei libri mosaici. Neanche potè essere autore del *περὶ τοῦ γένους τῶν Ἰουδαίων*, poichè questo

---

(1) Op. cit. p. 136-143.

(2) *Gesch. der griech. Literatur in der Alexandrinerzeit* II p. 651 e 604-9.

(3) Pauly-Wissowa "Real Encyclopädie²" art. *Aristeas* 14.

(4) *Introduction to the Old Test. in greek* p. 25.

(5) Op. cit. IV nota al passo di Eusebio. Cf. anche Herriot *Philon le Juif* p. 57; Schlatter *Zur Topographie und Gesch. Palästinas* p. 332.

(6) Op. cit. p. 95.

(7) Wendland *Aristeae ad Philocr. ep.* p. XXVII.

(8) In Christ *Gesch. der griech. Literatur* II⁵ 1 p. 447.

(9) L. c. p. 95 n° 6.

era una falsificazione dell'autore stesso della lettera, inteso a glorificare il suo popolo. Escluso che una delle due opere possa appartenere a un Aristea cortigiano del Filadelfo, il Freudenthal adduce per la sua tesi questo argomento capitale, che l'autore della lettera a Filocrate mantiene bene la maschera che prende di gentile, nè mai si serve della Bibbia o dei LXX; solo una volta ne attribuirebbe al pontefice giudaico una frase modificata. Il frammento invece citato dal Polistore è in gran parte attinto ai LXX. Di qui la necessità di due autori diversi.

Lo studio della lettera a Filocrate non era quando il Freudenthal scriveva molto progredito; così non gli si può fare gran colpa dell'affermazione inesatta che i LXX non vi siano adoperati. Ora, chiunque confrontando le edizioni del Wendland e del Thackeray trova segnati un numero notevole di passi attinti alla Bibbia secondo i LXX. Così il § 87 accenna a *Exod.* 36, 35; la descrizione delle vesti del pontefice nei §§ 96-9 è fatta in parte coi vocaboli di *Exod.* 28-29-36; il § 144 è in rapporto con *Levit.* 11, 29; il § 152 con *Levit.* 18; nel § 155 si combina *Deut.* 7, 18 con *Deut.* 10, 21; il § 160 *καὶ κοιταζομένους καὶ διανισταμένους καὶ πορευομένους* riproduce *Deut.* 6, 7 *καὶ πορευόμενος ἐν ὁδῷ καὶ κοιταζόμενος καὶ διανιστάμενος*; il § 228 *ἴσον τῇ ψυχῇ τὸν φίλον* corrisponde a *Deut.* 13, 6 *φίλος ἴσος τῆς ψυχῆς σου* ecc.

Caratteristico è il passo in cui si descrive la mensa fatta eseguire da Filadelfo per il tempio di Gerusalemme

§ 57 *δύο γὰρ πήχεων τὸ μῆκος ⟨πήχεος δὲ τὸ εὖρος⟩, τὸ δὲ ὕψος πήχεος καὶ ἡμίσους συνετέλουν, χρυσίου δοκίμου στερεὰν πάντοθεν τὴν ποίησιν ἐργασάμενοι, λέγω δὲ οὐ περί τι περιεπτυγμένου τοῦ χρυσοῦ.*	*Exod.* (ed. Swete) 25, 22 *καὶ ποιήσεις τράπεζαν χρυσῆν χρυσίου καθαροῦ δύο πήχεων τὸ μῆχος καὶ πήχεος τὸ εὖρος καὶ πήχεος καὶ ἡμίσους τὸ ὕψος.*

Secondo il testo ebraico (1) la mensa doveva essere di legno d'acacia e rivestita d'oro. Aristea, dopo aver detto che

(1) *Exod.* 25, 23 שׁלחן עצי שׁטים, *de lignis setim* Hieron.

nell'eseguire gli utensili per il tempio si seguirono le prescrizioni date *διὰ γραπτῶν* (1), non solo segue i LXX dicendo che la mensa era tutta d'oro massiccio, ma con la frase *λέγω δὲ οὐ περί τι περιεπτυγμένον τοῦ χρυσοῦ* fa risaltare l'opposizione al testo originale che gli era in qualche modo noto.

Non insisterò sul significato della frase *τὴν ἀναγραφὴν ἣν μετελάβομεν παρὰ τῶν κατὰ τὴν λογιωτάτην Αἴγυπτον λογιωτάτων ἀρχιερέων* che il Freudenthal (2) ritiene possa significare " nur ein fertiges Werk der Oberpriester, nicht Materialien zu einem solchen „, poichè anch'egli riconosce che questa è solo una maschera presa dal pseudo Aristea; ma noto che se l'autore della lettera, che si nasconde sotto quel nome, crede di dover nella sua seconda falsificazione richiamare in mente ai lettori la prima, il *περὶ τοῦ γένους τῶν Ἰουδαίων*, ciò prova che anche il *περὶ τοῦ γένους τῶν Ἰουδαίων* andava in giro col nome di Aristea, ch'egli aveva assunto per spacciare i suoi scritti. Il che bene può combinarsi con ciò ch'egli finge ché questo libro fosse da lui ricevuto, o come composizione, o come informazioni, dai sacerdoti di Egitto, se egli immaginava di presentarlo in veste greca ai lettori, coprendolo con l'autorità d'un presunto cortigiano di Filadelfo. Che poi l'autore della lettera a Filocrate non abbia inteso coprire la sua persona con quella d'un autentico Aristea che sarebbe stato autore del *περὶ Ἰουδαίων*, come suppongono il Wendland (3) e l'Andrews (4), risulta da ciò che l'Aristea della lettera rappresenta sè stesso come cortigiano di Filadelfo.

Il secondo argomento che il Freudenthal aggiunge in sostegno della tesi è anche di minor valore: l'autore dell'epistola, che è colto filosoficamente, avrebbe evitato una frase come quella del frammento secondo cui Dio ammirò (*ἀγασθέντα*) Giobbe. Ammessa pure la sua coltura filosofica, in realtà molto povera, l'*ἀγασθέντα* non fa difficoltà, visto che la Scrittura assai spesso e autori giudaici anche filosofi come Filone non esitano ad attribuire a Dio sentimenti umani, riservandosi al più di

---

(1) § 56 *ὅσα δ' ἂν ᾖ ἄγραφα πρὸς καλλονὴν ἐκέλευσε ποιεῖν· ὅσα δὲ διὰ γραπτῶν μέτρα αὐτοῖς κατακολουθῆσαι.*

(2) Op. cit. p. 142.

(3) " The Jewish Encycl. „ II 92.

(4) L. c.

giustificarne l'uso con l'allegoria. Aristea, che aveva assunto il nome e la persona d'un pagano e parlava su informazioni immaginate attinte da fonti pagane, poteva usare massima libertà di linguaggio.

Dopo ciò il Freudenthal conclude: " non vi è dunque tra lo scritto (περὶ Ἰουδαίων di Aristea citato dal Polistore) e la pretesa lettera di Aristea nessun altro rapporto che quello creato dal nome ". Al contrario, noi abbiamo un Aristea che scrive un *περὶ Ἰουδαίων* e un autore che nella lettera a Filocrate si chiama da sè Aristea e dice di aver scritto poco prima un *περὶ τοῦ γένους τῶν Ἰουδαίων*; l'uno nel frammento attinge al testo greco di Giobbe; l'altro del testo greco della Legge pretende narrare l'origine e se ne serve; ragioni per tenerli distinti non ve ne sono, si devono quindi identificare.

In conferma possono addursi altri argomenti. Come mai lo storico Aristea in uno scritto *περὶ Ἰουδαίων* parlava di Giobbe, la cui storia personale nulla ha di comune con quella del popolo ebraico e la cui vita si svolge in un paese diverso da quello degli Ebrei? Ciò si spiega se: 1° il *περὶ Ἰουδαίων* era un *περὶ τοῦ γένους τῶν Ἰουδαίων*, si occupava cioè dell'origine e dell'antica storia del popolo ebraico; 2° se l'identificazione di *Ἰώβ* con l' *Ἰωβάβ* di *Gen.* 36, 33 che è un discendente da Abramo per linea di Esaù era già stata fatta: Giobbe rientrava così nella grande famiglia di Abramo, di cui i Giudei si ritenevano i genuini e legittimi discendenti, e i casi mirabili della sua vita appartenevano in qualche modo alla loro storia.

Un'altra opinione del Freudenthal che ha trovato l'assenso, sebbene non unanime, di molti che hanno scritto dopo di lui (1) è che l'appendice alla traduzione greca del libro di Giobbe (42, 17 *b-e* ed. Swete) dipenda dal *περὶ Ἰουδαίων* di Aristea, di cui conserverebbe alcune notizie omesse nel compendiare dal Polistore, e inoltre da un Targum aramaico che sarebbe ricordato con le parole prefisse all'appendice *οὗτος ἑρμηνεύεται ἐκ τῆς Συριακῆς βίβλου*. Ma si confronti il frammento con *Hiob*

---

(1) Schürer op. cit. p. 480; Stählin op. cit. II 1 p. 447 n° 5; Swete op. cit. p. 25; Budde *Das Buch Hiob*² p. xix ecc. Ma contro cf. Susemihl op. cit. II 651 n° 83 e in parte il Wendland in " The Jewish Encycl. " II 92.

42, 17 *b-d*; 1, 1, 3, 14, 16, 17, 19; 2, 7, 9, 11; 32, 2, 6; 42, 9, 17 *e*, e risulterà evidente com'esso sia un musaico di frasi tolte alla traduzione greca. Se il Polistore l'avesse compendiato con parole sue, quest'aspetto si sarebbe perduto; ond'è a ritenere che l'abbia citato alla lettera. L'errore quindi ch'è nel frammento per cui Giobbe sarebbe figlio immediato di Esaù (*τὸν Ἠσαῦ γήμαντα Βασσάραν ἐν Ἐδὼμ γεννῆσαι Ἰώβ*) non deriva dalla negligenza del Polistore, come ritiene il Freudenthal, ma da Aristea, che, come ci appare poco sollecito della verità storica nell'epistola a Filocrate, così si mostra trascurato nel compendiare la fonte di cui si serviva nel *περὶ Ἰουδαίων*. In *Hiob* 42, 17 *c* si dice espressamente *ἦν δὲ αὐτὸς πατρὸς μὲν Ζάρε ἐκ τῶν Ἠσαῦ υἱῶν υἱός, μητρὸς δὲ Βοσόρρας* (*Βοσσόρας* A) *ὥστε εἶναι αὐτὸν πέμπτον ἀπὸ Ἀβραάμ*. Ed egli è in colpa se fidandosi ciecamente dell'appendice ha fatto con questa di Bassara o Bossora la madre di Giobbe, mentre in *Gen.* 36, 33 *Ἰωβὰβ υἱὸς Ζαρὰ ἐκ Βοσόρρας* è indicato il luogo di origine, Bosra, il che meglio si vede nel testo ebraico. Questo errore comune e il corrispondere alcune frasi del frammento ad altre che trovansi soltanto nell'appendice dimostrano che Aristea usava un codice greco del libro di Giobbe, a cui l'appendice era già annessa. S'aggiunga che la citazione del Polistore fa l'impressione di dare tutto quello che il *περὶ Ἰουδαίων* narrava di Giobbe, e l'appendice ha notizie che non sono nel frammento, il che si spiega se Aristea racimolava quelle che gli sembravano utili, tralasciando le altre, non viceversa se l'autore dell'appendice copiava Aristea. Vero è che il Freudenthal suppone un Targum aramaico come fonte secondaria, ed anche il Wendland più recentemente ammette l'influsso d'un testo siriaco, ma senza fondamento.

L'inciso posto alla fine della traduzione del libro ebraico 42, 17 *b* *οὗτος ἑρμηνεύεται ἐκ τῆς Συριακῆς βίβλου* non è da riferire ad un altro libro in cui fossero le notizie contenute nelle righe seguenti dell'appendice, ma al libro stesso di Giobbe di cui si dice che è tradotto da un testo siriaco e per dir meglio ebraico. Era uso comune, specialmente in Egitto, di designare come *Συρία*, o più precisamente *Παλαιστίνη Συρία* (cfr. ancora Philo *Quod omnis probus liber* § 12 M. II 457) la Palestina e la Giudea che vi era compresa, come *Σύριοι* i suoi abitanti,

come parlare *συριστί* il dialetto dei Giudei, termini del resto che corrispondono a quello di “ aramei „ che i Giudei si dànno nei papiri di Elefantina del tempo persiano. Così il giudeo Artapano parlando di Abramo dice che tornò dall'Egitto *εἰς τοὺς κατὰ Συρίαν... τόπους* (*praep. evang.* IX 18) e che essendosi Giacobbe e i figli stabiliti in Egitto *τοὺς Σύρους πλεονάσαι ἐν τῇ Αἰγύπτῳ* (ib. 23); e di uno schiavo giudaico in un papiro del III secolo si legge (1) ὃς *καὶ συριστὶ Ἰώναθας*; e l'uso si mantenne a lungo se Ovidio scrive *Cultaque Judaeo septima sacra Syro* (*Ars amatoria* 1, 75 cfr. ib. 1, 415) e ancora Sinesio parlando d'un giudeo lo chiama *ὁ δὲ Σύρος* (*epist.* 4).

Però i Giudei, cresciuti d'importanza in Egitto e costituitisi a stato indipendente in Palestina, ci tennero a distinguersi dalle altre popolazioni Arabi, Fenici, Samaritani e in genere Siri con cui prima volentieri si confondevano, ed Aristea, ch'è di qualche generazione posteriore ad Artapano e all'appendice di Giobbe, nota espressamente per bocca di Demetrio di Falero che *χαρακτῆρσι γὰρ ἰδίοις κατὰ τὴν Ἰουδαίων χρῶνται, καθάπερ Αἰγύπτιοι, τῇ τῶν γραμμάτων θέσει, καθὸ καὶ φωνὴν ἰδίαν ἔχουσιν· ὑπολαμβάνονται Συριακῇ χρῆσθαι, τὸ δ' οὐκ ἔστιν, ἀλλ' ἕτερος τρόπος* (*epist. ad Philocr.* § 11). Per escludere la pretesa fonte targumica sarebbe bastato osservare che l'appendice si fonda intieramente sui dati della versione greca di Giobbe e sul testo dei LXX di Genesi 36 ed è frutto delle speculazioni fatte dal traduttore stesso, il quale pose queste notizie come una didascalia al gran dramma che aveva tradotto. Già nella traduzione del libro egli, allontanandosi dal testo ebraico, aveva trasformato in re e principi gli amici di Giobbe (2, 11) come fa nell'appendice. Al traduttore adunque risale l'identificazione di *Ἰώβ* con l'*Ἰωβάβ* di *Gen.* 36, 33: egli si serviva del testo dei LXX e così cadde nell'errore di fare di Bosra la madre di Giobbe.

La circostanza che in un libro *περὶ τοῦ γένους τῶν Ἰουδαίων* Aristea trovava modo d'introdurre un accenno a Giobbe per quanto breve, dimostra che l'opera era abbastanza ampia. La storia più antica del popolo israelitico, le origini, l'età dei

---

(1) “ The Flinders Petrie Papyri „ II p. 23.

Patriarchi ne formavano l'argomento. Non sembra che scendesse sino all'epoca dei re, poichè il libro era spacciato come un complesso di notizie ricevute dai sacerdoti egiziani, onde è da ritenere che trattasse i fatti di Abramo e di Giacobbe, di Giuseppe e di Mosè, e l'esodo dall'Egitto e al più la conquista della Palestina. Del resto, se l'autore volle narrare la storia dei regni d'Israele e di Giuda, non gliene mancò il modo: verso la fine della lettera a Filocrate lascia sperare al fratello altre produzioni letterarie analoghe alle due mandategli (1). Egli spiegò adunque una certa attività letteraria in gloria del suo popolo.

L'identificazione dei due Aristea è confermata anche dall'appartenere essi a una medesima epoca.

II. — L'età di Aristea.

Il *περὶ Ἰουδαίων* citato dal Polistore, morto intorno al 40 a. C., dev'essere anteriore al 70. Poichè vi si copia il testo greco di Giobbe, il 150 a. C. è il *terminus post quem*. Comunemente si attribuisce alla seconda metà del II secolo.

Ma di che tempo è la lettera a Filocrate che ricorda il *περὶ τοῦ γένους τῶν Ἰουδαίων* come già composto? La questione tanto discussa è ancora variamente risolta.

Mentre il Buhl (2), lo Schürer (3), l'Abrahams (4) e lo Steuernagel (5) stanno per il 200 circa a. C., il Vincent (6) per il 200-150, il Willrich (7) dietro il Graetz (8) ne fa scendere

---

(1) § 322 *πειράσομαι δὲ καὶ τὰ λοιπὰ τῶν ἀξιολόγων ἀναγράφειν ἵνα διαπορευόμενος αὐτὰ κομίζῃ*.

(2) *Kanon und Text des Alten Testamentes* p. 111.

(3) Op. cit. p. 611. Anche Jülicher in Pauly-Wissowa *Real Encycl.* s. Aristeas 13; Herriot *Philon le Juif* p. 57. Friedländer *Gesch. d. jüdischen Apologetik* p. 85.

(4) Art. cit. p. 330.

(5) *Lehrbuch der Einleitung in das A. Test.* p. 800.

(6) *Jérusalem d'après la lettre d'Aristée* in " Revue Biblique „ 1908 p. 523-4.

(7) *Judaica* p. 118-127.

(8) *Die Abfassungszeit des Pseudo-Aristeas* in *Gesch. der Judäer*[5] III 2 p. 588.

la data sino al 33 d. C., il Wendland (1), lo Stählin (2) e il Wellhausen (3) indicano i due termini 96-63 a. C. con più vicinanza al 96 o in genere il principio del I secolo e l'Andrews (4) come ultimo rimedio alle divergenti soluzioni propone, come già il Winckler (5) e il Büchler (6), che la lettera sia in parte composta nel 130-70 a. C., in parte nell'epoca cristiana, non più tardi della data assegnata dal Willrich. Pur propendendo per un'età tarda, incerto rimane il Lumbroso (7), che primo promosse l'apprezzamento dell'opera e di poi non ha cessato di farla oggetto di note speciali. Io esporrò il risultato a cui sono giunto dietro un esame attento del libro, tenendo conto delle ragioni addotte dai vari autori.

Nessun argomento conforta l'ipotesi che la lettera a Filocrate sia stata composta da diverse mani in diverse epoche: lo stile e la lingua sono uguali nelle varie parti. Non deve creare illusione il potervi distinguere parecchie sezioni di diverso argomento, come la liberazione dei prigionieri giudei (§§ 12-27), la corrispondenza tra Demetrio di Falero, Filadelfo e il pontefice Eleazaro (§§ 35-46), la descrizione dei doni mandati al tempio (§§ 51-82), quella di Gerusalemme, del tempio e della Giudea (§§ 83-120), la difesa della legge mosaica (§§ 128-171), gli ammaestramenti dei LXXII interpreti a Filadelfo che formano una specie di *περὶ βασιλείας* (§§ 187-300) (8). Narrare

---

(1) *Epist. ad Philocr.* p. XXVI seg. e in Kautzsch *Apocryphen und Pseudepigraphen* II p. 3.

(2) L. c. p. 474.

(3) *Israelit. u. jüd. Gesch.*[7] p. 222 n. 4.

(4) L. c. p. 87.

(5) " Orient. Literatur-Zeitung " IV (1901) col. 10-17, 47-51. Per il Winckler, a base del racconto di Aristea, starebbe un mito astrale " Der zu Grunde gelegte Mythus ist ein Jahresmithus " (col. 15): ma la giustificazione di questa teoria è impossibile.

(6) *Die Tobiaden und die Oniaden* p. 222 seg.

(7) " L'ultimo secolo dei Lagidi " *Recherches* p. XVIII; " gli ultimi tempi Lagidiani o i primi della dominazione romana " *Nuovi studi d'archeol. Alessandr.* 1872 p. 20; " nella prima metà del secolo che corse tra la guerra di Cesare e l'ambasciata a Caio " *Ricerche Alessandrine* p. 63; " età tarda " " Archiv f. Papyrusforsch. " V (1911-13) p. 402.

(8) § 294 *πολλὰ γὰρ ὠφέλημαι καταβεβλημένων ὑμῶν διδαχὴν ἐμοὶ πρὸς τὸ βασιλεύειν* cfr. Lumbroso che ciò ha messo in luce in " Bollettino archeol. d'Alessandria " n° 13 (1910) p. 151-2.

come la versione dei libri mosaici fu compita è solo una cornice di cui l'autore si serve con una certa abilità: il fine vero ch'egli ugualmente persegue in tutte le sezioni dell'opera è, con la glorificazione del suo popolo, la propaganda delle idee giudaiche (1).

L'epistola a Filocrate è di molti anni anteriore a Filone, poichè non solo questi la conobbe, ma presenta la leggenda in un grado di ulteriore sviluppo. Il Cohn (2) ha messo in dubbio che Filone attinga ad Aristea, e più recentemente il Lumbroso (3), rilevando qualche differenza tra i due racconti, sospetta che sia esistita una redazione della leggenda anteriore a Filone e forse anche ad Aristea, dalla quale i due scrittori molto vicini di tempo avrebbero attinto. Ma che Filone si sia ispirato in *de vita Mosis* II §§ 31-9 (ed. Cohn vol. IV) al racconto di Aristea risulta evidente da alcune circostanze ch'egli mette in rilievo. Così dei traduttori dice *οἳ πρὸς τῇ πατρίῳ καὶ τὴν Ἑλληνικὴν ἐπεπαίδευντο παιδείαν*; cfr. *ep. ad Philocr.* § 121 *οἵτινες οὐ μόνον τὴν τῶν Ἰουδαϊκῶν γραμμάτων ἕξιν περιεποίησαν ἑαυτοῖς ἀλλὰ καὶ τῆς τῶν Ἑλληνικῶν ἐφρόντισαν οὐ παρέργως κατασκευῆς*. Quando racconta che essi *λόγοις ἀστείοις καὶ σπουδαίοις τὸν ἑστιάτορα εὐώχουν ἀντεφεστιῶντες* ha avuto in mente la lunga sezione di *ep. ad Philocr.* §§ 187-292 e seguendo questa (§ 295) mette in vista la prontezza e la precisione con cui i LXXII rispondevano immediatamente alle difficili questioni proposte dal re. Ambedue gli scrittori descrivono il ritirarsi degl'interpreti nell'isola di Faro, di cui notano la quiete e la tranquillità. Anche il modo in cui gl'interpreti intendono di dover compiere la loro opera *μήτ' ἀφελεῖν τι μήτε προσθεῖναι ἢ μεταθεῖναι* ha un raffronto in *ep. ad Philocr.* 311 *εἴ τις διασκευάσει προστιθεὶς ἢ μεταφέρων τι τὸ σύνολον τῶν γεγραμμένων ἢ ποιούμενος ἀφαίρεσιν*.

Differenze tra i due scrittori non mancano, ma queste in parte provano che Filone usò Aristea liberamente modificandolo secondo le proprie idee, in parte dimostrano Filone di molto posteriore ad Aristea. Così egli, con evidente errore, dà al pontefice Eleazaro il titolo di *βασιλεύς* (*τὸν τῆς Ἰουδαίας ἀρχιερέα*

---

(1) Cfr. Friedländer op. cit. p. 87-104.
(2) " Neue Jahrbücher f. d. klass. Altertum " I (1898) p. 521.
(3) " Arch. f. Papyrusforsch. " V p. 402.

καὶ βασιλέα, ὁ γὰρ αὐτὸς ἦν), partendo da condizioni storiche posteriori e fondandosi sui presupposti dell'*ep. ad Philocr.*, in cui l'*ἀρχιερεύς* non ha ancora quel titolo, ma è investito di poteri regali. La preoccupazione di purità legale che nel racconto di Filone avrebbe spinto i traduttori a cercare un luogo fuori della città, non deriva da una fonte più antica, come sospetta il Lumbroso, ma è propria di Filone, il quale, seguendo una teoria che risale a Platone, insiste spesso nelle sue opere (1) sulla necessità per chi voglia filosofare e contemplare Iddio di uscire dal tumulto e dalla contaminazione delle città e di rifugiarsi nella solitudine: per lui lo studio della Legge mosaica è il miglior modo di filosofare. Per questo motivo di purità, più che per considerazioni di ordine storico, egli elimina Demetrio di Falero, che Aristea fa intervenire come segretario e collaboratore dei LXXII e così pure gli scribi. Questa maggiore rigidezza mostra Filone posteriore ad Aristea, e ciò risulta più evidente dal passo seguente, dove si descrive il modo in cui la versione fu compita.

De vita Mosis II § 37 *καθίσαντες δ' ἐν ἀποκρύφῳ καὶ μηδενὸς παρόντος..... καθάπερ ἐνθουσιῶντες προεφήτευον οὐκ ἄλλα ἄλλοι, τὰ δ' αὐτὰ πάντες ὀνόματα καὶ ῥήματα, ὥσπερ ὑποβολέως ἑκάστοις ἀοράτως ἐνηχοῦντος·* § 40 ..... *οὐχ ἑρμηνέας ἐκείνους ἀλλ' ἱεροφάντας καὶ προφήτας προσαγορεύοντες.*	*Ep. ad Philocr.* § 302 *οἱ δὲ ἐπετέλουν ἕκαστα σύμφωνα ποιοῦντες πρὸς ἑαυτοὺς ταῖς ἀντιβολαῖς· τὸ δὲ ἐκ τῆς συμφωνίας γινόμενον πρεπόντως ἀναγραφῆς οὕτως ἐτύγχανε παρὰ τοῦ Δημητρίου.*

Secondo Aristea l'opera si compie con l'assistenza di Demetrio e l'aiuto di scribi, secondo Filone come un sacro mistero, escluso ogni occhio profano. Per Aristea gl' interpreti sono semplici filologi che propongono, esaminano e discutono vocaboli e frasi e il risultato della discussione consegnano nello scritto; per Filone sono profeti ispirati da Dio che ripetono

(1) Cfr. i passi citati in Conybeare *Philo about the contemplative Life* p. 52. In Aristea § 301 è Demetrio che sceglie la spiaggia settentrionale dell'isola di Faro come quieta e adatta.

le parole che uguali a tutti loro vengono dettate come da un suggeritore. Al tempo di Aristea si era contenti d'inculcare ed esaltare la fedeltà della traduzione all'originale, garantita dal numero e dalla scienza degl'interpreti e dall'assistenza di Demetrio. Ma la venerazione per il testo greco crebbe tanto con l'uso, che al tempo di Filone gli si attribuiva lo stesso carattere divino che si riconosceva all'originale e i traduttori erano trasformati in profeti. La leggenda, pur rimanendo sempre nell'ambiente giudeo-alessandrino, aveva dunque subìto una grande elaborazione, che richiede un tempo abbastanza lungo.

Anche la festa commemorativa che Filone ricorda, Aristea ignora, mostra questo più antico, anteriore all'istituzione stessa della festa. Ciò non farà meraviglia quando si rifletta che la leggenda non ebbe, assai probabilmente, prima di Aristea esistenza popolare, ma dal suo scritto ebbe vita ed impulso, onde la festa, lungi dal testimoniarne la verità, nacque per il suo racconto. Certo, se fosse stata già stabilita, egli non l'avrebbe taciuta, mentre fa dire a Filadelfo che considererebbe sempre come fausto il giorno in cui gl'interpreti arrivarono, immaginando coincidesse con il giorno commemorativo di una vittoria navale su Antigono (§ 180), e più tardi fa intervenire la comunità giudaica alessandrina a riconoscere la traduzione comminando scomunica a chi minimamente l'alterasse (§ 309), e pur non ricorda che i Giudei rendessero festivo il giorno in cui la traduzione fu compita. Quanto all'origine della festa, l'intervento di una gran moltitudine di non Giudei ricordato da Filone, fa pensare che trattisi di una festa locale originariamente pagana, che i Giudei per conto loro giudaizzarono, ricollegandola con la leggenda di Aristea.

Al periodo anteriore alla dominazione romana in Egitto (30 a. C.) ci conducono la conoscenza esatta delle cariche e degli usi di corte e dell'ambiente politico sotto i Lagidi della decadenza (1) e la mancanza di accenni ai Romani. Il Willrich (2) credette scoprirne uno nella questione proposta dal re, se sia meglio per lo Stato un sovrano ereditario, od uno che di privato

---

(1) Lumbroso *Recherches* p. xiii " Atti R. Accad. Scienze Torino „ IV p. 229-254; Wilcken " Philologus „ LIII 111.

(2) *Judaica* p. 120.

diventi re, dove sarebbe un'allusione ad Augusto o ad Erode. Ma ove si consideri che questa parte del libro è come l'estratto di un περὶ βασιλείας, e che la questione dovette essere una delle più discusse in simili trattazioni, cade ogni ragione di riferirla ad Augusto o ad Erode. Un altro accenno credette di scoprire il Graetz (1) nel § 304 ἅμα δὲ τῇ πρωίᾳ παρεγίνοντο εἰς τὴν αὐλὴν καθ' ἡμέραν καὶ ποιησάμενοι τὸν ἀσπασμὸν τοῦ βασιλέως ἀπελύοντο πρὸς τὸν ἑαυτῶν τόπον, dove sarebbe un'allusione alla *salutatio matutina* dei clienti romani verso il patrono; ma gl'inviati del pontefice giudaico non sono rappresentati come clienti, e dobbiamo scorgere nelle parole di Aristea ricordato un uso della corte alessandrina. Più precisamente egli arguisce la data del 15-21 d. C. da ciò che si dice degli ἐμφανισταί (§ 167) puniti da Filadelfo, che alluderebbe invece ai provvedimenti di Tiberio contro i delatori. Ma i delatori, piaga di tutti i governi assoluti, furono un flagello anche dell'Egitto tolemaico, e provvedimenti contro di essi dovettero essere presi già dai re. La parola ἐμφανιστής che il Willrich, dando ragione al Graetz crede formata ad imitazione del *delator* romano, è propria dell'Egitto (2).

Il silenzio e la quiete dell'isola di Faro, pensò già il Lumbroso (3) e dietro di lui il Willrich (4), possano indicare il tempo dopo il 48 a. C., in cui, durante la guerra di Cesare, l'isola fu devastata (Strab. XVII p. 792). Ma un confronto col passo di Filone già ricordato, mostra ch'erano le condizioni fisiche d'isolamento che rendevano l'isola quieta e tranquilla, anche rompendosi in lontananza le onde del mare. D'altronde, poichè in essa è la casa dove gl'interpreti avrebbero compita la versione, si suppone l'isola abitata, il che favorisce una data anteriore al 48 av. C. L'autore suppone l'isola tranquilla e quieta in paragone del tumulto d'Alessandria, non però deserta.

Che l'autore sia contemporaneo di Filadelfo, com'egli si spaccia, nessuno sostiene. Egli stesso contrappone la sua epoca a quella del Filadelfo, quando nel § 182 di un uso di corte dice

---

(1) Op. cit. p. 585, cf. contro Wendland in "Jewish Encycl." II 93.
(2) Peyron *Papyri graeci* I 12, 32 ἐμφανιστοῦ σχῆμα περιθέμενον.
(3) *Ricerche* p. 59.
(4) *Judaica* p. 118.

ἦν γὰρ οὕτω διατεταγμένον ὑπὸ τοῦ βασιλέως ἃ μὲν ἔτι καὶ νῦν ὁρᾷς, col che dà alla costumanza una certa nota d'antichità. L'Abrahams (1) a questo passo osserva non potersene dedurre un grande intervallo di tempo; ma altrettanto non può dirsi quando nel § 28 l'autore dice *πάντα γὰρ διὰ προσταγμάτων καὶ μεγάλης ἀσφαλείας τοῖς βασιλεῦσι τούτοις διῳκεῖτο καὶ οὐδὲν ἀπερριμμένως οὐδ' εἰκῇ*, dal che giustamente deducesi esser egli vissuto in un tempo lontano da quello de' primi Lagidi, sotto sovrani i quali trasandavano il regime e governavano *ἀπερριμμένως καὶ εἰκῇ*, in un'epoca di profonda decadenza quale fu quella che incomincia con Evergete II; nè quando nel § 38 fa scrivere dal re ch'egli volendo far piacere ai Giudei d'Egitto *καὶ πᾶσι τοῖς κατὰ τὴν οἰκουμένην Ἰουδαίοις καὶ τοῖς μετέπειτα προῃρήμεθα τὸν νόμον ὑμῶν μεθερμηνευθῆναι γράμμασιν Ἑλληνικοῖς* : l'autore ha qui nella mente una florida e ragguardevole diaspora giudaica non solo in Egitto, ma anche *κατὰ τὴν οἰκουμένην* e questa da qualche generazione (*τοῖς μετέπειτα*) in possesso della traduzione greca della Legge.

Se l'autore ha potuto immaginare un Filadelfo così rispettoso della Legge quale potrebbe essere il più devoto dei Giudei, se gliela fa adorare sette volte al riceverla e ringraziare Iddio di tanto bene e celebrarne ogni anno la data anniversaria (§§ 177-180), se il farla tradurre assegna tra le sue glorie maggiori (§ 39), se Giudei hanno alti uffici presso il re (§ 37) e in corte si è solleciti di non offendere minimamente le loro suscettibilità (§ 182), anzi si adopera ogni mezzo e lusinghe e arti e doni per tenerseli affezionati, tutto ciò l'autore ha potuto prospettare nel tempo di Filadelfo solo per aver visto i Giudei, cresciuti in numero e potenza in Egitto, occupare alte cariche a corte ed essere trattati con tutti i riguardi, il che avviene da Filometore in poi, ma specialmente mentre regnavano Cleopatra III e Tolemeo Alessandro.

Precisamente dopo raccontato come Giovanni Ircano conquistò e distrusse Samaria, Giuseppe Flavio (2) nota che in quel

---

(1) Art. cit. p. 330.

(2) *Antiq.* XIII 284-7 *κατὰ δὲ τοῦτον ἔτυχε τὸν καιρὸν μὴ μόνον τοὺς ἐν Ἱεροσολύμοις καὶ τῇ χώρᾳ Ἰουδαίους εὐπραγεῖν ἀλλὰ καὶ τοὺς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ κατοικοῦντας καὶ ἐν Αἰγύπτῳ καὶ Κύπρῳ· Κλεοπάτρα γὰρ ἡ βα-*

tempo le cose giudaiche prosperavano non solo in Palestina, ma anche in Alessandria e nell'Egitto e in Cipro, poichè la regina Cleopatra III, venuta a rottura col figlio Tolemeo Laturo (108/7 a. C.) e sostituitogli sul trono l'altro figlio Tolemeo Alessandro, mise a capo del suo esercito Anania e Chelcia, i figli di Onia, il fondatore del tempio di Leontopoli. Strabone, citato da Giuseppe, attesta che le truppe mandate da Cleopatra contro Laturo in Cipro tutte defezionarono, tranne i Giudei detti di Onia, per aver la regina grandemente onorato i loro concittadini Chelcia ed Anania. I due generali ebbero gran parte nella guerra condotta da Cleopatra e dal suo alleato Alessandro Ianneo contro Laturo in Palestina, e Chelcia vi morì; e Anania si oppose con successo alle mene di quei consiglieri che suggerivano a Cleopatra di togliere di mezzo Alessandro Ianneo ed annettere senz'altro la Giudea all'Egitto, facendo osservare alla regina che un tale atto avrebbe alienato da lei gli animi di tutti i Giudei, e ciò valse a salvare l'autonomia giudaica (*antiq.* XIII 353 seg.). Secondo Porfirio (1), Tolemeo Alessandro incorse nell'odio degli Alessandrini specialmente per essersi servito di truppe giudaiche, tanto che scacciatolo e restituito Laturo, ne vollero abolita la memoria, annoverando gli anni del suo regno come anni del fratello. Una notizia spersa nella storia romana di Jordanes (2) mostra che gli Alessandrini non tolleravano pazien-

---

σίλισσα πρὸς τὸν υἱὸν στασιάζουσα Πτολεμαῖον τὸν Λάθουρον ἐπιλεγόμενον κατέστησεν ἡγεμόνας Χελκίαν καὶ Ἀνανίαν υἱοὺς ὄντας Ὀνίου...... παραδοῦσα δὲ τούτοις ἡ Κλεοπάτρα τὴν στρατιὰν οὐδὲν δίχα τῆς τούτων γνώμης ἔπραττεν, ὡς μαρτυρεῖ καὶ Στράβων ἡμῖν ὁ Καππάδοξ λέγων οὕτως· οἱ γὰρ πλείους οἵ τε συγκατελθόντες καὶ οἱ ὕστερον ἐπιπεμπόμενοι παρὰ τῆς Κλεοπάτρας εἰς Κύπρον, μετεβάλλοντο παραχρῆμα πρὸς τὸν Πτολεμαῖον· μόνοι δ' οἱ ἐκ τῆς Ὀνίου λεγόμενοι συνέμενον Ἰουδαῖοι διὰ τὸ τοὺς πολίτας αὐτῶν εὐδοκιμεῖν μάλιστα παρὰ τῇ βασιλίσσῃ Χελκίαν τε καὶ Ἀνανίαν.

(1) *Frag. hist. graec.* III p. 722 = Euseb. *Chron.* I p. 164 ed. Schoene *προσέκρουσε γὰρ αὐτοῖς διά τινας Ἰουδαϊκὰς ἐπικουρίας.*

(2) C. 81 *Ptolemaeus qui et Alexander anno X, quo regnante multa Judaeorum populus tam ab Alexandrinis quam etiam ab Anthiocensibus tolerabat.* Il *quo regnante* mostra che l'avvenimento non è da fissare all'anno X. Una persecuzione degli Alessandrini contro i Giudei s'intende alla caduta di Alessandro: qualche cosa di simile potè accadere durante la breve incursione fatta dal Laturo in Alessandria sfuggendo ai generali di Cleopatra che dovevano schiacciare le sue forze in Siria.

temente l'ascendente giudaico durante il regno di Alessandro e ne nacquero lotte in cui i Giudei avrebbero avuto anche la peggio.

Tutte queste testimonianze rappresentano importantissima la posizione dei Giudei ed attivo il loro influsso nelle cose pubbliche. Il colmo della loro potenza politica in Palestina coincide con l'apogeo della loro potenza in Egitto. Giovanni Ircano ed Alessandro Ianneo erano per Cleopatra III e Tolemeo Alessandro dei preziosi alleati da tenere in massimo conto. In simili circostanze storiche Aristea potè concepire un Filadelfo che tratta come un gran re il pontefice giudaico e dai suoi dotti consiglieri viene ammaestrato nella difficile arte del regnare: gli Asmonei avevano dimostrato proprio in quegli anni come un principato si fondi e si consolidi, malgrado tutte le difficoltà, con l'aiuto di quel Dio, il cui riconoscimento e la cui grazia son proclamati necessari in tutte le 72 regole che si dànno al re. L'autore volle fare opera di propaganda e di apologia specialmente nell'ambiente di corte (1). Senza giungere all'idea d'una adesione di Tolemeo Alessandro alla religione giudaica presentata nella sua forma più larga e tollerante, egli potè proporsi di giustificare il favore concesso in quel momento ai Giudei con l'esempio del Filadelfo che, mentre era stato il più potente monarca della dinastia, avrebbe avuto in tanta riverenza la Legge e la sapienza mosaica. E nella lista dei LXXII interpreti (§§ 47-50), dove non pochi sono i nomi storici (2), tra cui una volta Eleazaro, tre volte Giuda, tre volte Gionata, tre volte Simone, tre volte Gio-

---

(1) Nel viaggio supposto di Aristea ed Andrea come ambasciatori di Filadelfo è descritto il pellegrinaggio fatto dall'autore con qualche compagno a Gerusalemme. Del fratello Filocrate egli dice *προσφάτως παραγεγενημένον ἐκ τῆς νήσου* (§ 5) e verso la fine accenna ad altri viaggi che dovrebbe compiere (§ 322 *ἵνα διαπορευόμενος αὐτὰ κομίζῃ*). L'isola di cui si parla non è l'isola di Faro, come crede il Wilamowitz (in Kautzsch *Apokryphen* II 2 n. 6), ma quella di Cipro: la venuta di Filocrate è concepita come un arrivo da una lunga assenza e da un viaggio lontano. E se Filocrate veniva di Cipro quando il fratello gli offriva la lettera composta nel 107/105 noi non dovremmo molto esitare a riconoscere in lui uno degli ufficiali giudei al comando delle truppe che Cleopatra III inviò in quegli anni contro Laturo. Aristea non ha mentito di molto rappresentandosi come un cortigiano del re di Egitto: solo invece di Filadelfo bisogna intendere Tolemeo Alessandro, al posto del pontefice Eleazaro bisogna collocare Ircano.

(2) Wendland *Epist. ad Philocr.* p. xxvi.

vanni, egli non manca d'introdurre separati da un sol nome quelli di Anania e di Chelcia, i due personaggi giudaici più in vista in Egitto, la cui voce era allora autorevole nei consigli del regno. Anche nelle norme sull'arte di regnare che essi dànno al re, si può scorgere qualche allusione agli avvenimenti di quegli anni. Così alla domanda del re *πῶς ⟨ἂν⟩ ἁρμόσαι γυναικί;* l'interrogato risponde tra l'altro *δέον δ' ἐστὶ κατὰ τὸ ὑγιὲς χρῆσθαι καὶ μὴ πρὸς ἔριν ἀντιπράσσειν* (§ 250). Come non vedere qui accennate le discordie di famiglia tra Cleopatra II ed Evergete II, tra Cleopatra III e i figli? Alla domanda *πῶς ἂν φιλόπατρις εἴη;* si risponde *προτιθέμενος..... ὅτι καλὸν ἐν ἰδίᾳ καὶ ζῆν καὶ τελευτᾶν· ἡ δὲ ξενιτεία τοῖς μὲν πένησι καταφρόνησιν ἐργάζεται, τοῖς δὲ πλουσίοις ὄνειδος ὡς διὰ κακίαν ἐκπεπτωκόσιν* (§ 249), dove il *διὰ κακίαν* rappresenta la ragione con cui Cleopatra III giustificò l'espulsione dal trono di Tolemeo Laturo (1) costretto a vivere in Cipro.

Se si volge uno sguardo alle cose della Palestina questi dati vengono confermati e precisati. Il popolo e il pontefice giudaico sono rappresentati, non quasi, come lo Schürer (2) afferma, ma interamente indipendenti tanto dai re di Siria, a cui neppure si accenna, quanto da quelli di Egitto. Non vi è nel libro una sola frase che supponga dipendenza, o in cui il re, che pure è raffigurato nella persona del più potente dei Lagidi, si attribuisca alcuna autorità sui Giudei di Palestina. Egli manda al pontefice non ordini, ma una solenne ambasceria con preghiere e doni: questi devono essere ricchissimi ed eseguiti *καταξίως τοῦ τε ἀποστέλλοντος βασιλέως καὶ τοῦ προστατοῦντος ἀρχιερέως τοῦ τόπου* (§ 81); il re riceveva solo dopo cinque giorni quelli che venivano a lui per affari e dopo trenta i legati di grandi re e di città importanti, ma riceve subito, interrompendo le altre occupazioni, i mandati dal pontefice, *τοὺς δὲ ἥκοντας τιμῆς καταξιῶν μείζονος καὶ τὴν ὑπεροχὴν κρίνων τοῦ πέμψαντος*

---

(1) Porph. in *Fragm. hist. graec.* III p. 721 *ἐπεὶ δὲ κατὰ τὸ δέκατον ἔτος τῆς ἀρχῆς τοὺς φίλους τῶν γονέων ἀπέσφαξεν, ὑπὸ τῆς μητρὸς διὰ τὴν ὠμότητα τῆς ἀρχῆς καθῃρέθη καὶ εἰς Κύπρον ἐφυγαδεύθη.* La ragione vera pare fossero le velleità d'indipendenza mostrate dal Laturo. Cfr. Pausan. I 9, 8.

(2) Op. cit. p. 611.

(§ 175); il pontefice è supposto a capo di forze militari e fa accompagnare da una scorta gli ambasciatori e i propri inviati (§ 172 *προέπεμψεν ἡμᾶς μετὰ ἀσφαλείας πολλῆς*); egli è circondato di amici e persone colte, le quali vanno all'occorrenza in ambascerie (§ 121 *διὸ καὶ πρὸς τὰς πρεσβείας εὔθετοι κατεστήκεισαν, καὶ τοῦτο ἐπετέλουν ὅτε δέοι*), e tratta alla pari col re d'Egitto, a cui scrive come ad amico (*φίλῳ γνησίῳ* § 41), e sebbene non abbia ancora il titolo di *βασιλεύς*, ma solo quello di *ἀρχιερεὺς τῶν Ἰουδαίων*, ha tuttavia un regno da governare ed amministrare con l'aiuto dei sapienti consiglieri ed amici ed è sollecito di non perderli, ma di riaverli appena compiuta in Alessandria la traduzione (§§ 46 e 123-127).

Le condizioni della Palestina sono floride, l'agricoltura vi è molto sviluppata e regnano la sicurezza, la prosperità e il lavoro (§§ 107-114), quali Giuseppe ci rappresenta sotto Giovanni Ircano (1). Gerusalemme (2) è validamente fortificata (§ 105)

---

(1) *Antiq.* XIII 273 *ὁ γὰρ πρὸς ἀλλήλους* (i re di Siria) *αὐτοῖς πόλεμος σχολὴν Ὑρκανῷ καρποῦσθαι τὴν Ἰουδαίαν ἐπ' ἀδείας παρέσχεν, ὡς ἄπειρόν τι πλῆθος χρημάτων συναγαγεῖν.* Ciò dopo la morte di Antioco Sidete (129) che aveva costretto i Giudei a riconoscere la sua autorità.

(2) L'importanza della sezione §§ 83-120 per la topografia di Gerusalemme è stata da molto tempo riconosciuta, ma non sempre giustamente apprezzata, cf. Schlatter *Zur Topographie und Gesch. Palästinas* 1893 p. 86-92 e l'articolo cit. del Vincent in "Revue Biblique„ 1908 p. 520-32 e 1909 p. 555-75, oltre accenni in opere generali. Il Wendland *ep. ad Philocr.* p. 25 e in Kautzsch *Apokryphen* II p. 1-2 e l'Abrahams art. cit. p. 330 credono che Aristea attinga i suoi dati al *περὶ Ἰουδαίων* di Ecateo, o meglio del pseudo Ecateo, di cui ci conserva frammenti Giuseppe Flavio in *c. Apionem* I: ma basta fare un piccolo raffronto per vedere che i dati di Aristea sono completamente diversi: per es. la Giudea avrebbe 300 miriadi di arure d'estensione secondo Ecateo l. c. § 195, 6000 miriadi secondo Aristea § 116; i sacerdoti sono 1500 per Ecateo § 188, 700 per Aristea § 95; Gerusalemme ha 50 stadi di perimetro per il primo § 197 e 40 per il secondo § 105; il tempio è costituito di un peribolo secondo l'uno § 178, di tre periboli secondo l'altro § 84, e diverse sono anche le misure. La descrizione di Gerusalemme e del tempio del pseudo Ecateo è riportata per intero da Giuseppe Flavio §§ 197-199; quella lunga e in parte minuta di Aristea deriva da esperienza personale. Aristea ci rappresenta la Giudea e la società giudaica di Palestina quali apparivano agli occhi d'un pellegrino innamorato della culla dei suoi padri verso la fine del II secolo, quando le guerre fortunate e il savio governo d'Ircano avevano dato pace e prospe-

e accanto al tempio sorge una fortezza (*ἄκρα*) a torri di pietra squadrata, con una guarnigione di cinquecento uomini fedeli a tutta prova che hanno una consegna severissima (§§ 100-104) (1). Essi non possono uscire che nei giorni festivi, pochi alla volta, non possono ammettere dentro nessuno senza speciale permesso e, questo concesso, non possono lasciar entrare che cinque persone e disarmate. Di esser fedeli han prestato solenne giuramento, poichè tutta la sicurezza del tempio dipende dalla fortezza.

Vari scrittori han preso argomento dalla descrizione dell'*ἄκρα* per sostenere diverse date di composizione del libro. Non ostante la singolare affermazione del Winckler (2) non può trattarsi di quella costrutta o rinforzata e ingrandita da Antioco

---

rità al paese. È tutto un inno di lode alla fertilità della terra, all'estensione, alla bellezza di essa, alla sapienza con cui è governata e la popolazione vi è distribuita. Con quanta compiacenza rileva § 109 che non vi è la smania così grave in Egitto, per cui la popolazione rurale tendeva a disertare il lavoro dei campi per la vita cittadina. Tutti i doni essa ha avuto da Dio: pinguedine, attitudine al commercio, facilità di difesa, persino ricchezza di metalli, sebbene dal tempo dei Persiani le miniere siano abbandonate perchè non servissero d'esca a invasioni straniere. E quanto è in fondo ingenuo l'autore, che certo non si è spinto oltre i dintorni di Gerusalemme, quando § 116-7 vuol dare ai suoi lettori l'illusione che il Giordano sia un altro Nilo, il quale d'estate, gonfio per abbondanza di acqua, vada a render fertili immense distese di terreno per poi sboccare nel mare. Dal parlar dell'Idumea come pianeggiante si arguisce ch'egli si recò in Giudea per mare scendendo a Joppe o in qualche porto vicino e traversando una piccola parte della Giudea sino a Gerusalemme. Noi possiamo seguirlo dal suo primo ingresso nella città nel visitare il tempio e la sua magnificenza, nell'assistere ai sacrifizi, dove nota tra l'altro § 93 con quanta abilità e destrezza i sacerdoti sapessero portare sull'altare le vittime, particolare colto dal vivo. Nè manca la nota del cicerone come quando § 91 a cinque stadi dalla città gli si fa ascoltare il rumore di pretese acque sotterranee scorrenti, e quando nel visitar l'*ἄκρα* raccoglie le confidenze dei guardiani sulla severità della consegna.

(1) § 100 *Πρὸς γὰρ τὴν ἐπίγνωσιν ἁπάντων ἐπὶ τὴν παρακειμένην ἄκραν τῆς πόλεως ἀναβάντες ἐθεωροῦμεν· ἣ κεῖται μὲν ἐν ὑψηλοτάτῳ τόπῳ, πύργοις ἐξησφαλισμένη πλείοσι, μέχρι κορυφῆς εὐμήκεσι λίθοις ἀνῳκοδωμημένων αὐτῶν, ὡς μεταλαμβάνομεν, πρὸς φυλακὴν τῶν περὶ τὸ ἱερὸν τόπων.*

(2) Art. cit. col. 11.

Epifane quando profanò il tempio e demolì le mura della città (1). Essa era infatti situata, non nelle immediate vicinanze del tempio che i Giudei poterono rioccupare e purificare e tenere per molti anni non ostante la guarnigione siriaca, ma sul colle di Davide, della cui posizione molto si è discusso in vario senso (2), ma che seguendo Giuseppe Flavio pare si debba collocare nella città bassa, dove un quartiere conservò il titolo di *ἄκρα* anche dopo che questa più non vi esisteva.

Gli anni della dominazione siriaca per la composizione della lettera a Filocrate essendo esclusi anche da altri argomenti, lo Schürer (3) pensa che le circostanze riferite sian quelle della Giudea e di Gerusalemme sotto i Lagidi verso il 200. Non solo però la fortezza è in mano dei Giudei che la custodiscono gelosamente, ma l'indipendenza dall'Egitto è tanta che i due supposti ambasciatori Aristea ed Andrea, disarmati e soli, a mala pena vi sono lasciati entrare per contemplare meglio dall'alto la città ed il tempio, il che è veramente troppo se lo scrittore rappresentasse la Giudea durante la dominazione dei Lagidi. Le precauzioni minute e la severità della consegna e le truppe scelte che han dato prova di grande amore alla patria (sottointendi: nelle guerre contro la Siria) riflettono il tempo dopo le lotte maccabee: la dura esperienza sotto Antioco Epifane aveva insegnato a prendere tutte le precauzioni per evitare il ripetersi della profanazione.

Se fosse riconosciuta vera la teoria sostenuta con molto acume dal Mommert che Neemia rinnovò bensì le mura della città e il recinto fortificato del tempio e una fortezza sul colle di Davide nella città bassa come abitazione sua e dei successori nel governo di Gerusalemme, la quale rimase sempre l'*ἄκρα* sinchè Antioco Epifane l'ingrandì e rinforzò e Simone Maccabeo

---

(1) 1 *Macc.* 1, 31–6 *καὶ καθεῖλεν... τὰ τείχη αὐτῆς κύκλῳ... καὶ ᾠκοδόμησεν τὴν πόλιν Δαυεὶδ τείχει μεγάλῳ καὶ ὀχυρῷ πύργοις ὀχυροῖς καὶ ἐγένετο αὐτοῖς εἰς ἄκραν*. *antiq.* XII 252 *καταβαλὼν τὰ τείχη τὴν ἐν τῇ κάτω πόλει ᾠκοδόμησεν ἄκραν*. Nell'apprezzare i testi si deve tener conto che spesso le fonti antiche rappresentano come costruzioni nuove gl'ingrandimenti e le riparazioni di opere già esistenti.

(2) Cf. su tutta la questione specialmente Mommert *Topographie des alten Jerusalem* IV. Teil Leipzig 1907.

(3) Op. cit. p. 611.

la distrusse (1), ma non ricostruì accanto al tempio l'antica Baris, palazzo e fortezza insieme dell'età salomonica, e che questa risorse solo per opera dei Maccabei Simone ed Ircano, per poi venir rinnovata e abbellita da Erode col nome di Antonia in onore del triumviro M. Antonio, la fortezza descritta da Aristea sarebbe certamente la Baris-Antonia: e poichè altri argomenti escludono che si tratti dell'ultima forma datale da Erode, noi dovremmo fermarci alla Baris regia insieme e fortezza degli Asmonei. Della teoria del Mommert a me sembra per lo meno certo questo che una fortezza analoga a quella che fu poi la Baris-Antonia non esistesse a lato al tempio quando Antioco Epifane venne in Gerusalemme e vi fece edificare la sua *ἄκρα*, poichè sarebbe veramente strano che si abbandonasse un punto così adatto che permetteva di sorvegliare e di dominare da vicino il tempio e si distruggesse una fortezza già fatta per costruirne un'altra lontana. L'utilità di un tale procedere non s'intende, mentre s'intende agevolmente quello degli Asmonei che, impadronitisi finalmente dell'*ἄκρα* siriaca, la distrussero dopo edificata la nuova fortezza a lato al tempio, la cui altura dominante diveniva il centro politico e religioso del nuovo stato teocratico.

Ma anche ammesso che Neemia oltre la ricostruzione del recinto fortificato del tempio compisse quella di una fortezza (2) nel luogo dell'antica di Salomone e della posteriore Baris maccabea e che essa sia l'*ἄκρα* di Gerusalemme occupata da Scopa,

---

(1) *Antiq.* XIII 215 *ἐκπολιορκήσας δὲ καὶ τὴν ἐν τοῖς Ἱεροσολύμοις ἄκραν εἰς ἔδαφος αὐτὴν καθεῖλεν ὡς ἂν μὴ τοῖς ἐχθροῖς ὁρμητήριον ᾖ καταλαμβανομένοις αὐτὴν τοῦ κακῶς ποιεῖν ὡς καὶ τότε.* Cf. *bellum* I 50 *κατέσκαψε δὲ καὶ τὴν ἄκραν τῶν φρουρῶν κρατήσας.* Questa notizia non deve considerarsi come contradittoria a quella di 1 *Macc.* 13, 49 e 14, 36 che Simone ottenuta l'*ἄκρα* vi collocò una guarnigione a guardia del paese, poichè la distruzione avvenne dopo la costruzione della nuova acropoli accanto al tempio a cui si riferisce 1 *Macc.* 13, 52 *καὶ προσωχύρωσεν τὸ ὄρος τοῦ ἱεροῦ τὸ παρὰ τὴν ἄκραν καὶ ᾤκει ἐκεῖ αὐτὸς καὶ οἱ παρ' αὐτοῦ.* Alla morte di Simone la fortezza di Gerusalemme è infatti l'*ὄρος τοῦ ἱεροῦ* 1 *Macc.* 16, 20. In Giuseppe la costruzione della nuova fortezza è attribuita ora agli Asmonei in genere ora ad Ircano in ispecie che dovette continuare e compire l'opera paterna. Cfr. *antiq.* XV 403; XVII 91-2.

(2) Sarebbe indicata nelle parole di *Nehem.* 2, 8 הבירה אשר לבת nelle quali il Mommert vede solo il recinto fortificato del tempio.

il generale di Tolemeo Epifane e rioccupata da Antioco il Grande con l'aiuto dei Giudei nel 199 (1) e sede stabile di un *ἔπαρχος* del re di Siria anteriormente ad Antioco Epifane, resterebbe sempre da dimostrare che la fortezza descritta da Aristea sia precisamente questa come affermano i sostenitori del 200 a. C. come data di composizione e non invece la Baris maccabea. Per ultimo e più ampiamente e con maggior competenza ha discussa in questo senso la questione il Vincent (2). Costretto a riconoscere che le analogie più forti e tutte le apparenze stanno per la fortezza asmonea, crede di poterla escludere per ragioni d'indole generale, che in ultima analisi si riducono alla supposizione che la lettera a Filocrate risalga alla fine del III secolo. Egli non trova un momento opportuno per collocarne al tempo degli Asmonei la composizione. “ Sotto Giovanni Ircano la pace diviene è vero assai profonda e la prosperità assai grande in Giudea, ma allora in Egitto le condizioni non sono affatto propizie a preoccupazioni di ordine intellettuale trascendente quali suppone la lettera „. Io ho dimostrato più sopra che le condizioni interne dell'Egitto e l'ascendente esercitatovi dai Giudei, e i rapporti quasi da pari a pari tra il re e il pontefice indicano appunto gli ultimi anni del regno di Giovanni Ircano. L'altra ragione che il Vincent aggiunge per escludere la fortezza asmonea, che in questa si conservava la preziosa *στολή* pontificale (*antiq.* XV 403) e che Aristea non avrebbe mancato di ricordarla è contro di lui, perchè Aristea immediatamente innanzi all'*ἄκρα* descrive a lungo il pontefice vestito di questa meravigliosa *στολή* (§§ 86-9). Nell'*ἄκρα* di Aristea si deve dunque riconoscere la Baris degli Asmonei.

Ove si rifletta che se il pontefice avesse già assunto il titolo di *βασιλεύς*, il che fece per il primo Aristobulo (104/3) (3),

---

(1) *Antiq.* XII 133 e 138. Il racconto degli avvenimenti risale a Polibio, ma la menzione dell'*ἄκρα* deriva dalla lettera di Antioco in favore dei Giudei e del tempio, sulla cui autenticità vi è qualche dubbio. Sull'*ἔπαρχος* siriaco in Gerusalemme cf. II *Macc.* 4, 28 *ποιουμένου δὲ τὴν ἀπαίτησιν Σωστράτου τοῦ τῆς ἀκροπόλεως ἐπάρχου, πρὸς τοῦτον γὰρ ἦν ἡ τῶν φόρων πρᾶξις* cfr. v. 29.

(2) Art. cit. (1899) p. 565 seg.

(3) *Antiq.* XIII 301 = *bellum* I 70 *Ἀριστόβουλος τὴν ἀρχὴν εἰς βασιλείαν μεταθεὶς περιτίθεται μὲν διάδημα πρῶτος.*

l'autore, come fa Filone, non avrebbe mancato di dargli anche questo titolo, non si esiterà ad affermare ch'egli scriveva negli ultimi anni d'Ircano, e più precisamente tra la presa di Samaria (107 circa), quasi contemporanea alla sostituzione di Tolemeo Alessandro a Laturo, e la rottura d'Ircano col partito farisaico, a un di presso tra gli anni 107/105. Infatti l'autore parla della Samaria come se fosse parte della Giudea (1); e fu Ircano che distruggendo la città annettè al suo Stato gran parte della regione. L'autore descrive in Palestina numerosi dottori che commentano la Legge mosaica e disputano intorno ad essa e l'insegnano oralmente più che per iscritto (2), ma ancora vi è tra i dottori de' vari indirizzi buona armonia e così tra i dottori e il principe pontefice: quelli son pieni di amore per il pontefice e questi è tutto sollecitudine ed affetto per i dotti che sono l'appoggio e lo splendore del suo principato (3). Ora Giuseppe Flavio segna agli ultimi tempi d'Ircano i primi dissensi tra il pontefice e i Farisei che si mettono all'opposizione degenerata in un tentativo di ribellione prontamente soffocata, mentre Ircano si appoggiava ai Sadducei (4). Da quel momento le due scuole d'interpretar la Legge, vissute pacificamente durante la lotta contro la Siria, assumono l'aspetto di due partiti politici opposti.

Anche le forme *οὐθείς* (§§ 59, 132, 154, 210, 225, 273), *μηθείς* (§§ 95, 101, 139, 142, 162, 170 *bis*, 182, 240, 245, 258), accanto alle forme *οὐδείς* e *μηδείς*, tenuto conto dell'uso dei papiri, indicano la fine del II secolo a. C. ed a questo tempo pur converrebbe l'oscillare dell'autore tra le forme *Ἰουδαία* (§§ 4,

---

(1) § 107 *τῆς γὰρ χώρας πολλῆς οὔσης καὶ καλῆς καί τινων μὲν πεδινῶν τῶν κατὰ τὴν Σαμαρεῖτιν λεγομένην καὶ τῶν συναπτόντων τῇ τῶν Ἰδουμαίων χώρᾳ.*

(2) § 122 seg. *καὶ πρὸς τὰς ὁμιλίας καὶ τὰς ἐπερωτήσεις τὰς διὰ τοῦ νόμου μεγάλην εὐφυΐαν εἶχον* ecc. § 127 *τὸ γὰρ καλῶς ζῆν ἐν τῷ τὰ νόμιμα συντηρεῖν εἶναι, τοῦτο δ' ἐπιτελεῖσθαι διὰ τῆς ἀκροάσεως πολλῷ μᾶλλον ἢ διὰ τῆς ἀναγνώσεως.*

(3) § 123 *νοῆσαι δ' ἦν ὡς ἠγάπησαν τὸν Ἐλεάζαρον δυσαποσπάστως ἔχοντες καὶ ἐκεῖνος αὐτούς.* Cfr. *antiq.* XIII 289 *μαθητὴς δ' αὐτῶν* (i Farisei) *καὶ Ὑρκανὸς ἐγεγόνει καὶ σφόδρα ὑπ' αὐτῶν ἠγαπᾶτο.*

(4) *Antiq.* XIII 299.

12, 83, 184, 318) e χώρα (γῆ) τῶν Ἰουδαίων (§§ 11, 12, 22, 184 dei codd. KAGI), di cui tuttavia non devesi fare gran caso.

Una data posteriore al 96 a. C. non si può arguire dai §§ 114-5, in cui si ricordano Ascalona, Joppe, Gaza e Tolemaide come porti della Giudea; poichè se Joppe fu conquistata da Gionata nel 146 e Gaza solo nel 96 da Alessandro Ianneo, Ascalona e Tolemaide non appartennero mai allo Stato giudaico: l'autore volle in quel passo dire soltanto che quei porti erano naturali sbocchi commerciali del paese (1). Nè ad appoggiare la data del 200 a. C. può invocarsi la testimonianza del pseudo-Aristobulo che certamente conobbe (2) la lettera a Filocrate, poichè sarebbe sciogliere un'incognita con un'incognita maggiore. Piuttosto, fissata l'età di Aristea, resta confermato che il pseudo-Aristobulo è da collocare non prima del I secolo a. C., se pure non nell'epoca cristiana, come altri vorrebbe. Concludendo: l'identificazione di Aristea lo Storico col pseudo Aristea permette di assegnare la lettera a Filocrate alla seconda metà del II secolo a. C. L'esame indipendente della lettera precisa la data negli anni 107/105, e aggiunge così un altro argomento all'identificazione dei due pretesi Aristea.

---

(1) Cf. SCHÜRER op. cit. p. 613 nota 196.

(2) Inesatto è il SUSEMIHL op. cit. II p. 606 n° 10 quando mette in dubbio che Aristobulo abbia conosciuto Aristea e così lo SCHLATTER op. cit. p. 332.

Relazione intorno alla Memoria del Prof. Giuseppe Prato su *La teoria e la pratica della carta moneta prima degli assegnati rivoluzionari.*

La Memoria del Prof. Giuseppe Prato su *La teoria e la pratica della carta moneta prima degli assegnati rivoluzionari*, illustra un Trattato inedito intorno alla carta moneta dell'economista piemontese Giovanni Battista Vasco, di cui si era smarrita ogni traccia, e che solo per un'unica allusione di Casimiro Danna si sapeva essere stato scritto.

Il Prato, per una di quelle fortune, che sono quasi sempre però il guiderdone di assidue ed intelligenti ricerche, è riuscito a trarre alla luce il manoscritto, e sebbene esso non portasse l'indicazione dell'autore, ha potuto, per indubbie prove, identificarlo nel Vasco.

Il Trattato sulla carta moneta di questo nostro socio (eletto nella adunanza del 4 gennaio 1789 a socio nazionale residente), che fu certo uno dei più bei nomi della scienza economica italiana nel secolo XVIII, ha un'importanza notevole, sia perchè esso innalza vieppiù la posizione scientifica del suo autore in confronto a quella che gli si era attribuita prima, sia per il contributo che esso porta alla letteratura scientifica sulla moneta del secolo XVIII.

L'opera del Vasco è il primo tentativo, che si conosca nella letteratura europea, di indagare compiutamente la intricata materia della carta moneta. Pochi erano stati fino allora gli esperimenti di carta moneta tentati dopo il disastroso tentativo del Law, ed uno di questi tentativi si era compiuto nel nostro Piemonte, dove la carta moneta era stata creata dai bisogni della guerra di successione spagnuola, e si era conservata fino all'epoca nella quale il Vasco scriveva, ossia verso il 1789, e, grazie al buon regime di essa, non era in tutto questo periodo svilita.

L'ottimo risultato del metodo tenuto nel Piemonte fu il motivo determinatore della Memoria del Vasco, il quale evidentemente scrisse per moderare le illusioni e gli entusiasmi che aveva spinto, negli ultimi anni di pace che precedettero la catastrofe del Regno, parecchi progettisti a chiedere, sotto molteplici forme, l'aumento della circolazione cartacea, allo scopo di eccitare le energie economiche e di stimolare l'incremento delle industrie.

La Memoria del Vasco è rimarchevole, sia per la chiarezza dell'esposizione, sia anche per la netta distinzione, che allora era raro veder fatta, fra le cambiali, i biglietti di banca ed i biglietti a corso forzoso, per le osservazioni sulla teoria dei cambi esteri, dell'influenza dei dazi sul prezzo delle merci, e per la teoria generale dei biglietti di credito inconvertibili. È anche interessante vedere come già fin d'allora il Vasco studiasse le conseguenze economiche sociali delle emissioni cartacee, rispetto ai gruppi ed alle classi diverse della popolazione, ed i guadagni e le perdite che queste diverse classi ricavavano dalla emissione di biglietti a corso forzoso.

Tutto ciò mette in chiaro l'opportunità di pubblicare questa Memoria del Vasco e l'importanza delle osservazioni che intorno ad essa ha raccolto il Prato. — Per queste ragioni, la Commissione è concorde nel proporre alla Classe l'inserzione dello scritto del Prato nei volumi delle Memorie accademiche.

Federico Patetta
Luigi Einaudi, *Relatore.*

Per l'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di C. Frati, A. Baudi di Vesme e C. Cipolla.

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di C. Cipolla, G. De Sanctis e P. Fedele.

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona – Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. L, Disp. 4a, 1914-1915.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 27 Dicembre 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio Direttore della Classe, Salvadori, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Fusari, Balbiano e Naccari, che fa le veci del Segretario.

Il Presidente partecipa alla Classe la tristissima notizia appena giunta della morte del Socio Fileti avvenuta a Palermo dopo breve malattia. Dopo avere espresso a nome della Classe il dolore e il rimpianto destati dall'improvvisa notizia, il Presidente dà lettura del telegramma di condoglianza diretto alla famiglia e annuncia che l'Accademia verrà rappresentata ai funerali dal Rettore dell'Università di Palermo. Il Socio Guareschi, pregato dal Presidente, accetta l'incarico di commemorare il rimpianto Collega.

Il Presidente comunica che il Socio Segretario Segre ha scusato per lettera la sua assenza e che ne farà le veci il Socio Naccari.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Socio Guareschi presenta una sua Nota da inserirsi negli *Atti* intitolata *Azione dei sali ammoniacali sul joduro mercurico*.

Il Socio Peano, anche a nome del Socio Segre, legge la Relazione sulla Memoria del Prof. C. Burali-Forti intitolata *Isomerie vettoriali e moti geometrici*. Viene approvata la Relazione e approvato l'accoglimento della Memoria nei volumi accademici.

Il Socio Mattirolo legge, anche a nome del Socio Parona, la Relazione sulla Memoria del Prof. Terracciano intitolata *La Flora sarda di Michele Antonio Plazza*. Con due votazioni si approvano la Relazione e l'inserzione della Memoria nei volumi accademici.

Il Socio Guareschi presenta una Memoria del sig. Gerolamo Cuneo, che ha per titolo *Ricerche biochimiche sulla funzione ureopojetica e sulle alterazioni della composizione del sangue nella epilessia*. Verrà giudicata dai Soci Guareschi e Fusari.

LETTURE

Azione dei sali ammoniacali sul joduro mercurico.

Nota I[a] del Socio ICILIO GUARESCHI

Durante il corso delle mie ricerche intorno ai bromuri metallici ho avuto occasione di fare alcune esperienze ed osservazioni sul joduro mercurico che mi sembrano degne di essere ricordate, e che forse non sono prive di importanza anche sotto l'aspetto dell'analisi chimica.

Joduro mercurico e bromuro di ammonio. — Se si riscalda entro tubo lungo e stretto, di vetro resistente, il joduro mercurico con poco bromuro di ammonio, non si sviluppa del bromo, ma bensì del jodo, che si riconosce già per i vapori violetti. Lasciando raffreddare, diluendo con acqua e trattando con soluzione di amido si osserva intensa la colorazione azzurra. Si forma del joduro ammonico facilmente decomponibile e dà jodo libero.

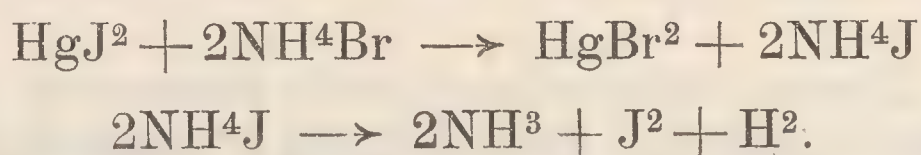
È una reazione molto sensibile e che può fare riconoscere, per via secca, anche una minima traccia di joduro mercurico. Ad esempio, con gr. 0,0001 di HgJ^2 e pochissimo bromuro di ammonio si ha ancora nettissima la reazione del jodo. In altra maniera non sarebbe facile riconoscere il jodo in una piccolissima quantità di joduro mercurico.

Anche per via umida si possono riconoscere delle piccole quantità di joduro mercurico col bromuro (o anche, ma meno bene, col cloruro) di ammonio; il joduro si scioglie e coll'acqua di cloro e amido dà la solita reazione. È molto meglio così che non coll'acido solforico concentrato. Inoltre la soluzione di HgJ^2 nel bromuro di ammonio dà facilmente la reazione del mercurio col solfuro di ammonio.

Il joduro di ammonio puro NH^4J scaldato fuori del contatto dell'aria sublima senza scomporsi, si dissocia però in NH^3 e HJ; sublimato in presenza dell'aria, si dissocia non solo, ma si scompone sviluppando del jodo. In questo ultimo caso insieme al jodo e all'ammoniaca si deve sviluppare anche dell'idrogeno:

$$2NH^4J \longrightarrow 2NH^3 + J^2 + H^2.$$

E così deve essere anche nella reazione del bromuro di ammonio sul joduro mercurico:

$$HgJ^2 + 2NH^4Br \longrightarrow HgBr^2 + 2NH^4J$$
$$2NH^4J \longrightarrow 2NH^3 + J^2 + H^2.$$

Non ho però ancora potuto riconoscere se veramente si sviluppa dell'idrogeno insieme all'ammoniaca.

Meglio è scaldare il joduro mercurico con poco bromuro di ammonio; lo sviluppo di jodo è più pronto. Un grande eccesso di bromuro di ammonio non è vantaggioso. Un miscuglio a molecole proporzionali $HgJ^2 + 2NH^4Br$ scaldato rapidamente diventa giallo, sublima, ma sviluppa anche molto jodo. E ciò anche quando si operi con *piccolissima* quantità.

Il *joduro mercurico mescolato con del* $HgCl^2$ non dà più la reazione del jodo per riscaldamento col bromuro di ammonio. Anche il *bromuro mercurico* impedisce la reazione. Invece un miscuglio di $HgJ^2 + KBr$ dà ancora nettamente la reazione del jodo per riscaldamento con bromuro di ammonio anche quando vi è molto bromuro di potassio.

Il joduro mercurico, come è noto, scaldato in piccola quantità con acido solforico concentrato, diventa prima giallo, poi si scioglie dando un liquido incoloro, e a temperatura più alta il liquido si colora in violaceo; lasciato raffreddare, diluito con acqua e trattato con amido, non dà la reazione del jodo. E se si opera con piccolissime quantità non si nota nemmeno la colorazione violacea dell'acido solforico. Invece colla reazione per via secca che io ho indicato, si ha la dimostrazione della presenza del jodo, anche con traccie di joduro mercurico, con molto meno di gr. 0,0001.

Anche per riscaldamento del joduro mercurico con *solfato di ammonio* si mette in libertà molto jodo e si osservano bene i vapori violetti; per raffreddamento vengono riassorbiti e non dànno più la reazione coll' amido. Dopo raffreddamento della massa solida questa è gialla e tornando a scaldare di nuovo si osservano i vapori violetti e così molte volte di seguito; ma sciogliendo in acqua non si ha la colorazione azzurra coll'amido.

Il joduro mercurico scaldato sino a fusione col *nitrato di ammonio* sviluppa intensi vapori violetti di jodo; però diluendo il prodotto con acqua non si ha la reazione coll'amido. Il jodo viene riassorbito.

Anche col *bicromato di ammonio* si mette in libertà del jodo, ma non è un reattivo conveniente.

Joduro mercurico e cloruro di ammonio. — Il joduro mercurico mentre dà intensissima la reazione del jodo quando lo si scalda col bromuro di ammonio, non la dà, o incerta, o lieve, se si adopera il cloruro di ammonio. Con 20 a 30 milligrammi di joduro HgJ^2 e cloruro ammonico non si hanno che debolissimi vapori violetti e diluendo con acqua il prodotto del riscaldamento e saggiando coll'amido non si ha la reazione del jodo, o molto lieve. Una miscela nei rapporti molecolari $HgJ^2 + 2NH^4Cl$ (es.: 2,27 di HgJ^2 e 0,53 di NH^4Cl) non dà la reazione del jodo libero.

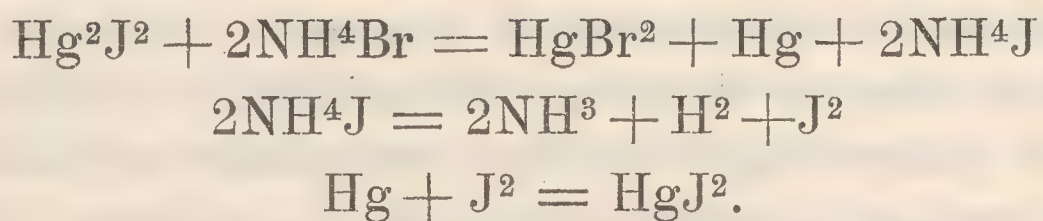
Joduro mercurico con bromuro di piombo. — Una miscela di poco joduro mercurico con molto bromuro di piombo, scaldata con poco bromuro di ammonio emana dei vapori violetti di jodo, e successivamente, diluendo, dà intensa la reazione coll'amido.

Invece il miscuglio di HgJ^2 con *cloruro di piombo* non dà più la reazione del jodo quando si riscalda col bromuro di ammonio. Dunque la presenza del $PbCl^2$, come già quella del $HgCl^2$, impedisce od ostacola questa reazione.

Joduro mercurico e bromuro potassico. — Una miscela di HgJ^2 con molto KBr dà intensa la reazione del jodo per riscaldamento con brumuro di ammonio; ma la dà anche coll'acido solforico concentrato, però in questo caso i vapori violetti sono mascherati dai vapori di HBr e di bromo libero.

Joduro mercurico e bromuro mercurico. — Una miscela di HgJ^2 con $HgBr^2$ non dà più la reazione del jodo per riscaldamento con bromuro di ammonio. Ma non lo dà nemmeno coll'acido solforico concentrato; a meno che non si operi su notevole quantità. Invece, in soluzione nel bromuro di ammonio, poi col cloro diluito e l'amido, si ha la reazione del jodo anche se è in piccola quantità.

Joduro mercuroso Hg^2J^2. — Il joduro mercuroso scaldato col bromuro di ammonio, sia in piccola quantità oppure in grande quantità, non dà vapori violetti di jodo libero, nelle stesse condizioni del joduro mercurico. Dà un sublimato in parte bianco, ed in parte giallo. Molto probabilmente la reazione avviene in maniera che si forma del joduro mercurico, ma il jodo che si libera dal joduro di ammonio si ricombina col mercurio:

$$Hg^2J^2 + 2NH^4Br = HgBr^2 + Hg + 2NH^4J$$
$$2NH^4J = 2NH^3 + H^2 + J^2$$
$$Hg + J^2 = HgJ^2.$$

Anche il *joduro mercurico* mescolato con molto *joduro mercuroso* Hg^2J^2 non dà più la reazione del jodo col bromuro di ammonio. Così pure se è mescolato col *bromuro mercuroso.*

Il *joduro mercuroso* Hg^2J^2 col joduro di ammonio e acqua annerisce subito dando del mercurio metallico. Così pure il Hg^2J^2 con acqua e bromuro di ammonio.

Solfuro mercurico (cinabro) e joduro mercurico. — Il joduro mercurico è solubilissimo nella soluzione di bromuro ammonico ed evaporando a secco la soluzione, poi calcinando il residuo si hanno subito i vapori violetti. In questo modo si può separare e distinguere il joduro mercurico quando è misto in piccola quantità con molte sostanze insolubili rosse, nere, ecc. Il cinabro, ad esempio, contenente anche solamente 1 $^0/_{00}$ di HgJ^2 dà ancora la reazione del jodo. Basta agitare la miscela con poco bromuro di ammonio e poca acqua, a temperatura ordinaria, filtrare, evaporare il filtrato in un piccolo cristalzatore a b. m. sino a secco e scaldare il residuo bianco o rossastro entro lungo e stretto tubo da saggio. Si avrà subito

la reazione del jodo. Non si deve scaldare la miscela del joduro mercurico e cinabro con l'acqua e bromuro di ammonio, perchè allora la reazione non ha luogo, causa la formazione di solfuro di ammonio, solfo, ecc.

In altro modo per via secca, non è facile ritrovare poco joduro mercurico nel cinabro. Coll'acido solforico concentrato si ha dello solfo che impedisce la reazione. Per via secca la reazione del bromuro di ammonio sul joduro mercurico in presenza del cinabro è mascherata per la formazione di solfuro di ammonio, ammoniaca, solfo, ecc. e la reazione del jodo non si ha più bene.

Il joduro mercurico è solubilissimo nel bromuro di ammonio con forte abbassamento di temperatura.

Joduro mercurico e biossido di manganese. — Se si scalda lentamente una mescolanza di poco joduro mercurico con molto biossido di manganese, si sviluppano in principio dei vapori di jodo, poi sublima il joduro mercurico, ma se si scalda subito, rapidamente, la miscela, non si ha quasi sviluppo di jodo e si sublima il joduro mercurico. Invece se alla miscela di joduro mercurico e biossido di manganese si aggiunge del bromuro di ammonio e si scalda, subito si hanno intensi vapori violetti e successiva intensa reazione del jodo coll'amido.

Joduro mercurico e solfuro di antimonio (*Stibina*). — Quando si scalda una mescolanza di joduro mercurico e solfuro di antimonio con del bromuro di ammonio si sviluppa molta ammoniaca, si ha un sublimato bruno e di vario colore, ma non vapori violetti di jodo nè reazione di questo coll'amido dopo trattamento del prodotto con acqua.

Una miscela di joduro mercurico e solfuro di ammonio trattata con bromuro di ammonio ed acqua, poi filtrato ed evaporata a secco la soluzione, fornisce un residuo cristallino bianco che per riscaldamento dà lievissima colorazione di vapori violetti, ma poi coll'amido nulla. Però il liquido coll'acqua di cloro dimostra che contiene joduro e si ha subito intensa la reazione. Dunque il solfuro di antimonio impedisce la reazione.

Su questa reazione dovrò forse occuparmi in altra occasione.

Joduro mercurico e bromuro di ammonio in soluzione. — La miscela nel rapporto $HgJ^2.2NH^4Br$ non si scioglie o pochissimo nell'acqua, anche a caldo. Per aggiunta di una quantità maggiore di NH^4Br il joduro mercurico si scioglie rapidamente a temperatura ordinaria e con grande abbassamento di temperatura. Se alla soluzione concentrata, che è incolora o lievemente giallognola, si aggiunge a poco a poco dell'acqua, dà intorbidamento rosso, che si ridiscioglie scaldando. Diluendo il liquido con acqua calda rimane limpido, ma poi per raffreddamento a poco a poco cristallizza il joduro mercurico, in bei cristalli rossi, misti però ad aghetti gialli più leggeri, i quali a poco a poco si trasformano in joduro mercurico rosso. Si formano i composti $HgJ^2 + 2NH^4Br$ e $2HgJ^2 + 3NH^4Br$ già studiati da altri chimici; questi composti coll'acqua lentamente si decompongono ed il prodotto finale della soluzione diluita è il deposito di cristalli rossi di joduro mercurico.

Il joduro mercurico è solubilissimo anche nel joduro di ammonio.

Concludendo, il bromuro di ammonio per via secca è un eccellente reattivo per riconoscere subito il jodo nel joduro mercurico anche quando questo è mescolato con altri corpi. Il bromuro ammonico in presenza dell'acqua scioglie con grande facilità il joduro mercurico e così il detto bromuro può servire a separare e riconoscere il joduro mercurico quando è mescolato ad altri corpi insolubili.

In una prossima nota esporrò le ricerche che ho fatto con numerosi altri joduri metallici.

Torino, R. Università, settembre 1914.

Relazione intorno alla Memoria del Prof. CESARE BURALI-FORTI, *Isomerie vettoriali e Moti geometrici.*

La Memoria del Prof. C. BURALI-FORTI: *Isomerie vettoriali e Moti geometrici*, tratta questa importante questione geometrico-meccanica, per via analitica, seguendo il calcolo vettoriale spiegato dall'Autore, insieme col Prof. Marcolongo, in una serie di libri pubblicati dal 1909 al 1913.

Già Hamilton, col calcolo dei quaternioni, trattò analiticamente alcune di queste questioni; ma le formule, più semplici e maneggevoli di quelle colla geometria analitica cartesiana, sono ancora complicate.

L'Autore fa tutti i calcoli coll'algoritmo delle omografie vettoriali, e stabilisce le varie formule per le isomerie e pei movimenti.

È a notarsi, per esempio, la formula (4) del n. 2, che esprime una qualsiasi isomeria vettoriale mediante i suoi invarianti e il suo asse. Essa risulta in modo semplice ed elegante, e da essa si possono dedurre tutte le proprietà delle isomerie.

Le formule sulla composizione dei moti, e simili, sono tanto semplici quanto i teoremi di geometria sintetica, loro equivalenti, ma hanno il pregio di essere analitiche, cioè di permettere il calcolo numerico degli elementi che lo compongono. Esse congiungono l'eleganza sintetica ai vantaggi dell'analisi.

Pertanto la sottoscritta Commissione propone l'accoglimento dello scritto del Prof. Burali-Forti nelle Memorie dell'Accademia.

C. SEGRE,
G. PEANO, *Relatore.*

Relazione intorno alla Memoria del Prof. ACHILLE TERRACCIANO, *La Flora Sardoa di Michele Antonio Plazza da Villafranca-Piemonte, redatta con i suoi manoscritti.*

La Memoria presentata dal Professore ACHILLE TERRACCIANO della R. Università di Sassari, dal titolo: *La Flora Sardoa di Michele Antonio Plazza da Villafranca-Piemonte, redatta con i suoi manoscritti*, è la seconda parte del lavoro iniziatosi colla Memoria già da noi sottoscritti esaminata nella Relazione del 1° marzo 1914 (V. " Atti della R. Acc. delle Scienze ,, volume XLIX, pag. 637) e pubblicata già nei volumi accademici.

Questa seconda parte prende in esame N. 147 specie di piante *Dicotiledoneae*, ciò che fa ritenere che il lavoro potrà essere completo con una terza contribuzione.

La *Flora Sardoa del Plazza*, illustrata così opportunamente dal TERRACCIANO, costituirà un documento importante per la Botanica italiana nel secolo XVIII; sarà un monumento elevato al suo Autore ed un ricordo onorevolissimo delle benemerenze scientifiche di G. B. BOGINO, Ministro sagace di Carlo Emanuele III, che del PLAZZA fu autorevole e illuminato mecenate.

Intorno ai pregi di questo lavoro, avendo già trattato ampiamente nella nostra Relazione, oggi non potremmo far altro che ripetere quanto allora avevamo scritto.

Ritenendo questa seconda parte del lavoro del TERRACCIANO, condotta coi metodi scientifici ai quali fu informata la prima, giudichiamo quindi degnissima anche essa di essere pubblicata nei volumi accademici, epperciò proponiamo venga benevolmente accolta dall'Accademia.

Torino, 20 Dicembre 1914.

C. F. PARONA,
ORESTE MATTIROLO, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 3 Gennaio 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Carle, Pizzi, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli e De Sanctis in funzione di Segretario. — È scusata l'assenza dei Soci Manno e Renier.

Il Presidente dà notizia della salute del Socio Renier, bene augurando della sua guarigione, e volge un mesto pensiero al Socio corrispondente Vittorio Poggi, mancato ai vivi in Savona il 1° gennaio 1915; al cui funerale l'Accademia si fece, a sua cura, rappresentare. Del Poggi poi egli ricorda con calda parola le benemerenze verso gli studî, specie per ciò che concerne le antichità e la storia della Liguria.

Sono presentati dal Presidente varî scritti del Prof. Angelo Valdarnini che l'A. offre in omaggio alla nostra Accademia:

1° *Scritti filosofici e pedagogici* (Firenze, Cellini, 1885);

2° *Saggi di filosofia sociale* (Torino, Paravia, 1890);

3° *Saggi di filosofia speculativa* (Bologna, Cenerelli, 1899);

4° *Filosofia speculativa e civile. Nuovi saggi* (Asti, Brignolo, 1903);

5° *Il metodo sperimentale da Aristotile a Galileo* (Asti, Brignolo, 1909);

6° *Un precursore italiano di Alberico Gentile* (edito nella " Vita internazionale ", a. 1914);

7° *Pensiero ed azione di Carlo Cattaneo* (edito nella " Rivista d'Italia ", a. 1914).

Il Socio Ruffini presenta con parole di vivo encomio, dando un largo cenno del contenuto, il volume del Prof. Biagio Brugi intitolato: *Per la storia della giurisprudenza e delle università italiane* (Torino, Unione tipografico-editrice, 1915); e offre poi la monografia del Prof. Carlo Contessa, *I regni di Napoli e di Sicilia nelle aspirazioni italiane di Vittorio Amedeo II di Savoia, 1700-1713* (Torino, Bocca, 1914).

Il Socio Einaudi presenta il fascicolo di ottobre della " Yale Review ", rilevando l'importanza di questo periodico, e si offre di donare all'Accademia i precedenti fascicoli dal 1912 e i successivi man mano che gli perverranno.

Il Presidente ringrazia del cospicuo dono che viene ad arricchire la nostra collezione di periodici.

Il Socio De Sanctis presenta per la inserzione negli " Atti " una nota di Augusto Rostagni intitolata: *I bibliotecarii alessandrini nella cronologia della letteratura ellenistica.*

LETTURE

I bibliotecarii alessandrini nella cronologia della letteratura ellenistica.

Nota di AUGUSTO ROSTAGNI

I.

Alla conoscenza della letteratura ellenistica ostacolo fra i più gravi, capace di rompere da solo ogni libertà di vedute, ogni stabilità di giudizii e di comprendimenti, è la scarsezza in cui siamo di informazioni, sia pure succinte, sia pur elementari, sulla trama dei fatti e delle dipendenze in cui la vita e l'opera d'ogni scrittore si agita, si contiene, si forma: trama la cui complessità ed importanza è tanto più grande, quanto più la letteratura ellenistica si svolse con varia ed eclettica dovizia di produzione, con comunanza di studii, di spiriti, di ideali vasta e continua. Sono note le controversie nelle quali la critica si dibatte quando, sentendo per le poesie di Teocrito, di Arato, di Callimaco, di Apollonio ripercuotersi con strana mescolanza gli echi reciproci, cerca di intendere d'ogni voce la provenienza e risuscitare nel caos l'ordine e l'efficacia della realtà. Gli elementi della biografia e della cronologia che al più fortunato studioso delle letterature moderne non richiedono in massima, per ciò che hanno di essenziale, sforzo di apposita indagine, ma sono in aperto, pronti a fondersi nella armonica visione della storia e dell'individualità artistica, a noi, adoratori di un passato lontano, fanno sentire con la mancanza la necessità loro acuta, come di cosa troppo indispensabile dietro a cui penosamente e meschinamente siamo costretti a tendere le braccia.

A questa tanto rimpianta deficienza di ragguagli, rimedio, in confronto col materiale preesistente, abbastanza considerevole

reca un documento scoperto di fresco e pubblicato da Grenfell e Hunt nell'ultimo volume dei *Papiri di Ossirinco* (*Part* X Oxford 1914 pp. 99 sgg.): il catalogo dei Bibliotecarii di Alessandria, cioè dei poeti, filologi e grammatici che si successero nella direzione della Grande biblioteca istituita dai Tolemei nella loro capitale. Alcune fra le più spinose questioni che s'intricano nel nucleo dell'intera letteratura alessandrina e già da tempo sono state rivoltolate per ogni verso a piacere degli studiosi, come ad esempio la questione del bibliotecariato di Callimaco, la cronologia di Apollonio Rodio e della sua rivalità col Maestro, trovano infine, grazie alla nuova scoperta, la più probabile risoluzione. Ma non senza il sussidio di una assidua indagine che chiami a confronto le preesistenti fonti antiche, scelga tra le vie possibili le più probabili, circoscriva e conchiuda, sin dove è lecito, le maglie dell'incerto, dell'indeterminato (1).

II.

Conservatosi non esente da lacune in un papiro del 2° secolo d. C., il catalogo dei bibliotecarii alessandrini è opera anonima. Appartiene ad un manuale di varie antichità: manuali o crestomazie molto in uso nella tarda èra ellenistica e corrispondenti ai compendii così divulgati nel nostro Medioevo. Esso, infatti, non ci è giunto da solo, ma intercalato alla enumerazione di altre categorie di persone e di cose memorabili, come sono l'enu-

---

(1) Dopo le brevi e succose osservazioni del Wilamowitz, in 'Neue Jahrb. f. cl. Alt.' 1914 pp. 246–7, da cui tuttavia, in massima, sono per discostarmi, non consta che il papiro sia stato studiato da alcuno. Naturalmente gli scritti anteriori all'attuale scoperta (e furono molti) sul tema dei Bibliotecarii, hanno perduto della loro importanza: nè giova renderne conto per disteso. Basta ricordare, oltre agli autori delle tesi fondamentali che saranno volta per volta citati, W. Busch *De bibliothec. alex.* Diss. 1884. Informazioni limpide e ricche in Sandys *A hist. of class. Schol.*² I, e in G. Lumbroso *L'Egitto dei Greci e dei Rom.*² (v. pure 'Memorie dell'Accad. di Tor.' 1873 pp. 228 sgg.). Sull'evoluzione spirituale della Scuola alessandrina voglio infine ricordare uno scritto, antico sì e dimenticato, ma vitale, di un nobilissimo ingegno italiano: C. Correnti *Scritti scelti* (Roma 1891-4) IV pp. 50 sgg. (dalla 'Riv. Europ.' 1845).

merazione dei maggiori scultori e pittori, l'enumerazione di armi e stratagemmi e dei loro inventori. Ecco il testo: che riproduco, per ora, tal quale gli editori, con l'usata solerzia, lo offrono:

(continuaz. della colonna I)

]ν[ο]ς γραμ

15 [ματικο . . . .] φιλος Ϊ

[. . . . . γρα]μματι

[κ. . . . . Φιλα]δελφου

. . . .

(col. II)

ν[ι]ος Σιλλεως Αλεξανδρευς

ο [κ]αλουμενος Ροδιος Καλ

λ[ι]μαχου γνωριμος· ουτος

εγενετο και διδασκαλος του

5 πρωτου βασιλεως· τουτον

δ[ι]εδεξατο Ερατοσθενης

μεθ ον Αριστοφανης Απελ

λου Βυζαντιος και Αρισταρ

χος· ειτ Απολλωνιος Αλεξαν

10 δρευς ο ϊδογραφος καλουμε

νος· μεθ ον Αρισταρχος Αρι

σταρχου Αλεξανδρευς ανω

θεν δε Σαμοθραξ· ουτος και

διδ[α]σκαλος [ε]γενε[το] των

15 του Φιλοπατορος τεκνων·

μεθ ον Κυδας εκ των λογχο

φ[ο]ρων· επι δε τωι ενατω

[βα]σιλει ηκμασαν Αμμω

[νι]ος και Ζηνο[δοτος] και Διο

20 [κλ]ης και Απολλο[δ]ωρος γραμ

[μα]τικοι[·]

Schematiche dunque e sommarie, secondo l'uso degli antichi lessicografi, le indicazioni che accompagnano il nome dell'uno o dell'altro bibliotecario: schematiche, eppure non prive di un'importanza talora assolutamente nuova. Importante è l'ordine stesso della successione, il quale, se per lo stato lacunoso della

prima colonna di papiro appar mozzo del suo principio e bisognoso di restauro, all'aprirsi però della colonna seconda e a partire dalla persona di Apollonio Rodio (*Απολλω*]*ν*[*ι*]*ος Σιλλεως*...) si delinea con compiutezza e — quel che pur preme — in maniera tale da infrangere non poche opinioni altrimenti assodate. Il poeta rodio, Apollonio, scolaro di Callimaco, è seguìto da Eratostene; ad Eratostene succede Aristofane di Bisanzio (" Aristofane di Bisanzio ed Aristarco „ dice, veramente, l'anonimo compilatore del catalogo, sebbene ad Aristarco assegni più innanzi un suo proprio posto: vedremo come sia da risolvere questa difficoltà, della quale gli editori, che sui punti essenziali diedero preziosi ragguagli, non han fatto gran caso, prendendo in considerazione il solo Aristofane qui, il solo Aristarco poi); dopo di che viene Apollonio d'Alessandria detto *εἰδογράφος*; al quale sottentra Aristarco di Samotracia; infine Cidante (a noi prima d'ora ignoto) di classe militare e precisamente dei *Λογχοφόροι* (pure ignoti prima d'ora, come corpo speciale, nell'esercito egiziano): poi sotto il nono Re — soggiunge l'autore del papiro — fiorirono i grammatici Ammonio, Zenodoto, Diocle, Apollodoro.

Il fatto più largo di sorprese che occupa sùbito l'attenzione del lettore, è la comparsa, in veste di bibliotecarii, di due Apollonii, cioè di un secondo oltre al poeta rodio: Apollonio *ὁ εἰδογράφος*; della cui persona se qualche sentore avevamo nello Scoliaste di Pindaro *Pyth.* II inscr. e nell'*Etymol. Magn.* 295, 52, come di un grammatico il quale, *εὐφυὴς ὢν ἐν τῇ βιβλιοθήκῃ*, erasi compiaciuto di spartire la lirica classica in varie specie od *εἴδη* col criterio del *μέλος* frigio, lidio, ionico, mai saremmo giunti ad attribuirgli la carica di direttore della libreria alessandrina. Ora sappiamo di chi si tratta, e, per soprammercato, non ci sarà difficile, cercando nell'ammasso delle cose sperdute di cui il patrimonio ellenistico rigurgita, raccogliere qualche altro brano da restituire a lui, che così d'improvviso è cresciuto ai nostri occhi. Ma di ciò a suo luogo. Qui basti notare il duplice effetto della scoperta: poichè, da una parte è definitivamente confermato per l'autore dell'*Argonautica* l'officio di bibliotecario che dai più, per non bene appianate difficoltà cronologiche e ad onta della esplicita dichiarazione delle fonti, gli era negato (cito, ad es., Susemihl *Gesch.* I p. 385. 56 e Knaack

in ‘ Pauly-Wissowa ’ II 126, 994-5); dall’altra parte è soggiunta l’indicazione di un nuovo bibliotecario omonimo. Dalla rivelata presenza dei due omonimi procede, in massima, la nostra indagine.

Ma prima di addentrarci per questo cammino e prima anche di assicurarci che lo schema offerto dal papiro, del quale abbiamo cecamente ripetuto le orme, sia in tutto e per tutto attendibile o non piuttosto contenga tracce di spostamento e di confusione, gioverà di tale schema riempire la lacuna iniziale. Infatti, che sul termine della prima colonna fosse già il nome di qualche grammatico, è visibile dai frammenti superstiti; che però fosse il nome di più che un grammatico non si deduce punto dalla doppia ricorrenza della parola *γραμματικός* (*γραμ[ματικ*... a ll. 14-5; [*γρα*]*μματι*[*κ*] a ll. 16-7), poichè l’analogia del precedente Catalogo di scultori, pittori, ecc., il quale porta i titoli *ἀγαλματοποιοί*, *ζωγράφοι*, fa supporre anche qui, come titolo, *γραμματικοί*.

Ed ora. Sappiamo che bibliotecario di Alessandria fu, per primo, il grammatico Zenodoto d’Efeso, come esplicitamente dichiara Tzetze nei *Prolegomeni ad Aristofane*: *πρότερος δὲ ἦν Ζηνόδοτος Ἐφέσιος* (presso Ritschl *Opusc.* I p. 200; un testo meglio curato v. in Kaibel *Comic. graec. fragm.* I pp. 24 sgg.), e come lasciano intendere con assoluta concordia le altre fonti, sia quelle che a Tzetze medesimo si riconducono (1), cioè il così detto Scolio plautino e il Grammatico parigino (presso Ritschl o. c., rispettivamente a pp. 5-6 e 124 sgg.), sia anche Suida (*s. v. Ζηνόδ.* e presso Westermann *Vit. script. graec.* p. 369). Sappiamo che alla direzione della biblioteca egli fu preposto non appena per opera di Demetrio Falerèo si trovaron raccolti nella capitale egiziana, a migliaia, da ogni parte dell’Ellade i libri, o durante gli ultimi anni di Tolemeo Sotere o, com’è più pro-

(1) Sulle relazioni che legano fra di loro le varie fonti parallele di Tzetze v., dopo Keil ‘ Rhein. Mus.’ 1848 pp. 108 sgg., 243 sgg., e Ritschl o. c., l’articolo di Dziatzko ‘ Rhein. Mus. ’ 1891 pp. 349 sgg., il quale molto giustamente, a differenza dei suoi predecessori, considera lo Scolio plautino, non già una traduzione fatta direttamente sul testo dei Prolegomeni greci di Tzetze a noi giunti, ma su quella fonte comune da cui i testi greci pure derivano.

babile, sui primi tempi del Filadelfo (284 av. Cr.). Certo egli aveva assistito da presso al sorgere della nuova istituzione, la quale da Tolemeo Sotere era nata e dal successore dovea ottenere stabile ordinamento con la chiamata, fra gli altri, di Licofrone e di Alessandro Etòlo che presero a studiare i tragici e i comici, mentr'egli, Zenodoto, volse le sue cure ai poemi omerici. In Alessandria Zenodoto non era nuovo. A lui come a Filita, come a Stratone di Lampsaco è da credere, sulla fede di Suida, che Tolemeo I avesse commesso l'educazione del giovane figlio. Quando infatti il lessicografo scrive (l. c.): *Ζηνόδοτος..... ἐπὶ Πτολεμαίου γεγονὼς τοῦ πρώτου, ὃς καὶ πρῶτος τῶν Ὁμήρου διορθωτὴς ἐγένετο καὶ τῶν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ βιβλιοθηκῶν προύστη καὶ τοὺς παῖδας Πτολεμαίου ἐπαίδευσεν*, non c'è motivo di violare la esatta interpretazione letterale ed intendere, come vogliono ad es. Couat (*Poés. alex.* p. 33) e Cessi (in ' Studii ital. di Filol. class. ' VII pp. 312-3), si alluda ai figli del secondo Tolemeo anzichè del primo. Perciò, osservando che nel nostro papiro è menzione del Filadelfo, [*Φιλα*]*δελφου*, ed osservando altresì che l'anonimo autore del papiro ama dei varii bibliotecarii ricordare, all'occasione, la qualità di maestri dei figli del Sovrano, sembra consentaneo supporre che lì appunto Zenodoto fosse annoverato come maestro del Filadelfo, press'a poco in questi termini :

γρα]*μματι*
[*κὸς καὶ διδάσκαλος τοῦ Φιλα*]*δέλφου*

Zenodoto dunque fu il primo a capo della biblioteca. Ma fra Zenodoto ed Apollonio Rodio, col quale la serie è per svolgersi ininterrotta, rimane aperta ancora qualche lacuna?

Con molta insistenza si sostenne da molti, dal Couat (*Poés. alex.* pp. 48 sgg.), dal Susemihl (*Gesch.* I pp. 340-1), dal Beloch (*Griech. Gesch.* III 1 pp. 504-5 e 2 p. 500), e fu, si può dire, opinione prevalente nonostante le ben avvedute reluttanze del Wilamowitz (*Textgesch. d. griech. Buk.* pp. 173-4), che e bibliotecario e successore di Zenodoto sia stato Callimaco. Oggi, se i testi non c'ingannano, è da considerare chiuso, senza intromissione di Callimaco, il ciclo. Non già che per sè stesso il papiro neghi di ospitare nelle file dei bibliotecarii anche questo poeta: sebbene, a voler esser severi, la menzione che di lui fa a certo

punto come di maestro d'Apollonio Rodio (*Ἀπολλώνιος... Καλλιμάχου γνώριμος*) sia indizio sfavorevole all'ipotesi del bibliotecariato, in quanto i rapporti di maestro ed allievo, per coloro che bibliotecarii furono realmente, s'intendevano impliciti nella loro successione senza bisogno di ulteriore richiamo. Ma ad eliminare, come credo, il poeta di Cirene, ci soccorre e persuade con opportuno raffronto Tzetze, quando, parlando dei critici di Omero e misurando lo spazio di tempo intercorso fra Zenodoto ed Aristarco, afferma che Aristarco fu, dopo Zenodoto, il quarto o il quinto bibliotecario: *μετὰ Ζηνόδοτον Ἀριστάρχῳ πάλιν ὠρθώθησαν (αἱ Ὁμηρικαὶ συγγραφαὶ) τετάρτῳ ἢ πέμπτῳ ἀπὸ Ζηνοδότου τελοῦντι.* E il medesimo, in altra forma: *πρότερος δὲ ἦν Ζηνόδοτος Ἐφέσιος· πέμπτος δὲ ἢ τέταρτος μετ' ἀυτὸν Ἀρίσταρχος* (1). Se facciamo il conto sul papiro, troviamo che Aristarco è precisamente quinto dopo Zenodoto e che il dubbio, se quinto o quarto, dipende precisamente dalla presenza dei due Apollonii, confusi per lo più in una sola persona. Callimaco, allora, non trova più posto.

Con che — si badi bene — non entriamo punto in lizza con le rimanenti fonti antiche: anzi diamo una buona volta ragione al loro silenzio ammonitore. Nessuna di esse ha mai al poeta cireneo attribuito l'ufficio di capo della libreria, sebbene tutte in genere — e si ammette — parlino dell'opera ragguardevole ch'egli prestò, e come assistente e come autore dei *Πίνακες*, a vantaggio di quel medesimo istituto. Il famoso Scolio plautino (l. c.): *Callimacus aulicus regius bibliothecarius* etc., in cui si ritenne di trovare la desiderata affermazione, non solo è una semplice e vaga e punto valevole traduzione (vero tradimento, se mai) del testo greco di Tzetze, *ὁ Καλλίμαχος νεανίσκος ὢν τῆς αὐλῆς κ. τ. λ.* (peraltro l'intero scolio, che va sotto il nome di Caecius = *Τζέτζιος* = *Τζέτζης*, è un raffazzonamento in latino di quegli stessi Prolegomeni di cui sono pure un raffaz-

---

(1) La concordia delle due redazioni toglie ogni probabilità all'ipotesi di un errore di cifre — ipotesi che sarebbe per altro assolutamente gratuita. Inoltre, delle due redazioni, quella che noi riferiamo per prima ha tracce evidenti della forma stilistica originaria di Tzetze, ed appartiene infatti alla così detta *Ἑτέρα ἀρχή* (Tzetze II), la quale nel suo insieme, come osservò anche Dziatzko l. c. p. 360, è più vicina al testo autentico.

zonamento in duplice forma i testi greci che citiamo sotto il nome di Tzetze), ma anche preso in sè stesso, nell'espressione sua *bibliothecarius*, null'altro, per chi sappia di latino, significa che questo : ' Callimaco addetto alla biblioteca del re ' (1). Chi poi percorra nelle varie versioni il racconto di Tzetze, si avvedrà che realmente nel pensiero del dotto bizantino il preteso bibliotecariato non esiste. Da Zenodoto, il quale con Licofrone ed Alessandro Etòlo ebbe il merito della prima *συναγωγή* e della *ἀνόρθωσις τῶν βίβλων*, egli distingue nettamente, sino a farli coetanei, gli epigoni, i *νεανίαι*, Callimaco ed Eratostene, come quelli che gli hanno trasmesso le notizie circa il novero e la distribuzione dei libri: *βίβλων μὲν συμμιγῶν ἀριθμὸς τεσσαράκοντα μυριάδες, ἁπλῶν δὲ καὶ ἀμιγῶν βίβλων μυριάδες ἐννέα, ὡς ὁ Καλλίμαχος νεανίσκος ὢν τῆς αὐλῆς ⟨ἱστορεῖ, ὃς⟩ ὑστέρως μετὰ τὴν ἀνόρθωσιν τοὺς πίνακας αὐτῶν ἀπεγράψατο. Ἐρατοσθένης δὲ ὁ ἡλικιώτης αὐτοῦ ⟨ταὐτὰ μαρτυρεῖ, ᾧ⟩* (*idem asseverat*... Schol. Plaut.) *παρὰ τοῦ βασιλέως τὸ τοσοῦτον ἐνεπιστεύθη βιβλιοφυλάκιον* (2). Errori dunque e confusioni nella testa di Tzetze ci sono, più o meno giustificabili, come quello di credere coetanei i due scrittori: ma l'idea che Callimaco sia stato bibliotecario non v'è di certo. L'ufficio che appartenne ad Eratostene, non constava essere appartenuto al poeta di Cirene.

---

(1) È strano quindi che nello Scolio plautino universalmente si veda, a confronto col testo greco, un vero e proprio divario di concetto. Sui termini usati dagli antichi a significare le varie funzioni di ' bibliotecario ' cfr. Dziatzko ' Pauly-Wissowa ' III 422 sgg.; Ihm ' Centralbl. f. Bibl. ' X pp. 522 sgg.; Birt *Abriss d. antik. Buchw.* (1913) pp. 336 sgg. Il vocabolo *bibliothecarius* si trova solo in Fronton. p. 68 Nab. e sembra significare ' impiegato alla biblioteca ': v. i Glossarii Latini del Loewe. Sul valore poi di *νεανίσκος*: Weinberger ' Jahrb. f. Phil. ' 1892 I p. 272.

(2) Di questo testo corrotto il primo emendamento appartiene a Dziatzko l. c. e ad Häberlin ' Centralbl. f. Bibl. ' VI p. 498. Il secondo lo abbiamo introdotto noi, seguendo il suggerimento dello *Schol. Plaut.* e ovviando a due inconvenienti: da una parte, alla costruzione *Ἐρατοσθένης ἐνεπιστεύθη... τὸ βιβλιοφυλάκιον* che non ci sembra troppo conveniente a questa prosa tarda ed è contraddetta dal *Gramm. Paris.* dove ricorre la costruzione più piana da noi ristabilita; dall'altra, ovviando alla inconseguenza logica del periodo, già da molti lamentata (cfr. Ritschl o. c. pp. 148 sgg.).

Possiamo dire che il dibattimento è chiuso. Senonchè, questo nostro risultato rappresenta forse una delusione nel concetto che si aveva o si doveva altrimenti avere di Callimaco? E non vi sono indizii interni i quali proclamino alto ciò che le fonti storiche per loro insipienza o negano o tacciono? Il pensiero del lettore ricorrerà infatti all'opera colossale dei *Πίνακες*, in cui è costume ravvisare la più bella prova dell'impiego che il dotto poeta avrebbe occupato. A torto. Poichè l'indole e il contenuto dei *Πίνακες*, per quel poco che noi ne conosciamo, non sono tali da condurre a conseguenze così esplicite; nè è osservazione nuova questa, la quale pur sembra così poco curata, che i *Πίνακες* nulla avevano che fare col catalogo della Biblioteca, bensì erano opera individuale in cui lo scrittore, valendosi dell'esperienza e del sapere accumulato un tempo con la compilazione dei cataloghi (e Tzetze ciò appunto lascia comprendere), svolse con tutt'altro ordine, con tutt'altri intenti la sua trattazione laboriosa (1). Le passioni han sempre fatto miracoli, compresa quella della bibliografia. Non era necessario che un dovere d'ufficio lo costringesse, perchè il buon uomo, uso a passare beatamente la sua vita nelle pubbliche biblioteche, gettasse le mani sul complesso della cultura che la munificenza dei Tolemei aveva appunto imbandito, e creasse di tutto quel materiale un quadro, una enciclopedia ragionata, a diletto proprio e a sollievo altrui.

III.

Escluso il bibliotecariato di Callimaco, è bene ormai fissare i limiti dell'attività di Zenodoto, tanto più che, conoscendo a Zenodoto, prima di Eratostene, esser successo Apollonio Rodio, non siamo più costretti, come si era per il passato, ad estenderne la vita sino alla nomina di Eratostene, cioè sino al regno di Tolemeo III Evergete (247-21), dal quale il celebre matematico fu creato bibliotecario, ma anzi ci è concesso di riabilitare nel loro onore le fonti antiche.

(1) V. Schneider, *Callim.* II pp. 297 sgg.; Cessi 'Studi ital. di Filol. cl.' XV pp. 2 sgg.

Zenodoto fu discepolo di Filita — dice Suida —: ma discepolo — dobbiam credere — fra i più antichi, e quasi coetaneo, com'era Ermesianatte (*φίλος καὶ γνώριμος τῷ Φιλητᾷ*), del quale i vestigii non vanno oltre il 280 circa. Invero anche Zenodoto visse o, meglio, fiorì (*γέγονε*) sotto il primo Tolemeo, e del secondo Tolemeo, del Filadelfo, per quanto abbiam visto, fu anche egli, al pari di Filita, maestro. Intorno al 284 aveva raggiunto la piena maturità, e certo doveva essere anziano se fu chiamato all'ufficio di bibliotecario. L'opera sua culmina in quegli anni. La sua *διόρθωσις* omerica era già compiuta e nota verso il 275, se allora, ad Atene, ovvero alla corte di Antigono Gonata, Timone di Fliunte ebbe col poeta Arato, prossimo editore dell'*Odissea*, quel suo squisito discorso nel quale — oh, ineffabile malizia venuta a offendere la fede dei nostri bibliotecarii! —, essendo richiesto di una buona edizione d'Omero, rispondeva: se volete intendere Omero, rassegnatevi a scovare qualche vecchio testo, nel quale i moderni ' diortòti ' non abbiano posto le mani (1). Ma è temerario imporre una data così precisa a questo convegno? Ebbene, compiuta e nota fu in ogni caso, l'edizione del filologo efesio, prima della morte di Antioco Sotere, re di Siria (262). Difatti, stando al racconto del contemporaneo Dositeo di Pelusio (ap. *Vita Arati* I, Westerm. p. 54), il re Antioco Sotere ebbe per essa i medesimi complimenti già prodigati dal poco rispettoso sillografo e ad Arato medesimo consigliò, egli in persona, non pure di pubblicare l'*Odissea*, ma di ripubblicare l'*Iliade*, *διὰ τὸ ὑπὸ πολλῶν λελυμάνθαι*.

È probabile quindi che la vita del nostro grammatico non si sia protratta oltre il 260. Nè a protrarla ci consiglia punto la notizia di Suida, o, meglio, di un glossatore di Suida (*s. v.* *Ἀριστοφάνης*), secondo cui discepolo di Zenodoto sarebbe stato Ari-

(1) L'aneddoto presso Laert. Diog. IX 113, sembra derivare da Antigono Caristio: cfr. Wilamowitz *Antig. v. Kar.* p. 43. — Alla corte macedonica Arato si recò, secondo la *Vita Ar.* IV 10, in occasione delle nozze del re con Fila di Siria, verso il 276 (cfr. Beloch *Gr. Gesch.* III 1 p. 585). È probabile che Timone fosse ad Atene prima di quella data. Il *terminus ante quem* del convegno che io stabilisco – 262 – contraddice a Wilamowitz l. c.; contro il quale v. pure le argomentazioni di Susemihl *Gesch.* I pp. 111, 399.

stofane di Bisanzio, il quale Aristofane, si sa, se nel 260 era già nato, certo era nato da pochi anni: non ci consiglia, dico, sia perchè dipende da un artificiale procedimento inteso a collegare fra loro i critici d'Omero (come osserva ad es. il Beloch *Griech. Gesch.* III 2 p. 503), sia perchè nella sua stessa forma (*μαθητὴς Καλλιμάχου καὶ Ζηνοδότου — ἀλλὰ τοῦ μὲν νέος, τοῦ δὲ παῖς ἤκουσε*) dimostra più che altro la difficoltà cronologica in cui il glossatore sapeva di incappare (1).

Un buon sigillo a tutto ciò che abbiamo congetturato è fornito dalla cronologia del successore di Zenodoto: Apollonio Rodio; sebbene precisamente questa sia stata sino ad oggi e nelle fonti antiche e presso i moderni, nodo di estreme difficoltà. Oggi il bandolo è trovato, con la rivelazione dei due omonimi che, bibliotecarii a certa distanza, furono fra loro sovrapposti e confusi.

Ecco gli elementi della questione. Mentre i Biografi anonimi (in Westermann o. c. pp. 50-1 e, meglio, negli Scolii ed. dal Keil), chiusi in un rigido riserbo, si limitano a narrare genericamente le relazioni del poeta rodio con Callimaco e a farlo vivere *ἐπὶ τῶν Πτολεμαίων*, e solo in appendice e con esitanza ricordano (*τινὲς δέ φασι...*) la tradizione del suo bibliotecariato, Suida dà parecchie specificazioni: lo descrive vissuto *ἐπὶ Πτολεμαίου τοῦ Εὐεργέτου ἐπικληθέντος* (247-21), contemporaneo, oltre che di un Timarco a noi ignoto (2), di Eratostene e di Euforione,

---

(1) Una quisquilia ancora qui in nota. — Ad abbassare la data di Zenodoto potrebbero i critici invocare le sue relazioni con l'epigrammatografo Posidippo. È noto infatti da Schol. *A Il. A* 101 che Zenodoto fece certi suoi appunti al *Σωρός* di Posidippo. Ma, che l'epigrammatografo intorno al 275 fosse giovanissimo ancora e studente ad Atene, come crede ad es. Susemihl *Gesch.* II pp. 530-1, non sembra fondato; ed anzi l'epigramma stesso che il Susemihl adduce (*Anth. Pal.* V 134), quando meglio s'interpreti, insieme con gli altri tutti storicamente apprezzabili, fa convergere la maturità del poeta verso il 280.

(2) Ignoto, ma pur riconoscibile, io credo, nel grammatico Timarco o Timachida di Rodi (le due terminazioni si alternano spesso nelle fonti antiche anche per molti altri nomi, e il divario poi *Τιμαρχ-* e *Τιμαχ-*, comunque vada spiegato, o per peculiarità linguistiche o per errore paleografico, non fa punto difficoltà), autore di *Δεῖπνα*, di commenti a Menandro e ad Aristofane (v. oltre § V): del quale Timachida l'età, sinora incerta (cfr. Susemihl *Gesch.* II p. 188), rimane così fissata.

i quali entrambi Eratostene ed Euforione egli fa nascere, ai lemmi rispettivi, nell'olimp. CXXVI = 276-2; lo asserisce infine successore di Eratostene *ἐν τῇ προστασίᾳ τῆς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ βιβλιοθήκης*.

A valersi dei dati di Suida e ad abbassare con speciale compiacenza l'età di Apollonio, giù verso la fine del III e il principio del II secolo, facendolo nascere, oltre le intenzioni del già arrischiato lessicografo, intorno al 250, fu il Beloch (*Griech. Gesch.* III 2 pp. 501 sgg.), che ne ebbe motivo e incitamento a quella tendenza cui obbedì infatti nel riguardo di Callimaco e di altri scrittori: per cui la maggior parte degl'Inni e delle opere callimachee cadrebbero sotto il regno dell'Evergete e anche del Filopatore; per cui il fiore della produzione alessandrina, anzichè verso i primi decennii, trionferebbe verso la metà e la fine del trecento (1). Se la teoria del Beloch non ottenne il plauso degli studiosi, ciò non di meno fu sempre opinione che la gara del giovane Apollonio con Callimaco spettasse ad epoca relativamente tarda, al 260 circa (ricordo, ad es., Knaack 'Pauly-Wissowa' II 126 sgg.; Susemihl *Gesch.* I p. 384; Cessi l. c. pp. 407-8), e che la sua vita per conseguenza si estendesse innanzi parecchio, sia che fosse accolta la notizia del suo ufficio di bibliotecario, sia, piuttosto, respinta (2).

Ma quando si sappia che nell'ordine dei bibliotecarii Apollonio Rodio precedette, e non già seguì Eratostene, e quando si consideri che quest'ultimo alla libreria d'Alessandria venne per invito di Tolemeo III Evergete (247-21), la conclusione naturale è, mi pare, ch'egli, Apollonio Rodio, sia morto prima del 221, un certo numero d'anni prima, come meglio consiglierà la biografia del suo successore: poniamo verso il 230. D'improvviso, allora, l'astro del poeta si sposta: la fase più brillante della sua attività risale nei tempi: la sua nascita (bibliotecario in età conveniente e per non breve durata, non doveva essersi spento giovane) sembra annunziarsi verso il 300. Che se di assecondare codesto suo spostamento sorga in noi qualche inquie-

---

(1) Non tocco qui la questione dell'*Ibis* che dovrà essere trattata altrove.

(2) Solo, ch'io sappia, il Gercke 'Rhein. Mus.' XLIV pp. 240 sgg. pensò, purtroppo senza trovar sèguito, al 277-5 circa.

tudine, sono pronte a rassicurarci alcune indicazioni contenute nel papiro: questa, che Apollonio fu maestro del terzo Tolemeo, l'Evergete. Del terzo: poichè l'errore dello scriba, che è manifesto, *τοῦ πρώτου βασιλέως*, si corregge ottimamente, come videro gli editori, in *τρίτου βασ.*, non potendosi in nessun modo pensare al secondo, Tolemeo Filadelfo; nè convenendo pensare al quarto, Tolemeo Filopatore, il quale cade sotto Eratostene e del quale Eratostene appunto fu maestro.

Ad adempiere il còmpito di precettore del giovane principe, Apollonio era chiamato già maturo d'anni e, verisimilmente, come persuadono ragioni di analogia, in qualità di bibliotecario. Se dunque il regale discepolo i vent'anni almeno raggiungeva nel 260, è da ritenere che Apollonio avesse allora raggiunto la quarantina (1). E fosse bibliotecario. Non paion giuste tali date per uno che succedeva immediatamente a Zenodoto? Ricordiamo infatti che la vita di Zenodoto confina con questo stesso termine, e che fra lui e Apollonio Rodio, se le testimonianze antiche dissero il vero, non è ammesso altro bibliotecario.

Questa imagine, di un Apollonio Rodio stabilito in Alessandria, direttore della Biblioteca, maestro dell'erede al trono Tolemeo Evergete, ed anziano ormai verso il 260, è suggerita dal papiro. Ma trova la sua conferma e il suo complemento in quel passo della Biografia anonima II (l. c.), cui si negava fede prima d'oggi: che, dopo essere dimorato per un certo tempo in Rodi, quasi esule dalla capitale egiziana, dopo avere riveduto e corretto i suoi malfamati Argonauti, Apollonio tornò in Alessandria e con la nuova edizione del poema vi ottenne fama grande, cosicchè fu insignito della carica di bibliotecario e, morendo, fu sepolto insieme con Callimaco. — Da una parte è prospettata l'opera giovanile del poeta, il conflitto col maestro Callimaco, la prima lettura delle *Argonautiche*, il ritiro in Rodi: dall'altra si devolve l'età matura, con la pubblicazione definitiva del poema, con la fama riconosciuta, con le nimicizie composte, col bibliotecariato. Quella, nella nostra ricostruzione,

---

(1) Sulla cronologia di Tolemeo Evergete, nato alcuni anni prima del 278-4, cfr. Beloch *Griech. Gesch.* III 2 p. 132.

appartiene agli anni 280-70 circa: questa riempie il periodo 260-30 (1).

Ma non possono affermazioni così gravi pronunziarsi senza che sieno messe a raffronto con la storia complessiva del periodo letterario a cui si riferiscono. Una veduta infatti s'impone delle opere di Apollonio e di Callimaco, nei loro reciproci legami, ben diversa da quante furono fin qui affacciate. In essa, io credo, gli elementi tutti che alla conoscenza dei due poeti possediamo, segnatamente quelli che, negli ultimi tempi, dalle nuove scoperte si sono venuti delineando, trovano infine a spiegarsi e a comporsi, con buona armonia. Ecco i punti essenziali. Gli *Αἴτια*, l'opera dottissima in cui Callimaco affermò per la prima volta sè stesso e l'orror suo pei canti " di alto rimbombo „ (fr. 165 + 490), e contro la quale è diretto un feroce epigramma — autentico o no? certo significativo — di Apollonio (*Anth. Pal.* XI 275), appaiono scritti, almeno in parte ormai, verso il 280: anteriori infatti all'*Inno a Demetra* e al componimento, di fresco restituitoci, *In morte di Arsinoe Filadelfo* (270) (v. Wilamowitz 'Sitzungsber. d. Berl. Ak.' 1912 pp. 534-5). Scritti, come puoi ricavare dai versi di commiato, all'ombra della reggia, gli *Αἴτια* terminano col proposito dell'autore di accingersi ad un grande lavoro in prosa (*Oxyrh. Pap.* VII pp. 29-31). — E l'*Ecale*? Era tradizione (*Schol. Callim.* II), che l'umile poema

(1) La ricostruzione del Wilamowitz in 'Neue Jahrb.' l. c., non mi sembra fatta per persuadere. Egli suppone che bibliotecario in Alessandria Apollonio Rodio sia stato già circa il 270, prima del ritiro in Rodi e che l'ufficio suo abbia lasciato appunto a causa del ritiro. Ciò non è verisimile, da un lato perchè nel 270 Apollonio doveva essere troppo giovane ancora e troppo a lungo poi doveva protrarre la sua attività se fu seguìto da Eratostene; dall'altro lato perchè senza motivi contraddice alla tradizione concorde degli antichi biografi, i quali ci insegnano che la polemica dei due poeti ed il ritiro in Rodi appartenne non già all'età avanzata e quasi conchiusa, bensì alle prime armi di Apollonio. La notizia poi della Biografia anon. II che l'ufficio di bibliotecario riferisce appunto al momento del ritorno in Alessandria, anzichè essere presa a complemento del papiro, è dal Wilamowitz respinta. Eppure respingerla — mi pare — sarebbe consentaneo solo quando provocasse contraddizioni con le altre fonti. Ora invece si dà proprio l'opposto; che contraddizioni e inverisimiglianze, come ho rilevato, sorgono respingendola.

Callimaco lo avesse elaborato in seguito alla polemica letteraria fra seguaci e oppositori della nuova poesia epica, come risposta a coloro i quali gli avevano mosso l'accusa di essere inetto ad opere di lunga lena. Ma i frammenti (in Gomperz *Aus der Hekale* 1893) hanno chiarito — ciò che per altro già si sospettava — che Apollonio Rodio nelle sue *Argonautiche* imitò molto spesso e senza intenzioni satiriche l'*Ecale* callimachea. Questo fatto è parso inesplicabile, a tal punto che il Wilamowitz (' Gött. Nachr. ' 1893 pp. 744 sgg.) si è tenuto in dovere di respingere la tradizione e di considerar l'*Ecale* composta quando ancora Apollonio credeva nel suo maestro (1). — Rimane l'*Inno ad Apollo*, nella chiusa del quale si vede, non senza ragione, descritto il trionfo del poeta, che, contento di una tenue goccia, purchè santa e pura, inveisce contro colui il quale nei proprii torrenti trascina molto fango e molto sozzume. Ma l'*Inno ad Apollo* — è giudizio ben radicato nei dotti — appartiene agli anni 250-47 circa, come quello che rappresenta l'annessione, o prossima ad avvenire o già avvenuta, di Cirene all'impero egiziano (cito, per tutti, Wilamowitz " Gött. Nachr. „ 1893 p. 745; Beloch *Griech. Gesch.* III 2 p. 496).

Se queste conoscenze, così interpretate, difficilmente combinano fra di loro, assai difficile è ch'esse reggano a fronte della nuova biografia di Apollonio. L'urto più grave è determinato dall'*Inno ad Apollo*; poichè, o rinunci a leggervi un'allusione al poeta di Rodi, ed è troppo comodo (2); o non intendi come mai questa contesa, che ha tutta l'apparenza di un fatto transitorio, di un episodio della giovinezza, duri e ricompaia sugli estremi anni di Callimaco, contro quell'Apollonio che, ormai anziano e bibliotecario del re ed onorato a Corte, aveva nelle proprie *Argonautiche* trattato con ogni rispetto l'*Ecale* del maestro. Ma una via resta aperta ancora: che l'inno si riferisca a ben diverso

---

(1) Altre ipotesi furono tentate, svariatissime, che non è qui il caso di vagliare: ricorderò: Legrand ' Rev. d. Ét. gr. ' 1894 pp. 281 sgg.

(2) L'argomento con cui G. Pasquali *Quaestiones Callim.* (Götting. 1913) pp. 71 sgg. cerca di dimostrare e che nell'*Inno* non è allusione ad Apollonio e che le *Argonautiche* sono posteriori all'*Inno* stesso, è troppo lieve e troppo facilmente confutabile per bastare a tanta impresa. Ad esso rispose già il Wilamowitz in ' Sitzungsber. d. Berl. Ak. ' 1914 p. 243 n. 3.

momento storico: ed è ciò che noi abbiamo altrove cercato di dimostrare, conchiudendo precisamente per gli anni 274-2 (1). Quindi ci è lecito descrivere le relazioni di Callimaco ed Apollonio così:

Il conflitto dei due poeti si raccoglie nell'àmbito del 280-70. Lì convergono gli *Αἴτια*; lì la prima lettura delle *Argonautiche*, l'*Inno ad Apollo*, l'*Ecale*. Ed è breve episodio. Apollonio ricompare in Alessandria con tutti gli onori: le *Argonautiche*, novellamente pubblicate, non contengono traccia degli antichi rancori. La medesima Corte può ospitare i due rivali, senza che l'Invidia rimormori all'orecchio di Apollo.

IV.

Nell'intessere la biografia di Apollonio Rodio ci siamo attenuti alle indicazioni dell'anonimo autore del Catalogo e abbiamo respinto, senza discuterlo, l'errore di Suida. Discuterlo conviene tuttavia, non tanto per sgombrare esitazioni che possano sorgere sulla dirittura del cammino or ora seguìto, quanto per trarne ammaestramento e sicurezza di mosse al percorso che ancora rimane.

Se è indubitato che, nel fare Apollonio Rodio successore di Eratostene, Suida ha confuso la persona del poeta epico con la persona dell'omonimo *εἰδογράφος*, come mai però nel testo del papiro a successore di Eratostene non appare affatto tale Apollonio *εἰδογράφος* del quale il papiro stesso ci rivela l'esistenza? come mai Apollonio *εἰδογράφος*, invece di succedere ad Eratostene, framezza tra Aristofane e Aristarco? La difficoltà non è lieve, massime se si consideri il modo fermo ed insistente col quale più di una volta e in diverso contesto Suida lancia la propria asserzione, qui ad Apollonio — al suo Apollonio cioè, sia pur male identificato e confuso — attribuendo il posto di *διάδοχος Ἐρατοσθένους* (*s. v. Ἀπολλ.*), lì del medesimo Apollonio, con pieno accordo, *μετ' Ἀπολλώνιον*, nominando successore

(1) In un libro già compiuto e di prossima pubblicazione, *Poeti alessandrini* cap. V: *La concezione degl'Inni di Callimaco*, § 7.

Aristofane (*s. v.* Ἀριστοφ.). Abbiamo dunque — è vano nasconderlo — due schemi contrastanti, l'uno del lessicografo, l'altro del Catalogo anonimo: il cui divario non consiste più nella semplice riduzione degli Apollonii ad un solo e, quindi, nell'omissione di un d'essi a vantaggio del compagno, poichè in tal caso da Eratostene in poi tutto correrebbe liscio e pacifico; ma consiste veramente in un disparato ordine di nomi. Che per Suida è: Eratostene, Apollonio, Aristofane, Aristarco. E per l'autore del Catalogo: Eratostene, Aristofane, Apollonio, Aristarco.

Per risolvere questa difficoltà unico mezzo è cercare quale possa essere stata l'origine dello spostamento o in Suida o nel Catalogo anonimo. Si può supporre che lo spostamento sia avvenuto in Suida (in Suida, naturalmente, o nella sua fonte) così: che, essendo il secondo Apollonio, col quale il primo, poeta di Rodi, fu confuso, posteriore ad Aristofane e per l'appunto intercedente fra Aristofane ed Aristarco, meravigliati del ritardo e conscii della relativa antichità del poeta, lo si sia anteposto ad Aristofane, per modo di avvicinare anche meglio quei due, tanto naturalmente dalla tradizione congiunti, Aristofane ed Aristarco. Ma un procedimento di tal fatta, se si svolgesse nel disordine della storia, nell'assenza di paradigmi e di liste già date, sarebbe credibile: non qui, dov'è la consapevolezza di tutta una serie da alterare.

In buon punto un'altra soluzione ci sorride: additata da certa peculiarità del Catalogo anonimo sulla quale a bella posta sin qui sorvolammo, perchè avrebbe prematuramente e senza ragione increspato di nuovo nodo lo schema messo testè a confronto con lo schema di Suida. Voglio dire la duplice menzione di Aristarco: insieme con Aristofane dapprima, quasi come combibliotecario, solo poi e normalmente ordinato, al suo proprio luogo (1); cosicchè dovremmo, correggendoci, scrivere: Eratostene, Aristofane e Aristarco, Apollonio, Aristarco. Ma correggerci non vogliamo. Che l'ufficio di capo della biblioteca, limitato in tutti gli altri casi ad un'unica persona per volta, venga a certo istante spartito fra due, non è in sè stesso impossibile, sebben poco

---

(1) Troppo spiccia mi sembra la soluzione degli Edd., p. 108, di considerare καὶ Ἀρίσταρχος indubitatamente interpolato.

probabile: ma quasi impossibile direi che, alla morte d'un d'essi, il superstite, anzichè continuare anche meglio nelle sue funzioni, ceda il posto al nuovo venuto per sottentrare infine più tardi, a tempo propizio, egli medesimo. E se pure questa vicenda fosse, con riguardo alle condizioni politiche tempestosissime in cui si sarebbe effettuata, giustificabile; giustificarla non mi sembra nè prudente nè opportuno, quando invece, a negarla, si abbia il vantaggio di compiere la desiderata conciliazione dei testi che furon prima scoperti in conflitto. Infatti la duplice menzione di Aristarco nel papiro è segno manifesto di una inavvertenza dello scriba che spostò un paio di linee, correndo innanzi con l'occhio e tornando poi una seconda volta sul medesimo nome: inavvertenza facile e naturale anche a persona più attenta di uno scriba (e lo scriba del papiro fu disattento e scorretto la sua parte), in un'enumerazione come questa schematica e nuda, le cui formule si ripetono ad ufo. Il rimedio è ben consigliato e sana due mali: mentre il doppione di Aristarco viene espulso, Apollonio *εἰδογράφος* va al proprio posto fra Eratostene e Aristofane. Il testo originario doveva leggere adunque, cominciando da Eratostene: *τοῦτον* (*Ἀπολ. Ῥόδ.*) *διεδέξατο Ἐρατοσθένης· εἶτ' Ἀπολλώνιος Ἀλεξανδρεὺς ὁ εἰδογράφος καλούμενος· μεθ' ὃν Ἀριστοφάνης Ἀπέλλου Βυζάντιος καὶ Ἀρίσταρχος Ἀριστάρχου Ἀλεξανδρεὺς ἄνωθεν δὲ Σαμόθραξ.*

La verisimiglianza di una *διαδοχή* così costituita, in conformità con l'ordine di Suida, se già è sorretta da potenti ragioni, troverà ben presto la sua riprova nei dati biografici dei singoli bibliotecarii su cui s'impernia.

V.

Alla biblioteca alessandrina Eratostene, successore di Apollonio Rodio, fu chiamato, al dire di Suida, da Tolemeo III Evergete (247-21). Infatti, delle sue relazioni con questo sovrano ci lasciò ricordo egli stesso nella chiusa di un famoso epigramma votivo, la cui autenticità e il cui contenuto sono stati magnificamente illustrati dal Wilamowitz (' Gött. Nachr. ' 1894 pp. 15-35; il testo è presso Eutocio in Archim. III p. 112 Heib.): epigramma dal quale s'intravvede che il dotto bibliotecario era maestro

dell'erede al trono, cioè del futuro Filopatore, quando ancora il padre, regnante, durava in florida età:

Εὐαίων Πτολεμαῖε, πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
πάνθ' ὅσα καὶ Μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα
αὐτὸς ἐδωρήσω· τὸ δ' ἐς ὕστερον, οὐράνιε Ζεῦ,
καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.

Complimenti come questi, in materia di età, non sono mai dei più attendibili e dei più veritieri. Tuttavia, difficilmente andremo errati ritenendo, con approssimazione, che in Alessandria Eratostene si trovasse già, bibliotecario, una diecina d'anni prima della morte di Tolemeo Evergete, cioè verso il 230. Sino a quando? — Conosciamo del nostro grammatico l'olimpiade in cui nacque, che è, su testimonianza di Suida, la CXXVI = 276-2; e la durata della vita che è, secondo Suida medesimo, secondo Censorino (*D. N.* 15) e Luciano (*Macrob.* 27), di ottanta ad ottantadue anni. Si scende quindi, per la morte, al 195; che concorda con quell'altra affermazione del lessicografo: *διέτριψε μέχρι τοῦ πέμπτου,* cioè: visse fin sotto il regno di Tolemeo V Epifane (205-181). Può pensarsi, è vero, come fu da molti, per suggerimento del Wilamowitz, pensato (v. Susemihl *Gesch.* I p. 410, 4; Knaack in ' Pauly-Wissowa ' VI 358 sgg.), che nello stabilire il primo punto, dell'anno di nascita, Suida non sia del tutto preciso e che convenga anticipare di una diecina d'anni almeno la venuta al mondo di tanto filologo, per dargli modo d'udire, giovanetto, il verbo dello stoico Zenone, morto nel 262/1 (cfr. Beloch *Griech. Gesch.* III 2 p. 471), di cui Strabone I p. 15 lo fa discepolo. L'orbita della sua vita si aggirerebbe allora dal 285 al 205. Ma quando si osservi che indicazioni come queste, di maestro e discepolo, presso gli antichi biografi hanno non di rado carattere vago e fittizio, e che a maestri Eratostene ebbe piuttosto, per sua stessa dichiarazione (in Strab. l. c.), Arcesilao ed Aristone di Chio, viventi ancora nella metà del sec. III; e quando d'altro lato si apprenda — testimonianza suprema — che uno scritto di Eratostene, *Ἀρσινόη* (ap. Ateneo VII 276 *b-c*), non potè essere composto se non dopo la morte di Tolemeo Filopatore (205) e, verisimilmente, in armonia con quel movimento generale di sdegno che, durante la minorità di Tolemeo V Epifane, si manifestò contro gli uccisori

dell'infelice Arsinoe Filopatore (cfr. Bouché-Leclercq *Hist. d. Lag.* I pp. 328, 347 sgg.): la convinzione ritorna che i termini da principio fissati sieno esatti.

Ad Eratostene noi abbiamo fatto seguire, per consiglio di Suida e con apposita induzione sul testo del papiro, Apollonio *εἰδογράφος*, anzichè Aristofane. Quest'ordine si attua ora da una parte, nella più piena identificazione di tale Apollonio, dall'altra nell'esame cronologico di Aristofane.

Bibliotecario nel periodo più florido della filologia alessandrina, Apollonio *εἰδογράφος* non dovè certo essere un grammatico da prendere a gabbo; e si può stare tranquilli che riflessi della sua operosità, anche quando a tutta prima non appaiano, egli ha lasciato nella nostra tradizione. Ecco intanto gli studii sulla lirica classica e, forse, sui cori della poesia drammatica, di cui già sappiamo. Ma non basta. Molto ch'era disperso e confuso, passa a buon diritto in possesso della sua personalità predominante. C'è un Apollonio, citato più volte negli Scolii alle commedie di Aristofane, come uno dei commentatori di questo poeta, insieme con Aristarco, con Timachida, con Eufronio, con altri autorevolissimi. Veramente, dopo qualche tentativo di avvicinamento o col poeta di Rodi o con l'Apollonio figlio di Chairis, egli è stato battezzato già *der Aristarcheer Apollonios*, come allievo e continuatore del filologo di Samotracia (cfr. lo studio, così intitolato, di H. Schrader in 'Jahrb. f. Phil.' 1866 I pp. 227-41, e Susemihl *Gesch.* II pp. 161, 166): visto però che a questa designazione manca ogni real fondamento, non dispiacerà di riconoscere nel commentatore di Aristofane un precursore piuttosto ed un anziano di Aristarco, immedesimandolo, come mi sembra non solo consentaneo ma doveroso, col nostro bibliotecario (1). Del quale gli *ὑπομνήματα* ad Aristofane furon dunque fra le opere principali. Per quel poco che i frammenti ci lasciano scorgere, la sua critica era assennata; le sue note di rado linguistiche; la sostanza delle cose sopra tutto; allo spunto grammaticale anteposta quasi sempre l'osservazione storica di un fatto, di un costume, di una scena (v. i luoghi raccolti nel cit. art. di H. Schrader p. 227).

---

(1) Distinto rimane tuttavia l'Apollonio maestro di Dionisio di Sidone, di cui Schrader a l. c.

Una traccia, che ancora rimane, è fatta per fissar bene nel tempo la persona di Apollonio *εἰδογράφος*. Essa dipende dall'analisi di un passo corrotto di Suida, ma non è perciò nè meno chiara, nè meno sicura. Siamo al lemma Asclepiade: *Ἀσκληπιάδης Διοτίμου Μυρλεανός (πόλις δ' ἐστὶ Βιθυνίας, ἡ νῦν Ἀπάμεια καλουμένη), τὸ δ' ἄνωθεν γένος ἦν Νικαεύς, γραμματικός, μαθητὴς Ἀπολλωνίου. γέγονε δ' ἐπὶ τοῦ Ἀττάλου καὶ Εὐμενοῦς τῶν ἐν Περγάμῳ βασιλέων· ἔγραψε φιλοσόφων βιβλία διορθωτικά· ἐπαίδευσε δὲ καὶ εἰς Ῥώμην ἐπὶ Πομπηίου τοῦ μεγάλου, καὶ ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ἐπὶ τοῦ δ' Πτολεμαίου νέος διέτριψεν, ἔγραψε πολλά.* Fu già osservato (v. ad es. Susemihl *Gesch.* II p. 16, 85) che le notizie qui accumulate sotto il nome di Asclepiade Mirleano non si possono riferire ad un'unica persona, bensì scindonsi in due serie nettamente distinte: da una parte le notizie che concernono un grammatico vissuto a Roma sotto Pompeo Magno (107-48), ed è quello che siam soliti a chiamare 'Asclepiade di Mirlea', autore del *Περὶ τῆς Νεστορίδος*; dall'altra le notizie riguardanti un altro scrittore, omonimo e forse originario della medesima regione, il quale visse sotto Attalo I (241-197) ed Eumene II (197-59) re di Pergamo, e dimorò da giovane in Alessandria a tempo di Tolemeo IV Filopatore (221-5). Contaminazioni e giustapposizioni di questo genere ricorrono più di una volta in Suida (v. ad es. *s. vv.* *Ἀριστοφάνης* e *Ἀριστώνυμος*): qui la doppia ricorrenza di *ἔγραψε* è indizio palmare. Pur lasciando insoluti i punti specifici che esorbitano dal nostro intento e solo fondandoci sulla certa spartizione della materia in due correnti, veniamo alle conseguenze. Se è facile notare che allievo di Apollonio dovè essere quello dei due Asclepiadi che dimorò in Alessandria sotto Tolemeo Filopatore, inevitabile è poi che tale Apollonio, grammatico famoso, insegnante ad Alessandria sotto Tolemeo Filopatore, non potendo essere più Apollonio Rodio, sia però Apollonio *εἰδογράφος*. Il quale infatti, successore — come io credo — di Eratostene verso l'anno 195, era già in grado di esercitare la propria attività di maestro sullo scorcio del secolo anteriore, regnante il quarto Lagide. Nè il discepolo suo Asclepiade rimase del tutto ignoto. Conviene ricordare che un *Ἀσκληπιάδης Ἀλεξανδρεύς* ha lasciato qualche vestigio di sè negli Scolii ad Aristofane, come interprete di questo medesimo poeta al quale Apol-

lonio εἰδογράφος aveva rivolto le sue cure precipue (v. Susemihl *Gesch.* II pp. 19, 98). Il grande Ateniese e la commedia attica in genere erano divenute oggetto di un culto e di una moda singolare. Per incitamento del re Filopatore, che istituì agoni e feste dionisiache e amò chiamarsi 'Dioniso' e porre sulla scena opere proprie, la poesia drammatica era, quasi a dire, nell'aria: viveva sia nel rigoglio di una nuova produzione originale, sia nello studio appassionato dell'antico retaggio. Pertanto non fa meraviglia se a fianco del *Περὶ τῆς ἀρχαίας κωμῳδίας* di Eratostene, troviamo i commenti di Apollonio, di Asclepiade, di altri che sono per venirci incontro.

È la volta di Aristofane da Bisanzio. Sul conto del quale siamo mediocremente informati da Suida (*s. v.* Ἀριστοφ. Westerm. p. 362). Visse 77 anni; fu nominato bibliotecario in età di 62; fiorì (γέγονε) nell'olimpiade CXLIV = 204-0. — Abbandonati, come si vede, a noi stessi nella determinazione di un punto di partenza, e cioè dell'anno di nascita, crediamo che questa volta l'ἀκμή, la quale spesso ha un valore molto vago, sia riuscita abbastanza esatta e faccia cadere la nascita del grammatico verso il 245-0. Infatti che Aristofane sia stato discepolo di Zenodoto e di Callimaco, come nel lemma di Suida, non senza una certa contrarietà, è suggerito (*μαθητὴς Καλλιμάχου καὶ Ζηνοδότου, ἀλλὰ τοῦ μὲν νέος, τοῦ δὲ παῖς ἤκουσε*), abbiamo già dimostrato nel caso di Zenodoto avere tutto il carattere di una invenzione: ed invenzione è da ritenere anche nel caso di Callimaco, volendo respingere integralmente la glossa. Tanto più che i veri maestri di Aristofane vengono ben presto soggiunti, in disparte, da Suida medesimo, e sono di una generazione o due posteriori a quei primi, suppositizii: *πρὸς δὲ τούτοις (Ζηνοδότῳ καὶ Καλλιμάχῳ, μαθητής) καὶ Διονυσίου τοῦ Ἰάμβου καὶ Εὐφρονίου* ⟨*τοῦ Χηρρονησίτου καὶ Μάχωνος*⟩ *τοῦ Κορινθίου ἢ Σικυωνίου* (1). Riconosciamo infatti fra essi il poeta comico Macone, il quale, se per insufficienza di ricerche è dagli studiosi della letteratura ellenistica riferito alla prima metà del III secolo come contemporaneo o quasi di Sositeo (v. Susemihl *Gesch.* I p. 265), ci appare invece, ad un esame storico delle sue

---

(1) Il testo è così ottimamente integrato da R. Schmidt *De Callistr. Arist.* p. 21 col sussidio di Athen. II 71 *b*.

Χρεῖαι, fiorente sotto il regno di Tolemeo Filopatore; poi Eufronio, autore di carmi Priapèi, poeta tragico e studioso della commedia classica, vissuto pure sotto il Filopatore (sebbene Susemihl I p. 281 non conosca, per stabilire la sua età, altro che le relazioni con Aristofane da Bisanzio): quanto a Dionisio Giambo, ignoriamo (v. Susemihl *Gesch.* I p. 346), ma tutto ci consiglia a considerarlo coetaneo de' suoi compagni (1). E che cosa sono essi se non un nuovo drappello di quella schiera, su cui richiamammo testè l'attenzione, cultori e commentatori di poesia drammatica, balzati intorno al re 'Dioniso'?

Così il bibliotecariato del filologo di Bisanzio viene a cominciare verso il 180: che è giusto per chi fu successore di Apollonio *εἰδογράφος*. E si estende sino al 165: che è pure giusto per chi a proprio successore ebbe Aristarco. Un aneddoto narrato da Suida collega gli ultimi anni di Aristofane con la persona di Eumene II re di Pergamo (197-59): il tentativo che codesto vecchio bibliotecario avrebbe fatto di fuggire dal suo posto di Alessandria alla corte pergamena non è se non un episodio dei contrasti che si manifestarono, secondo Varrone (presso Plin. *N. H.* XIII 70), fra i Tolemei ed Eumene II, *aemulatione circa bibliothecas*.

Strettamente connesso con Aristofane, e nella tradizione vulgata e nel testo stesso del papiro, appare Aristarco di Samotracia. Anche per lui ci è appresa da Suida (*s. v.* *Ἀρίσταρχος*) la durata della vita, 72 anni, ma non l'anno di nascita, non l'anno della morte. Fiorì (*γέγονε*) nell'olimp. CLVI = 156-2, sotto Tolemeo VI Filometore (181-46). Fu maestro del futuro re Evergete II Fiscone (Aten. II 71 *b*), e maestro fu pure dei figli di Tolemeo Filometore — come ci informa Suida —, non del Filopatore, come è scritto nel papiro: che è assolutamente inammissibile, e va corretto.

Ma se questi sono termini vaghi, sembra però che Suida da una parte, il papiro dall'altra, ci vogliano condurre a più sicure determinazioni, rivelandoci le speciali contingenze in cui il bibliotecariato di Aristarco ebbe a terminare. Leggete Suida e vi chiederete perchè mai con tanta attenzione egli abbia ri-

---

(1) Di queste affermazioni si renderà conto in un prossimo scritto sui *Poeti e letterati alla corte di Tolemeo Filopatore*.

cordato la morte del bibliotecario nell'isola di Cipro. I critici moderni supposero che la fine di Aristarco dipendesse da quella famosa dispersione dei filologi e dei letterati alessandrini, della quale sarebbe stato autore, con bandi ed uccisioni, Evergete II Fiscone, non appena salì al trono, l'anno 146 (Ateneo IV 184 *c*). E recentemente è parso che il papiro, assegnando ad Aristarco un successore di nome ignoto e di qualità straordinaria, *Κύδας ἐκ τῶν λογχοφόρων*, abbia cresciuto la verisimiglianza della cosa. A torto, forse. Poichè, prima di tutto, l'avvenimento della dispersione dei grammatici fu dalle fonti antiche esagerato, e prese le sembianze di un unico particolare episodio, mentr'era fenomeno complesso e fatale, dipendente, più ancora che dalla volontà iniqua di un sovrano, dalle condizioni, ogni giorno peggioranti, dell'elemento greco in Egitto. E poi — sia pure questo episodio della improvvisa persecuzione. Ma non pensate che per salvarsi dalle ire di Evergete Fiscone, suo antico discepolo, Aristarco avrebbe dovuto scegliere qualsiasi altro rifugio, ma non l'isola di Cipro, se, fra i territorii dell'impero egiziano, Cipro era il più fortemente posseduto e sorvegliato?

Respinta questa spiegazione, credo però indubitato che la morte di Aristarco in Cipro si colleghi con qualche avvenimento storico di una certa importanza. Uno ne è in pronto, capace di risolvere non poche difficoltà. L'anno 131, Evergete II, il re in persona, minacciato nei suoi palazzi da una delle ormai frequenti insurrezioni di popolari e di mercenarii, trovava scampo con la propria famiglia nell'isola di Cipro, e vi rimaneva per non breve tempo, escluso dalla capitale dell'impero (Giustino XXXVIII 8, 11; Liv. *Epit.* LIX; Valer. Mass. IX 2 — cfr. Bouché-Leclercq *Hist. des Lag.* II pp. 73 sgg.). Che in quella occasione Aristarco, regio bibliotecario, insieme con buona parte della Corte, seguisse il Sovrano, sembra per sè stesso più che probabile. Ed è reso verisimile appunto dalla qualità straordinaria del suo successore. Cidante non era certo uomo di lettere. Il nome, cretese, e la professione, *λογχοφόρος*, fanno supporre in lui uno fra i capi delle milizie mercenarie insorte, che si sia perciò insediato nell'ufficio, poco con la sua professione compatibile, di bibliotecario.

Congettura convalidata da un fatto ancora. Cidante è l'ultimo bibliotecario che il papiro conosca. Ma le nostre conoscenze questa volta vanno più in là e, grazie ad un'iscrizione di Cipro

(' Journ. of Hell. Stud. ' 1888 p. 240), ci fanno presente un nuovo bibliotecario, che appartenne alla generazione immediatamente successiva a quella di Cidante e l'ufficio suo ebbe dal nuovo re, Tolemeo Sotere II (117-81). È nome ignoto: Onesandro di Nausicrate; e i Ciprioti lo onorano, non tanto come *συγγενής* e *ἱερεύς* del sovrano Tolemeo e come *τεταγμένος ἐπὶ τῆς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ μεγάλης βυβλιοθήκης*, quanto come Segretario della loro città di Pafo (1). Non è da credere infatti che la sua vita egli abbia passato fra gli scaffali di Alessandria. Come ho supposto di Aristarco, che seguì il suo Sovrano nell'isola di Cipro, così Onesandro ebbe ad accompagnare il proprio, Sotere II, espulso infatti da Alessandria e regnante in Cipro negli anni dal 108 all'88 (cfr. Strack *Dyn. d. Pt.* p. 53).

Ma era la fine. L'anonimo autore del papiro non ha più degnato di uno sguardo il povero funzionario Onesandro, quando si è accorto che, con Cidante, ai paladini della grammatica sottentravano i rappresentanti della spada o del protocollo. Ed ha chiuso. Ha chiuso col nome di alcuni fra i principali discepoli di Aristarco, continuatori dell'antica tradizione, ma pronti ormai a spiegare il volo lontano dalla capitale d'Egitto: Ammonio, Diocle, Apollodoro d'Atene, Zenodoto d'Alessandria (2). La scuola alessandrina si è disciolta, e dissemina per le terre d'Oriente e d'Occidente, in comunione coi Romani, i proprii adepti.

---

(1) Una notizia si può dedurre dalla presente iscrizione capace di risolvere un quesito ancora aperto: ed è che i bibliotecarii di cui trattiamo amministravano soltanto la così detta Grande biblioteca (cfr. Plut. *Caes.* 49) e non entrambe le biblioteche alessandrine, come di consueto si presume (v. su di esse anche L. E. Lögdberg ' Eranos ' III p. 162 sgg.).

(2) Zenodoto d'Alessandria detto *ὁ ἐν ἄστει* (Suida *s. v.*) conviene a questo luogo assai meglio che non lo Zenodoto di Mallo, se, come sappiamo, quest'ultimo fu un avversatore di Aristarco e degli *Ἀριστάρχειοι* (Susemihl *Gesch.* II p. 14). Fare poi di essi due un'unica persona, come vuole il Wilamowitz in 'Neue Jahrb.' l. c., non mi sembra abbastanza giustificato.

Per l'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di C. Frati, A. Baudi di Vesme e C. Cipolla.

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di C. Cipolla, G. De Sanctis e P. Fedele.

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. L. Disp. 5ª. 1914-1915.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Gennaio 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti: il Vice-Presidente CAMERANO, il Direttore della Classe D'OVIDIO, ed i Soci SALVADORI, NACCARI, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, PARONA, GRASSI, FUSARI, BALBIANO e SEGRE, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio MATTIROLO.

È letto e approvato il verbale dell'adunanza precedente.

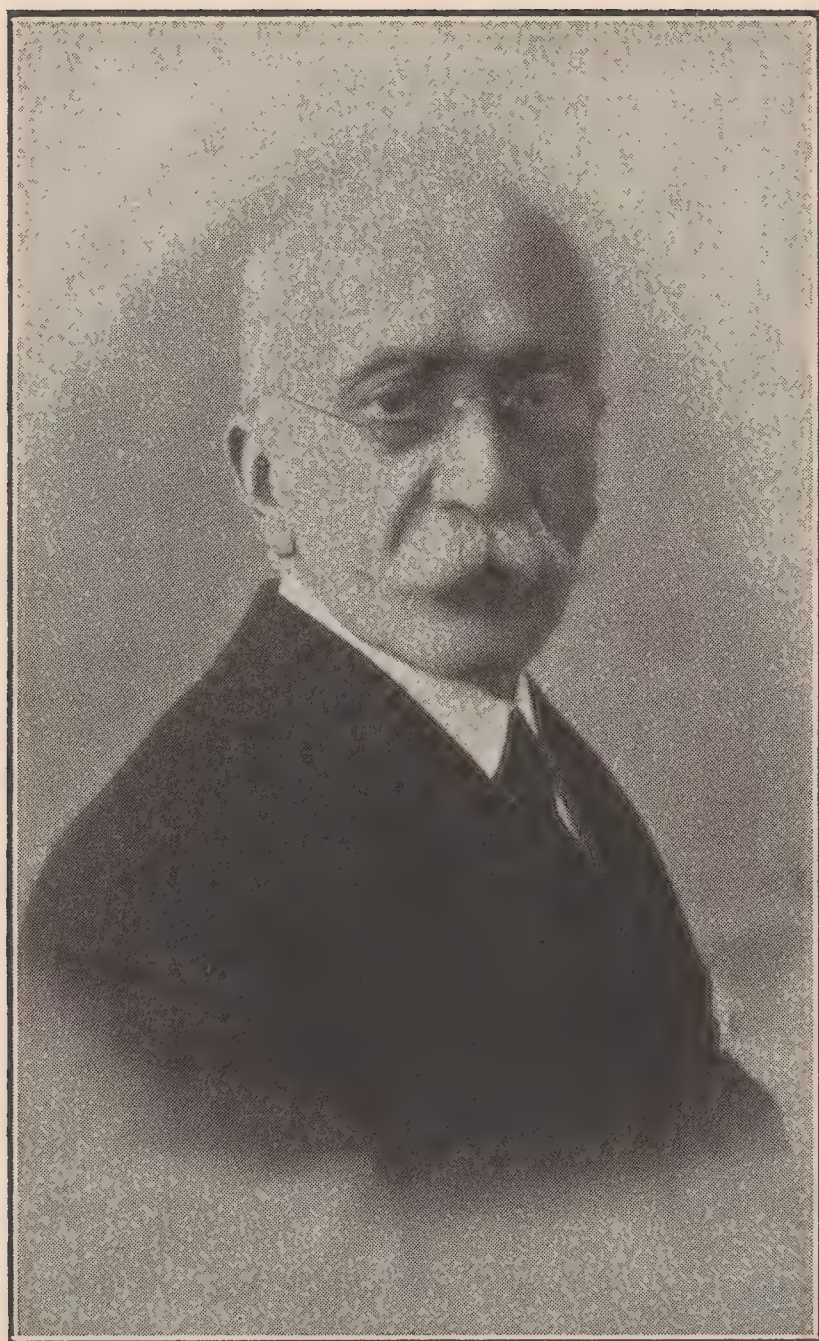
Il Presidente, con vivo dolore, rileva la nuova grande perdita fatta dall'Accademia con la morte del Socio RENIER, Segretario dell'altra Classe. Dei meriti di lui come scienziato e come insegnante si dirà in seguito ampiamente. Intanto vada alla sua memoria il mesto e affettuoso saluto dei Colleghi di questa Classe.

Si dà lettura di numerose lettere di condoglianza pervenute all'Accademia, in seguito alla morte del Socio FILETI, e di una lettera del fratello di questo, sig. Vittorio Fileti, che ringrazia l'Accademia, anche a nome della famiglia, per la parte presa al loro lutto.

Il Socio GUARESCHI legge la sua commemorazione del Socio FILETI. Verrà inserita negli *Atti*.

Il Socio Peano offre in omaggio un suo volume intitolato: *Vocabolario commune ad Latino-Italiano-Français-English-Deutsch, pro usu de interlinguistas*, e ne discorre.

Lo stesso Socio Peano presenta, per la stampa negli *Atti*, una Nota del Dott. G. Vacca su *Il primo logaritmo Neperiano calcolato prima di Nepero*; ed il Socio Segre, pure per gli *Atti*, una Nota del Prof. G. Fubini, col titolo: *Esiste un corpo pesante a densità sempre nulla?*

Infine il Socio Guareschi, anche a nome del Collega Fusari, legge la Relazione sulla Memoria del Dott. Cuneo, *Ricerche biochimiche sulla funzione ureopojetica e sulle alterazioni della composizione del sangue nella epilessia*, presentata nella precedente adunanza. Approvando le conclusioni della Commissione, la Classe delibera l'accoglimento della Memoria nei volumi accademici.

MICHELE FILETI

LETTURE

MICHELE FILETI

Commemorazione del Socio ICILIO GUARESCHI
letta nell'Adunanza del 10 Gennaio 1915.

Egregi Colleghi,

La mattina del 27 dicembre p. p. quando il nostro illustre Presidente ci diede l'annunzio della morte quasi improvvisa del collega prof. Michele Fileti, noi tutti restammo ammutoliti, ci sembrava quasi impossibile; tutti provammo un senso di tristezza enorme, un senso anche di sconforto, al pensiero della vanità di questa vita.

Nell'ora attuale ove tutto il mondo è sconvolto, ove le nostre idee di civiltà e di progresso devono essere profondamente modificate, tanto più sentiamo il dolore per la perdita degli individui che hanno compiuto il loro dovere. Ed il Fileti era fra questi.

Di recente il Presidente dell'Università di Columbia (New-York), ha giustamente esclamato: " Che si deve dunque pensare? La Scienza, la Filosofia, la Religione non sono dunque che delle parole vuote di senso, delle false sembianze ipocrite? Gli uomini di pensiero e gli uomini di azione, che hanno consacrato tanti sforzi per sostituire nel mondo il regno della giustizia al regno della forza brutale hanno perduto, sciupate, tutte le loro fatiche? Bisogna rispondere: no, mille volte no ". Ma intanto, io dico, sta il fatto che gran parte delle nazioni civili si dilaniano reciprocamente; in tutte si risveglia l'istinto della animalità.

La perdita quasi improvvisa dello stimato collega, e che in questo momento qui tutti ci riunisce, è indubbiamente ben triste. Una breve malattia ha colpito nel sessantatreesimo anno

di vita Michele Fileti, e l'ha precipitato nella tomba con rapidità fulminea.

" Che questa morte, scriveva in una circostanza analoga un illustre scienziato di un suo collega, ci serva di lezione; essa ci avverte di non far calcolo sull'indomani; di consacrare tutti i nostri momenti alla cultura, al progresso delle scienze, a quelle ricerche laboriose, a mezzo delle quali si ottiene la stima dei contemporanei, e talora anche uno sguardo della posterità „ (1).

Ma, come già dissi, se riflettiamo al momento storico attuale, all'orrenda strage di vite umane che si fa ora in questi tempi della cosidetta civiltà, potrebbe riguardarsi inutile, sterile, vanitoso, quanto raccomandava il grande fisico, astronomo e scrittore francese.

Prima che io dica della vita e delle ricerche scientifiche del Fileti, permettete, egregi colleghi, ch'io brevemente accenni allo stato della chimica nella Università di Torino verso la fine del XVIII ed al principio del XIX secolo. Questa nostra Università per tutto il secolo XVIII non ebbe una cattedra speciale di chimica. Però nel Piemonte dal 1750 al 1800 fiorirono dei distinti cultori della chimica, quali: Beccaria, Saluzzo, Morozzo, Bonvicino, Napione, Robilant, Giobert, Gioanetti, ecc., alcuni dei quali al principio del secolo XIX divennero professori di chimica all'Università. Uno dei primi che abbia tentato di contribuire al progresso della chimica, e che aveva un indirizzo scientifico appreso alla scuola del Beccaria, fu Angelo Saluzzo. Napione, Robilant e Bonvicino portarono un buon contributo alla mineralogia chimica ed alla metallurgia in Piemonte.

Nel 1776 Vittorio Amedeo III voleva fondare una cattedra di chimica nell' Università di Torino ed affidarla al Gioanetti, " ma è fama, scrive il Bonino nella sua *Biografia medica piemontese*, che tale pubblico voto e il saggio divisamento del re andassero falliti per la mal opera di personaggio potente, il quale, pari all'eminenza del grado non avendo l'elevatezza dell'ingegno e l'estensione dei lumi, giudicò ch'ei farebbe cosa alla patria nostra utilissima, qualora impedisse, siccome il fece, la fondazione di una pubblica cattedra di chimica, da lui e dal

(1) Arago, *Œuvres*, III, p. 593, in occasione dei funerali di Puissant.

volgo non plebeo, *tenuta in conto di vanissima scienza altrettanto presuntuosa nel suo scopo, quanto, nelle sue operazioni, pericolosa* „.

Per il più frequente contatto degli uomini di scienza piemontesi con quelli di Francia, al tempo in cui il Piemonte era o alleato, o sotto il dominio della Francia, le idee di Lavoisier furono subito accolte da alcuni Chimici piemontesi, quali Giobert e Bonvicino, ma da altri no. Al tempo della rivoluzione francese l'Università nostra restò per alcuni anni chiusa; fu riaperta alla fine del 1798 e solamente nel 1799 il Governo Provvisorio, di di cui facevano parte il Giobert ed il Bonvicino, con decreto 21 gennaio 1799 stabiliva la fondazione di una cattedra di chimica all'Università. Dopo la battaglia di Marengo la Commissione esecutiva con decreto 18 ottobre 1800 creava il Consiglio della Pubblica Istruzione e stabiliva la pianta delle cattedre e dei professori che dovevano occuparle. Con questo medesimo decreto fu nominato il dott. Bonvicino di Centallo, col titolo di *professore di chimica farmaceutica e storia naturale dei medicamenti*, ed il Bonvicino fu dunque il primo professore di chimica della nostra Università. Il Giobert nel tempo stesso fu nominato professore di *Economia rurale, arti e manifatture* e poi nel 1805 ebbe il titolo di professore di chimica e mineralogia e occupò questa cattedra fino al 1814.

Il Fileti stesso ci ha dato (1) alcune notizie sulle vicende successive delle cattedre di chimica nella nostra Università e non è qui il luogo di esporre questo brano di storia scolastica che tutti noi conosciamo. Il Fileti nominato dietro concorso venne a Torino alla fine del 1881.

Ed ora, egregi colleghi, io farò un breve cenno della vita e un breve riassunto dei principali lavori del nostro collega perduto.

Michele Fileti nacque il 3 ottobre 1851 in Palermo e là, nella sua città natale, si spense rapidamente nel mattino del giorno 26 dicembre 1914. La sua carriera scientifica fu piuttosto rapida. Compiuti gli studi classici, era sua prima intenzione di dedicarsi all'ingegneria, poi si iscrisse all'Università nel corso per la chimica e si laureò in chimica nel 1874 quando era già

---

(1) Vedi “ Annuario dell'Università di Torino „, 1899-1900, p. 54.

da alcuni anni, sino dal 1871, preparatore nel laboratorio chimico dell'Università di Palermo, diretto dal prof. Em. Paternò. Nel 1875 veniva nominato assistente e vice-direttore del laboratorio di chimica dell'Università di Roma ove era professore il Cannizzaro. Nel 1876 ottenne la libera docenza in chimica, nel 1879 fu nominato professore di chimica nell'Università di Catania e finalmente nel 1881 pure per concorso ebbe la cattedra di chimica nella nostra Università.

Il laconico annunzio telegrafico della sua morte colpì dolorosamente l'animo dei suoi amici e colleghi. Egli amava molto la sua Famiglia; alla quale inviamo le più vive condoglianze. Vi era nel Fileti l'accordo di un talento non comune, e di un carattere talora rigido, ma quasi sempre giusto. La sua perdita riesce dolorosa non solamente ai suoi amici e colleghi, non solo ai suoi allievi, ma pur anco a tutti coloro che tengono in considerazione l'importantissima funzione dell'insegnamento, il lavoro didattico e scientifico.

Ed invero Fileti era un insegnante efficace e coscienzioso; le sue lezioni erano molto chiare, precise ed ordinate; benchè egli fosse un abile esperimentatore, le esperienze fatte in iscuola erano generalmente non molto numerose. La sua attività e la sua abilità si esplicava anche nell'insegnamento pratico in laboratorio. L'analisi chimica era insegnata, sotto la sua guida, con grande cura e correttezza e lo sanno i numerosi giovani che hanno frequentato quel laboratorio. Ne è prova anche la sua interessante *Guida all'analisi chimica qualitativa* con tabelle compilate ad imitazione di quelle classiche del Will, ma con utili modificazioni.

Il compianto collega fu Rettore della nostra Università dal 1900 al 1903, ed anche questa elevata funzione egli seppe compiere con talento, correttezza, imparzialità e severità. Fu direttore della Scuola di Farmacia dal 1894 al 1900 ed ora da cinque anni era membro del Consiglio Provinciale Sanitario. Egli era Socio della nostra Accademia dal 1896.

Il Fileti conosceva bene più lingue, fra le quali la tedesca e l'inglese. Egli fece parte del Congresso Internazionale di Ginevra per le modificazioni da introdursi nella nomenclatura dei composti chimici; ma non credo vi abbia preso una parte molto attiva.

In Fileti era ben sviluppato il senso critico, e lo dimostrano non solamente taluni suoi lavori ma anche le relazioni che Egli

scriveva quando doveva giudicare i lavori di altri chimici. Egli sapeva con grande chiarezza e semplicità esporre le ricerche altrui e farne rilevare i meriti e i difetti. Ed io stesso posso attestare questa buona qualità essendomi più volte trovato a lui insieme per esaminare numerosi lavori o riguardanti concorsi o per libere docenze. Anche questa è un'abilità che non è comune.

Dopo il 1894 egli si occupò specialmente, con grande attività e diligenza, dell'arredamento del suo nuovo e grandioso laboratorio ove sono ora sapientemente disposte e arredate sale per esercizii pratici, sale per ricerche scientifiche, camere per assistenti, per bilancie, per combustioni, ecc. Il tutto ben ordinato e impiantato secondo le idee più moderne. Egli aveva notevoli cognizioni in cose riguardanti la meccanica, gli strumenti, i mobili adatti al suo laboratorio; aveva quelle cognizioni che hanno i migliori capi-operai nelle loro varie professioni e queste sue cognizioni egli utilizzò bene nel faticoso lavoro di arredamento. Ora io non esagero dicendo che il laboratorio di chimica generale, e diciamo pure anche quello di chimica farmaceutica e tossicologica della nostra Università, sono i due più grandiosi laboratori di chimica che abbia l'Italia, ciò sino dal 1894.

Col trasloco, nel 1898, nel nuovo e vasto laboratorio cessarono quasi completamente le ricerche scientifiche personali del Fileti, mentre continuarono a lavorare nel suo laboratorio alcuni dei suoi migliori allievi; già forse sino dal 1900 circa si ebbero in lui quei sintomi della malattia che poi in pochi giorni doveva condurlo alla tomba, al riposo o al moto eterno, ma sempre là, ove ogni vanità umana si annulla.

Tutti i lavori scientifici del Fileti sono nel campo della chimica organica, se si eccettui quello sull'analisi dei gas e quelli sulla densità di vapore del calomelano. Sono lavori piuttosto brevi, ben eseguiti, che indicano nell'autore idee chiare, se non d'indole molto generale. Il Fileti era un abile esperimentatore, molto accurato ed esatto. Se talvolta ha avuto qualche polemica con altri chimici, sempre però con moderatezza, fu più che altro per interpretazioni diverse date a certe reazioni o alla costituzione dei corpi che studiava; ma i fatti erano e rimanevano bene stabiliti.

Quando il Fileti si iniziava nei lavori di chimica eravamo nel tempo, direi classico, della teoria dei composti aromatici, ossia della teoria del benzene di Kekulé (1); specialmente dopo il 1869 (2) si era nel periodo in cui il Körner riassunse la teoria di Kekulé in una magnifica memoria ove per la prima volta emise l'ipotesi, tanto fruttuosa, della costituzione della piridina e della chinolina, e pochi anni ancor dopo, nel 1874 (3) il Körner stesso pubblicava l'altra sua classica, e più vasta, memoria: *Studi sull'isomeria delle cosidette sostanze aromatiche a sei atomi di carbonio*, ove è sviluppato il suo metodo per la determinazione del luogo chimico nei composti aromatici. Un immenso numero di ricerche erano allora, e dopo, orientate in questo senso, in questa nuova via.

Il Fileti iniziò, come dissi, i suoi lavori appunto in questo periodo, verso il 1873 con alcune ricerche sul fenolbenzilato, sull'acido cimencarbonico ed altre fatte come collaboratore del suo professore; poi nel 1875, da solo, con una nota sul *cianuro di acetile* $CH^3CO.CN$, già ottenuto da Hübner e da Classen e Manasse, e con alcuni studi sul *glucosato di rame* (V. Bibliografia). Quando il Fileti nel 1879-1881 trovavasi professore a Catania fece alcune ricerche chimico-biologiche insieme al suo collega professore Guido Tizzoni, che saranno ricordate nella Bibliografia.

Sulla densità di vapore del calomelano. — Si è discusso molto intorno al peso molecolare del cloruro mercuroso o calomelano; la cui densità di vapore trovata già da Mitscherlich, da Deville e Troost e da altri, corrispondeva alla formula semplice HgCl. Altri invece ammettevano la formula doppia Hg^2Cl^2, ma che nella determinazione della densità di vapore vi fosse dissociazione in $Hg + HgCl^2$. Il Fileti era fra coloro che ammettevano la formula più semplice HgCl e nel 1881 fece una ingegnosa esperienza, analoga a quella che era stata fatta dal Würtz e da altri chimici pel percloruro di fosforo e l'idrato di cloralio, cioè deter-

(1) " Bull. Soc. Chim. „ 1865; A. 1866, t. 137, p. 129; " A. Ch. „ (4), 1866, t. VIII, p. 158.

(2) " Giorn. Sc. Nat. ed Econ. „, Palermo, 1869, t. V, p. 111.

(3) " Gaz. Chim. „, 1874, IV, e ristampata nel 1910 in: *L'opera classica di G. Körner*, Milano, 1910.

minò la densità in presenza del vapore di uno dei corpi nel quale il calomelano doveva dissociarsi, nel vapore di cloruro mercurico; e trovò che anche in questo caso la densità di vapore corrispondeva proprio a HgCl, ed inoltre il vapore non amalgamava il rame dorato; dunque non vi era mercurio libero. In questo lavoro il Fileti (1) fece una giusta critica delle ricerche dei suoi predecessori, e questi suoi risultati rimasero sino al 1900 quelli che pareva giustificassero colla massima probabilità la formula HgCl a preferenza di Hg^2Cl^2, benchè quest'ultima avesse in suo favore un fatto importante: che cioè V. e C. Meyer nel 1879 avevano trovato la densità di vapore del cloruro rameoso corrispondente a Cu^2Cl^2.

La questione sembrava risolta in favore della formula HgCl, quando nel 1900 il Brareton Baker (2) studiando l'influenza delle traccie di vapore d'acqua nelle reazioni chimiche ripetè la determinazione della densità di vapore anche del calomelano, ma *perfettamente secco*, in una atmosfera di azoto e alla temperatura di ebollizione dello solfo. Trovò la densità *normale* cioè circa 223 corrispondente a Hg^2Cl^2, mentre quando il calomelano conteneva la minima traccia d'acqua, la densità discendeva a 108 circa, cioè alla metà circa. Osservò inoltre che il vapore di calomelano secco non amalgama l'oro, mentre lo amalgama se contiene delle tracce d'acqua. L'influenza dannosa di traccie minime di vapor d'acqua era sfuggita a tutti coloro che prima avevano determinato la densità di vapore del calomelano ed altre sostanze. Così anche questa apparente eccezione alla legge di Avogadro, scomparve.

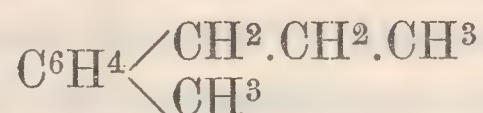
Ricerche sul cimene e composti simili. — Come si vedrà nella bibliografia, debbonsi al Fileti numerose ricerche sul cimene, sull'acido cuminico, su diversi idrocarburi benzenici ed altri derivati di questo gruppo.

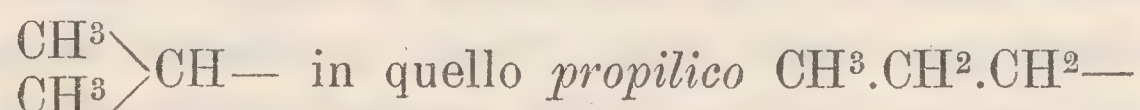
Questi lavori egli fece nel Laboratorio di chimica di Torino dal 1881 al 1891, ma si collegano con i primi ch'egli eseguì a Palermo insieme al suo Professore. La costituzione del cimene

---

(1) " Gaz. Chim. „, 1881, XI, p. 341.
(2) " J. Chem. Soc. „, 1900, t. 77, p. 646.

era stata molto discussa dai chimici ed egli da queste sue ricerche, ne indusse che il *cimene*, che è il carburo fondamentale della serie, doveva considerarsi come p.metilpropilbenzene:

$$C^6H^4\begin{cases} CH^2.CH^2.CH^3 \\ CH^3 \end{cases}$$

Ma questa ammissione non era d'accordo con tutti i fatti che si conoscevano, non andava d'accordo, ad esempio, colla trasformazione del cimene (supposto derivato propilico) in acido cuminico (derivato isopropilico); anzi questa discordanza fra i composti della serie cuminica nei quali da tutti si ammetteva e si ammette l'*isopropile*, ed i derivati della serie cimenica, nei quali si ammetteva il *propile normale*, era molto imbarazzante perchè si era costretti ad ammettere la trasformazione molecolare del gruppo *isopropilico*:

$$\begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix}\!\!>CH— \text{ in quello } \textit{propilico } CH^3.CH^2.CH^2—$$

e viceversa. E così il Fileti ancora in una sua nota del 1886: *Sulla trasformazione dei derivati cuminici in cimenici e reciprocamente* (" Atti della R. Accademia dei Lincei „, 1886), enumerava tutti i casi conosciuti nei quali aveva luogo una trasformazione di isopropile in propile, il passaggio cioè dalla serie cuminica alla cimenica, e una trasformazione del propile in isopropile cioè dalla serie cimenica alla cuminica. — Tale questione continuò a dibattersi sino al 1891, quando cioè la definitiva costituzione del cimene e suoi derivati fu, in modo non dubbio, stabilita dalle ricerche di Widman (1), il quale dimostrò che il cimene sintetico, p.metilpropilbenzene, preparato dal p.bromotoluene e bromuro di propile in etere col sodio, *non è identico, ma isomero* col cimene naturale, col cimene dalla canfora, ecc.; egli ne studiò i derivati solfonici e ne concluse che il cimene naturale deve essere il *p.metilisopropilbenzene*; tutti i derivati

---

(1) " Berichte „, 1891, t. 24, p. 439, 970, 1362; Bayrac, " Bull. Soc. Chim. „ (3), XIII, p. 894.

del cimene contengono il gruppo *isopropile* e non il *propile normale* e quindi deve essere:

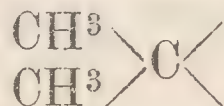
$$C^6H^4\begin{cases}CH(CH^3)^2\\ CH^3\end{cases}$$

Il Widman confermò questo suo modo di vedere colla sintesi del *p.metilisopropilbenzene*, dal p.bromoisopropilbenzene col joduro di metile e sodio, che riconobbe identico col cimene naturale (1).

Così il Widman fece sparire tutte le ipotesi già ammesse sulla supposta trasformazione dei derivati propilici in derivati isopropilici e viceversa; trasformazioni che in alcuni casi erano ritenute come irrefragabili.

Il Fileti stesso (2) in una breve nota convenne col Widman che il cimene e derivati contengono veramente, come i derivati cuminici, l'isopropile e non il p.propile.

Lo stabilire con sicurezza la costituzione del cimene aveva non poca importanza, perchè questo idrocarburo è in istretta relazione anche colla costituzione della canfora, la quale contiene appunto il nucleo isopropilico

$$\begin{matrix}CH^3\\ CH^3\end{matrix}\rangle C\langle$$

e può dare origine al cimene.

Acido omotereftalico, $C^6H^4\begin{cases}COOH\\ CH^2.COOH\end{cases}$. — Nel 1890 Fileti e Basso ottennero l'acido omotereftalico ossidando l'acido omocuminico di Rossi con acido nitrico. Ed in seguito il Fileti insieme a Baldracco otteneva lo stesso acido omotereftalico saponificando il cianuro di p.cianbenzile $C^6H^4\begin{cases}CN\\ CH^2.CN\end{cases}$.

---

(1) Fittig, Schaeffer e König (A., 149, p. 334) avevano già preparato il p.metilpropilbenzene boll. 178°-179°, ma lo credettero *identico* col cimene naturale. Il Widman invece nel 1891 dimostrò che questo idrocarburo di Fittig, Schaeffer e König non era identico col cimene naturale, e che quando era puro bolliva a 183°-184°.

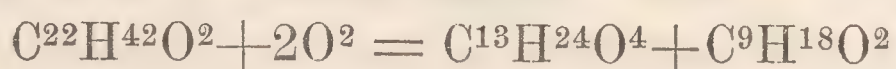
(2) " J. pr. Chem. ", t. 44, p. 150, e " Gaz. Chim. ", 1891, p. 95.

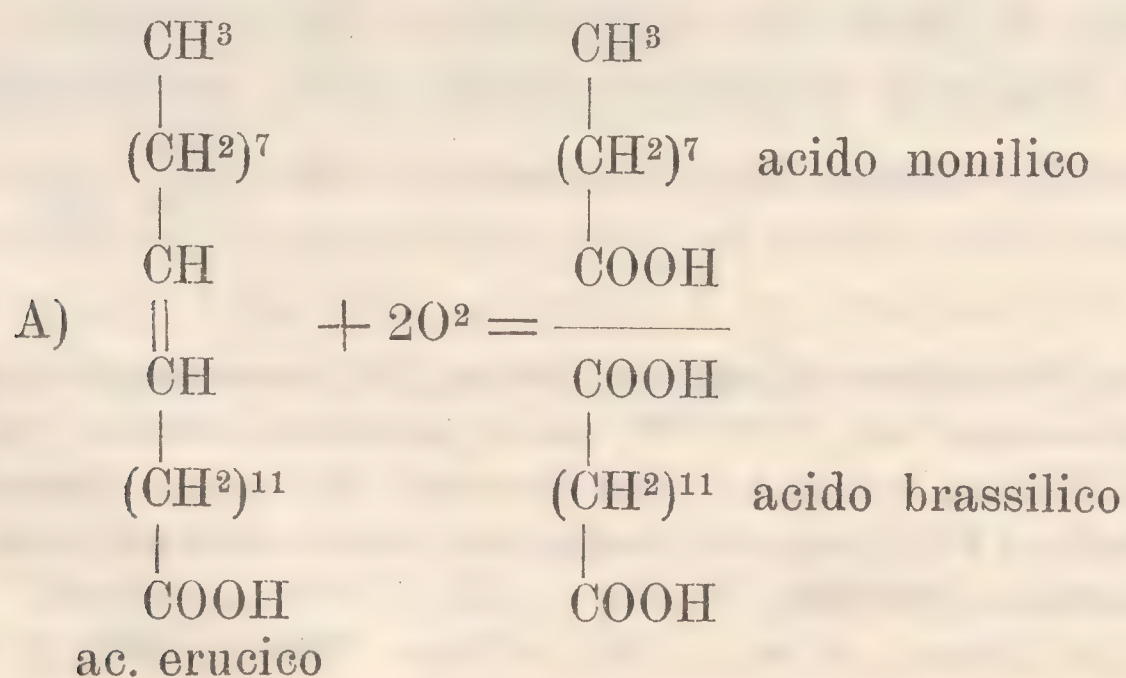
L'identità dei due acidi era dimostrata anche dal fatto che dava lo stesso acido nitroomotereftalico fusibile a 222°-223° ottenuto da Fileti e Cairola.

Dall'acido omotereftalico il Fileti ottenne un *acido ossindolcarbonico.*

L'*acido brassilico* $(CH^2)^{11}.(COOH)^2$ è, se si eccettui forse l'acido rocellico, l'acido della serie ossalica a peso molecolare più elevato. Fu poi ottenuto anche dal Grossmann. Fileti e Ponzio corressero la formola errata data da Haussknecht.

Ricerche sull'acido erucico. — Il lavoro che Fileti intraprese sull'acido erucico $C^{22}H^{42}O^2$ prima da solo, poi insieme al D.r Giacomo Ponzio, allora suo assistente, è interessante. Servì a stabilire la costituzione degli acidi erucico e brassidico, quale è ammessa ancora oggi nei migliori Trattati di chimica organica. L'acido erucico sotto forma di gliceride si trova nell'olio della *Brassica campestris*, nell'olio *dei semi di senape* e dei semi d'uva. I due chimici dimostrarono che i principali prodotti di ossidazione dell'acido erucico coll'acido nitrico sono: l'*acido brassilico* $C^{13}H^{24}O^4$ e l'*acido nonilico* $C^9H^{18}O^2$, e che inoltre si formano delle traccie di *dinitrononano* e piccole quantità di *acido arachico.* La reazione principale avviene quindi nel senso:

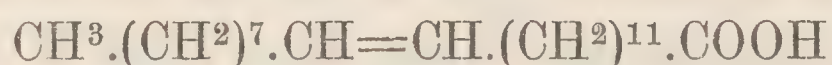
$$C^{22}H^{42}O^2 + 2O^2 = C^{13}H^{24}O^4 + C^9H^{18}O^2$$

ed in conseguenza si deve ammettere che nell'acido erucico il doppio legame sia tra il tredicesimo ed il quattordicesimo atomo di carbonio a contare dal carbossile, ed in tale ipotesi l'ossidazione avverrebbe nel modo seguente:

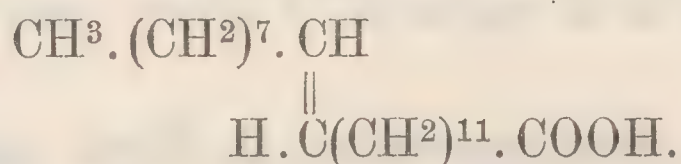
$$\begin{array}{llcll}
 & CH^3 & & CH^3 & \\
 & | & & | & \\
 & (CH^2)^7 & & (CH^2)^7 & \text{acido nonilico} \\
 & | & & | & \\
 & CH & & COOH & \\
A) & \| & + 2O^2 = & \overline{} & \\
 & CH & & COOH & \\
 & | & & | & \\
 & (CH^2)^{11} & & (CH^2)^{11} & \text{acido brassilico} \\
 & | & & | & \\
 & COOH & & COOH & \\
 & \text{ac. erucico} & & &
\end{array}$$

Invece la reazione secondaria (5 °/₀ circa dell'acido erucico) darebbe un poco d'acido arachico, già ottenuto da Fitz insieme ad acido acetico per fusione dell'acido erucico con potassa caustica.

Il Fitz (1) anzi da questo fatto ne dedusse che l'acido erucico contenesse il doppio legame tra il ventesimo e il ventunesimo atomo di carbonio, a partire dal metile:

$$CH^3.(CH^2)^{18}.CH{=}CH.COOH$$

Ma le ricerche di Baruch secondo le quali l'ossima dell'acido ossibrassidinico dà un prodotto (trasposizione di Beckmann coll'acido solforico) che si decompone in acido nonilico e acido amidotridecilico, conferma pienamente la formola strutturale suesposta di Fileti e Ponzio. Per l'acido erucico stabiliscono dunque la formola:

$$CH^3.(CH^2)^7.CH{=}CH.(CH^2)^{11}.COOH$$

che è quella oggi ammessa; senonchè per ragioni stereochimiche si rappresenta oggi con:

$$\begin{array}{l} CH^3.(CH^2)^7.CH \\ \qquad\qquad\quad \| \\ \qquad\qquad H.C(CH^2)^{11}.COOH. \end{array}$$

L'acido ossibrassidinico fu ottenuto dall'acido behenolico che è l'acido meno saturo corrispondente all'acido erucico, cioè $C^{22}H^{22}O^2$.

Il Fileti in un lavoro successivo riuscì pure a far conoscere la struttura dell'acido ossibeenico.

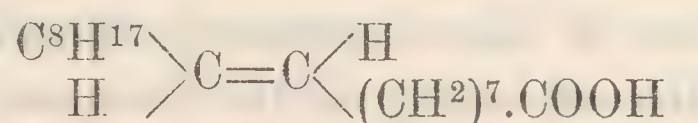
Dall'acido nonilico Fileti e Ponzio ottengono il dinitrononano $C^9H^{18}(NO^2)^2$ identico a quello ottenuto da Chiozza per l'azione dell'acido nitrico sull'essenza di ruta, cioè sul metilnonilchetone.

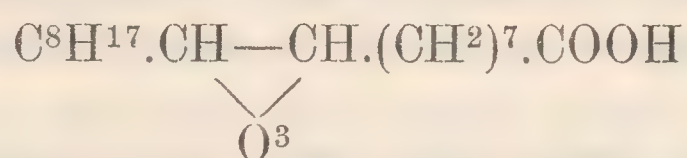
A proposito della costituzione dell'acido erucico ebbe il il Fileti una moderata polemica col Grossmann, il quale attribuiva ingiustamente a sè la prima idea della costituzione dell'acido erucico. Del resto l'acido erucico è un omologo dell'acido

(1) " Berichte ", 1871, p. 442.

oleico e per quest'ultimo acido si è poi ammessa una formola strutturale e stereochimica simile a quella data per l'acido erucico. Che il doppio legame fra due atomi di carbonio negli acidi $C^nH^{2n-2}O^2$ fosse spesso nel centro della molecola, fu già ammesso da lungo tempo per l'acido crotonico $CH^3CH = CH.COOH$, secondo le idee di Wislicenus (1888) (1).

Queste ricerche di Fileti sull'acido erucico hanno valore inoltre perchè servirono a consolidare appunto la formola di struttura ammessa per l'acido oleico:

$$\begin{matrix} C^8H^{17} \\ H \end{matrix} \Big> C = C \Big< \begin{matrix} H \\ (CH^2)^7.COOH \end{matrix}$$

La quale fu poi resa più sicura dall'ossidazione dell'ozonide:

$$\underset{\quad\diagdown\;\diagup\quad O^3}{C^8H^{17}.CH-CH.(CH^2)^7.COOH}$$

il quale fornisce aldeide nonilica $C^8H^{17}.CHO$, e l'acido aldeidoazelaico $OCH.(CH^2)^7.COOH$ (E. Molinari e Soncini, 1905 e 1906, e C. Harries, 1906).

Comunque lo si riguardi il lavoro sull'acido erucico è interessante.

Dall'acido clorobrassidico il Fileti per l'azione dell'acido solforico, passò all'acido ossibeenico. Ma qui è inutile entrare in minuti particolari.

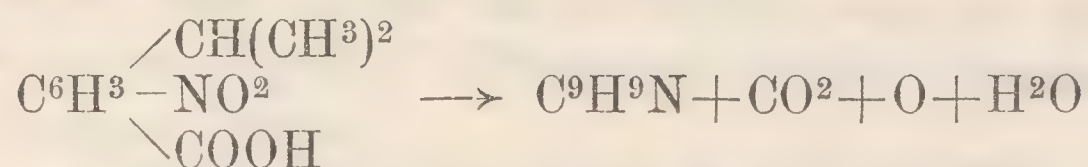
Sulla natura chimica delle essenze di Lauro ceraso e di Mandorle amare. — Era già da tempo stato ammesso che nelle essenze di lauro ceraso e di mandorle amare la maggior parte dell'acido cianidrico fosse combinata coll'aldeide benzoica sotto forma di nitrile mandelico o formobenzoilico $C^6H^5CH\Big<\begin{matrix} CH \\ CN \end{matrix}$, cioè di cianidrina benzoica. Il Fileti in questo breve, ma interessante lavoro studia l'azione dell'idrogeno nascente sulle due essenze, le tratta con zinco ed acido cloridrico ed ottiene una

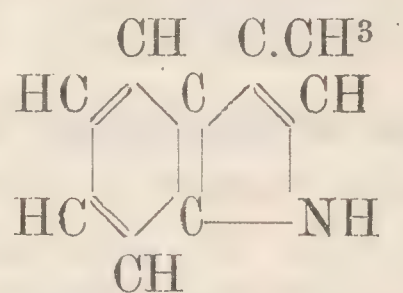
(1) A., 1888, t. 248, p. 281.

base $C^6H^5.CH^2.CH^2.NH^2$, cioè la feniletilamina. In queste condizioni dunque si sono addizionati H^4 e l'ossidrile fu sostituito da 1 at. di idrogeno. La stessa base egli ottenne riducendo con zinco ed acido cloridrico l'*amigdalina*, cioè il glucoside da cui derivano le due essenze. Restava così dimostrata la presenza del gruppo cianico nell'amigdalina e confermata la costituzione chimica di questo importante glucoside. È questo un lavoro elegante, semplice, dimostrativo.

Scatolo e indolo. — Interessante, fra gli altri suoi lavori di chimica organica, è quello della trasformazione dello scatolo in indolo e l'altro sulla sintesi dello scatolo. Due composti che si collegano coll'indolo, che si producono per decomposizione delle materie proteiniche e che trovansi per conseguenza nell'organismo animale.

Fileti ottenne lo scatolo o 2-metilindolo scaldando il 3-nitrocuminato di bario con barite e ferro o meglio distillando una miscela dei sali di bario degli acidi 3-amidocuminico e 3-nitrocuminico col doppio peso di idrato baritico (1); in tal modo si ha:

$$C^6H^3\begin{cases} CH(CH^3)^2 \\ NO^2 \\ COOH \end{cases} \longrightarrow C^9H^9N + CO^2 + O + H^2O$$

In maniera analoga riscaldando il vapore di cumidina con ossido di piombo ottenne l'indolo (2). Inoltre dimostrò che per la sola azione del calore lo scatolo poteva essere trasformato in indolo. Allo scatolo il Fileti assegnò la formola:

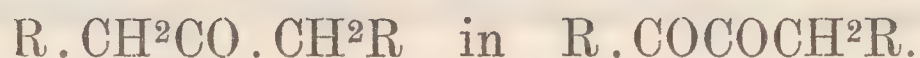
```
      CH   C.CH³
  HC//\C/\\CH
    |   ||   |
  HC\\/C——NH
      CH
```

e giustamente vi ammise il gruppo iminico.

Io credo che egli sia stato il primo ad assegnare questa formola di costituzione, ed invero termina la sua nota sulla

(1) " Gaz. Chim. ,, 1883, XIII, p. 358.
(2) " Gaz. Chim. ,, XIII, p. 379.

trasformazione dello scatolo in indolo colle parole: "La trasformazione dello scatolo in indolo conferma la formola da me data per lo scatolo, secondo la quale questo è da considerarsi come metilindolo „.

Trasformazione dei chetoni in α-dichetoni, cioè:

$$R.CH^2CO.CH^2R \quad \text{in} \quad R.COCOCH^2R.$$

Queste ricerche furono fatte dal Fileti insieme al suo assistente D.r Giacomo Ponzio.

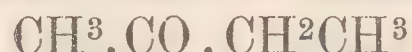
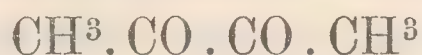
In una prima Memoria gli Autori dimostrarono che i chetoni $CH^3.CO.CH^2.R$ per l'azione dell'acido nitrico forniscono un α-dichetone insieme ad un binitroderivato corrispondente al radicale alcolico a peso molecolare più elevato. Ad esempio, dal metiletilchetone:

$$CH^3.CO.CH^2CH^3$$

ottennero il *diacetile*:

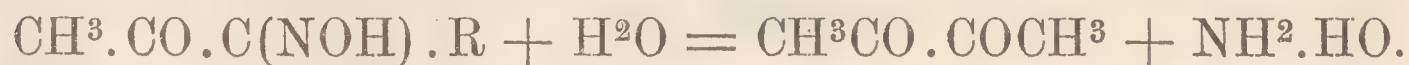
$$CH^3.CO.CO.CH^3$$

e *dinitroetano*:

$$CH^3.CH(NO^2)^2 \quad \text{ossia} \quad CH^3.CH(N^2O^4).$$

Questa reazione generale per i chetoni $CH^3COCH^2.R$ avviene in maniera tale che prima si forma dell'acido nitroso, il quale poi fornisce un nitrosochetone:

$$CH^3.CO.C=(N.OH), R \quad (A)$$

e questo per idratazione si trasforma in α-dichetone e idrossilamina:

$$CH^3.CO.C(NOH).R + H^2O = CH^3CO.COCH^3 + NH^2.HO.$$

Il Claisen, il quale aveva ammesso per gli isonitrosochetoni la formola $HON=CH.CO.CH^2R$ riconobbe più giusta la formola (A) proposta da Fileti e Ponzio. I quali estesero questa reazione ad un gran numero di chetoni alifatici anche della forma $R.CH^2.CO.CH^2.R$.

È interessante in questa reazione la formazione di dinitroidrocarburi o acidildinitroetani R.C(N^2O^4).CO.R.

Gli anni di maggior produzione scientifica del Fileti sono stati il 1886 e 1891.

A mio parere le ricerche migliori, per le quali il nome del Fileti resterà onorato e non dimenticato fra i chimici, sono quelle: sull'*acido erucico*, sul *cimene* e *derivati*, sull'*acido omotereftalico, sulla trasformazione dei chetoni in α-dichetoni, sull'amigdalina, sullo scatolo*, e *sulla densità di vapore del calomelano.*

Altri, in maniera più elevata, con parola più ornata e con maggiori particolari, dirà in altra occasione della vita e dei lavori scientifici del Fileti; io ho esposto senza pretesa alcuna ciò che mi fu dato di raccogliere, o che la mia memoria mi ha fornito. Se avrò errato, dirò sempre: *errare humanum est.*

Io non porrò certamente il Fileti fra i grandi chimici, sarebbe questa una esagerazione per tutti, ma tanto più per chi ha dedicato buona parte delle sue fatiche allo studio della storia della scienza. Però Egli deve aver onorato posto fra i distinti chimici italiani; egli poi è laudabile assai anche per aver guidato nei primi passi alcuni fra gli allievi suoi più distinti; fra i quali mi piace ricordare i Professori Giorgio Errera, Giacomo Ponzio, Gaetano Charrier.

Non è fuor di luogo che io ripeta qui quanto dissi in un altro elogio storico:

" Non so se io sia riuscito a dire degnamente di Colui a cui era oggi dedicata la nostra ora di riunione; noi tutti lo abbiamo conosciuto e la sua figura quale ci apparve per tanti anni nelle nostre adunanze, è ancora viva dinanzi al nostro pensiero; mandiamogli il mesto saluto dell'amicizia e l'omaggio che è dovuto a chi spese nel lavoro onesto la vita. La commemorazione di un defunto è sempre cosa triste; pure qualche dolcezza, qualche segreta luce di serenità, deve venirci oggi dal pensiero che chi lavorò, non muore del tutto: e anche quando il suo corpo sia polvere, e anche quando sul suo nome l'onda assidua del tempo sia passata, qualcosa di lui rimane, qualcosa che non può morire; ed è la parte, sia immensa, sia minima, ch'egli ha avuto nel continuo evolversi del progresso umano ".

E noi che al lavoro abbiamo consacrata la nostra vita, che

al lavoro continuo attingiamo la nostra forza e la nostra, sia pur minima, gioia, diciamo addio al collega che ha raggiunto l'eterno riposo.

Questi più o meno brevi elogi storici, non debbono essere monumenti innalzati alla vanità per la vanità, come diceva Pariset nel suo bell'elogio storico del grande anatomico e chirurgo italiano Antonio Scarpa, ma vi si debbono scorgere dei tributi di giustizia e di gratitudine alla memoria di uomini i quali, o hanno contribuito al progresso della scienza, oppure, forse, più umili, ma non meno utili, hanno operato pel bene pubblico coll'insegnamento. L'elogio di un uomo deve essere un piccolo quadro storico che rappresenti anzitutto la verità: ed io penso di aver detto la verità.

BIBLIOGRAFIA

1. *Sopra un glucosato di rame,* " Gaz. chim. „, 1875; " Berichte „, VIII, p. 441.

   Si sapeva che il glucosio forma un sale di rame, un glucosato (Worm-Müller e Hagen; Salkowsky), ma non a proporzioni ben definite. Fileti invece ottenne, aggiungendo dell'alcool ad una soluzione alcalina di glucosio e di acetato di rame, un *glucosato* $C^6H^6Cu^3O^6 + 2H^2O$; il quale quando è scaldato in presenza dell'acqua si decompone dando dei fiocchi verdastri.

2. *Sul cianuro di cianacetile,* " Gaz. chim. „, 1875.
3. *Bromocloruri di carbonio,* " Atti R. Acc. Lincei „, 1876, III (1 p.).
4. *Sulla costituzione della cianamide* (con Rob. Schiff), " Gaz. chim. „, 1877, p. 204; " Berichte „, 1877, t. X, p. 425.

   I due autori studiando l'azione del cloralio sulla cianamide e la trasformazione della cianamide in dietilcianamide, confermano per la cianamide la formola $CN.NH^2$ anzichè quella $C\langle{NH \atop NH}$ ammessa da alcuni.

5. *Sulla natura chimica delle essenze di lauro ceraso e di mandorle amare,* " Gaz. chim. „, VIII, p. 446 (5 p.).
6. *Ricerche sulla cinconina,* " Gaz. chim. „, IX, p. 67 (3 p.).
7. *Distillazione della cinconina sullo zinco.*

8. *Decomposizione del cloridrato di etilamina per mezzo del calore* (con Aug. Piccini), " Gaz. chim. „, 1879.
9. *Sopra una singolare decomposizione del cloridrato di feniletilamina,* " Atti R. Acc. Lincei „ (3), vol. III, 1879 (3 p.).
10. *Sopra un nuovo cumofenolo* (Comunicazione preliminare), " Gaz. chim. „, 1880 (1 p.).
11. *Nuovo cumofenol,* " Gaz. chim. „, 1880, X (2 p.).
12. *Contribuzioni all'analisi dei gas,* " Gaz. chim. „, 1880 (12 p.).
13. *Acido amidocuminico ed acido acetilamidocuminico,* " Gaz. chim. „, 1881, XI, p. 12 (6 p.).
14. *Peso molecolare del cloruro mercuroso,* " Gaz. chim. „, 1881, p. 341 (5 p.).
15. *Trasformazione dello scatol in indol e preparazione dell' indol,* " Gaz. chim. „, XIII, 1883 (3 p.).
16. *Sintesi dello scatol,* " Atti R. Acc. Scienze Torino „, 1883, XVIII (5 p.); " Gaz. chim. „, 1883 (5 p.).
17. *Sull'etere cumilico e sulla preparazione dell'alcool cuminico,* " Atti R. Acc. Sc. Torino „, 1884, XX (9 p.); " Gaz. chim. „, 1884 (9 p.).

    Il Fileti osservò, durante la preparazione dell' alcol cuminico per l'azione della potassa alcolica sull'aldeide corrispondente, che l'alcol cuminico distillato in presenza di piccolissime quantità di materie minerali straniere, si scinde in acqua ed etere cumilico, cioè $C^6H^4\left\langle\begin{matrix}C^3H^7 & C^7H^7\\ CH^2.O.CH^2 & \end{matrix}\right\rangle C^6H^4$, il quale alla sua volta si decompone verso 350° in aldeide cuminica e cimene.

18. *Sull'acido bromoftalico,* " Atti R. Accad. Lincei „, 1886, 2° sem.; " Gaz. chim. „, 1886 (4 p.).
19. *Sulla trasformazione dei derivati cuminici in cimenici e reciprocamente,* " Atti R. Acc. Lincei „, 1886 (10 p.); " Gaz. chim. „, 1886 (11 p.).
20. *Sull'ortoisopropilfenol,* " Atti R. Acc. Sc. Torino „, 1886, vol. XXI; " Gaz. chim. „, 1886, XVI (20 p.).
21. *Azione del solfocianato potassico sugli acidi benzoico e cuminico. Cuminamide,* " Atti R. Acc. Lincei „, 1886, 2° sem. (3 p.).
22. *Clorocimene e bromocimene dal timol. Riduzione ed ossidazione* (con Fr. Crosa), " Atti R. Acc. Lincei „, 1886 (12 p.); " Gaz. chim. „, 1886 (14 p.).
23. *Nitrobromo e nitroclorocimeni,* " Gaz. chim. „, 1888 (9 p.).
24. *Ossidazione dei cloro- e bromocimeni dal timol e dal cimene* (2ª memoria con Fr. Crosa), " Gaz. chim. „, XVIII (16 p.).
25. *Ascanio Sobrero (Cenno necrologico),* " Annuario della R. Università di Torino „, anno 1888-1889 (3 p.).

26. *Orthobromparatoluylsäure u. die Chlornitroparatoluylsäure* (con Fr. Crosa), " J. pr. Chem. „, 1889, 40, p. 256 (1 p.).
27. *Sulla p.propilisopropilbenzina*, " Gaz. chim. „, 1891, vol. XXI, P. I, p. 4 (17 p.).
28. *Sulla paradipropilbenzina*, " Gaz. chim. „, 1891, XXI, P. I, p. 22 (5 p.).
29. *Derivati dell'acido cuminico* (con Fr. Crosa), " Gaz. chim. „, 1891, XXI, P. I, p. 28 (13 p.).
30. *Sull'acido isopropilfenilglicolico e suoi derivati* (con V. Amoretti), " Gaz. chim. „, 1891, XXI, P. I, p. 41 (11 p.).
31. *Sugli acidi omocuminico e omotereftalico* (con G. Basso), " Gaz. chim. „, 1891, XXI, P. I, p. 52 (11 p.).
32. *Sulla preparazione dell'acido bromidrico* (con Crosa), " Gaz. chim. „, 1891, XXI, P. I, p. 64 (2 p.).
33. *Sulla costituzione del cimene*, " Gaz. chim. „, 1891, XXI, P. II, p. 95.
34. *Analisi del gruppo del bario*, " Gaz. chim. „, 1891, XXI, P. II, p. 365 (14 p.).
35. *Idrossilazione del cumonitrile* (con V. Abbona), " Gaz. chim. „, 1891, XXI, P. II, p. 399 (5 p.).
36. *Prodotti di ossidazione dell'acido p.dibromoomocuminico* (con L. Boniscontro), " Gaz. chim. „, 1891, XXI, P. II, p. 389 (10 p.).
37. *Ueber die Constitution des Cymols*, " J. pr. Chem. „, 1891, (2), 44, pp. 150-152.

    È in questa nota che il Fileti riconosce giuste le osservazioni del Widman, che cioè il cimene naturale è p.metilisopropilbenzene e non p.metilpropilbenzene come egli (ed altri chimici) invece prima credeva.
38. *Stereoisomeri dell'acido isopropilfnilglicolico*, " Gaz. chim. „, 1892, XXII, P. II, p. 395 (15 p.).
39. *Preparazione dello zincoetile* (con A. Cantalupo), " Gaz. chim. „, 1892, XXII, P. II, p. 387 (2 p.).
40. *Derivati dell'acido omotereftalico* (con E. Cairola), " Gaz. chim. „, 1892, XXII, P. II, p. 389 (6 p.); " J. pr. Chem. „, (2), 46, p. 563.

    Interessante, per quel tempo, secondo me, è il fatto che dalla riduzione dell'acido nitroomotereftalico con ammoniaca e solfato ferroso gli autori ottennero un *acido oxindolcarbonico* $C^6H^3{\begin{smallmatrix}\diagup CH^2 \diagdown \\ -NH \diagup \\ \diagdown COOH\end{smallmatrix}}CO$ che con polvere di zinco fornisce oxindolo.
41. *Intorno all'acido omotereftalico* (con Baldracco), " J. pr. Chem. „, 1893, 47, p. 532.
42. *Oxydation und Derivate der Erucasäure*, " J. pr. Chem. „, (2), 48, p. 72.

43. *Ueber Oxybehensäure,* " J. pr. Chem. „, (2), t. 48, p. 336; " Gaz. chim. „, 1893, XXIII, pp. 398-407.
44. *Ossidazione e costituzione dell'acido erucico* (con Giacomo Ponzio), " Gaz. chim. „, 1893, XXIII, pp. 382-398; " J. pr. Chem. „, (2), 48, p. 327.
45. *Ueber die stereoisomeren Isopropilfenilglycolsäure,* " J. pr. Chem. „, (2), 46, p. 560.
46. *Sulla costituzione dell'acido ossibeenico* (con G. Baldracco), " Gaz. chim. „, 1894, XXIV, P. II, p. 289; " J. pr. Chem. „, (2), t. 50, p. 378.
47. *Undecadione 2. 3.* (con G. Ponzio), " Gaz. chim. „, 1894, XXIV, P. II, pp. 290-299; " J. pr. Chem. „, 1894, (2), 50, p. 370.
48. *Ueber die Formel der sog. Oxybrassidinsäure (Ketobehensäure),* " J. pr. Chem. „, 1894, (2), 49, p. 200.
49. *Ueber das Molekularegewicht des Quecksilberchlorürs,* " J. pr. Chem. „, 1894, (2), t. 50, pp. 222-223.
50. *Sul peso molecolare del cloruro mercuroso (Risposta a V. Meyer),* " Gaz. chim. „, 1895, XXV, pp. 88-94; " J. pr. Chem. „, 1895, t. 51, pp. 197-204.
51. *Trasformazione dei chetoni in α-dichetoni* (con G. Ponzio), " Gaz. chim. „, 1895, XXV, P. I, pp. 233-245; " J. pr. Chem. „, 1895, t. 51, p. 498.
52. *Halogenderivate d. Stearinsäure, Oleinsäure u. Elaidinsäure* (con Baldracco), " Chem. Zeit. „, 1896, XX (1 p.).
53. *Azione dello zinco sull'etere clorometilico* (con A. De Gaspari), " Gaz. chim. „, 1897, XXVII, P. II, pp. 293-296.
54. *Sulla trasformazione dei chetoni in α-dichetoni* (con G. Ponzio), " Atti R. Acc. Sc. Torino „, 1896, vol. XXI (2 p.).
55. *Trasformazione dei chetoni in α-dichetoni. — II. Chetoni alifatici* $R.CH^2.CO.CH^2.R'$ (con G. Ponzio), " Gaz. chim. „, 1807, XXVII, P. II, pp. 255-270; " J. pr. Chem. „, (2), t. 55, pp. 186-202.
    È una memoria interessante.
56. *Trasformazione dei chetoni in α-dichetoni. — III. Chetoni alifatici* $CH^3.CH^2.CO.CH^2.R$ (con G. Ponzio), " Gaz. chim. „, 1898, XXVIII, P. II, pp. 262-279.
57. *Analisi di acque minerali.*
58. *Stanislao Cannizzaro (Parole commemorative),* " Atti R. Acc. Sc. Torino „, vol. 45.
59. *Guida all'analisi chimica qualitativa,* 1ª ed. nel 1877, 17ª ed. nel 1914.
    Questa operetta non è solamente una raccolta di tavole o tabelle come quelle del Will, ma alle tabelle il Fileti ha fatto precedere una vera introduzione all'analisi chimica, colle reazioni

dei singoli metalli, acidi, ecc.; per cui può riguardarsi come un Manuale di analisi. È adoperata in moltissimi laboratori di chimica.

60. Diversi lavori pubblicò inoltre quale collaboratore del Prof. E. Paternò e sono: 1° *Sopra alcuni derivati del fenolbenzilato* (“ Gaz. chim. „, 1873, III, pp. 121-119).

2° *Nuove ricerche sul fenolbenzilato* (“ Id. „, 1875).

3° *Esperienze per ottenere un acido cimencarbonico* (“ Gaz. chim. „, 1875, V, p. 30).

4° *Nuovo modo di formazione del fenolbenzilato* (“ Gaz. chim. „, 1875, V, p. 381).

5° *Sopra i due isomeri acidi amidocuminici* (“ Id. „, p. 383).

6° *Azione della luce sull'acido nitrocuminico* (“ Id. „, p. 385).

61. Il Fileti fece col suo Collega Prof. Guido Tizzoni diverse ricerche d'indole biochimica. Questi lavori furono fatti quando i due colleghi erano a Catania dal 1879 al 1881:

1° Tizzoni e Fileti, *Studi patologici e chimici sulla funzione ematopoetica.* Nota preventiva con data 1880 (“ Atti Acc. Gioenia di Scienze Naturali „, serie 3ª, vol. XV, 1880).

2° Tizzoni e Fileti, *Studi patologici e chimici sulla funzione ematopoetica.* 1ª comunicazione prev. letta all'Accad. dei Lincei, 2 maggio 1880, “ Trans. „, vol. IV, (3).

3° Tizzoni e Fileti, *Idem, idem.* 2ª comunicazione prev., “ Trans. Accad. Lincei „, vol. IV, (3).

4° Tizzoni e Fileti, *Idem, idem,* “ Mem. Acc. Lincei „, 1881 (serie 3ª, 1880-1881, vol. X, pp. 1-74).

5° Tizzoni e Fileti, *Influenza della luce sulla produzione dell'emoglobina.* Nota preventiva (“ Atti Acc. Gioenia „, Catania, 1880, vol. XV (5 p.), e “ Atti R. Acc. Lincei „, 1880 (1 p.)).

Torino, R. Università, 10 Gennaio 1915.

Il primo logaritmo Neperiano calcolato prima di Nepero.

Nota del Dr. G. VACCA

1. — Nelle ordinarie storie della Matematica non si dànno molte indicazioni intorno alle idee che possono aver condotto John Napier alla sua grande scoperta, certamente una delle più belle che l'uomo abbia fatto, non solo dal punto di vista pratico per il risparmio di tempo in calcoli faticosi o difficili, ma anche uno dei più importanti passi che hanno condotto alla scoperta dei metodi infinitesimali.

Generalmente si osserva che i ben noti passi di Archimede nel suo *Ψαμμίτης*, relativi alla proprietà di una progressione geometrica in base 10, possono aver dato la prima idea delle proprietà dei logaritmi. Numerose memorie sono state scritte su questa possibile origine dei logaritmi, e di esse ha recentemente dato una bibliografia Gino Loria (1).

2. — Io ho recentemente osservato che nella *Summa de Arithmetica Geometria*..... pubblicata in Venezia nel 1494 da frate Luca Paciolo si trova il seguente problema:

(1) Gino Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, 2ª ediz., Milano, Hoepli, 1914, pag. 757-970. Alle indicazioni date da J. B. Biot nel suo articolo del " Journ. des Savants „ del 1835 (un estratto del quale articolo si trova rilegato assieme ad una copia della rarissima edizione del 1614 della opera di Nepero, donata dall'Accademia di Edimburgo a Giovanni Plana, ed ora si conserva nella biblioteca dell'Accademia di Torino), mi sembra si debba aggiungere che merita pure di esser rilevato un passo della celebre *Arithmetica integra* stampata nel 1544 da Michele Stifelio, in Norimberga. Stifelio osserva che la curiosa proprietà che se si sommano gli esponenti (interi e positivi) di due potenze del 10, si ottiene il loro prodotto, potrà da qualche lettore diligente dell'avvenire, essere utilizzata. Una annotazione a lapis al passo dello Stifel, nella copia del libro conservata dalla biblioteca Nazionale di Torino (e che dalla calligrafia io attribuirei o al Plana o al Genocchi), dice: " Il *diligens lector* fu Nepero „.

Distinctio nona — Tractatus quintus — *De meritis*, n. 44 (fol. 181_r).

" *A voler sapere ogni quantità a tanto per cento l'anno, in quanti anni sarà tornata dopia fra prodotto e capitale, tien per regola 72 a mente, quale sempre partirai per lo interesse e quello ne ven, in tanti anni seranno radopiati el capitale a far capo a l'anno.*

" Exemplo. *Quando lo interesse è 6 per cento l'anno, dico che parta 72 per 6, ne ven 12, e in 12 anni dirai che la ditta quantità prestata cioè capitale sia quanto si voglia, sirà dopiato a 6 per cento a capo d'anno. E a 8 per cento, parti 72 in 8, ne ven 9, e in tanti anni se redopiarà ditta quantità, etc. in aliis* " (1).

I primi aritmetici rimasero assai maravigliati dell'esistenza di questo numero fisso 72.

Alcuni riprodussero la regola senza darne alcuna ragione. Tartaglia (2) la credette del tutto insussistente, avendone notato l'inesattezza se l'interesse è molto grande.

Lo stesso frate Luca a fol. 174 accenna al modo di comporre tavole di interesse composto, e probabilmente è dall'osservazione di tali tavole, compilate per i diversi saggi d'interesse (3) che egli, o forse qualche altro aritmetico prima di lui

---

(1) Ho riprodotto il testo sciogliendo soltanto le abbreviature, e introducendo il nostro sistema di punteggiatura, per render la lettura più facile.

Osservo poi che in una grande iniziale al seguente fol. 182 *verso*, si trova una xilografia la quale rappresenta un frate con un compasso in mano il quale ha un libro aperto innanzi, che potrebbe essere il ritratto del nostro frate Luca.

Merito a capo d'anno è ciò che oggi si chiama *interesse composto*.

(2) Nicolò Tartaglia, *La prima parte del general trattato di numeri et misure*, Vinegia, 1556, libro XI, cap. XI, fol. 193 *recto*: ... *la... conclusione... di Frate Luca dal Borgo... è falsa. Et per far vedere sotto brevità tal sua conclusione non esser generalmente vera, egli è cosa chiara che a ragione de 36 per cento all'anno a far capo d'anno ogni quantità saria doppiata in due anni perchè a partire il detto 72 per 36 ne vien 2 anni, hor se meritarai ducati 100 per 2 anni a ragion de 36 per 100 all'anno a far capo d'anno tu troverai che li detti ducati 100 in capo di detti 2 anni saranno tornati tra merito, et capitale ducati* $184 \frac{24}{25}$....

(3) *Del modo a sapere comporre le tavole del merito. ... Incomenciano le tavole del merito a capo d'anno a 5 per 100, principalmente qual è assai basso*

(poichè egli non si attribuisce tale scoperta), giunse a scoprire la esistenza di questo numero quasi costante 72.

Anche in trattati recenti di computisteria, si dà spesso, senza alcuna spiegazione, il numero fisso 70, in luogo di 72.

Volendo dare con notazione moderna la spiegazione di questo oramai semplice mistero, osservo che detto r l'interesse, ed x il numero degli anni in cui il capitale si raddoppia, si ha:

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)^x=2$$

ossia prendendo i logaritmi neperiani,

$$x \log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\log 2$$

ed in prima approssimazione, se r è piccolo, ponendo $\frac{r}{100}$ in luogo di $\log\left(1+\frac{r}{100}\right)$ si ha:

$$x=\frac{100 \log 2}{r}$$

Perciò il numero 72 di Luca Paciolo non è altro che una mediocre approssimazione del numero $100 \log 2 = 69{,}3$.

3. — Se questo problema di Luca Paciolo fu noto a Nepero, esso può avergli suggerito per l'appunto i logaritmi neperiani di preferenza a quelli decimali.

Forse una ricerca nei manoscritti di Nepero potrebbe dilucidare questo punto (1).

---

merito che comunemente possi essere, e chiamasi prima tavola. Poi fanne una tavola da $5\frac{1}{2}$ *per 100. E poi de 6, e così in fin a 20 per 100 che fia convenevolmente assài alto merito.....*

(1) In appendice alla traduzione dell'opera di Nepero, *The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms*, edita in Edimburgo nel 1889 a cura di W. Rae Macdonald, è data notizia dei manoscritti lasciati da Nepero. Questi perirono tutti in un incendio, eccetto però l'opera *De Arte Logistica*, pubblicata nel 1839 da Mark Napier. Non sono riuscito però a consultarla.

Il passo che rimaneva da compiere per trovare i logaritmi di tutti i numeri interi avrebbe potuto essere presso a poco il seguente.

Riconosciuta l'esistenza di un numero fisso A tale che un capitale impiegato all'interesse r si raddoppia in $\frac{A}{r}$ anni vien naturale il supporre che esista parimenti un numero fisso B tale che in $\frac{B}{r}$ anni si triplichi un capitale impiegato all'interesse composto ad r per 100. Ed allora si vede subito che un capitale impiegato per $\frac{A+B}{r}$ anni allo stesso interesse diventa 2×3 volte più grande.

Si vede così come al numero 2 corrisponde un numero fisso A, e al numero 3 il numero fisso B, così ogni intero e positivo abbia un corrispondente numero che potrà dirsi il suo logaritmo. E dal significato stesso dato al logaritmo di un numero appare evidente come il logaritmo del prodotto di due numeri sia la somma dei loro logaritmi.

Questa mia supposizione, se anche non fu quella che condusse tre secoli or sono John Napier alla sua immortale scoperta, potrebbe tuttavia essere oggi utilizzata per una teoria elementare dei logaritmi.

Roma, Luglio 1914.

Esiste un corpo pesante a densità sempre nulla?

Nota di GUIDO FUBINI

Sia data una sbarra pesante posta nell'intervallo $(0, a)$ dell'asse delle x. Sia, per fissar le idee, $a > 0$. Il peso di quel pezzo di sbarra che occupa l'intervallo $(0, x)$ per $0 \leq x \leq a$ sia $f(x)$. Supponiamo che in ogni punto la derivata $f'(x)$ *esista e sia finita*. Allora $f'(x)$ sarà la densità della sbarra nel punto x. I teoremi di Rolle e della media ci assicurano che, se è sempre $f'(x) = 0$, allora $f(x) = \text{cost}$. Ed, essendo $f(0) = 0$, è identicamente $f(0) = 0$.

Il teorema della media mi è sempre sembrato una proposizione, di cui le intime ragioni ci sfuggono. Esso, per restare nell'ambito del nostro esempio, afferma che la *densità media* $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nell'intervallo $(x, x+h)$ è uguale alla *densità* $f'(x+\theta h)$ in un punto $x+\theta h$ intermedio; che cioè *ogni rapporto incrementale* è uguale a una derivata, cioè al *limite di un altro rapporto incrementale.*

Pare naturale cercar di estendere tali definizioni e teoremi dagli intervalli (sbarre) alle figure piane (lamine pesanti) o alle figure dello spazio (corpi pesanti). Occupiamoci p. es. di una figura piana I; e con τ indichiamo sia un pezzo generico di I, sia l'area di questo pezzo (*).

Io dico che *f è una funzione additiva di τ, se* f *ha un valore determinato per ogni pezzo τ di* I (cioè ad ogni pezzo τ di I corrisponde un valore di f) *in guisa che, se τ è somma di due pezzi τ_1, τ_2 il valore* f (τ) *della* f *corrispondente al pezzo τ sia somma dei valori della* f *corrispondenti ai pezzi* τ_1, τ_2.

Questa definizione, che trova la sua origine nella teoria degli integrali multipli, ha servito (Lebesgue-Vitali) nelle recenti

---

(*) Vale a dire consideriamo soltanto pezzi τ che posseggono un'area τ. Ciò basta al nostro scopo. Ma si potrebbe anche parlare di area esterna, o di area interna.

generalizzazioni della teoria delle funzioni a variazione limitata, dei numeri derivati, ecc.

Ma noi vogliamo restare nell'ambito degli studii più elementari; e osserviamo p. es. che, se I è una lamina pesante, *il peso* f *di un suo pezzo* τ *è precisamente una funzione* f (τ) *additiva di* τ. È addirittura evidente che il rapporto $\frac{f(\tau)}{\tau}$ è la *densità media* nel pezzo τ; e che, se τ tende a ridursi a un punto A, il limite di tale rapporto sarà la *densità* nel punto A.

Si porrà quindi la definizione seguente:

Se A *è un punto di* I, *se* τ *è un pezzo di* I *contenente il punto* A, *il limite di* $\frac{f(\tau)}{\tau}$, *quando la massima corda di* τ *tende a zero, dicesi la derivata* f′ *di* f *nel punto* A (naturalmente quando si ammetta che tale limite sia *determinato e finito*).

Si noti che, mentre $f(\tau)$ è funzione dei pezzi τ, la sua derivata $f'(x, y)$ è funzione delle coordinate x, y del punto A, ove essa si calcola.

Ecco la domanda fondamentale:

Supposto che f (τ) *abbia in ogni punto* (x, y) *derivata* f′ (x, y) *determinata e finita, è la* f (τ) *determinata dalla derivata* f′ (x, y)*?*

In altre parole:

Dall'ipotesi che in ogni punto (x, y) *di* I *sia* f′ (x, y) = 0 *segue che* f (τ) = 0*?*

Se noi consideriamo $f(\tau)$ come peso del campo τ, tale domanda *si riduce appunto a quella che forma il titolo della presente nota.*

Io non sono riuscito a dare risposta esauriente a tali domande, che mi sembrano però di notevole importanza. E, per analogia col caso elementare delle funzioni di una sola variabile, mi sono proposto di generalizzare il teorema di Rolle e della media alle funzioni additive $f(\tau)$, ponendomi la seguente domanda:

Per le funzioni additive f (τ) *possedenti in ogni punto derivata determinata e finita si possono generalizzare i teoremi di Rolle e della media?* E se questi teoremi non valgono per ogni funzione additiva, *a quale classe di funzioni additive si possono essi generalizzare?* Così soltanto potremo capire le ragioni intime di tali teoremi; ma neanche a queste ultime domande mi è riuscito di rispondere completamente. Ho soltanto trovato una classe spe-

ciale di funzioni additive (che è del resto molto generale, perchè include, p. es., gli integrali multipli) per la quale si possono estendere tali teoremi. Riflettendo che nella dimostrazione classica del teorema di Rolle ha ufficio fondamentale il teorema che un punto interno ad un segmento divide il segmento in due parti, e che analogamente una retta (e non già un solo punto) può dividere una figura piana in parti, ho ammesso questa ulteriore condizione (che potrei chiamare di *continuità* sulle rette).

Suppongo che le funzioni additive $f(\tau)$, *di cui mi occupo, assumano, se* τ *è una striscia* (*) *di altezza* h, *un valore che tende a zero per* $h = 0$.

In tal caso, se f' esiste ed è finito in ogni punto di I, si può dimostrare:

Teorema della media. — *Se* $f(I) = kI$, *esiste almeno un punto di* I, *ove* $f' = k$.

Teorema di Rolle. — *Se* $f(I) = 0$, *esiste almeno un punto di* I, *ove* $f' = 0$.

Il primo teorema si deduce dal secondo, applicando quest'ultimo alla funzione $\varphi(\tau) = f(\tau) - k\tau$ [che soddisfa alla $\varphi' = f' - k$ ed alla $\varphi(I) = f(I) - kI$]. Questo primo teorema, nel caso del nostro esempio di una lamina pesante, si enuncia come nel caso di una sbarra:

La densità media di un campo I *è uguale alla densità in un punto di* I.

Dimostriamo dunque il teorema di Rolle. Naturalmente I si suppone essere un campo finito. Siano a ed $a + h$ il minimo e il massimo valore della ordinata y di un punto di I (potrei dire, volendo, il limite superiore o inferiore dei valori di y in I). Il valore $f(\tau)$ della f, relativo a quel pezzo τ di I, che è il luogo dei punti appartenenti ad I ed aventi un'ordinata non superiore ad y (per $a \leq y \leq a + h$), è una funzione $F(y)$ della y. Poichè per ipotesi $f(\tau) = 0$, la $F(y)$ sarà nulla per $y = a$ e per $y = a + h$. Per l'ipotesi fatta circa la funzione additiva $f(\tau)$ segue che $F(y)$ è continua. Se $F(y)$ è identicamente nulla, scelgo ad arbitrio un

(*) Vale a dire τ è quel pezzo di I che è compreso fra due rette parallele poste alla distanza h l'una dall'altra. Basterebbe del resto limitarci a striscie parallele all'asse delle x, e a quelle parallele all'asse delle y.

punto η interno all'intervallo $(a, a+h)$. Se invece $F(y)$ non è identicamente nulla, vi sarà nell'intervallo $(a, a+h)$ almeno un punto *interno* η, ove la $\varphi(y)$ riceve il suo massimo o minimo valore (cosicchè $a < \eta < a+h$). Se σ è un numero piccolo a piacere, che noi, per fissar le idee, sceglieremo minore od uguale ad $\frac{h}{4}$, nell'intorno $(\eta - \sigma, \eta + \sigma)$ del punto η vi saranno almeno due punti $y = b$, $y = b + k$ ove la $F(y)$ assume uno stesso valore. Sarà cioè $F(b+k) - F(b) = 0$. E, se τ è quel pezzo di I che è luogo dei punti di ordinata y compresa tra b e $b+k$, sarà $f(\tau) = F(b+k) - F(b) = 0$; cioè $f(\tau) = f(I) = 0$. Ripetiamo su τ il ragionamento ora fatto per I con l'unica avvertenza di scambiare l'ufficio degli assi delle x e delle y. Giungeremo a un campo I_1, tutto interno a τ e quindi anche interno ad I, tale che è ancora $f(I_1) = f(\tau) = 0$ e che la lunghezza della proiezione di I_1 sull'asse delle x o sull'asse delle y vale al più la metà della proiezione analoga del campo iniziale I (*).

Ripetendo per I_1 il procedimento già applicato ad I, e così continuando indefinitamente, troveremo una successione di dominii $I, I_1, I_2, \ldots$ tali che:

1° *Ogni dominio* I_n *è contenuto nel precedente e quindi anche in* I.

2° *Le proiezioni di ogni dominio* I_n *sui due assi non superano la metà delle proiezioni analoghe del precedente dominio.*

3° *Le* $f(I) = f(I_1) = f(I_2) = \ldots$ *sono tutte nulle.*

È evidente che i dominii I_n tendono a un punto A; o, più precisamente, che esiste in I uno e un solo punto A interno a tutti i dominii I_n. Poichè ogni corda di I_n tende a zero per $n = \infty$, la derivata f' in A sarà uguale al limite per $n = \infty$ del rapporto ottenuto dividendo $f(I_n)$ per l'area di I_n. Poichè è $f(I_n) = 0$ per ogni valore della n, tale derivata sarà nulla, come dovevasi provare.

(*) Si noti che la lunghezza $|k|$ della proiezione di τ sull'asse delle y non può superare 2σ cioè $\frac{h}{2}$, cioè la metà della proiezione di I su tale asse; e che, essendo τ interno ad I, la sua proiezione sull'asse delle x non può superare quella di I.

Relazione sulla Memoria del Dott. Prof. Gerolamo Cuneo: *Ricerche biochimiche sulla funzione ureopojetica e sulle alterazioni della composizione del sangue nell'epilessia.*

Le ricerche biochimiche del D.r G. Cuneo ci sembrano molto interessanti. Le due conclusioni principali che se ne possono trarre sono le seguenti:

1° la funzione ureopojetica nell'organismo epilettico si compie normalmente e quindi non può prodursi alcuna autointossicazione ammoniacale;

2° nel sangue estratto subito dopo l'accesso convulsivo, esiste una sostanza che ha tutte le proprietà delle albumose, mentre invece nel sangue estratto nel periodo intervallare o in quello di non epilettici questa sostanza non è presente.

Queste ricerche, se non risolvono completamente la questione, portano un buon contributo alla conoscenza della patogenesi dell'epilessia. Si possono dividere in due gruppi:

Le ricerche del 1° gruppo sono collegate ad altre anteriori che l'autore ha eseguito sopra un'ammalata di frenosi maniaco-depressiva, nella quale l'A. basandosi sopra circa 400 analisi, durante tre anni e mezzo, ha potuto nettamente stabilire che la fase d'eccitamento maniaco, che si verifica in questa malattia mentale, è prodotta dall'entrata in circolo di *carbonato ammonico* non trasformato in *urea*, per una insufficienza della funzione ureopojetica. Questo fatto fu dall'A. ben accertato con numerose esperienze, mediante le quali è riuscito a far rapidamente cessare l'eccitamento maniaco mettendo l'ammalato *in equilibrio* di *azoto* e a provocarlo introducendo con gli alimenti una quantità di azoto superiore a quella che l'ammalata era capace di eliminare con l'urina e con le feci. Essendochè altri autori attribuirono la causa morbosa dell'epilessia ad una *autointossicazione* ammoniacale per *acido carbonico*, si arrivava alla assurda conclusione che due malattie differenti (epilessia e frenosi maniaco-depressiva) erano prodotte da una stessa causa,

ossia dall'intossicazione ammoniacale. Preoccupato di questa contraddizione l'autore ha esaminato tutti i dati analitici forniti dagli autori precedenti, ed anche con esperienze proprie, dimostra che nell'epilessia non vi è autointossicazione ammoniacale. Questa esiste solamente nella frenosi maniaco-depressiva.

Le analisi chimiche fatte per studiare la funzione ureopojetica consistono specialmente nella determinazione dei rapporti tra l'azoto totale e l'azoto ureico, come pure tra l'azoto totale e l'azoto ammoniacale: è qui da notare che le determinazioni di azoto ureico furono sempre eseguite col metodo di Kjeldahl e non mai con i metodi gazometrici, tanto in uso nelle cliniche e che danno luogo ad errori.

Le ricerche poi del 2° gruppo riguardano esclusivamente la epilessia, e mettono per la prima volta in evidenza una *albumosoemia*, che accompagna l' accesso epilettico. Durante queste ricerche l'autore osservò che nell'organismo epilettico, in certe condizioni, si presenta un'ammoniuria rilevantissima, prodotta da un'*acidosi* e non da una autointossicazione ammoniacale; perchè scompare somministrando all'ammalato del carbonato sodico. Inoltre le feci contengono una quantità di *azoto* superiore alla normale, ed hanno costantemente reazione *acida*. Secondo l'A. dunque *possono esistere delle alterazioni nella funzione dell'assorbimento intestinale e in quelle complesse trasformazioni che le proteine alimentari subiscono nell'attraversare lo spessore della mucosa intestinale.*

Guidato da questo concetto l'A. fa un raffronto tra i sintomi che presenta l'accesso epilettico e quelli dell'albumosoemia sperimentale, descritta specialmente dal prof. Albertoni, e trova che vi è fra essi una grande rassomiglianza. Prende anche in esame le ricerche di Hofmeister, Gorrieri ed altri, e dimostra che tutte armonizzano col concetto dell'albumosoemia.

L'A. descrive le numerose analisi chimiche ch'egli ha fatto sul sangue applicando varî suoi metodi analitici opportunamente modificati e trova che il sangue estratto subito dopo l'accesso convulsivo contiene una sostanza che ha tutte le proprietà delle *albumosi*, mentre queste sostanze non si trovano nel sangue di bue, nè in quello di ammalati non epilettici o in quello di epilettici estratto nel periodo intervallare. Numerose sono le analisi chimiche di sangue eseguite; in esse l'A. dimostra che le *albumosi*

trovate non possono provenire da autolisi e che il concetto di *albumosi* deve essere tenuto nettamente distinto da quello di *peptoni*.

Questi importanti risultati non sono forse sufficienti a spiegare, in modo completo, la patogenesi dell'epilessia, ma vi portano un buon contributo. Essi indicano nell'A. una buona abilità sperimentale e coltura chimica non comune. Sono ricerche molto difficili e che meritano plauso ed incoraggiamento. E perciò noi siamo lieti di proporre che questa Memoria del D.r Gerolamo Cuneo sia accolta favorevolmente dall'Accademia e pubblicata nel volume delle *Memorie*.

Torino, 7 Gennaio 1915.

R. Fusari
I. Guareschi, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 17 Gennaio 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Chironi, Direttore della Classe, Carle, Pizzi, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta e De Sanctis in funzione di Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente 3 gennaio 1915.

Il Presidente, ricordando gli auguri da lui espressi nell'ultima adunanza per la guarigione del Socio Renier, si duole che essi sieno riusciti vani. Deplora la perdita di un collega che tanto onorò la nostra Accademia, e dice che la sua memoria sarà sempre luminosa nei ricordi dell'Accademia e viva ne' nostri cuori. Enumera le condoglianze giunte da corpi scientifici, da biblioteche, da direzioni di periodici, da singoli personaggi. Dice delle condoglianze da lui fatte alla vedova a nome dell'Accademia. Dà conto brevemente delle onoranze funebri rese al Renier, nelle quali parlò in nostro nome il Socio Sforza. Le parole dette in quella occasione dallo Sforza saranno inserite negli *Atti*.

La commemorazione del defunto viene affidata al Socio Stampini, che accetta.

Invitato dal Presidente, il Socio Pizzi legge la commemorazione del Socio corrispondente Fausto Lasinio, che è accolta dalla concorde approvazione dei presenti.

Il Socio Ruffini presenta il volume di Francesco Carandini, *Vecchia Ivrea* (Ivrea, Viassone, 1914), illustrandone ampiamente, con parole d'encomio, il contenuto.

Il Socio Chironi presenta un opuscolo del Senatore Carlo Ferraris, intitolato *La responsabilità dello Stato e degli Enti locali pei loro impiegati nelle legislazioni germaniche* (estratto dalla " Rivista di diritto pubblico ", Milano, Soc. editr. libraria, 1914).

Per la inserzione negli *Atti* il Socio Stampini offre una nota di Massimo Lenchantin de Gubernatis sopra un *Epigramma sepolcrale*.

Pure per gli *Atti* il Socio De Sanctis presenta una nota di Giulio Giannelli, intitolata *I Romani ad Eleusi* (I. *L'età repubblicana*, II. *Da Augusto ad Adriano*).

In seduta privata la Classe procede alla elezione del suo Segretario e riesce eletto, salvo l'approvazione sovrana, il Socio Prof. Comm. Ettore Stampini.

LETTURE

L'addio della Reale Accademia delle Scienze alla salma di Rodolfo Renier

del Socio GIOVANNI SFORZA.

Un potente ingegno, un forte carattere, un nobile cuore si è spento a soli cinquantasette anni; perdita grande per la nostra letteratura e per l'Italia.

In lui la coltura intellettuale vastissima fu sempre in pieno accordo con gli affetti più squisitamente gentili; accordo che illuminò la sua vita di luce mite e serena. Pochi uomini conobbi che avessero così spontaneo e costante il sentimento del bene; così salda la religione del dovere; così vivo il culto per tutto quello che forma la gloria dell'umano intelletto; che sentissero al pari di lui l'amicizia. Ogni azione sua fu virtuosa; si pigli come marito o come padre, come cittadino o come insegnante.

Ecco perchè lo circonda e lo accompagna l'universale compianto; ecco perchè nella bara che accoglie innanzi tempo Rodolfo Renier sentiamo che con la sua salma resta unita una parte grande di noi e de' nostri affetti; di noi che l'amammo riamati, di noi che non sappiamo rassegnarci a vederci divisi da lui.

Rodolfo, a nome della Reale Accademia delle Scienze, che ti ebbe due volte segretario operoso, e che ti riguardò sempre come uno de' suoi ornamenti più belli, ti do l'ultimo addio: te lo do col cuore straziato dall'angoscia.

Dormi in pace il sonno della morte, amico indimenticabile. Iddio, nella sua misericordia, dia spesso all'Italia degli uomini che ti somiglino.

FAUSTO LASINIO

Commemorazione del Socio ITALO PIZZI

I.

Un'altra perdita recente, e non meno dolorosa delle altre, lamentano oggi gli studi orientali, quella di Fausto Lasinio, professore di lingue semitiche comparate nell'Istituto Superiore di Firenze (1).

Nacque a Firenze il 1° di dicembre del 1831 di antica e nobile famiglia venuta da Treviso, nella quale erano vivissimi l'amore e lo studio per le arti belle. Fece i primi studi a Prato in quel celebre Collegio, dimostrandovi amore ardentissimo per gli studi letterari. L'essersi poi dato agli studi orientali, e in particolare ai semitici, ebbe occasione più tardi, come egli stesso raccontava, da ciò, che, avendo inteso dire da taluno essere la lingua ebraica difficilissima da apprendere, andato a casa (era tornato ancor fanciullo in famiglia), disse al padre, quasi scherzando, che difficile non doveva essere, e che allora il padre l'incoraggiò ad intraprenderne lo studio, dicendogli: Próvati, adunque, e riuscirai! — Vi si provò e vi riuscì, e come vi riuscì! perchè, quand'ebbe poi agio, negli anni, di far prova di sè con gli scritti e col lungo insegnamento, fu reputato e qui e fuori uno dei più eminenti cultori, quale era veramente, di quegli studi. Ebbe per maestro Angelo Paggi, che egli ricordava sempre con affetto e venerazione grandissima, lodato autore d'una grammatica ebraica e caldaica; e frutto di quei primi studi, quando era fra i diciotto e i vent'anni, furono alcune

(1) Il 20 settembre del 1914 moriva a Napoli il Prof. Michele Kerbaker, valentissimo sanscritista. Del '13, moriva a Padova il Prof. Emilio Teza, conoscitore di molte lingue e letterature.

poesie in ebraico e in caldaico, e un inno siriaco in occasione della solenne incoronazione dell'immagine della Vergine in Firenze. È composto nel metro delle antiche omelie siriache dei patriarchi della Chiesa sira in lode di Santi, e l'accompagna una traduzione latina. Ma perchè allora non si trovava in Firenze tipografo abile a ciò, egli stesso, il pertinace giovanetto, fece da compositore-tipografo portandosi a casa in un sacchetto i caratteri siriaci tutti confusi e mescolati insieme, onde, ostinatosi nell'improbo lavoro che durò una notte intera, ne ebbe tal male di capo da dover rimanere in letto tutto il giorno appresso. Cotesto soleva egli piacevolmente raccontare parlando, come faceva spesso volentieri, della sua adolescenza e della sua età giovane.

Persone che ne indovinarono presto l'ingegno e l'attitudine singolare, lo presentarono al Granduca che prese a proteggerlo con particolare affetto; ed egli, tra i non pochi aneddoti di quel tempo, raccontava anche questo. In un giorno festivo dell'anno, andato dal suo munifico protettore, gli lesse certa sua poesia in lingua caldaica col titolo: " Cantico per la redenzione nazionale ai giorni di Ciro Re „, accompagnata da una traduzione italiana. Erasi allora del 1849, e perchè in essa il giovane poeta, nel suo caldaico fatto in Italia, manifestamente alludeva al riscatto italiano, il Granduca l'interruppe e accarezzandolo nel viso gli disse amabilmente sorridendo: Ah! Faustino, t'intendo, sai? t'intendo! Ma non gli tolse la protezione, che anzi, nel 1852, gli affidò onorevolissimo ufficio nella Biblioteca Laurenziana, e poi, nel 1855, perchè sempre meglio potesse attendere agli studi prediletti, lo mandò a Roma. A Roma rimase due anni, e là, sotto la guida del monaco maronita Matteo Shahvan, imparò l'arabo e s'approfondì nel siriaco. Senonchè lo studio indefesso e l'applicazione intensa ben presto ebbero ragione della sua salute, ed egli gravemente infermò, onde fu ricondotto in patria trasportato su d'un veicolo appositamente ordinato, con molle e cinghie per render meno sensibili le scosse del viaggio lungo e travaglioso.

Ricuperata, dopo lungo riposo, la salute, andò nel 1858 professore di greco e di ebraico all'Università di Siena, donde poi, cioè nell'anno successivo, ritornò a Firenze per insegnarvi letteratura indo-europea. A questi studi, e in particolare a quello del sanscrito, aveva già atteso sotto la guida dell'abate Bar-

delli quand'era alla Laurenziana. Ma perchè la letteratura e la civiltà semitica maggiormente lo allettavano e a queste si applicava sempre con maggior lena, nel 1862 fu chiamato a professare questa importante e ardua disciplina nell'Università di Pisa, dove stette fino all'anno 1873. Dal 1873 fino all'anno 1914, or ora tramontato, in cui serenamente si spense il 27 di ottobre nell'età d'anni ottantatrè, rimase a Firenze insegnando nel patrio Istituto di Studi Superiori, circondato dalla stima degli amici e dei discepoli. Dolorosi i due ultimi anni della sua esistenza! La tarda età e la malattia penosa l'avevano costretto, lui già così laborioso e irrequieto nella sua instancabile operosità, a non far nulla, lui, che poco prima dell'ultima ricaduta mi scriveva: " Ho ripreso i miei corsi all'Istituto, e mi sento tanto bene da parere e da credermi un giovanotto! „. E toccava gli anni ottanta!

Ebbe in vita cospicue e ben meritate onorificenze, perchè fu Socio corrispondente di questa Accademia, di quella dei Lincei e dell'Istituto Lombardo, Segretario dell'Accademia della Crusca, succedendo a Cesare Guasti, Socio onorario e Presidente della Società Asiatica italiana, Socio della Società Orientale tedesca di Halle e di Lipsia.

II.

Lunga e varia è la serie delle sue molte opere, delle quali non mi è dato dir qui partitamente; e sono, per la maggior parte, brevi ma importanti dissertazioni, articoli concernenti le letterature e le lingue orientali, prelezioni ai vari corsi tenuti a Firenze e a Pisa, recensioni di libri, descrizioni e riassunti di codici, specialmente ebraici, per commissioni di dotti e di studiosi stranieri. Sono scritture di molta e riposta erudizione, di lunga e paziente indagine. Altre invece, di maggior lena e di maggior mole, meritano anche particolar menzione, perchè, nel 1851, in collaborazione col suo maestro Angelo Paggi, diede fuori, tradotti in una nitida prosa italiana, gl'inni funebri di Sant'Efrem del IV secolo, che fu il maggior poeta della letteratura siriaca, tutti pervasi da un profondo e melanconico e rassegnato sentimento religioso, che la Chiesa sira canta anche

ai nostri giorni nell'accompagnamento dei defunti. Imprese più tardi la pubblicazione, la prima in Europa, del testo arabo del commento medio di Averroè alla Retorica di Aristotele, alla quale fece seguire la versione ebraica di Todros Todrosi. Quella fu opera poderosa, alla quale doveva o dovrebbe star degnamente accanto il Vocabolario delle voci italiane di origine orientale, da lui lungamente curato e accresciuto, ma rimasto incompiuto e inedito. Ove qualche valentuomo lo riordinasse e pubblicasse, farebbe opera utile non solo agli studiosi, ma anche a tanti e tanti altri del così detto gran pubblico, perchè è troppo noto come, in questa parte poco conosciuta di studi, massime ora che abbiam da fare coi Musulmani, molti si abbandonino, etimologizzando a vanvera con l'arabo, alle più errate fantasticherie. Gli etimologisti *ad foedissima usque ludibria labuntur!*, diceva, se non erro, Quintiliano. Intanto, altro vasto e nobile campo alla molta e buona operosità del Lasinio fu aperto dalla commissione, datagli dal Ministero, di compilare e pubblicare il catalogo dei molti manoscritti orientali delle biblioteche italiane. Il lungo e paziente lavoro richiese tempo e indagini infinite. Pur tuttavia, in collaborazione con altri studiosi italiani, in bella e nitida edizione, a spese del Governo, uscirono, scrupolosamente riveduti e corretti da lui, i cataloghi dei codici siriaci e arabici e persiani di Firenze, degli ebraici e rabbinici di Parma, degli altri tutti, di più lingue orientali, di Roma, di Napoli, di Palermo, d'altre città italiane.

III.

Toccò, nella lunga vita, gravi e dolorose sventure, la morte della sposa carissima, la perdita immatura del figlio Paolo, ingegno aperto alle belle arti, e quella di una tenera e affettuosa figlia, Ettina. Ma ne seppero consolare gli ultimi giorni assistendolo amorosamente i degni figli superstiti, Ernesto professore, e Paolina. Nel resto, si può dire che ebbe calma e tranquilla e serena la vita. Ma fu bello e lieto in particolare tutto quel tempo che stette, e furono più di vent'anni, a Pisa. Era allora egli, quand'io ebbi l'onore e la fortuna di frequentare le sue lezioni d'arabo e di siriaco in quell'Università, nel vigore

dei trentacinque anni, ed erano di questa stessa età gli altri illustri colleghi di lui, Domenico Comparetti, Alessandro D'Ancona, Emilio Teza, e noi, loro discepoli, nell'ardore baldo e fidente dei venti. Con tali maestri possiam ben dire che vivevasi insieme il giorno e la sera, mentre stavano alquanto in disparte, perchè più attempati, ma di lontano con affetto paterno ci sorvegliavano, Michele Ferrucci, Ferdinando Ranalli, Pagano Paganini, Paolo Marzolo. Ma dall'animo nostro non si cancellerà mai la memoria, oltre che delle lezioni impartiteci in toga e in berretto professorale (così allora si usava) all'Università, delle serate al Caffè Burchi in Lungarno, delle passeggiate domenicali a Porta alle Piagge, delle conversazioni alla Scuola Normale Superiore in Piazza dei Cavalieri, tutti luoghi di solito convegno tra studenti e professori. Era un animoso e concitato discutere e battagliare intorno ad ogni argomento con rispetto e reverenza, sì, da parte nostra, ma pur con fidente famigliarità, quando questi nostri maestri, ben lontani e alieni dalla sicumera di tanti fra i successori, davano amicamente del tu ai loro alunni, li visitavano nella loro stanza quand'erano malati (così ho io visto più volte e il Lasinio e il D'Ancona), proponevano a loro spese premi cospicui ai migliori, procacciavano ai più modesti di fortuna lezioni private presso ragguardevoli famiglie pisane, li soccorrevano del proprio nel pagamento delle tasse scolastiche. E ciascuno di noi, intanto, imparava molto; ma, ciò che più importa, imparava e apprendeva anche quel costume schiettamente e nobilmente democratico del maestro italiano che, negli alunni suoi, intravvede altrettanti compagni di lavoro, altrettanti figli dell'affetto, altrettanti eredi d'una ricchezza che non perisce, che non diminuisce, ma vieppiù s'accresce quanto più va spartita fra molti, la ricchezza del sapere.

Epigramma sepolcrale.

Nota di MASSIMO LENCHANTIN DE GUBERNATIS

Chi conosce i carmi sepolcrali del Bücheler e le altre sillogi recenti, esse pure pregevolissime, del Cholodniak (1) e dell'Engström (2), difficilmente supporrà che nella breve elegia, pubblicata molto bene dal Giglioli (3), si trovino espressioni commosse di sentimenti in realtà provati e non i pensieri comuni, le immagini incolori, quelle frasi insomma appartenenti al formulario delle iscrizioni funerarie. Non ha certo il piccolo carme l'importanza dell'oramai celebre epitaffio di Allia Potestas, con quella particolare commozione che trapela tra i versi imitati da fonti classiche e non di rado malamente rabberciati dall'autore, il quale, pur mancando di coltura sufficiente, è riuscito a rappresentare, con arte un po' rozza, il dolore sincero per la morte della sua liberta e l'affetto intenso che lo legava a lei.

L'elegia del Giglioli, sebbene non differisca gran fatto dalle epigrafi di analogo argomento, si deve ritenere, per la scelta dei vocaboli, per l'elevatezza del pensiero e per la tecnica del verso, composta da persona discretamente colta.

Con la cooperazione dei professori Branzoni di Todi e Possenti di Terni, il Giglioli potè avere, per il Museo Nazionale Romano, la lapide preziosa, che fu scoperta a fiore di terra nel

---

(1) *Carmina sepulcralia Latina epigraphica*². Petropoli 1904.

(2) *Carmina Latina epigraphica post editam collectionem Buechelerianam in lucem prolata*. Lipsiae 1912.

(3) *Notizie degli scavi di antichità*, anno 1913, fasc. 10 (pubblicato il 25 aprile 1914) p. 361.

territorio di Cesi. La lastra marmorea misura m. 1,215 × 0,68 e presenta la cornice fortemente modinata di m. 0,12, rotta in vari pezzi tutti conservati, tranne l'angolo superiore sinistro, senza però alcun danno per l'integrità del testo (1).

Ed ecco ora il testo critico, che riproduco, con lievissimi mutamenti, dal Giglioli che ha dato anche il facsimile del documento (2):

L(ucius) Sentius L(uci) G(aiae) lib(ertus) Lucrio sibi et Pontiae L(uci) f(iliae) Proculae ux(ori) | et L(ucio) Sentio L(uci) f(ilio) Pietati — vix(it) ann(is) XVII, m(ensibus) IX, die(bus) VII —| et Speratae libert(ae) nutrici fili.

Hóc quícumque legis tituló, rogó, carmen amice
  perlege; sic vitae commoda multa ferás.
Sentius hic iaceo Pietas cognomine dictus
  praereptusque patrí flore vigente meo.
artibus ingenuis studió fórmatus honestó,
  inter et aequales gratus amóre fuí.
duodevigintí natáles ni numerarem,
  surrupuit menses tres mihi Luna suós.

in fro(nte) p(edes) XIIII; in agr(o) p(edes) XII.

Colui che pose la lapide fu dunque il liberto *Lucius Sentius Lucrio*. È noto che un liberto di due patroni, se questi non avevano il medesimo prenome ed il medesimo gentilizio, o prendeva il prenome dell'uno e il gentilizio dell'altro, oppure il prenome e il gentilizio di uno solo dei due (3). Come *cognomen* serviva il nome ch'aveva da schiavo. L'affrancato di donna, il *Gaiae libertus*, prendeva invece il gentilizio della patrona e

(1) Tolgo questi dati dal fasc. citato delle *Notizie degli scavi* p. 361.

(2) L'asindeto *Luci Gaiae libertus* non ha nulla di eccezionale: cfr. Dessau *Inscript. Lat. selectae* nn. 5262, 7483, 7889, 7937, ecc. Nello sciogliere le abbreviature ho dato ai nomi in *-io* della seconda declinazione la desinenza del gen. ī, per le ragioni esposte a p. 311.

(3) Cagnat *Cours d'épigraphie latine*[3] p. 83.

il prenome del padre di questa (1). Ma cotesto *Lucius Sentius Luci et Gaiae libertus Lucrio* si veniva a trovare in posizione speciale, giacchè era affrancato da un uomo e da una donna. Egli del patrono prese non solo il prenome *Lucius*, ma anche il gentilizio *Sentius*; cosa questa che risulta evidente dal fatto di non aver egli indicato nella espressione *Luci ... libertus* il gentilizio del patrono, che avrebbe regolarmente dovuto ricordare, quando non fosse stato *Sentius* (2). Forse, e questa è semplice ipotesi, i due patroni erano fratello e sorella, i quali, ereditato il servo *Lucrio*, di comune accordo lo resero libero. Si può ammettere senza difficoltà che uno schiavo per successione passasse in eredità a varie persone.

Nel prescritto vuole essere ancora notata la sigla *V(ivit)*, posta a sinistra di *Speratae*, per indicare che la persona, che portava questo nome, non era ancor morta, quando veniva inciso l'epitaffio.

Per la descrizione delle lettere e degli altri segni, rimando all'articolo del Giglioli. Gli apici sono usati bene, salvo che nell'ultima di *rogó*, e si trovano anche sulla lettera *i*: v. 1 *quícumque*, v. 4 *patrí*, v. 6 *fuí*, v. 7 *duodevigintí*. Questa constatazione assume una certa importanza, giacchè l'apice su *i* s'incontra solo nelle iscrizioni del II o III secolo (3). Notevole ancora la lettera Ͻ, segno della *C* inversa = *Gaia*, su cui importantissime le testimonianze di Quintiliano e di Velio Longo, che è forse superfluo ricordare. Il primo (I, 7, 28) scrive: *quid? quae scribuntur aliter quam enuntiantur? nam et Gaius* C *littera significatur, quae inversa mulierem declarat, quia tam Gaias esse*

---

(1) Ibd. p. 81.

(2) Cfr. p. e. *CIL* XIV, 2090 *Q. Caecilius Cn. A. Q. Flamini leibertus* ... = Q. Caecilius libertus Cn. et A. Caeciliorum et Q. Flamini. Il liberto qui, accanto ai prenomi *Cn.* e *A.*, non pose il gentilizio che aveva assunto, mentre invece ricorda il gentilizio del terzo patrono *Q. Flaminius*, di cui aveva preso il prenome. Più calzante è *CIL* XIV 3688, 3687 *M. Varenus Ͻ et M. Lartidi l. Diphilus*, in cui l'affrancato, avendo assunto il gentilizio della patrona *Varena*, ricorda il gentilizio del patrono *M. Lartidius*.

(3) Weissbrodt *Zur lateinischen epigraphik und grammatik*, in *Phil.* XXXXIII (1884) p. 444; Stolz *Latein. Grammatik*[4] p. 31. Non ho potuto vedere Christiansen *De apicibus et i longis inscriptionum Latinarum*, 1889.

vocitatas quam Gaios etiam ex nuptialibus sacris apparet. Il secondo *GL* VII, p. 53, 6 K afferma: (*K. ... dicunt*) *non magis ..... in numero litterarum esse oportere, quam illam notam, qua centuria, et C conversum, quo Gaia significatur; quod notae genus videmus in monumentis, cum quis libertus mulieris ostenditur: Gaias enim generaliter a specie omnes mulieres accipere voluerunt.* Il Hübner *Exempla scripturae epigraphicae Latinae*, p. LXXIII, accennato alle testimonianze sopra allegate, aggiunge: " ..... forma angulata ❭ (che è quella appunto della nostra lapide) potest esse vetustior, cum rarior sit ".

È appena necessario notare (nel prescritto lin. 3) il gen. *fili* invece di *filii.* Le iscrizioni e la metrica dell'epoca repubblicana attestano la forma -*ī*, contrazione di -*ii*, per i temi in -*io* (1). Orazio e, salvo un'eccezione, Virgilio hanno ancora -*i*. Le forme in -*ii* non entrarono in uso che verso la fine del regno di Augusto e si generalizzarono sotto Domiziano. Cotesto gen. *fili* costituisce adunque un indizio prezioso, non tanto per la datazione approssimativa dell'epigrafe, quanto per determinare le tendenze letterarie dell'autore.

Nel primo distico abbiamo uno dei soliti inviti al viandante, perchè volga un pensiero al tumulo sotto cui riposano i morti.

Nel v. 1 *hoc quicumque legis titulo*, è degno di nota l'abl. di luogo *hoc ..... titulo*, senza la preposizione *in*, che è uso frequente nei poeti e nei prosatori che li imitano: Enn. *ann.* 292 (Vm.) *densantur campis horrentia tela virorum*; 178 *it nigrum campis agmen*; Tibull. I, 5, 53 *herbas ..... sepulcris quaerat*; Ps. Verg. *Aetn.* 611 *ardebant agris segetes* (2).

Nel v. 2 appare un po' insolita l'espressione *sic vitae commoda multa feras.* Si sopportano gli *incommoda*, non i *commoda*: cfr. Ter. *Hec.* 840 *multa ex quo fuerint commoda, eius incommoda aequomst ferre.* Ma *fero* assume anche il significato di conseguire: cfr. Plaut. *Merc.* II, 3, 105 (443 Lindsay) *quod posces feres*; Cic. *pr. Planc.* 38, 92 *Fructus ... non ... laetos et uberes, sed magna acerbitate permixtos tulissem.*

---

(1) Cfr. su questo argomento STAMPINI *Trattato della ortografia latina* pp. 19 sg. e 60.

(2) DRAEGER *Historische Syntax der latein. Sprache*² I, p. 525.

Nel v. 3 *Pietas cognomine dictus* si ha, salvo il cognome, una delle solite espressioni tralaticie, di cui non mette conto citare esempi: cfr. tuttavia *CE* 863 Büch. *d(ictus) cognomine Pandus. Pietas* masc. ricorre nelle iscrizioni 1551, 2096, 2644, 2844 degli *Exempla inscriptionum Latinarum* del Wilmanns (cfr. i nn. 5446 e 9052 in Dessau, *Inscript. Lat. selectae*); *Pietas* femminile nelle iscrizioni 1181, 2036, 2447 (cfr. i nn. 1066, 3347 in Dessau, op. cit.).

Nel v. 5 *artibus ingenuis studio formatus honesto*, chi guardasse superficialmente, potrebbe intendere *artibus ingenuis* per dat. di scopo e *studio honesto* per abl. della causa efficiente, o viceversa *artibus ingenuis* per abl. e *studio honesto* per dat. Ma entrambe le interpretazioni, e la seconda anche per il senso, sono inaccettabili, giacchè *formare* non risulta mai costruito col dat. di scopo, ma con l'acc. retto da *in* o *ad*. Senza dubbio *artibus ingenuis* è abl. come in Colum. XI, 1, 13 *complurium agrestium formatus artibus*, dove *formatus* = *institutus* (cfr. l'espressione di Giustino VIII, 2, 12, citata dal Georges *Ausführl. Handwört.*[8]: *ingenia ... legibus institutisque formata*); e similmente quale altro abl. deve ritenersi *studio honesto* con lo stesso ufficio che si ha in Horat. *sat.* I, 4, 121 *Formabat puerum dictis*, e inoltre *epist.* II, 1, 128 *pectus praeceptis format amicis* (1).

Gli ultimi due versi si devono spiegare, come bene nota il Giglioli, nel senso che la Luna rubò a L. Sentius Pietas tre mesi di vita, affinchè non potesse festeggiare il diciottesimo compleanno; egli infatti morì di 17 anni, 9 mesi e 7 giorni.

Nel v. 8 appare singolare l'arcaismo *ni* col significato di *ne* finale-proibitivo. Ed ecco ciò che due grammatici antichi osservano a questo proposito. Donato *ad Terent. Eun.* II, 3, 37 (I, p. 342, 3 Wessner) scrive: " ..... *veteres 'ni' pro 'ne' ponebant et 'ne' pro 'non', ut Plautus* (Men. I, 2, 1) *'ni stulta sis' pro 'ne' et* (Epid. IV, 2, 16; alibi) *'nevult' pro 'non vult'*. E non altrimenti Servio *in Aen.* III, 686 (I, p. 452, 14 Thilo): ... *antiqui 'ni' pro 'ne' ponebant, qua particula plenus est Plautus ni mala ni stulta sis.*

---

(1) Questa interpretazione mediante due ablativi mi è suggerita dallo Stampini il quale mi ha comunicato le citazioni che l'avvalorano.

La forma *ni* (idg. *nei, cioè *nĕ + i, particella dittica (1)) appare nei più antichi documenti (cfr. l'osc. *suae pis censtomen nei cebnust* = si quis in censum non venerit; *neip mais pomtis com preiuatud actud* = neve magis (quam) quinquies cum privato agito (2)). Nella *lex incerta reperta Bantiae* (*CIL*[1] I, 197, lin. 20) leggiamo *ni quis sinito*; nella *sententia Q. M. Minuciorum inter Genuates et Viturios* (*CIL*[1] I, 199) abbiamo lin. 30 *niquis posideto*, lin. 34 *niquis prohibeto*, lin. 40 *niquis sicet*; nella *lex Cornelia de XX quaestoribus* (*CIL*[1] I, 202) col. 2, lin. 14 si legge *niquem*. Nella *lex Iulia municipalis* (*CIL*[1] I, 206) del 45 a. C. coesistono le tre forme *nei* frequente, *ne* meno frequente e *ni*, che ricorre una sola volta a lin. 136 *niquis*. Nelle iscrizioni del tempo di Augusto si trova solo *ne* (3). La presenza della forma *ni* nella nostra iscrizione non è argomento bastante per riferirla ad un tempo anteriore a quello a cui la fa appartenere il Giglioli, giacchè la forma *ni*, oltre che in Plauto, Catone, Pacuvio, Varrone, Lucrezio, Catullo, s'incontra anche in Virgilio (4) e in Orazio (5), e quindi non può offrirci un indizio sicuro per la datazione della lapide. Si aggiunga ancora che ricorre in *CE* 1533, 7 (del principio del II secolo) e 1542, 10 Büch.

Ancora una forma arcaica ci presenta il v. 8 con *surrupuit* invece di *surripuit*, per cui cfr. Plaut. *Aul. prol.* 39 *ne surruptum siet*; II, 5, 23 (349 Lindsay) *surrupias*; IV, 10, 29 (759) *surrupuisti*; *Capt. prol.* 8 *surrupuit*; *Curc.* I, 1, 60 *surrupere*; *Men.* IV, 2, 83 (645) *surrupta*; IV, 2, 103 (664) *surruptum*; *Trin.* I, 2, 46 (83) *surrupuisse*; *lex Atinia* apd Gell. XVII, 7, §§ 3, 7, 8 *subruptum*; Manil. III, 352 *subrupto*.

A *surrupuit menses tres mihi Luna suos* possono avvicinarsi Ovid. *fast.* II, 175 *Luna novum decies implerat cornibus orbem*; *met.* II, 344 *Luna quater iunctis implerat cornibus orbem*; VII, 530 *quater iunctis explevit cornibus orbem*; Lucan. II, 577

(1) Brugmann *Grundriss der vergleich. Grammatik der indogermanischen Sprachen* p. 8.

(2) Lindsay-Nohl *Die lateinische Sprache* p. 701.

(3) Kühner *Ausführliche Grammatik der lat. Sprache*[2] I, p. 940 § 212, 1.

(4) Neue *Formenlehre der lat. Sprache*[3] II, 269.

(5) *Carm.* IV, 6, 21.

Ante... quam Cynthia conderet orbem; Sil. It. III, 67 *Bis senos lunae nondum compleverat orbes*; Stat. *Theb.* I, 576 *resumeret orbes Cynthia*; Martial. IX, 31, 3 *Luna quater binos non tota peregerat orbes*; *CE* 902, 3 (Büch.) *vaga bis quinos iam luna resumpserat orbes.* In coteste espressioni vi è traccia del modo con cui i Romani nell'età più antica misuravano il tempo. Dodici lunazioni corrispondono approssimativamente a una rivoluzione solare, ed il calendario dei primi abitatori del Lazio, come presso moltissimi altri popoli, si basò sull'anno di dodici mesi lunari. Sin dalle epoche più remote, la cura del calendario era affidata ai pontefici. Il pontefice minore osservava l'apparizione della luna nuova e ne avvertiva il ' rex sacrificulus ': *itaque sacrificio a rege et minore pontifice celebrato, idem pontifex, calata id est vocata in Capitolium plebe ..... quot numero dies a Kalendis ad Nonas superessent pronuntiabat et quintanas quidem dicto quinquies verbo καλῶ, septimanas repetito septies praedicabat* (1). L'importanza delle lunazioni nel calendario romano, prima della grandiosa e dotta riforma di Cesare, ci spiega il perchè della sopravvivenza nella lingua e nella poesia di espressioni che ricordano il modo per tanti secoli praticato per la misura del tempo.

Qualche osservazione merita anche la tecnica del verso. Gli esametri 1, 3, 5 sono di forma corretta, con le cesure semiquinaria e semisettenaria, regolarissime, e con la clausola trisillabica e bisillabica. Invece un po' pesante e stentato è il v. 7 *Duodeviginti natales ni numerarem*, con una sola cesura regolare, la semiquinaria, e con la clausola irregolare quadrisillaba, che produce una cesura maschile al quinto piede, *ni* | *numerarem.* Le clausole mono- e tetrasillabiche — è inutile ripeterlo — sparvero per prime, con il perfezionarsi e l'affinarsi della tecnica del verso. Inoltre in *dūŏdēvīgīntī* deve essere notata la sinizesi di *dūŏ-*. Ma si tratta veramente di sinizesi? Nel Forcellini-De Vit s. v. *duodeviginti* si osserva: " In τῷ *duo* synaeresis est; vel potius anapaestus pes pro dactylo positus fuit ut apud Virg. 1 G. 482 *Fluviorum rex Eridanus camposque per omnes* „. Il Quiquerat (2) dà della sinizesi di *dūŏ* alcuni esempi di Plauto,

(1) Macrob. *sat.* I, 15, 10 sg.

(2) *Thesaurus poeticus linguae Latinae* s. v.

che non convincono tutti egualmente. Ma, al tempo del valentissimo metrologo, gli studi sulla prosodia arcaica non avevano ancora realizzato molti progressi. E siccome intorno alla spinosa questione della ' correptio iambica ' e della sinizesi plautina si è ben lungi dall'essere d'accordo, stimo opportuno riferire quanto afferma a questo proposito il Iachmann (che è l'ultimo filologo, in ordine di tempo ma non di merito, che si è occupato dell'argomento) nella sua dissertazione *Studia prosodiaca ad veteres poetas scaenicos Latinos spectantia*, p. 43 sg.: " ..... quamvis non sit dubium quin genetivi *duorum* syllabae priores synizesi coaluerint, idem de nominativo sive accusativo *duo* affirmari nequit. De *dŭŏdecim dŭŏdeviginti* Plautinis (Epid. 675 Poen. 897) dubites utrum ad synizesin revoces an ad correptionem iambicam eodem modo quo *dĭŭtinus dĭŭturnus*; Vergilius vero quin *duo* (Aen. 5, 77) et *duodena* (georg. 1, 232) pro bisyllabo et quadrisyllabo usurpaverit dubium esse vix potest ".

Di composti con *duo-* certamente monosillabo, ricordiamo ancora *dŭŏdecies* in un pentametro di Lattanzio *Phoen.* 28 (Brandt) *Duodecies undis irrigat omne nemus.* Di *dŭŏdecimus* si ha un esempio in *AL* 1, XII (Riese) *Duodecimo Turnus divinis occidit armis.* Finalmente lo stesso *dŭŏdeviginti* del nostro carme ricorre, nella prima sede di un pentametro, in Auson. *parent.* 26, 16 (Schenkl) *Duodeviginti functus olympiadas.* La sinizesi, come altre licenze poetiche, è più frequente nella drammatica, ma non manca negli altri scrittori che l'usavano per servirsi di parole non convenienti ai loro metri (cfr. p. e. Horat. *sat.* I, 8, 43 *cerea*). Nè abbiamo ragione di stupirci che l'autore della nostra piccola elegia si sia valso di cotesta non grave libertà prosodica, data la difficoltà di far entrare in un esametro ben costrutto *duodeviginti*, scandendo *duo* come bisillabo.

Di buona fattura i pentametri. Si sa che accanto alla cesura pentemimera principale, che divide il pentametro nettamente in due emistichi, non mancano, nel primo emistichio, le cesure secondarie, la tritemimera, la trocaica del secondo piede e la trocaica del primo piede. Nei vv. 2 *Perlege sic* | *vitae* || *commoda multa feras* e 8 *Surrupuit* | *menses* || *tres mihi Luna suos*, abbiamo la tritemimera; nel v. 4 *Praereptusque* | *patri* || *flore vigente meo*, trovasi la trocaica del secondo piede; nel v. 6 *Inter* | *et aequales* || *gratus amore fui*, appare la trocaica del primo piede.

La clausola preferita nel pentametro, e quasi esclusiva in Ovidio, è la disillabica (costante nella nostra elegia), per cui nel quinto piede, che è l'ultimo completo, manca la cesura maschile e si produce la femminile. In tal modo risultava più evidente la differenza tra i due emistichi, in omaggio al principio della dissimilazione delle due parti dell'esametro e del suo fratello minore, il pentametro che non è che un esametro dattilico a doppia catalessi (1). Si aggiunga ancora che, con la chiusa bisillabica del pentametro e bisillabica e trisillabica dell'esametro, si otteneva, come ha notato il Rasi (2), la coincidenza dell'accento metrico con quello tonico, mentre nella prima metà del verso vi era il conflitto tra i due accenti, con singolare effetto artistico.

Si è visto che nei tre primi esametri le clausole sono quelle normali; solo nel v. 7 abbiamo la clausola irregolare *ni* | *numerarem* che, producendo la cesura maschile, spiaceva in cotesta sede all'orecchio dei latini, essendo contraria al principio della dissimilazione delle due parti del verso.

La successione dei dattili e degli spondei, secondo la prevalenza di questi o di quelli, conferisce un movimento ora lento e pesante, ora svelto e leggiero al periodo metrico. Di qui l'opportunità di stabilire la proporzione dell'uno o dell'altro genere di piede, sebbene tale ricerca possa condurre solo a buoni risultati, quando si faccia su componimenti un po' estesi e di notevole valore artistico. Nel nostro carme gli esametri 1, 3, 5, 7 hanno rispettivamente lo schema *sddd*, *ddds*, *ddds*, *ssss* ed i pentametri 2, 4, 6, 8 rispettivamente lo schema *ds*, *sd*, *ds*, *ds*.

Trarre delle deduzioni dalla percentuale di ciascuna forma, data la brevità del carme, sarebbe assurdo. Mi basti osservare che la forma *ddds* dell'esametro occupa, per la frequenza con cui è usata, il 9° posto in Catullo, il 4° in Tibullo, l'8° in Properzio, il 6° in Ovidio (*Amores*), il 6° in Ovidio (*Tristia*), il 6° in Ligdamo, l'8° in Marziale, il 12° in Rutilio Namaziano. La forma *sddd* occupa il 15° posto in Catullo, il 15° in Tibullo,

---

(1) Stampini *La metrica di Orazio comparata con la greca* p. 84.

(2) *De elegiae Latinae compositione et forma* p. 113 sgg.; *Genesi del Pentametro...* p. 23 dell'estr.

il 15° in Properzio, il 16° in Ovidio (*Amores*), il 14° in Ovidio (*Tristia*), il 15° in Ligdamo, il 15° in Marziale, il 13° in Rutilio Namaziano (1). La forma *ssss* occupa il 2° posto in Catullo, il 12° in Tibullo, il 6° in Properzio, il 14° in Ovidio (*Amores*), l'11° in Ovidio (*Tristia*), il 3° in Ligdamo, il 12° in Marziale, l'11° in Rutilio Namaziano.

La forma del pentametro *ds* viene per frequenza prima in Catullo, Tibullo, Properzio, Ovidio, Ligdamo, Marziale e seconda in Rutilio. La forma *sd* viene ultima in Catullo, Tibullo, Ligdamo, Ovidio, terza in Properzio e Marziale, prima in Rutilio. Nella nostra elegia, abbiamo visto, prevale la forma *ds*; ma trarre da questo o da altri simili dati una qualsiasi conclusione sarebbe arbitrario. Notevole altresì la mancanza di elisioni.

I caratteri hanno indotto il Giglioli (2) a riferire la lapide alla metà del I secolo dell'impero; ma forse è meno antica. Gli arcaismi, sopra notati, non ci devono trarre in inganno. I poeti potevano servirsi di parole non più usate, e credo superfluo insistere su quello che Cicerone scriveva nel *de orat.* III, 38, 153 *inusitata sunt prisca fere ac vetustate ab usu cotidiani sermonis iam diu intermissa, quae sunt poetarum licentiae liberiora quam nostrae.* Per un arcaismo si potrebbe spiegare anche la chiusa dell'esametro quadrisillaba *numerarem*; giacchè la regola che vocaboli della forma ⏑ ⏑ – ⏓ non potessero essere clausola del verso eroico, era ignota nella poesia antica e fu dedotta, come ha dimostrato il Leo, dalle leggi che governavano la prosa metrica greca, seguìte, con poche eccezioni, da Cicerone. Sebbene nella poesia epigrafica sia evidente la prevalenza della tecnica più recente, sancita dall'uso dei poeti maggiori dell'età di Augusto, non mancano tuttavia le eccezioni. Ad esempio, un'epigrafe (*CE* 1533), che il Bücheler attribuisce alla fine del primo o al principio del secondo secolo d. C., presenta, per la lingua e la

(1) Per questi dati statistici, cfr. Plessis *Métrique grecque et latine* p. 282 sgg.; Rasi *De elegiae* ecc. p. 130 sgg. (su Properzio ed Ovidio); Rasi *Riv. di fil.* XXV (1897) p. 177 (su Rutilio Namaziano); Giarratano *De M. Val. Martialis re metrica* p. 7 sgg.

(2) Art. cit. p. 362.

metrica, evidenti traccie di arcaismi (1). Concludendo, l'uso degli apici sulla lettera *i*, che ricorrono solo nelle iscrizioni del II o III secolo (2), e gli arcaismi mi pare rendano probabile l'ipotesi che il nostro carme sia stato composto verso la seconda metà del II secolo, quando nella letteratura latina si manifestò il fenomeno del Frontonianismo, che si concreta nella sregolata ammirazione e nella entusiastica imitazione dell'antichità classica (3).

---

(1) Specialmente importante il v. 2 *navibu(s) velivolis* con l'apocope di *s*, come in Ennio *ann.* 385 Vm. Nota ancora le clausole irregolari *Parcae cecinere*, *fessum recreasti*, *terminus hicc est*.

(2) Cfr. sopra p. 310.

(3) Cfr. Valmaggi *I precursori di Frontone* p. 5 sgg.; *Quaestiones Frontonianae* p. v sgg.

I Romani ad Eleusi.

Nota I[a] di GIULIO GIANNELLI.

§ 1. — L'età repubblicana.

Il culto eleusino di Demetra e Kore, col suo antico sacerdozio saldamente costituito, coi suoi venerabili Misteri dovunque celebrati, con le sue dottrine e i suoi dogmi pieni di contenuto morale, fu tra quelli che meno risentirono di quel vasto e profondo movimento sincretistico che imperò in tutto il bacino del Mediterraneo dopochè Roma, abolite col suo imperio le mille frontiere che dividevano le genti della Grecia, dell'Oriente, delle coste settentrionali dell'Africa, rese agevole, non meno che lo scambio dei prodotti, la comunione e la fusione delle diverse culture e delle varie religioni. Allora tutti i culti più remoti, tutte le dottrine religiose più attraenti uscirono dalla loro patria d'origine ed ebbero sedi e fedeli nelle provincie più lontane; ma dovettero, al tempo stesso, in maggiore o minor misura, adattarsi ai nuovi e diversi ambienti che le accoglievano, lasciando che elementi estranei penetrassero e trasformassero, snaturassero anche talora il loro contenuto genuino ed originario.

La religione eleusina rinunziò ai vantaggi e agli svantaggi che la partecipazione a questo movimento recava seco: essa non vide i suoi Misteri ripetuti altrove al di fuori del sacro Telesterio specchiantesi nel mare di Salamina, non vide i suoi ierofanti e i suoi daduchi moltiplicarsi nelle lussuose città ellenistiche o nella grande metropoli latina, dove ormai pullulavano i sacerdoti e le sacerdotesse di Mitra, d'Iside, di Cibele (1); ma, in compenso,

(1) Per la diffusione di questi culti nelle varie provincie dell'Impero, v. Toutain, *Les cultes païens dans l'Empire romain*, tom. II (" Biblioth. de l'École des Hautes Études: sciences relig. ", vol. XXV). Cfr., per Roma, Wissowa, *Religion und Kultus der Römer*[2], p. 351 sgg.

essa potè conservare intatti i suoi ordinamenti e le sue dottrine, immutate le prerogative delle sue famiglie sacre, e cadde, insieme con le ultime vestigia del paganesimo, ancora uguale a se stessa, in quelle forme che le erano state proprie dal tempo di Pisistrato in poi (1). Ma il carattere conservatore di codesto culto, la difficoltà di conoscerlo direttamente e, allo stesso tempo, l'interessamento e la devozione che esso era capace di inspirare in quanti potevano accostarcisi, non fecero che aumentarne la rinomanza e l'autorità; sicchè Eleusi divenne ben presto la meta d'un pio pellegrinaggio per quanti cercavano, tra le religioni pagane, quella che meglio conciliasse le più vecchie tradizioni coi nuovi bisogni dello spirito; ed essere iniziato ai Misteri divenne titolo d'onore per gli uomini più eletti e più colti (2).

Non deve perciò far meraviglia se gli stessi imperatori romani non dimenticarono di visitare, quando lo poterono, la sacra cittadella dell'Attica e parteciparono alle cerimonie dei

(1) Rubensohn, *Die Mysterienheiligtümer in Eleusis und Samotrake* (Berlin 1892), p. 21 sg. — Gruppe, *Griechische Mythologie und Religionsgeschichte*, I, § 24-25. — Foucart, *Les Mystères d'Éleusis* (Paris 1914), p. 251 sgg. — Come la religione eleusina si sia sempre conservata immune da influssi di dottrine religiose o filosofiche estranee ha dimostrato il Foucart, op. cit., p. 252 sgg. Si tenga poi presente che le varie "filiali" del culto eleusino dei Misteri, che sorsero e fiorirono in varie città della Grecia e dell'Asia (a Fliunte, a Megalopoli e a Pheneus in Arcadia, ad Efeso, ad Andania in Messenia: Stengel, *Griechische Kultusaltertümer*², p. 165), non ebbero alcun legame col culto eleusino, nè fu loro riconosciuta alcuna autorità: la virtù dell'iniziazione era indissolubile dalla terra d'Eleusi (Foucart, op. cit., p. 263).

(2) È necessario appunto distinguere il diverso scopo che si voleva raggiungere, nei secoli dell'età romana, iniziandosi ai misteri; se molti lo facevano per soddisfare a un verace bisogno dello spirito, altri invece, come fa giustamente osservare lo Stengel (op. cit., p. 156), lo facevano soltanto per essere notati e per seguire la moda dei tempi: fra questi porremo quasi tutti i personaggi romani che si accostarono a quel culto. Per gli imperatori poi l'iniziazione ai misteri divenne un mezzo per dimostrare la loro speciale benevolenza all'Attica in particolare e, in generale, alla Grecia e per cattivarsene la simpatia. Si ricordi, a questo proposito, come già al tempo della battaglia di Farsaglia, prima di incominciare la pugna, fu emanato ai due eserciti un bando che proibiva di recar danno agli Ate-

Misteri, sottomettendosi volentieri alle regole e alle formalità che le leggi del culto imponevano. Ciò facendo, del resto, essi seguivano l'esempio dei molti insigni personaggi romani che, già nel tempo della Repubblica, visitando la Grecia, avevan voluto conoscere le mistiche feste eleusine. Questa schiera, che certo dovè esser numerosa, è oggi a noi quasi del tutto sconosciuta, e pochi nomi si hanno di romani, della cui iniziazione ai misteri siamo con sicurezza informati: ma sono fra costoro gli uomini che lasciaron di sè orme più profonde nell'ultimo secolo di vita repubblicana di Roma.

Apre questa lista Silla il quale, terminata la guerra mitridatica, si trattenne in Grecia e, stando in Atene, si fece iniziare ai misteri (1). La data dell'iniziazione si può stabilire con sicurezza: Silla passò infatti in Smirne l'inverno 85/84; poscia, nell'estate dell'84, imbarcatosi ad Efeso, approdava, dopo 3 giorni di viaggio, al Pireo; fatti i necessari preparativi, partiva alla volta d'Italia, giungendo a Brindisi nella primavera dell'83 (2). Egli partecipò dunque alle cerimonie eleusine del settembre 84,

---

niesi che vi militavano, ὡς ἱεροὺς τῶν θεσμοφόρων (App., *Bell. Civ.*, II, 70). Non crederei pertanto del tutto retoriche quelle parole, semplici e di apparenza sincera, con le quali Cicerone magnifica gli effetti morali del culto eleusino: *de legibus*, II, 14: *nihil melius illis mysteriis, quibus ex agresti immanique vita exculti ad humanitatem et mitigati sumus..... neque solum cum laetitia vivendi rationem accepimus, sed etiam cum spe meliore moriendi.* Cfr. *de nat. deorum*, I, 119: *Eleusinam sanctam illam et augustam ubi initiantur gentes orarum ultimae.*

(1) Plut., *Sulla*, 26.

(2) Il soggiorno invernale di Silla a Smirne ci è testimoniato da Tac., *Ann.*, IV, 56; il viaggio da Efeso al Pireo è ricordato da Plut., *Sulla*, 26; cfr. App., *Bell. civ.* I, 76. — Vedi Niese, *Manuale di storia romana* (traduzione ital. sulla IV ediz.: Milano 1910), p. 268 sgg.; Drumann, *Geschichte Roms* (II Aufl. Groebe: Leipzig 1899 sgg.), V, 245 e II, 387, 389; *R. E.*, IV, 1544. — Imprecisamente l'Hertzberg in *Geschichte Griechenlands unter der Herrschaft der Römer* (Halle 1866-1875), I, p. 383 e l'Hinstin in *Les Romains à Athènes avant l'Empire* (Paris 1877), p. 92, collocano all'anno 83 il passaggio di Silla da Efeso nell'Attica. Vedi anche Lanzani, *Mario e Silla*, pp. 261-264, e per la esattezza della cronologia E. Pozzi in questi 'Atti', XLIX (1913-14), pp. 643, n. 1 e 652, n. 1.

senza, evidentemente, aver presenziato ai Piccoli Misteri, di Agrai (1).

È poi la volta di Cicerone e di Attico: se essi furono insieme iniziati, come qualcuno ha affermato (2), non possiamo dedurlo dall'unica testimonianza che ci è giunta del fatto (3); possiamo però ritenerlo probabile, in base a qualche considerazione. Dei tre viaggi che Cicerone fece in Oriente, prima per salute e per istruzione negli anni 79/77, poi, in esilio, dall'aprile del 58 all'agosto del 57, un'ultima volta infine per governare la Cilicia (51/50 a. C.) (4), è evidente che dobbiamo collocare nel primo la sua iniziazione ai Misteri, visto che solo in quell'occasione egli si trattenne in Atene. D'altra parte questi anni furono tra i più belli e i più attivi del soggiorno ateniese di T. Pomponio Attico: dopo essere stato, nell'84, gradito compagno a Silla, durante la sua permanenza in Atene, Attico, resistendo alle premure e alle lusinghe del grande capitano, aveva rifiutato di partire con lui e di abbandonare la città che gli era tanto cara. Quivi rimase parecchi anni ancora, consacrando *aut litteris aut Atheniensium reipublicae* tutto il tempo che le cure della famiglia e degli amici gli lasciavano libero (5). Allora lo conobbe appunto Cicerone, venendo ad Atene, prima tappa del suo viaggio, ove egli si trattenne sei mesi, insieme con suo fratello Quinto (6); allora strinse con lui quel-

---

(1) Quanto entrasse nell'operato di Silla il sentimento religioso, lo comprendiamo ripensando al trattamento da lui usato verso altri santuari greci, come quelli di Delfi, di Olimpia, di Epidauro, cui Silla non risparmiò contribuzioni, depredazioni ed anche dileggi (Plut., *Sulla*, 12).

(2) Hinstin, *Les Romains à Ath.*, p. 121.

(3) Cic., *de legibus*, II, 14; ivi Attico, ricordando i misteri eleusini, dice: *illa quibus initiati sumus.*

(4) Drumann, *Gesch. Roms.* V², p. 260 sgg.; Stoll, *Die Meister der römischen Litteratur* (Leipzig 1881), p. 142 sgg.; Schanz, *Geschichte der röm. Litteratur*, I³, 2, p. 226 sgg.

(5) Corn. Nep., *Att.*, 4.

(6) Sulla cronologia di questo viaggio c'informa Cicerone stesso nel *Brutus*, 91, 314-15: *Itaque cum essem biennium* (cioè negli anni 81/80) *versatus in causis et iam in foro celebratum nomen meum esset, Roma sum profectus; cum venissem Athenas, sex menses cum Antiocho..... fui.* Cfr. Drumann, *Gesch. Roms*, V², p. 260 sg.

l'amicizia che doveva poi legare per tutta la vita i due insigni uomini (1).

Nel settembre del 79, come tutto dunque fa credere, Cicerone ed Attico intervenivano ai Grandi Misteri, avendo indubbiamente anch'essi trascurato di iniziarsi ai Piccoli: durante l'anno 78 infatti, Cicerone, avendo ormai abbandonata la Grecia, viaggiava per l'Asia; e nel 77, recatosi a Rodi, tornava di là direttamente in patria (2).

Abbiamo infine notizia anche dell'iniziazione di Antonio; non sembra almeno che possa intendersi altrimenti il luogo di Plutarco che ne parla. La cosa sarebbe avvenuta durante la permanenza di Antonio in Atene, dopo la battaglia di Filippi, cioè alla fine dell'autunno o al principio dell'inverno del 42 a. C. (3).

È noto che la seconda battaglia di Filippi avvenne verso la metà di novembre, a distanza di circa un mese dalla prima (4); d'altra parte sappiamo che, nell'autunno del 41, Antonio, avendo già riordinata l'Asia, si recava ad Alessandria: sicchè dovremmo concludere, anche se non ce lo dicessero espressamente le fonti, che la sua permanenza in Atene dovè essere di breve durata, avendo egli diviso il suo tempo nella visita anche di altre regioni della Grecia, per es. della Megaride (5). Siamo quindi di fronte ad un fatto nuovo: se Antonio volle iniziarsi ai misteri, non potè farlo in tempo debito, poichè egli arrivò ad Atene più tardi assai del settembre 42 e ne ripartì assai prima del settembre 41; fu necessario perciò che si celebrassero i misteri in una data diversa da quella ordinaria, o meglio, che si ripetessero; poichè già certamente aveva avuto luogo ad Eleusi la solita festa, alla metà di settembre.

(1) Su questa amicizia allora contratta da Cicerone, leggi il capitolo " Atticus " nel libro del Boissier, *Cicéron et ses amis*.

(2) *Brutus*, 91, 316. — Drumann, *Gesch. Roms*, V², p. 263, 265.

(3) Plut., *Ant.*, 23, racconta come, stando allora Antonio in Atene, *τὸ παῖζον αὑτοῦ πρὸς ἀκροάσεις φιλολόγων καὶ θέας ἀγώνων καὶ μυήσεις ἔτρεπε*. Cfr. App. *Bell. civ.*, V, 7.

(4) Suet., *Tib.*, 5. — *C. I. L.*, I², p. 247 (*Fasti Antiates*). Cfr. *R. E.*, I², 2605.

(5) *R. E.* I², 2605 sgg. — Drumann, *Gesch. Roms*, I², p. 283. — Hertzberg, *Gesch. Griechenlands*, I, p. 474. — Gardthausen, *Augustus und seine Zeit*, II, 1, p. 84, n. 6.

Questo fatto ha grande importanza, poichè da più di due secoli e mezzo, fino cioè dal tempo di Demetrio Poliorcete, non si era, ch'io mi sappia, mai più verificato, neppure in favore di Romani che avevano dimostrato ardente desiderio di essere iniziati (1).

Ma ora, come nel 302, si trattava di guadagnarsi la benevolenza di un uomo temibile e potentissimo, a cui nulla si poteva negare; pochi anni più tardi la stessa irregolarità doveva concedersi ad Augusto che per ben due volte forse, a dieci anni di distanza, ottenne che si ripetessero i misteri: la prima, per essere iniziato egli stesso; la seconda, per render possibile l'iniziazione ad un barbaro venuto a lui come legato (2).

Con Antonio termina la serie degli illustri romani che noi conosciamo come iniziati ai misteri, prima dell'Impero; pur essendo probabile che un altro noto personaggio abbia voluto conoscere da vicino l'attraente cerimonia: alludo ad Appio Claudio Pulcro. È questi il noto predecessore di Cicerone nel governo della Cilicia, ch'egli amministrò dal 53 al 51 (3); passando, al ritorno, per Atene, mostrò d'accingersi a spendere una parte del danaro guadagnato con le sue rapacissime gesta (4), innalzando ad Eleusi dei Propilei (i cosiddetti Piccoli Propilei): pare che non sia stato molto sollecito a mantenere la sua promessa, perchè solo

---

(1) Plut., *Demetr.*, 26 : *τότε δ' οὖν ἀναζευγνύων εἰς τὰς Ἀθήνας ἔγραψεν ὅτι βούλεται παραγενόμενος εὐθὺς μυηθῆναι καὶ τὴν τελετὴν ἅπασαν ἀπὸ τῶν μικρῶν ἄχρι τῶν ἐποπτικῶν παραλαβεῖν. τοῦτο δὲ οὐ θεμιτὸν ἦν οὐδὲ γεγονὸς πρότερον...* — L'opposizione del daduco Pythodoros fu allora vana: si dette al mese di Munichione il nome di Antesterione e si fece quindi la cerimonia di Agrai; poi di nuovo il Munichione fu fatto Boedromione e Demetrio fu ammesso ai Grandi Misteri. Cfr. *R. E.*, IV, 2779. — Beloch, *Griech. Geschichte*, III^{1}, 1, p. 166 sgg. — Si concedeva l'iniziazione in ogni momento solo ai moribondi (Aristoph., *Pax*, 371 sgg.), ma, in tal caso, non si trattava evidentemente che di eseguire poche funzioni indispensabili, senza ripetere la cerimonia vera e propria. Quanto fosse difficile ottenere un così eccezionale favore lo dimostra il rammarico del famoso oratore Crasso, il quale narrava di essersi sdegnato con gli Ateniesi perchè, giunto due giorni in ritardo, non era stato ammesso ai misteri (Cicer., *de orat.*, III, 20, 75).

(2) Vedi più oltre, § 2.

(3) Vedi la sua biografia in Drumann, *Gesch. Roms*, II^{2}, p. 160 sgg.

(4) Cicer., *ad Att.*, VI, 1 : *Audio Appium προπύλαιον Eleusine facere.*

i suoi nipoti portarono a fine l'opera da lui forse appena iniziata (1). È credibile in ogni modo che l'uomo che aveva deliberato di onorare in maniera così sontuosa il " témenos " eleusino, non abbia mancato di inscriversi tra i fedeli di Demetra e Kore.

§ 2. — Da Augusto ad Adriano.

Troviamo subito che il primo degli imperatori romani, Augusto stesso, fu iniziato ai misteri; il fatto ci è testimoniato da due luoghi di Dione Cassio e da uno di Svetonio (2), in base ai quali il Foucart ha datato l'avvenimento all'anno 21 a. C. (3). A me sembra invece che l'attenta lettura e la giusta interpretazione dei testi conduca ad un risultato notevolmente diverso.

Possiamo liberarci subito dal passo di Svetonio, che non ci offre alcun mezzo di determinazione cronologica, avendo per scopo soltanto di ricordare come Augusto non mancò mai al

---

(1) Certo i lavori non erano ancora cominciati nel 50, se in una lettera, diretta in quell'anno, al principio di agosto, da Side ad Attico, Cicerone poteva scrivere: *Me tamen de Academiae προπύλῳ iubes cogitare, cum iam Appius de Eleusine non cogitet?* (*ad Att.*, VI, 6). Si conserva, con poche lacune, l'iscrizione che fu incisa sul monumento (*C. I. L.*, III, 547 = Dessau, 4041):

[*Ap. Claudi*]*us Ap. f. Pulche*[*r*] *propylum Cere*[*ri*]
[*et Proserpi*]*nae cos. vovit* [*im*]*perato*[*r coepit*]
[*Pulcher Clau*]*dius et Rex Mar*[*cius fec*]*erun*[*t ex testam.*]

Il consolato di Claudio è del 54 (su di esso v. Drumann, *Gesch. Roms*, II², p. 162); e se, fin d'allora, egli pensò a votare un dono alle dee eleusine dovremmo dedurne che Claudio onorasse di una speciale devozione le due dee e sarebbe così anche più verosimile la sua iniziazione. Il monumento sarà stato iniziato subito dopo il 50, perchè, in seguito alle imprese di Cilicia, Claudio ebbe il titolo di " Imperator " (Cicer., *ad familiar.*, III, 1, 2. — *C. I. L.*, I, 540, 619): a lui, morto nel 48, gli Ateniesi eressero una statua (*C. I. L.*, III, 566). Cfr. " Bull. Inst. ", 1860, p. 225 sgg. (Henzen).

(2) Dio. Cass., LI, 4; LIV, 9. — Suet., *Divus Aug.*, 93.

(3) Foucart, *Les empereurs initiés aux mystères d'Éleusis*, " Revue de Philologie ", 1893, p. 197-207.

dovere, imposto a tutti gli iniziati, di serbare il più assoluto segreto su tutto ciò che avevano visto ed udito durante lo svolgimento dei misteri (1). Ci interessano invece i due luoghi di Dione, nei quali è fatta menzione, direttamente o indirettamente, della iniziazione d'Augusto. Nel primo (LI, 4) lo storico, che ha passato in rassegna, nei paragrafi precedenti, le disposizioni prese da Augusto dopo la battaglia d'Azio, parla dei favori che il vincitore accordò alla Grecia, tanto duramente provata e immiserita dalla guerra civile, ricordando, fra l'altro, ch'egli volle anche esser partecipe dei misteri di Eleusi (2). Il secondo passo di Dione ci trasporta all'inverno del 21/20 a. C., che Augusto trascorse in Samo (3); giunsero quivi a lui molte ambascerie, fra le quali quella degli Indi (4). Accadde, in tal contingenza, un curioso fatto, che Dione racconta con lusso di particolari: *Εἷς δ' οὖν τῶν Ἰνδῶν Ζάρμαρος, εἴτε δὴ τοῦ τῶν σοφιστῶν γένους ὤν, καὶ κατὰ τοῦτο ὑπὸ φιλοτιμίας, εἴτε καὶ ὑπὸ τοῦ γέρως κατὰ τὸν πάτριον νόμον, εἴτε καὶ ἐς ἐπίδειξιν τοῦ τε Αὐγούστου καὶ τῶν Ἀθηναίων, καὶ γὰρ ἐκεῖσε ἦλθεν, ἀποθανεῖν ἐθελήσας ἐμυήθη τε τὰ τοῖν θεοῖν, τῶν μυστηρίων καίπερ οὐκ ἐν τῷ καθήκοντι καιρῷ, ὥς φασι, διὰ τὸν Αὐγου-*

(1) Suet., luogo cit.: *Namque, Athenis initiatus, cum postea Romae pro tribunali de privilegio sacerdotum Atticae Cereris cognosceret et quaedam secretiora proponerentur, dimisso consilio et corona circumstantium, solus audiit disceptantes.* — I *disceptantes* dovevano essere sacerdoti eleusini o, in ogni modo, cittadini ateniesi iniziati ai misteri.

(2) Dio. Cass., LI, 4, 1: *καὶ ὁ μέν, ... τά τε ἐν τῇ Ἑλλάδι διῴκησε καὶ τῶν τοῖν θεοῖν μυστηρίων μετέλαβεν, ἔς τε τὴν Ἀσίαν κομισθεὶς καὶ ἐκεῖνα προσκαθίστατο τά τε τοῦ Ἀντωνίου ἅμα ἐκαραδόκει.*

(3) Dio. Cass., LIV, 9, 7: *ὁ δὲ Αὔγουστος ἔς τε τὴν Σάμον ἐπανῆλθε κἀνταῦθα αὖθις ἐχείμασε.* Cfr. Strab., XVII, 1, 54. — Domaszewski, *Geschichte der römischen Kaiser*, I, 192.

(4) La venuta di ambascerie indiane ad Augusto è testimoniata anche in *Res Gestae*, 31. Se ne debbono distinguere due: la prima fu da lui ricevuta durante la spedizione ispanica del 27/25 a. C., probabilmente a Tarragona (26/25 a. C.); la seconda, quella appunto a cui allude Dione, lo raggiunse nell'inverno del 21/20 a Samo. Vedi Mommsen, *Res Gestae*², p. 133-4. — Diehl, *Res Gestae*² (Bonn 1910), p. 34, ove sono citati i testi ricordanti il fatto. — Domaszewski, *Gesch. der r. Kaiser*, I, p. 194. Gardthausen, *Augustus und seine Zeit*, I, p. 697.

στον καὶ αὐτὸν μεμνημένον γενομένων, καὶ πυρὶ ἑαυτὸν ζῶντα ἐξέδωκεν (1).

Dietro queste parole, il Foucart ha creduto senz'altro di dover fissare a questo momento l'iniziazione di Augusto, non facendo alcun conto di quanto si legge nell'altro libro di Dione: la sua tesi è stata dipoi generalmente accettata (2). L'Hertzberg, che prima del Foucart aveva ricordato l'avvenimento, l'ha bensì datato al 31 a. C.; rinunziando però a spiegare la contraddizione dei due luoghi di Dione e citandoli come testimonianza di questo fatto, mentre evidentemente riguardano due fatti e due momenti diversi (3).

Io credo che un attento esame della nostra fonte ci apra la via ad una soluzione assai meno soggetta ad obbiezioni ed a dubbi. Ricordiamo com'erano ordinate le cerimonie dell'iniziazione: chi voleva essere annoverato tra i misti, doveva presentarsi prima ai Piccoli Misteri, che si celebravano dal 19 al 21 antesterione (febbraio) nella località di Agrai *(τὰ ἐν Ἄγραις μυστήρια)* a pochi chilometri da Atene, per potere, sei mesi più tardi, essere ammesso ai Grandi Misteri di Eleusi, che occupavano i giorni dal 16 al 22 o al 23 boedromione (settembre) (4). Vediamo dunque i due luoghi di Dione.

È chiaro che là dove esso racconta gli avvenimenti che succedettero immediatamente alla vittoria di Azio, parla dell'iniziazione di Augusto in modo che non ci permette punto di

---

(1) Allo stesso episodio allude certamente Strabone, XV, 1, 4: *κἀκεῖθεν δὲ ἀφ' ἑνὸς τόπου καὶ παρ' ἑνὸς βασιλέως..... ἧκεν ὡς Καίσαρα τὸν Σεβαστὸν δῶρα καὶ πρεσβεῖα καὶ ὁ κατακαύσας ἑαυτὸν Ἀθήνησι σοφιστὴς Ἰνδος*. Non era la prima volta però che si offriva un tale spettacolo; continua infatti Strab.: *καθάπερ καὶ ὁ Κάλανος Ἀλεξάνδρῳ τὴν τοιαύτην θέαν ἐπιδειξάμενος*. Cfr. XV, 1, 68.

(2) Stengel, *Griech. Kultusaltertümer*[2], p. 156. — Gruppe, *Griech. Myth.*, II, p. 1496, n. 1.

(3) Hertzberg, *Gesch. Griechenlands*, I, p. 491. Segue l'Hertzberg il Drumann, *Gesch. Roms*, IV[2], p. 291, il quale non cita nè discute le fonti. Giustamente il Gardthausen (op. cit., I, p. 396) colloca l'iniziazione al 31 a. C., riferendosi solo a Dio. Cass., LI, 4.

(4) Stengel, *Griech. Kultusalt.*[2], p. 162. — Gruppe, *Griech. Myth.*, I, § 48 sgg. — Farnell, *Cults of the greek States*, III, 171. — La cronologia di tutta la cerimonia è stata minutamente e diligentemente ristudiata dal

distinguerla dagli altri segni di favore che il vincitore accordò allora alla travagliata Grecia o di vedervi una menzione di un fatto accaduto vari anni più tardi; noi non vi possiamo leggere se non che Augusto, dopo aver vinto ad Azio il suo competitore, mentre si tratteneva per qualche tempo in Grecia, trovò modo di recarsi anche ad Eleusi e fu partecipe dei misteri. Ciò concorda del resto perfettamente con quanto sappiamo da altre parti sull'azione spiegata da Augusto in codesti mesi: subito dopo la vittoria (2 sett. del 31 a. C.), Augusto si recò ad Atene e quindi a Samo, ove passò l'inverno (1); è naturale ch'egli abbia partecipato alla cerimonia d'iniziazione durante la sua permanenza in Atene. Forse la cerimonia non fu senza qualche irregolarità: non possiamo infatti stabilire con precisione se Augusto abbia potuto trovarsi in Atene e occuparsi dei Misteri eleusini soltanto un mese circa dopo la battaglia di Azio (2). Può essere ch'egli vi sia giunto o abbia manifestato tal desiderio, qualche settimana più tardi; il che avrà reso necessario ripetere la cerimonia, concedendo ad Augusto di essere iniziato in epoca diversa dall'ordinaria: così appunto come, per una simile ragione, si era fatto con Antonio. Ma che nell'altro caso (cioè nella supposta iniziazione di Augusto nell'anno 21) vi sia stata irregolarità, ce lo dichiara espressamente Dione, avvertendoci che i misteri furono celebrati *οὐκ ἐν τῷ καθήκοντι καιρῷ*.

Quello però che a noi importa non è il fatto che si sia venuti meno alle severe regole del culto eleusino, quanto invece le cause che avranno consigliato a far ciò: perchè, se anche non dobbiam maravigliarci troppo che un'irregolarità si commet-

---

Foucart, secondo il quale (*Myst. d'Éleusis*, p. 301 sgg.) si sarebbero occupati i due giorni del 13 e 14 Boedromione nel trasporto degli *ἱερά* in Atene e già nel giorno 15 si sarebbe avuta l'adunata dei misti nel Pecile e la proclamazione di quelli cui era interdetto l'accesso ai misteri (*ἀγυρμός* e *πρόρρησις*).

(1) Suet., *Aug.*, 17: *Ab Actio cum Samum in hiberna se recepisset...* Cfr. Pauly, *R. E.*, V, 834, 838. — Schiller, *Geschichte der römischen Kaiserzeit*, I, p. 130. — Gardthausen, *Augustus*, I, p. 396 sgg. — Drumann, *Gesch. Roms*, IV², p. 291 sg. — Niese, *Manuale di Storia rom.* (trad. ital.), p. 368.

(2) È da tener presente che in quell'anno il calendario attico si trovava arretrato di parecchi giorni su quello giuliano; cfr. la tabella dell'Unger nello *Handbuch* di I. Müller, I², p. 592.

tesse per compiacere un imperatore, pur essendo il caso tutt'altro che frequente, non dobbiamo neppur credere che vi si giungesse senza gravi ragioni o quando si sarebbe potuto evitarla (1). Or dunque, mentre queste ragioni sono chiare ed evidenti per l'anno 31, dato sempre che si voglia sospettare un'irregolarità anche in questo caso, non sono tali pel 21. Dopo Azio infatti, può essere che Augusto sia giunto ad Atene quando già si eran celebrati i misteri e abbia chiesto che si ripetesse la cerimonia perchè anch'egli potesse parteciparvi, oppure, ciò che però è meno probabile, può averne domandato anticipatamente un rinvio fino al giorno del suo arrivo nell'Attica: in ogni modo, se si volle corrispondere all'onore che l'imperatore faceva alla religione di Eleusi, si dovè forse spostare la data della festa o ripetere la festa stessa; tanto più che era vivo il ricordo dello stesso segno di riverenza e di omaggio prestato ad Antonio. Ma, come ho detto, può anche darsi che Augusto sia giunto in tempo per la regolare celebrazione dei misteri.

Veniamo all'altro caso. Già abbiamo visto che nel 21 Augusto si trattenne quasi per tutto l'anno in Grecia e passò poi l'inverno (21/20) nell'isola di Samo. A che scopo dunque celebrare i misteri *οὐκ ἐν τῷ καθήκοντι καιρῷ*, quando Augusto poteva benissimo trovarsi ad Atene alla data normale della festa? Nè alcuno vorrà pensare che Augusto abbia ritardato la cerimonia per attendere l'arrivo dell'ambasceria indiana, chè una tale subordinazione, diciamo così, del programma imperiale al ricevimento di una missione di barbari sarebbe assolutamente inconcepibile;

(1) Cfr. quanto ho scritto sopra nel § 1. Per trovare un'altra irregolarità di questo genere, sicuramente documentata, dobbiamo giungere al tempo di Lucio Vero; l'ierofante T. Flavio Leostene dovè appositamente in quell'anno ripetere la cerimonia, non essendosi Vero potuto trovare per tempo in Atene. Si badi che, anche in questo caso (come in tutti quelli finora studiati), non si è trattato di ritardare la festa, ciò che avrebbe recato troppo squilibrio al calendario dei fasti attici, ma soltanto di ripeterla. Le ragioni, poi, per cui ci si indusse a ripetere la festa in varie occasioni, ci resultano sempre veramente ineccepibili: Demetrio impose per sè tal privilegio, Antonio fu trattenuto dalla battaglia di Filippi, Augusto da quella di Azio, Vero, come diremo, da malattia. Adriano invece che, all'epoca della sua duplice iniziazione, si trovava in viaggio per la Grecia, si presentò sempre puntualmente alla festa.

nè che il ritardo sia stato causato dal desiderio, espresso dall'indiano Zarmaros, di iniziarsi; poichè tale intenzione egli non avrà potuto evidentemente manifestare prima di esser giunto a Samo (o forse anche ad Atene stessa, come ci farebbero credere le parole di Dione) e di essere stato informato della mistica festa: e allora, se giunto prima, avrebbe aspettato il giorno giusto, se giunto dopo, avrebbe trovata la cerimonia già compiuta e Augusto già iniziato a tempo debito.

Una sola cosa si poteva in tal caso fare per appagare il desiderio dell' Indiano, entusiasmato delle funzioni religiose eleusine (di cui forse qualche iniziato, reduce dai recenti misteri, gli avrà discorso), ma arrivato troppo tardi per parteciparvi; specie se il suo desiderio fu appoggiato dall' autorità dell' imperatore presso i sacerdoti di Eleusi: ripetere la cerimonia almeno nelle sue parti essenziali, per poter inscrivere, fra gli iniziati di quell'anno, Zarmaro, e forse qualche altra persona del seguito suo o della Corte, che avrà voluto seguirne l'esempio. Questo è quanto possiamo logicamente dedurre dai fatti che ci sono narrati; ma, ciò che forse vale anche di più, questo è appunto ciò che leggiamo nel passo di Dione Cassio.

Le parole dello storico, attentamente esaminate ed interpretate nella maniera più semplice e più naturale, non ci permettono di vedervi una testimonianza dell'iniziazione di Augusto in quel momento.

Così infatti io traduco questo passo: Uno degli Indiani, Zarmaros, ... (per una qualche ragione che non si potrebbe precisare) ....., poichè venne (*ἦλθεν*: egli solo, cioè, non con Augusto) anche ad Atene, avendo manifestato il desiderio di morire (dopochè probabilmente, in codesta città, fu informato della religione dei misteri), fu iniziato (Zarmaros solo) alla religione delle due dee, essendosi celebrati i misteri benchè non fosse allora il tempo opportuno, come si dice, per via di Augusto, che era stato anch'egli iniziato; e si gettò vivo nelle fiamme.

Soltanto dunque forzando il senso di questo paragrafo di Dione, riusciremmo a leggervi l'iniziazione di Augusto; ma ciò non servirebbe ad altro che a porre questo luogo in contrasto con quello del libro LI e con il naturale svolgimento dei fatti.

Preferiamo leggervi solo ciò che sta scritto, tenendo fermo che Augusto fu iniziato nel 31 a. C. e che nel 21 egli ottenne una ripetizione della festa in favore di persona che gli era gradita.

Dopo Augusto, si occupò dei misteri Claudio: è noto il suo tentativo di trasportare a Roma la sede della religione eleusina; tentativo che non dovè certo limitarsi a una pura espressione di desiderio, ma che era tuttavia destinato a rimanere senza effetto, dato il carattere essenzialmente locale dei Misteri (1).

Nerone poi, l'imperatore che trovò in Grecia maggior favore che in qualunque altra parte dell'Impero, ebbe vivo desiderio di essere iniziato; ma non osò presentarsi ai misteri, *quorum initiatione impii et scelerati voce praeconis summoventur* (2).

Nel turbolento periodo seguito alla morte di Nerone, Eleusi fu dimenticata: nè ci consta che alcuno de' successivi imperatori sia stato sedotto dal desiderio di assistere alle sue cerimonie, neppur Domiziano, che ebbe per la Grecia non pochi tratti di benevolenza e che accettò anche di essere arconte ateniese (3).

Arriviamo così ad Adriano, il grande imperatore filelleno, che più volte visitò la Grecia (4), lasciando sempre e dovunque tracce della sua munificenza. Con lui si apre per

---

(1) Suet., *Claudius*, 25: *Sacra Eleusinia etiam transferre ex Attica Romam conatus est*. Il Foucart, *Mystères*, p. 263 sgg., suppone, in base ad un luogo di Arriano (*Διατριβαὶ 'Επικτήτου*, III, 21), che il tentativo della traslazione sia stato ripreso più tardi da uno degli imperatori che si fecero iniziare ad Eleusi.

(2) Suet., *Nero*, 34. L'interdizione ai Misteri è studiata ne' suoi motivi e nelle sue applicazioni da Foucart, *Mystères*, p. 309 sgg.

(3) " Bull. Corr. Hell. ", XX (1896), p. 715 sgg.; XXII (1898), p. 152 sgg.; XXX (1906), p. 314.

(4) Sulla complicata cronologia dei viaggi di Adriano non si è ancora raggiunto dagli studiosi un accordo completo. La storia della questione e le diverse soluzioni proposte possono vedersi in Hertzberg, *Gesch. Griechenlands*, II, p. 301 sgg.: posteriormente, sono fondamentali gli studi del Dürr, *Die Reisen des Kaisers Hadrian* (Wien 1881), del Von Rohden in *R. E.*, I^2, p. 493 sgg., dello Schulz, *Leben des Kaisers Hadrian* (Leipzig 1904), e del Weber, *Untersuchungen zur Gesch. des Kaisers Hadrian* (Leipzig 1907).

Eleusi un periodo veramente aureo, anche perchè, dopo di lui, tutti gli Antonini vollero essere partecipi di quella religione. Gli Eleusini serbarono loro a lungo viva gratitudine, come ancor oggi ne fanno testimonianza le numerose basi di statue sparse nel sacro " témenos „ di Demetra, sulle quali si leggono ancora le epigrafi onorifiche destinate a celebrare la memoria di quegli imperatori o di qualche loro parente (1). Dell'iniziazione di Adriano già scrisse esaurientemente il Foucart nello studio più volte citato; ai risultati delle sue ricerche dobbiamo però proporre alcune modificazioni.

Adriano, che era già stato eletto arconte ad Atene nel 112 (2), fu per la prima volta in questa città come imperatore in occasione del suo primo lungo viaggio per le provincie: partito da Roma, come sembra, nel 121, dopo aver visitato l'Occidente, l'Africa e l'Asia, passò di qui, attraverso le isole egee, la Tracia e la Macedonia, in Acaia, giungendo in Atene nell'autunno del 125; allora presenziò ai Grandi Misteri di boedromione. Siccome sappiamo che egli si trattenne in Atene tutto l'inverno 125/126 e buona parte della primavera, è probabile che abbia assistito ai Piccoli Misteri del febbraio, invertendo così l'ordine in cui dovevano presenziarsi dai misti le due cerimonie (3). L'asserzione del Foucart, che Adriano, dopo aver passato l'inverno in Atene, assistè ai Piccoli e poi ai Grandi Misteri del 125, non concorda coi risultati finora

(1) Vedi " *'Εφ. ἀρχ.* „, 1904, p. 201, n° 20 e 212, n° 42 (Adriano); 1894, p. 211-12, n[i] 37-42 (Antonino Pio e persone della sua famiglia; cfr. 1899, p. 199, n° 20): 1899, p. 200, n° 21 e p. 202, n° 22 (M. Aurelio e L. Vero); *I. G.*, III, 535 (M. Aurelio); " *'Εφ. ἀρχ.* „, 1899, p. 214, n° 48 (Commodo ?).

(2) *I. G.*, III, 1096; Ael. Spart., *Hadr.*, XIX, 1; Dio. Cass., LXIX, 16, 1. Cfr. *R. E.*, I^2, 499. L'anno attico dell'arcontato è il 111/12, come risulta da Weber, op. cit., p. 15, in seguito a Dürrbach, " Bull. Corr. Hell. „, XXVIII (1904), p. 177 sgg.

(3) Seguo la cronologia data dal Von Rohden, *R. E.*, I^2, 506 sgg. — A questa si attiene anche lo Schulz, op. cit., p. 68 sgg.; mentre il Weber, op. cit., p. 159 sgg., colloca la residenza di Adriano in Atene nell'inverno 124/5. Sull'inverosimiglianza di un anteriore " viaggio d'ispezione „ nelle provincie orientali, che Adriano avrebbe compiuto già nel 118, ha scritto G. A. Alfero, in " Atti della R. Acc. Sc. di Torino „, XLVII (1912), p. 426 sgg.

acquisiti nello studio dei viaggi del grande imperatore. Se vogliamo infatti credere ch'egli abbia assistito a tutte e due le celebrazioni, dobbiamo ammettere che l'abbia fatto in ordine inverso a quello normale. Giunto infatti in Atene nell'autunno 125, ne ripartì prima dell'autunno 126, sicchè nel 125 egli potè esser presente solo ai Grandi Misteri, nel 126 solo ai Piccoli (1).

Una seconda volta tornò Adriano ad Atene, in occasione del suo secondo viaggio, tre anni più tardi, e vi passò l'inverno del 128/129 (2); ritornò anche questa volta ad Eleusi ed ivi raggiunse il secondo grado dell'iniziazione, l'epoptia (3). Un altro inverno o due passò ancora probabilmente in questa città, durante la guerra giudaica (4); mentre si moltiplicavano i suoi beneficî in favore degli Elleni e si portavano a compimento i ricchi e numerosi edificî di cui egli adornò la gloriosa città da lui prediletta.

---

(1) Non affronto qui la questione se l'arrivo di Adriano in Atene sia da porsi piuttosto all'autunno del 124 o a quello del 125: il Dittenberger, prima favorevole alla prima tesi (" Hermes ,, VII, p. 213 sgg.), ha preferito poi la seconda (*I. G.*, III, 735), che è pure quella del Von Rohden, del Dürr e dello Schulz; mentre il Weber (op. cit., p. 159), seguito dal Niese (*Manuale di St. rom.*, p. 450), sta per la prima. Resta in ogni modo vero che Adriano non potè assistere nello stesso anno ai Piccoli Misteri prima e poi ai Grandi, perchè partì da Atene alla metà del 126 (Schulz, p. 69), o, secondo l'altra ipotesi, del 125 (Weber, p. 191, 197).

(2) Presenziò dunque ai Misteri del Boedromione del 128 e non, come vorrebbe il Foucart, del 129. Ciò a me sembra evidente in base alle giuste considerazioni suggerite al Dittenberger da *I. G.*, III, 735, 1107 (cfr. *R. E.*, I², 507; Weber, op. cit., p. 206 sgg.). Invece il Dürr (pag. 48) colloca questa seconda visita all'inverno 129/30, lo Schulz (p. 75), nei mesi dal giugno all'ottobre del 129.

(3) Dio. Cass., LXIX, 11: *ἐπώπτευσε τὰ μυστήρια*. Unico in questo fra gli imperatori romani.

(4) *R. E.*, I², 512. — Weber, op. cit., p. 268 sgg.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

PROGRAMMA DEI PREMI

DI

FONDAZIONE VALLAURI

PEI

Quadrienni 1915-1918 e 1919-1922.

La Reale Accademia delle Scienze di Torino annuncia che, in esecuzione delle disposizioni testamentarie del Socio Senatore Tommaso Vallauri, conferirà un premio *a quello scienziato italiano o straniero che, nel quadriennio decorrente dal 1° gennaio 1915 al 31 dicembre 1918, abbia pubblicato colle stampe l'opera più ragguardevole e più celebre su alcuna delle scienze fisiche,* interpretando l'espressione " scienze fisiche „ nel senso più largo. Questo premio sarà di lire **ventiseimila**.

Per le stesse disposizioni ha stabilito un altro premio da conferirsi *a quel letterato italiano o straniero che avrà stampato la migliore opera critica sopra la letteratura latina nel quadriennio decorrente dal 1° gennaio 1919 al 31 dicembre 1922.* Questo secondo premio sarà di lire italiane **venticinquemila**.

I premi saranno conferiti un anno dopo le rispettive scadenze.

Essi non potranno mai essere assegnati ai Soci nazionali dell'Accademia, sì residenti come non residenti.

Le opere, che saranno inviate all'Accademia perchè siano prese in considerazione per il premio, non saranno restituite.

Non si terrà conto alcuno dei manoscritti.

30 gennaio, 1915.

Il Presidente dell'Accademia
Paolo Boselli.

Il Segretario
della Classe di Scienze fisiche,
matematiche e naturali
Corrado Segre.

Il Segretario
della Classe di Scienze morali,
storiche e filologiche
Ettore Stampini.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. L. Disp. 6ª, 1914-1915.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 24 Gennaio 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente CAMERANO, il Direttore della Classe D'OVIDIO, e i Soci SALVADORI, NACCARI, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI, BALBIANO, e SEGRE, Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Vengono presentate, per la stampa negli *Atti,* le seguenti Note:

E. PERUCCA, *Sull'azione magnetica della luce,* dal Socio NACCARI.

I. GUARESCHI, *Azione del bromuro di ammonio sui joduri metallici*, Nota II.

G. GRASSI, *A proposito della priorità di Alessandro Volta nelle ricerche sulla dilatazione dei gas.*

In seduta privata la Classe procede ad elezioni di Soci, e riescono eletti, salvo l'approvazione Sovrana, a Socio nazionale residente il Prof. Modesto PANETTI; a Soci nazionali non residenti i Professori Augusto RIGHI, Torquato TARAMELLI, Eugenio BERTINI, Romualdo PIROTTA e Antonio ROITI.

LETTURE

Sull'azione magnetica della luce.

Nota del Prof. ELIGIO PERUCCA.

Già varî sperimentatori si posero la questione se la luce possa magnetizzare i corpi che attraversa, o sui quali incide. Una vasta bibliografia e un largo sunto di ciò che fu fatto sull'argomento, trovasi in un libro relativamente recente del Ries [1].

Più generalmente si può pensare che un raggio di luce, oltre che variare la magnetizzazione di un corpo, possa variarne la suscettività magnetica.

Il Righi e il Corbino, ai quali sono dovuti i lavori più recenti e più accurati sull'argomento [2] [3], sono concordi nel concludere che non fu potuta osservare nessuna azione magnetizzante di un raggio di luce polarizzato circolarmente, di un raggio cioè, dal quale, per ragioni di simmetria, si dovrebbe ottenere l'effetto massimo.

Il Righi [2] ha usato una disposizione sperimentale sensibile a una intensità di magnetizzazione $\mathfrak{M}$ del corpo illuminato di 10^{-6} unità assolute; ma praticamente insensibile a una sua eventuale variazione di suscettività magnetica χ.

Le esperienze del Corbino [3]:

1° Avrebbero permesso di scoprire un effetto della luce polarizzata circolarmente, se questo effetto fosse stato una va-

---

[1] Ch. Ries, *Das Licht in seinen elektrischen und magnetischen Wirkungen*. Barth, Leipzig, 1909.

[2] A. Righi, *Intorno alla questione della produzione di un campo magnetico*, ecc., " Atti Acc. Linc. „, V, 8, 1° sem., p. 325, 1899; " N. Cim. „, 10, p. 114, 1899.

[3] O. M. Corbino, *Reciprocità nei fenomeni magneto-ottici*, " N. Cim. „, 10, p. 408, 1899.

riazione di $\frac{1}{100000}$ del valore iniziale del flusso concatenato con un rocchetto R_1 circondante un cilindro di vetro ([1]), attraversato dalla luce, nel quale è stato creato con un rocchetto R_2 un campo iniziale H. Potrebbe sembrare così che la sensibilità assoluta del metodo si accrescesse al diminuire dell'intensità del campo iniziale creato dal rocchetto R_2. Nel fatto tale sensibilità è di $\frac{1}{100000}$ solo col valore H del campo iniziale usato dal Corbino. Dal lavoro di questo sperimentatore non risulta quanto sia stato tal valore H, certo non molto lontano da 4000 *gauss*. Che se variasse il campo iniziale, cioè l'intensità della corrente inviata in R_2, la sensibilità relativa varierebbe in egual proporzione; cioè il metodo sperimentale del Corbino permette di scoprire, qualunque sia il campo iniziale, una variazione costante $\Delta\varphi$ del flusso che attraversa il rocchetto R_1.

2° Neanche riescì al Corbino di osservare un'azione magnetizzante di un raggio di luce polarizzato linearmente il cui piano di polarizzazione ruota rapidissimamente (2×10^6 giri al secondo).

Riguardo alla prima serie delle esperienze del Corbino, il loro risultato negativo si può interpretare in due modi:

a) La luce non modifica la costante magnetica del vetro di $\frac{1}{100000}$ del suo valore, perchè in tal rapporto varierebbe allora il flusso attraverso il rocchetto R_1, rimanendo costante il campo iniziale creato da R_2. Dunque la suscettività magnetica χ del vetro per effetto della luce non varia del 100 °/₀ (circa).

b) La luce non produce una magnetizzazione del vetro atta ad aumentare il flusso attraverso R_1 di $\frac{1}{100000}$ del suo valore iniziale. Supposto per il vetro $\mu = 1$, si può dire che la luce non riesce a produrre una magnetizzazione del vetro atta ad accrescere in esso l'induzione iniziale 4000 di 0,04. Scritta la relazione tra induzione e magnetizzazione $\mathfrak{M}$ mediante l'artifizio della cavità a faccie piane e parallele infinitamente vi-

---

([1]) Le esperienze furono anche fatte sull'acqua, ma con precisione minore.

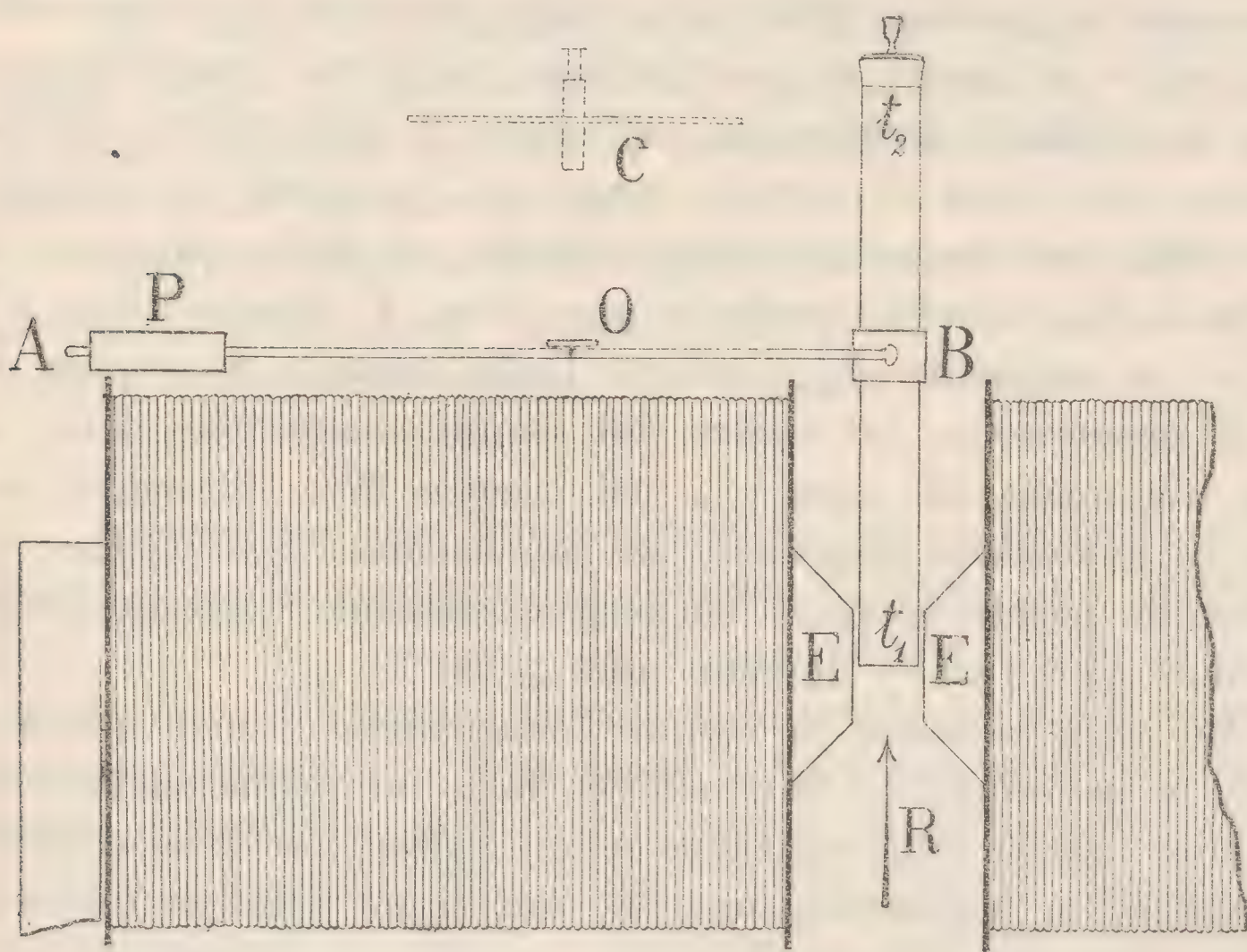
cine e perpendicolari alla direzione di magnetizzazione, risulta $\mathfrak{M} = \frac{0,04}{4\pi} = 0,003$, circa, come valore della minima magnetizzazione scopribile.

Per quanto possa raggiungere sensibilità maggiore, il metodo, come fu usato dal Corbino, non è estremamente sensibile.

Desidero mostrare che: *considerazioni relativamente elementari, basate sulla teoria elettronica del magnetismo* (Langevin), *ci avvertono che un effetto magnetico della luce polarizzata circolarmente può esistere nel caso di assorbimento della luce sia per risonanza che per mezzo di elettroni liberi, ma che tale effetto è minore del minimo scopribile con i mezzi fin qui adoperati.* Dalla teoria si dedurrà anche *l'impossibilità di ottenere un effetto magnetico sensibile per mezzo di un raggio di luce polarizzato linearmente, il cui piano di polarizzazione ruota di qualche milione di giri al secondo.*

Non credo inutile descrivere dapprima brevemente come ho condotto le mie esperienze (sebbene abbiano dato anch'esse un esito completamente negativo), perchè ho usato una disposizione sperimentale sensibile contemporaneamente a una variazione della magnetizzazione del corpo in istudio (acqua e soluzioni acquose) di meno di 10^{-6} (nelle condizioni migliori) e a una variazione della sua suscettività magnetica di circa $\frac{1}{1000}$ del suo valore. Con mezzi più perfetti e più potenti la sensibilità di questa disposizione può venir ancora aumentata.

Tra i poli piani e paralleli EE di una forte elettrocalamita di Ruhmkorff, giungeva l'estremità t_1 di un tubo $t_1 t_2$ lungo 18 cm., di 1,7 cm. di diametro, pieno del liquido (acqua) o della soluzione (acqua colorata con fucsina o cianina) in istudio. Mediante l'asticella AB e il contrappeso P il tubo si poteva sospendere in O a un filo di argentana che risulterebbe perpendicolare al piano della figura, molto lungo (circa 80 cm.), sottile il più che fosse possibile (0,3 mm.) compatibilmente col peso che doveva sopportare, fornito all'estremità superiore di una testa di torsione divisa in 500 parti. Eccitata l'elettrocalamita, il campo tra i poli EE risultava nelle mie esperienze di poco superiore a 3500 *gauss*. A causa di questo campo, l'equipaggio sospeso al filo veniva soggetto a un momento di torsione. Te-

nuta costante la corrente eccitatrice (8 *ampères*) mediante un amperometro sensibile a $\frac{1}{50}$ di *ampère* e un reostato, ruotando opportunamente la testa di torsione riconducevo l'equipaggio mobile alla posizione primitiva, del che mi avvertiva l'osservazione al cannocchiale *C* fatta col metodo di Poggendorff.

Allora, mediante una lampada ad arco, un condensatore, un nicol, un $\frac{1}{4}$ λ, uno schermo, inviavo attraverso il tubo $t_1 t_2$ o intercettavo un intenso fascio *R* di raggi luminosi polarizzati rettilineamente o circolarmente nei due sensi. Non ottenni mai, per effetto di questi raggi, uno spostamento dell'equipaggio mobile, osservato al cannocchiale *C*, superiore agli errori di osservazione.

Per la sensibilità del metodo, dirò che quando, ad es., il tubo $t_1 t_2$ era pieno di acqua distillata, la rotazione della testa di torsione necessaria per ricondurre l'equipaggio alla posizione iniziale era di 250 circa delle sue divisioni, e ciascuna di queste equivaleva a più di 20 divisioni della scala di Poggendorff. Malgrado i lievi tremolii della sospensione, una deviazione di

due divisioni su tale scala sarebbe stata facilmente osservabile; d'altra parte solo 1 cm^2 della sezione (2,5 cm^2) del tubo $t_1 t_2$ veniva illuminata; dunque il metodo sarebbe stato sensibile a una variazione della costante magnetica di $\frac{1}{250.10} . 2,5 = \frac{1}{1000}$ del suo valore.

A causa della forma speciale dell'equipaggio mobile, la mancanza di qualsiasi effetto del raggio luminoso fa anche escludere, entro gli errori di osservazione, un'azione magnetizzante della luce. Infatti, mentre una variazione di suscettività avrebbe prodotto una forza F_1 diretta lungo $t_1 t_2$, e quindi un momento $F_1 \times OB$, una magnetizzazione uniforme $\mathfrak{M}$ della sostanza contenuta in $t_1 t_2$ avrebbe prodotto una forza F_2 diretta lungo EE, dunque un momento $F_2 \times t_1 B$ (1). Dalla costante di torsione del filo di sospensione, dal valore del campo magnetico, della sezione illuminata del tubo $t_1 t_2$, del braccio Bt_1, dell'angolo minimo di deviazione osservabile al cannocchiale C, si deduce che si sarebbe potuta scoprire una magnetizzazione uniforme dovuta alla luce $\geq 0,5\ 10^{-6}$; diciamo pure $\geq 10^{-6}$.

Ma se la sostanza in istudio è assorbente, e solo allora la teoria fa prevedere un lieve effetto della luce polarizzata circolarmente (effetto magnetizzante e non variazione di suscettività magnetica), la magnetizzazione $\mathfrak{M}$ non si può ritenere uniforme perchè l'intensità luminosa decresce rapidamente andando da t_1 verso t_2. Le forze applicate all'equipaggio mobile saranno: l'una F_2 applicata in t_1 lungo la retta EE, l'altra F_3 applicata a punti interni al tubo $t_1 t_2$, poco dopo t_1 e diretta in senso contrario alla F_2. La sensibilità del metodo ne risulta diminuita. Così se il tubo $t_1 t_2$ fosse pieno di fucsina pura, un raggio luminoso verde anche intensissimo non ne penetrerebbe che una piccola frazione di mm., dell'ordine di $\frac{1}{1000}$ di mm.; poniamo

(1) Si suppone nullo il campo magnetico in t_2. Il dubbio che le due forze F_1, F_2 siano esistite, ma si siano equilibrate reciprocamente, non è possibile, perchè invertendo il campo dell'elettrocalamita, l'azione della luce era ancora insensibile; con tale inversione soltanto F_2 avrebbe cambiato senso, e i due momenti non avrebbero potuto equilibrarsi: si sarebbero sommati.

pure $\frac{1}{100}$ mm.; F_2 ed F_3 risulterebbero eguali e di segno contrario e il momento di torsione da $t_1 B \times F_2$ si ridurrebbe a $0{,}001 \times F_2$ cioè si ridurrebbe nel rapporto $\frac{t_1 B}{0{,}001} = \frac{9}{0{,}001} =$ $= 10^4$ circa. La minima magnetizzazione sensibile sarebbe, invece di 10^{-6}, di poco inferiore a 10^{-2}. Analogamente per un metallo.

Nel fatto, le soluzioni colorate da me usate erano molto diluite (0,030 $^0/_{00}$ per la fucsina, e anche meno per la cianina), in modo che anche per esse la sensibilità del metodo si poteva ritenere poco lontana da 10^{-6}.

Apparirà facilmente dal seguito che non è da temere un'apprezzabile diminuzione di sensibilità a causa di una magnetizzazione dell'aria illuminata, che lambisce l'estremo t_1.

Supporremo che l'onda piana di luce polarizzata circolarmente sia monocromatica di periodo T, abbia una intensità di 4000 *erg* a sec. per cm^2. La forza elettrica in tale onda ha il valore $E = 10^{-3}$ circa. Questa luce incida su di un corpo contenente $N = 6{,}8 \cdot 10^{-23}$ molecole per grammo-molecola; ogni molecola contenga n elettroni di massa costante $m = 0{,}8 \cdot 10^{-27}$, di carica negativa $\epsilon = 4{,}3 \cdot 10^{-10}$ unità assolute elettrostatiche (corrispondenti ad $e = 1{,}4 \cdot 10^{-20}$ unità assolute elettromagnetiche), vibranti con periodo proprio T, coincidente con quello della luce circolare, a causa di una forza quasi elastica αr proporzionale alla distanza dell'elettrone dalla sua posizione di equilibrio, e diretta verso questa (modello di Thomson, periodo di vibrazione indipendente dall'ampiezza). Supporremo $r \leq$ ad un certo valore massimo dell'ordine del raggio dell'atomo (10^{-8} cm.). Sarà allora

$$\alpha = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \tag{1}$$

e la forza elettrica esercitata dall'onda luminosa sull'elettrone sarà:

$$\epsilon E = 4{,}3 \cdot 10^{-13}.$$

Supporremo nulla l'azione del campo magnetico del raggio

luminoso sull'elettrone, perchè dell'ordine $\frac{1}{3.10^{10}}$ rispetto all'azione del campo elettrico. Trascureremo le azioni nel periodo iniziale di stabilimento dell'onda luminosa, così da poter ritenere costante la grandezza della forza elettrica fin dall'istante iniziale; e porremo attenzione all'effetto che questa forza produce sul movimento degli elettroni.

Langevin ha mostrato [1] che un elettrone percorrente un'orbita chiusa e piana di area S, col periodo T, è equivalente a un magnete elementare di momento:

$$M = \frac{eS}{T}$$

perpendicolare al piano dell'orbita, in senso opportuno.

Si deduce che la componente di tal momento magnetico lungo un asse ξ è eguale al momento della proiezione dell'orbita S perpendicolarmente a questo asse. Sceglieremo per asse ξ il raggio luminoso: solo la proiezione dell'orbita S perpendicolarmente a ξ sarà alterata dalla presenza della forza elettrica del raggio luminoso.

Supponiamo infine che l'orbita più generale dell'elettrone nel modello di Thomson sia un ellisse. Allora il momento magnetico di una grammo-molecola del corpo in istudio sarà:

$$\frac{e\pi}{T} \sum_{s=1}^{s=nN} (A_s B_s),$$

A_s, B_s indicando gli assi dell'orbita dell'elettrone generico e $(A_s B_s)$ indicando un vettore di grandezza $A_s . B_s$ perpendicolare al piano dell'ellisse e volto in senso opportuno rispetto al moto dell'elettrone sull'orbita. La proiezione di questo momento lungo il raggio luminoso, e sarà la sola parte eventualmente variabile del momento magnetico totale, è, in valore e segno,

$$(2) \qquad \frac{e\pi}{T} \sum_{s=1}^{s=nN} a_s b_s \operatorname{sen}(\delta_{1s} - \delta_{2s})$$

---

[1] P. Langevin, *Magnétisme et théorie des électrons*, " Ann. Chim. et Phys. ", 5, p. 73, 1905.

se con

$$(3) \qquad x_s = a_s \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta_{1s}\right) \qquad y_s = b_s \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta_{s2}\right)$$

si indica la proiezione del moto dell'elettrone, sulla proiezione dell'orbita, riferito a due assi cartesiani x, y che supporremo egualmente orientati per tutti gli elettroni.

Ad es., per un corpo diamagnetico, secondo Langevin, gli n elettroni di ogni molecola percorreranno n orbite rigidamente [1] collegate tali che sia

$$\sum_{s=1}^{s=n} (A_s B_s) = 0$$

e quindi, lungo qualunque asse:

$$(4) \qquad \sum_{s=1}^{s=n} a_s b_s \operatorname{sen} (\delta_{1s} - \delta_{2s}) = 0 .$$

Per ragione di simmetria, la eventuale modificazione del momento magnetico per effetto della luce non potrà essere che parallela al raggio luminoso, corrisponderà quindi a una magnetizzazione parallela a tal raggio, e non a una variazione della costante magnetica del corpo illuminato. Una variazione di paramagnetismo si avrebbe se, sotto l'effetto della luce, le molecole variassero il loro momento magnetico in ogni direzione, non soltanto la componente del momento parallela alla luce, così che il magnetismo libero dovuto all'azione della luce fosse nullo, ma il campo magnetico esterno $E\,E$ producesse un rassettamento diverso da quello esistente in assenza della luce.

Una variazione di diamagnetismo, secondo le idee di Langevin, sarebbe assolutamente trascurabile, perchè, come vedremo

---

[1] Per spiegare la mancanza di polarizzazione paramagnetica in tal corpo per effetto di un campo magnetico esterno. Tale collegamento rigido significa, in ultima analisi, che le orbite sono in equilibrio relativo enormemente stabile, anche sotto l'azione di un campo magnetico esterno fortissimo.

tra breve, la variazione dell'orbita dell'elettrone per effetto della luce è minima.

Le equazioni del moto dell'elettrone generico sotto l'onda circolare sono [1]:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{\alpha}{m}x + \dfrac{\epsilon E}{m}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2\pi t}{T} \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{\alpha}{m}y + \dfrac{\epsilon E}{m}\cos\dfrac{2\pi t}{T} \end{cases}$$

con le condizioni iniziali, dovute alle (3):

$$(6)\qquad \begin{cases} x_{t=0} = a\cos\delta_1\,; & \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=0} = -\dfrac{2\pi}{T}\,a\,\mathrm{sen}\,\delta_1 \\[2ex] y_{t=0} = b\cos\delta_2\,; & \left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{t=0} = -\dfrac{2\pi}{T}\,a\,\mathrm{sen}\,\delta_2\,, \end{cases}$$

dove per gli nN elettroni a e b possono avere qualunque valore compreso tra 0 e il raggio dell'atomo o, al massimo, della molecola (ordine di grandezza: 10^{-8}); così anche δ_1 e δ_2 assumono qualunque valore compreso tra 0 e 2π.

L'integrale generale di tali equazioni differenziali lineari complete del secondo ordine è [2], con l'espressione data alle costanti arbitrarie, cioè ai valori iniziali, e per la (1):

$$(7)\qquad \begin{cases} x = a\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T} + \delta_1\right) - \dfrac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m}\,\dfrac{2\pi t}{T}\cos\dfrac{2\pi t}{T} + \dfrac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2\pi t}{T} \\[2ex] y = b\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T} + \delta_2\right) + \dfrac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m}\,\dfrac{2\pi t}{T}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2\pi t}{T}\,. \end{cases}$$

Dunque l'effetto del raggio luminoso è di aggiungere alle due componenti rettilinee in cui si scompone la vibrazione ini-

---

[1] Non si tien conto dello smorzamento della vibrazione dell'elettrone per effetto del suo irraggiamento, o per effetto di una forza d'attrito proporzionale alla velocità introdotta per spiegare l'assorbimento senza fare alcuna ipotesi sul suo meccanismo. Questi due termini tenderebbero a diminuire l'effetto magnetizzante della luce (v. anche pag. 350).

[2] Dini, *Calcolo Integrale*, pag. 678.

ziale dell'elettrone, due altre di egual periodo e di ampiezza crescente proporzionalmente al tempo (a meno del termine $\frac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$ che è di secondo ordine quando $\frac{t}{T}$ assuma valori un po' grandi). Per ogni valore non molto piccolo $\left[\frac{t}{T}\right]$ di $\frac{t}{T}$, per un brevissimo intervallo di tempo, ad es. per un periodo, la vibrazione dell'elettrone si potrà ritenere ancora ellittica, di periodo T, con assi di direzione e grandezza opportune; la vibrazione aggiunta dalla luce sarà circolare nello stesso senso della vibrazione luminosa, ma in ritardo, rispetto a questa, di $\frac{\pi}{2}$.

Si calcolano gli elementi della vibrazione ellittica risultante:

$$(7^{bis}) \quad \begin{cases} x = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta_1\right) - \frac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m} \cdot 2\pi \left[\frac{t}{T}\right] \cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \\ y = b \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta_2\right) + \frac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m} \cdot 2\pi \left[\frac{t}{T}\right] \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \end{cases}$$

scrivendola sotto la forma:

$$(8) \quad \begin{cases} x = a' \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta_1'\right) \\ y = b' \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta_2'\right) \end{cases}$$

ed eguagliando i coefficienti di $\cos \frac{2\pi t}{T}$ e di $\operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$ nelle due espressioni di x e nelle due espressioni di y.

Si ha così:

$$(9) \quad \begin{cases} \begin{cases} a' \cos \delta_1' = a \cos \delta_1 - \frac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m} \cdot 2\pi \left[\frac{t}{T}\right] \\ a' \operatorname{sen} \delta_1' = a \operatorname{sen} \delta_1 - \frac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m} \end{cases} \\ \begin{cases} b' \cos \delta_2' = b \cos \delta_2 \\ b' \operatorname{sen} \delta_2' = b \operatorname{sen} \delta_2 - \frac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m} \cdot 2\pi \left[\frac{t}{T}\right] \end{cases} \end{cases}$$

e l'area dell'ellisse (8) risulta:

$$\pi\, a'\, b' \operatorname{sen}(\delta_1' - \delta_2') = \pi\, a\, b \operatorname{sen}(\delta_1 - \delta_2) +$$
$$+ \pi \,.\, \frac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m} \,.\, 2\pi \left[\frac{t}{T}\right] (a \cos\delta_1 + b \operatorname{sen}\delta_2) -$$
$$- \pi \,.\, \frac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m}\, b \cos\delta_2 - \pi \left(\frac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m} \,.\, 2\pi \left[\frac{t}{T}\right]\right)^2$$

dunque la variazione di momento magnetico dell'elettrone è:

$$dM = \frac{e\pi}{T} \,.\, \frac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m} \left\{ 2\pi \left[\frac{t}{T}\right] (a \cos\delta_1 + b \operatorname{sen}\delta_2) - b \cos\delta_2 \right\} -$$
$$- \frac{e\pi}{T} \left(\frac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m} \,.\, 2\pi \left[\frac{t}{T}\right]\right)^2$$

e per la grammomolecola:

$$\Delta M = \frac{e\pi}{T} \,.\, \frac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m} \left\{ 2\pi \left[\frac{t}{T}\right] \left(\sum_{s=1}^{s=nN} a_s \cos\delta_{1s} + \sum_{s=1}^{s=nN} b_s \operatorname{sen}\delta_{2s} \right) -\right.$$
$$\left. - \sum_{s=1}^{s=nN} b_s \cos\delta_{2s} \right\} - \frac{e\pi}{T}\, nN \left(\frac{\epsilon E T^2}{8\pi^2 m} \,.\, 2\pi \left[\frac{t}{T}\right]\right)^2 .$$

La magnetizzazione sarà:

$$\mathfrak{M} = \frac{\Delta M}{V}$$

se con V si indica il volume della grammo-molecola.

L'espressione di ΔM, e quindi quella di $\mathfrak{M}$, si semplifica molto se si tien conto che, a causa del disordine elettronico, le $\sum_{s=1}^{s=nN}$ risultano nulle. Si giunge così all'espressione della magnetizzazione dovuta alla luce polarizzata circolarmente

$$\mathfrak{M} = - \frac{e\pi}{T} \,.\, \frac{nN}{V} \,.\, \frac{\epsilon^2 E^2 T^4}{16\pi^2 m^2} \left[\frac{t}{T}\right]^2 \tag{10}$$

indipendente, come è naturale, dal movimento disordinato preesistente degli elettroni.

Sostituendo alle quantità di questa formula i loro valori, supponendo $T = 2 . 10^{-15}$, risulta approssimativamente:

$$\mathfrak{M} = -5 . 10^{-13} \frac{n}{V} \left[\frac{t}{T}\right]^2 . \tag{11}$$

Dunque un'azione magnetizzante della luce polarizzata circolarmente, nel caso che il periodo di questa coincida col periodo proprio degli elettroni, esiste, e il suo valore dipende, oltre che dalle altre costanti che compaiono nella (10), dal valore $\left[\frac{t}{T}\right]$, cioè dal tempo durante il quale la luce ha agito. Il valore massimo dell'effetto cercato si avrà attribuendo a $\left[\frac{t}{T}\right]$ il massimo valore possibile. Per conoscere tale valore massimo, occorre notare che le (10) e (11) sono valide solo per l'intervallo di tempo $[t]$ per il quale si possono ritenere valide le (5), per il quale, cioè, si può ritener indisturbata l'azione del raggio luminoso circolare. E al valore massimo di tale intervallo di tempo $[t]$ si può giungere, a me pare, in tre modi. Prima di tutto, per i gas, il valore di $[t]$ non può essere maggiore del tempo di rassettamento che riconduce, a parte l'aumentata energia cinetica media molecolare, la distribuzione delle orbite elettroniche al disordine iniziale.

Si giungerebbe così per i gas ($V = 22400$) al valore

$$|\mathfrak{M}| \leq 2 . 10^{-7} . n \tag{12}$$

e poichè n è un numero piccolo, l'effetto massimo ottenuto in questo modo sarebbe dell'ordine degli errori di osservazione.

Questo risultato invoglierebbe a compiere esperienze più precise con la speranza di ottenere qualche risultato positivo; ad es. si potrebbe pensare di sostituire all'equipaggio mobile ABt_1t_2 della figura, un piccolo cilindretto pieno del gas, posto tra EE in un fortissimo campo magnetico uniforme; si potrebbero allora usare fili di sospensione sottilissimi, e il metodo risulterebbe molto più sensibile.

Ma, supposto anche che esistano sorgenti luminose sufficientemente monocromatiche con l'intensità di 4000 *erg.* a *sec.* per cm.^{2}, a me pare che l'effetto massimo (12) sia di molto

superiore all'effetto massimo reale, e in particolare che non si possa sperare di ottenere un effetto maggiore illuminando un gas compresso ($V < 22400$), perchè il tempo di rassettamento diminuisce col volume molecolare.

Infatti un secondo modo di ottenere un valore massimo di $[t]$ è quello di considerare che le righe di assorbimento hanno sempre una certa larghezza, anche nel caso dei gas, anzi in questo caso l'ampiezza delle righe di assorbimento cresce rapidamente con la pressione. Nel caso dei vapori di *Na*, ad es., Wood ha trovato che le righe di assorbimento hanno, già a bassa pressione, la larghezza di qualche decimo di *ångström*; e allora, poichè l'aumento di energia degli elettroni per risonanza per effetto della luce avviene solo per l'intervallo di tempo durante il quale vibrazione luminosa e vibrazione dell'elettrone acquistano un ritardo relativo minore di un periodo, si deduce che la trasformazione dell'energia assorbita dagli elettroni in energia cinetica molecolare, cioè calorifica si deve compiere in un tempo $[t] \leq 0{,}5.10^{-11}$ circa; $\left[\frac{t}{T}\right]$ risulta $\leq 10^4$ ed

$$|\mathfrak{M}| \leq 2.10^{-9} n,$$

cioè insensibile alle esperienze finora eseguite perchè n non è un numero molto grande.

E infine, è questo l'ultimo dei tre modi accennati, a me pare che anche l'entità dell'assorbimento dei corpi ci permetta di ottenere un valore massimo $[t]$ dalle formule precedenti, che regolano il moto degli elettroni. L'energia assorbita dagli nN elettroni di una grammomolecola è:

$$\sum_{s=1}^{s=nN} \left\{ \frac{\alpha}{2}\left(x_s^2 + y_s^2\right) + \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx_s}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_s}{dt}\right)^2\right] - \frac{\alpha}{2}\left(a_s^2 + b_s^2\right) \right\}.$$

Sostituendo i valori di x, y, $\frac{dx}{dt}$ $\frac{dy}{dt}$ ottenuti dalle (7), omettendo le $\sum_1^{nN}$ che risultano nulle, si giunge all'espressione dell'energia assorbita dagli elettroni di una grammomole-

cola, supposto che tutti siano soggetti alla stessa forza elettrica ϵE:

$$nN \cdot \frac{\epsilon^2 E^2 T^2}{16\pi^2 m} \left\{ \left(\frac{2\pi t}{T} \right)^2 + \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi t}{T} \right\}.$$

Se con $[t]$ indichiamo il tempo necessario per la trasformazione dell'energia assorbita dall'elettrone in energia calorifica, l'energia assorbita in un secondo sarà $\frac{1}{[t]}$ volte quella assorbita dopo l'unico intervallo $[t]$, sarà cioè:

$$nN \frac{\epsilon^2 E^2 T^2}{16\pi^2 m} \left\{ 4\pi^2 \left[\frac{t}{T} \right]^2 + \operatorname{sen}^2 2\pi \left[\frac{t}{T} \right] \right\} \frac{1}{[t]}.$$

In realtà solo un primo strato di elettroni, di spessore $\left(\frac{N}{V}\right)^{-\frac{1}{3}}$, contenente $\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$ molecole, per cm^2, può ritenersi soggetto alla forza elettrica ϵE; detto K il coefficiente di assorbimento della sostanza in istudio, sarà

$$4000 \left(1 - e^{-K\left(\frac{N}{V}\right)^{-\frac{1}{3}}} \right)$$

la parte dell'energia incidente assorbita in un *sec.* per cm^2 da tale primo stato di elettroni. Dunque dovrà essere:

$$n \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\epsilon^2 E^2 T^2}{16\pi^2 m} \left\{ 4\pi^2 \left[\frac{t}{T} \right]^2 + \operatorname{sen}^2 2\pi \left[\frac{t}{T} \right] \right\} \frac{1}{[t]} =$$
$$= 4000 \left(1 - e^{-K\left(\frac{N}{V}\right)^{-\frac{1}{3}}} \right).$$

Trascurando il termine $\operatorname{sen}^2 2\pi \left[\frac{t}{T}\right]$ perchè così si giunge a un valore maggiore di $[t]$, limitandoci ai termini del primo ordine nello sviluppo dell'esponenziale, si ha:

$$n \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\epsilon^2 E^2}{4m} [t] < 4000 \cdot K \cdot \left(\frac{N}{V}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

cioè:

$$[t] < \frac{4 \cdot 4000 \cdot m \cdot K \cdot V}{\epsilon^2 E^2 \cdot n \cdot N} \tag{13}$$

o ancora, con i valori supposti:

$$[t] < 1{,}1 \,.\, 10^{-22}\, K \frac{V}{n} \tag{14}$$

così che, per i gas, anche con $n = 1$ e $K = 10^7$, valore enorme raggiunto solo dai vapori di sodio, risulta

$$[t] < 2{,}5\; 10^{-11}$$

ed $\mathfrak{M}$ molto inferiore agli errori di osservazione; mentre che, per le soluzioni colorate, ponendo al massimo $K = 10^3$, il valore corrispondente di $\mathfrak{M}$ risulta del tutto insignificante (1).

Considerazioni analoghe valgono per i solidi e per i liquidi: manca un concetto definito bene come per i gas di *tempo di rassettamento*; ma l'azione tra le molecole essendo più rapida perchè le molecole sono più vicine e le azioni reciproche più intense, dovrà essere $[t] \leq 10^{-10}$, e quindi, dalla (11):

$$|\mathfrak{M}| \leq 5 \,.\, 10^{-3} \frac{n}{V} \,.$$

Nel caso della fucsina pura è $V = 300$ circa, ma la sensibilità del metodo da me usato si riduce allora a 10^{-2}, così che

---

(1) La teoria dei *quanta* di assorbimento non condurrebbe a valori così piccoli del tempo necessario all'assorbimento, ed è questa una delle obiezioni che a tal teoria giustamente si oppongono (v. *La théorie du rayonnement et les quanta. Réunion de Bruxelles*, 1910. Rapporto di Planck), tanto che il Planck stesso propende ora per un assorbimento continuo. Io non mi valgo decisamente nè della teoria dell'assorbimento continuo, nè di quella dell'assorbimento discontinuo: io suppongo che l'assorbimento dell'energia luminosa da parte degli elettroni avvenga in modo continuo; la trasformazione dell'energia cinetica dell'elettrone in energia cinetica atomica o molecolare (e il meccanismo di questa trasformazione, che è il vero assorbimento, ci sfugge) *può darsi* che avvenga in un tempo finito, per quanto piccolissimo, e potrebbe quindi avvenire in modo discontinuo, ma per quantità certamente molto inferiori ad un *quantum*. La teoria dell'assorbimento continuo ridurrebbe l'effetto magnetizzante della luce a proporzioni ancor minori di quelle date dalle formule precedenti; ma, trovata in difetto l'interpretazione puramente elettromagnetica del termine di attrito, per mancanza di un significato fisico di tale termine, ha dovuto cedere il posto alle teorie più recenti.

solo per $n > 1000$ si potrebbe avere un effetto sensibile, e questo valore di n, per quanto sia complessa la molecola della fucsina, è certamente troppo forte. Nelle esperienze da me compiute con soluzione di fucsina al 0,03 $^0/_{00}$ circa, la sensibilità delle esperienze permetteva di scoprire una magnetizzazione dell'ordine di 10^{-6}, ma ora è $V = \frac{451}{0,03} . 1000 = 2,5.10^7$ (451 è il peso molec. della fucsina), quindi

$$|\mathfrak{M}| \leq 2 . 10^{-10}\, n$$

cioè ancora insensibile.

Si potrebbe pensare a fare esperienze con un corpo non molto assorbente, di piccolo peso molecolare e forte densità; ma, come già per i gas, a me pare che non si possano sperare risultati positivi sia per la mancanza di una sorgente luminosa sufficientemente monocromatica e sufficientemente intensa, sia, specialmente, per la larghezza delle zone di assorbimento anche nei casi in cui la teoria dell'assorbimento per risonanza sembra meglio confermata dall'esperienza. Per i corpi solidi o liquidi le bande di assorbimento hanno sempre la larghezza di qualche centinaio di *ångström*, cioè si ha assorbimento anche quando la luce incidente ha periodo sensibilmente diverso dal periodo proprio degli elettroni; ripetendo il ragionamento accennato nel caso dei gas, si conclude che l'assorbimento vero, ossia la trasformazione della velocità elettronica in velocità molecolare, deve avvenire in un tempo $[t]$ dell'ordine di $0,5 . 10^{-13}$ o minore, dunque $\left[\frac{t}{T}\right] \leq 10^2$ e quindi

$$|\mathfrak{M}| \leq 2,5 . 10^{-9} \frac{n}{V}$$

insensibile anche per valori piccoli di V e discretamente grandi di n.

Infine, come si è fatto per i gas, dall'entità dell'assorbimento della luce verde da parte della fucsina si deduce (v. formula (14)) un altro valore massimo di $[t]$, molto più piccolo dei precedenti: $[t] < 1,2 . 10^{-15} \frac{V}{n}$, così che, in base a questo valore, $\mathfrak{M}$ risulta del tutto insignificante.

Dunque, in ogni caso, *l'azione magnetizzante della luce non avrebbe potuto essere scoperta dalle esperienze finora eseguite*, anzi vi sono ragioni per ritenere tale azione del tutto insensibile ai nostri mezzi di osservazione.

Da ciò che precede si deduce anche *la mancanza di azione magnetizzante per effetto di luce il cui periodo è sensibilmente diverso dal periodo proprio degli elettroni (mancanza di assorbimento).*

Si trova facilmente che *luce polarizzata ellitticamente ha un effetto magnetizzante sui corpi che la assorbono per risonanza, ma, a parità di energia incidente, la vibrazione circolare è quella che produce l'effetto massimo; luce polarizzata linearmente non ha effetto magnetizzante.*

Nel tempo necessario perchè l'assorbimento si compia, 10^{-10} al massimo, *luce polarizzata linearmente, il cui piano di polarizzazione ruota sia pure di* 2.10^6 *giri al secondo, si può ritenere polarizzata in un piano assolutamente fisso, dunque neanco le esperienze fatte dal Corbino secondo le idee di Sheldon potevano dare esito positivo.*

Infine mostrerò brevemente, e qui il calcolo è molto più breve, che *nessuna magnetizzazione sensibile si può ottenere dall'azione della luce circolare su di un sistema di elettroni liberi* (caso dei metalli — qualche tentativo da me eseguito con laminette argentate o tenuissimamente nichelate non ha dato alcun risultato).

Le equazioni del moto sono:

$$x'' = \frac{\epsilon E}{m} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \qquad y'' = \frac{\epsilon E}{m} \cos \frac{2\pi t}{T}$$

con le condizioni iniziali:

$$x_{t=0} = y_{t=0} = 0 \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_{x0} \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = v_{y0}\,.$$

L'integrale è:

$$x = -\frac{\epsilon E T^2}{4\pi^2 m} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} + \left(v_{x0} + \frac{\epsilon E T}{2\pi m}\right) t$$

$$y = -\frac{\epsilon E T^2}{4\pi^2 m} \cos \frac{2\pi t}{T} + v_{y0}\, t + \frac{\epsilon E T^2}{4\pi^2 m}\,;$$

dunque l'effetto della luce circolare è di produrre uno spostamento costante $+\frac{\epsilon E T^2}{4\pi^2 m}$ nel senso delle y; uno spostamento $+\frac{\epsilon E T}{2\pi m} t$, proporzionale al tempo nel senso delle x, e una vibrazione circolare di raggio $\frac{\epsilon E T^2}{4\pi^2 m}$ di periodo T di egual senso della vibrazione luminosa circolare ma sfasata, rispetto alla forza elettrica, di mezzo periodo (e infatti la forza elettrica deve esserne la forza centripeta).

Supposto di poter ritenere circolare l'orbita dell'elettrone per l'intervallo di tempo di un periodo, risulta:

$$|M| = \frac{e\pi}{T}\left(\frac{\epsilon E T^2}{4\pi^2 m}\right)^2$$

e per cm³, supposto che l'azione della luce possa penetrare così addentro nel sistema degli elettroni liberi, sostituendo alle quantità che vi compaiono i loro valori, supposto questa volta $E = 10^{-1}$, cioè circa sette volte il valore che ha per la radiazione solare visibile totale,

$$|\mathfrak{M}| = \mathfrak{N}\, 10^{-33}$$

e poichè $\mathfrak{N}$, numero degli elettroni per cm³, è dello stesso ordine di grandezza di $\frac{nN}{V}$, l'azione magnetizzante risulta del tutto insensibile.

Torino, Istituto Fisico della R. Università.

Azione del bromuro di ammonio sui joduri metallici.

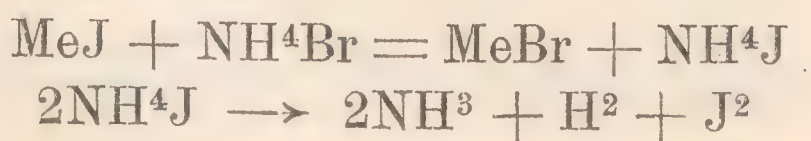
Nota II del Socio ICILIO GUARESCHI.

In questa nota esporrò le osservazioni e le esperienze che ho fatto intorno all'azione del bromuro di ammonio sui joduri metallici o come potrebbe anche dirsi intorno alla ricerca dei joduri metallici per via secca mediante il bromuro di ammonio.

È noto che il bromuro ed il cloruro ammonico possono essere sublimati senza che apparentemente avvenga una decomposizione. Quando si scalda, anche rapidamente, il bromuro di ammonio si sublima, si dissocia, sviluppa dell'ammoniaca, poi vapori acidi: $NH^4Br \longrightarrow NH^3 + HBr$ ma non si mette in libertà nemmeno traccia di bromo. Invece se si scalda il joduro di ammonio, in ispecie se rapidamente, sublima, ma sviluppa anche una grande quantità di jodo e pare si decomponga in:

$$NH^4J \longrightarrow NH^3 + H + J$$

Basandomi su questo fatto ho pensato che i joduri tutti dovrebbero reagire col bromuro di ammonio e dare del joduro di ammonio, e quindi del jodo libero. È naturale quindi che se mettiamo insieme un joduro metallico o un jododerivato organico (come dirò in altra nota) con bromuro di ammonio, e rapidamente si scaldi, si produrrà del jodo libero. Così ho già dimostrato col joduro mercurico ed ora dimostrerò per tutti gli altri joduri metallici, anche quelli che resistono a temperature molto elevate senza decomporsi, come il joduro di argento, forniscono del jodo libero qualora si scaldino entro un lungo e stretto tubo di vetro resistente. La reazione è generale e potrebbe rappresentarsi così:

$$MeJ + NH^4Br = MeBr + NH^4J$$
$$2NH^4J \longrightarrow 2NH^3 + H^2 + J^2$$

Si può quindi in questo modo riconoscere facilmente per via secca molti joduri o jododerivati che altrimenti richiederebbero operazioni lunghe per svelarvi il jodo, tanto più se i joduri sono mescolati con cloruri, bromuri ed altri composti.

Le mie ricerche sul bromo mi condussero allo studio di queste reazioni, le quali forse non sono prive affatto di importanza, specialmente riguardo all'analisi.

Dirò subito che in moltissimi casi il *bromuro di ammonio* può essere sostituito dal *cloruro di ammonio*, ma con certi joduri, come, ad esempio, col joduro mercurico, no. In generale reagisce meglio il *bromuro di ammonio*.

Joduro mercurico HgJ^2. — Del modo di comportarsi di questo joduro col bromuro di ammonio ho già detto in una Nota I (1).

Joduro di potassio. — Il joduro di potassio anche in piccolissima quantità scaldato con poco bromuro di ammonio sviluppa dei vapori violetti di jodo, che poi dopo raffreddamento e diluzione con acqua dànno la reazione coll'amido. Nel lungo e stretto tubo in cui si deve fare la reazione sublima prima una parte del bromuro di ammonio puro, poi a poco a poco si manifesta un anellino bruno di jodo che si riconosce ai vapori violetti e con acqua e amido. Una traccia minima di joduro potassico (anche meno di 0,0001) può essere riconosciuta subito con questo saggio pirognostico.

Il joduro potassico non sviluppa jodo se non a temperatura elevatissima; col bromuro di ammonio sviluppa il jodo prima del punto di fusione.

È questo un mezzo semplice per ricercare per via secca i joduri alcalini mescolati con grandi quantità di bromuri e cloruri.

Ricerca di traccie di joduri alcalini in presenza di grandi quantità di bromuri e cloruri alcalini. — Gr. 0,05 (e anche molto meno) di una intima miscela di gr. 0,01 di joduro

---

(1) *Azione de' sali ammoniacali sul joduro mercurico*, Nota I, in " Atti R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1914.

potassico, con 1 gr. di bromuro potassico e 1 gr. di cloruro potassico, scaldati in lungo e stretto tubo da saggio con circa il loro peso di bromuro di ammonio, dànno nella parte superiore del tubo un sublimato con un anellino bruno, vapori violetti; dopo raffreddamento, sciogliendo il tutto nell'acqua e aggiungendo salda d'amido, si ha intensa la reazione azzurra del joduro d'amido. Si svela così per via secca facilmente gr. 0,0001 di joduro alcalino misto con molto cloruro e bromuro.

Ricerca del joduro nel bromuro di potassio commerciale. — Il bromuro di potassio, circa 0,5 gr., contenente 1 : 1000 di joduro di potassio mescolato con poco bromuro di ammonio e scaldato in lungo tubo e stretto, dà un sublimato e vapori violetti. Dopo raffreddamento con soluzione diluitissima di amido dà intensa colorazione azzurra. Col bromuro di potassio contenente 1 : 2000 di joduro si ha ancora nettissima la reazione del jodo e ancora abbastanza visibile si ha con 1 : 4000. È dunque una buona reazione pirognostica per ricercare delle traccie di joduri nei bromuri. Coll'acqua di cloro e amido non si riesce sempre bene a riconoscere delle traccie di joduri nei bromuri.

Fatta la reazione di confronto con bromuro di potassio purissimo non si ha reazione del jodo.

Joduro di sodio. — Il joduro di sodio puro, scaldato solo, fonde e poi sopra il punto di fusione sviluppa del jodo. Ma lo sviluppa molto più presto e senza arrivare al punto di fusione quando lo si scalda col bromuro di ammonio. Del resto si comporta in tutto come il joduro di potassio.

Ricerca dei joduri alcalini misti ad altri cloruri e bromuri. — Un miscuglio di molto *cloruro potassico* e *bromuro di bario*, con traccia di *joduro di potassio*, mescolato con poco bromuro di ammonio e rapidamente scaldato dà intensa la reazione del jodo.

Così pure con un miscuglio di *cloruro di calcio* e *bromuro di bario* con pochissimo *joduro di potassio*. Reazione intensissima del jodo.

Anche i *joduri misti* o *complessi* $HgJ^2 . 2KJ$ ecc. dànno facilmente il jodo quando si scaldano col bromuro di ammonio.

Il joduro $HgJ^2 . 2KJ$ già per sè solo scaldato a temperatura alta dà del jodo libero, ma col bromuro di ammonio ne dà molto di più, e presto.

Joduro di tallio TlJ. — Si scompone e dà jodo anche quando si scalda da solo, ma molto più presto dà jodo e si scompone quasi totalmente quando lo si scalda con bromuro di ammonio.

I joduri $HgJ^2 . CdJ^2$ e $ZnJ^2 . KJ$ dànno del jodo già quando si scaldano da soli.

Joduro d'argento AgJ. — Il joduro d'argento trovasi in piccola quantità nei minerali d'argento del Messico, del Chilì, di Spagna; è ben cristallizzato. Preparato da un sale d'argento, con joduro potassico, è un precipitato giallognolo, insolubile nell'acqua. Questo joduro è stabilissimo; fonde a 550° in liquido giallo, che a temperatura più alta passa al bruno e per altissima temperatura può volatilizzarsi ma non si scompone; per raffreddamento si ha una massa cornea giallastra. È tanto stabile che resiste al saggio seguente: un cloruro d'argento che contenga del joduro trattato con aldeide e carbonato potassico si riduce ad argento molecolare, il quale poi sciolto nell'acido nitrico lascia indisciolto il joduro d'argento intatto (Vanino e Hanser).

Colla mia reazione invece si svela subito il jodo nel joduro d'argento.

Quando si scalda una miscela, anche in piccolissima quantità, di joduro d'argento e bromuro di ammonio, si sviluppano dei vapori violetti di jodo; lasciando raffreddare e trattando con acqua amidata si ha intensa colorazione azzurra. Lo sviluppo di jodo si osserva anche se si impiega il *cloruro di ammonio.*

È una reazione molto sensibile per svelare il jodo in un composto stabile e insolubile quale è il joduro d'argento. Basta 0,0005, e anche molto meno, di joduro d'argento per avere netta la reazione del jodo.

Per avere la reazione del jodo dal joduro d'argento coll'acido solforico concentrato e a caldo, ne occorre una quantità molto maggiore ed inoltre diluendo il liquido con acqua non si

ha la reazione coll'amido. Anche in altro modo non è facile, e si richiede molto tempo, per riconoscere il jodo in piccole quantità di joduro d'argento (1).

Dunque è preferibile assai ricercare le piccole quantità di joduro d'argento mediante il bromuro di ammonio.

Possiamo svelare il jodo nel joduro d'argento col bromuro di ammonio anche per via umida. È noto che il joduro d'argento è quasi insolubile nell'acqua; 1 litro d'acqua a temperatura ordinaria scioglie 0,000035 di AgJ; ma coll'acqua in presenza di bromuro di ammonio se ne scioglie molto di più (2). Dibattendo un poco di joduro d'argento con bromuro di ammonio e poca acqua, poi aggiungendo poca acqua amidata e poca acqua di cloro, si ha netta la reazione del jodo. Dunque col bromuro di ammonio anche per via umida possiamo facilmente riconoscere il jodo nel joduro d'argento.

Miscela di AgJ + AgBr. — Una miscela di joduro d'argento e bromuro d'argento, scaldata con bromuro di ammonio (sempre in tubo di vetro stretto e lungo) dà sviluppo di jodo. Però, un grande eccesso di bromuro d'argento ostacola, se non impedisce, il riconoscimento del joduro. È questo un mezzo semplice di ricercare delle piccole quantità di joduro d'argento misto a bromuro d'argento.

Joduro d'argento con cloruro d'argento. — La presenza del cloruro di argento nel joduro impedisce la reazione del jodo col bromuro di ammonio per via secca. Anche la miscela di

---

(1) Si può riconoscere, come è noto, il jodo nel ioduro d'argento agitando la sostanza con poca acqua di cloro e cloroformio; ma la reazione è meno sensibile e bisogna essere molto cauti nella quantità di cloro. Con piccolissime quantità (0,0005 e meno) di joduro di argento la reazione non corrisponde bene.

Può anche essere svelato il jodo nel joduro d'argento con una laminetta di zinco e acido solforico diluito e poi cloroformio e acqua di cloro (Will); ma la reazione è meno sensibile della mia per via secca.

(2) Io ho trovato che 0,010 di joduro d'argento precipitato richiede poco più di 1 gr. di bromuro di ammonio in 2 cm^3 di acqua, per sciogliersi completamente, e dare una soluzione limpida incolora. La soluzione, col cloro e l'amido, dà nettamente la reazione del jodo.

$AgJ + AgBr + AgCl$ non dà più la reazione per via secca. Il cloruro di argento l'impedisce.

In questo caso, cioè in presenza del cloruro di argento, si può svelare il jodo col bromuro di ammonio per via umida. Si tratta la miscela di joduro e cloruro d'argento, con un eccesso di bromuro di ammonio (dieci volte circa il peso della miscela) e poca acqua (2 cm^3 per circa 1 gr. di bromuro di ammonio), si agita bene, si decanta e si ricerca il jodo coll'acqua di cloro e amido, oppure con acqua di cloro e cloroformio. È sempre una reazione assai sensibile. Si può svelare pochissimo joduro d'argento nel cloruro d'argento, il che non è facile in altro modo, o per lo meno richiederebbe più tempo.

Joduro d'argento con joduro di mercurio. — Anche i joduri doppi di argento coi joduri più stabili dei metalli pesanti danno del jodo libero col bromuro di ammonio.

Il *joduro mercurico-argentico* $HgJ^2 . 2AgJ$ ossia Ag^2HgJ^4 scaldato da solo non fornisce del jodo libero o appena delle traccie minime a temperatura elevatissima, ma col bromuro di ammonio dà subito e abbondantemente il jodo. È una reazione molto sensibile.

Una *miscela di* $HgJ^2 . 2AgJ + AgBr$ dà ancora netta la reazione del jodo col bromuro di ammonio. Invece la *miscela* $HgJ^2 . 2AgJ + AgBr + AgCl$ non fornisce più la reazione del jodo col bromuro di ammonio; la presenza di AgCl l'impedisce ed infatti una miscela di $HgJ^2 . 2AgJ + AgCl$ non dà la reazione del jodo per riscaldamento con bromuro di ammonio. Invece la miscela $HgJ^2 . 2AgJ + PbBr^2$ dà benissimo ancora la reazione del jodo col bromuro di ammonio.

Bromuro d'argento e bromuro di ammonio. — Quando si scalda una mescolanza di bromuro d'argento e di bromuro di ammonio la massa fonde, bolle e dà un sublimato rosso-bruno, e si produce dell'ammoniaca. Non si sviluppa del bromo. Il prodotto rosso è solubile a caldo nell'alcol assoluto e deposita di nuovo una polvere rossa.

Di questa curiosa reazione dovrò occuparmi in seguito.

Joduro di piombo. — Il joduro di piombo già scaldato da solo a temperatura alta, sviluppa del jodo; ma se lo si me-

scola con del bromuro di ammonio, meglio sempre in piccola quantità, dà subito, e intensa, la reazione del jodo.

Basta una traccia di joduro di piombo per dare questa reazione: si aggiunge un poco di bromuro di ammonio secco, si scalda prima lentamente, poi rapidamente ed i vapori violetti si condensano nella parte superiore del tubo lungo e stretto entro cui si fa la reazione. Lasciando raffreddare e trattando con acqua amidata diluita si ha manifesta la reazione del jodo anche quando si operi con una frazione di milligrammo di joduro.

Così fanno i miscugli di $PbJ^2 + AgJ$ con HgJ^2 ecc.

Il joduro di piombo sviluppa facilmente del jodo anche quando lo si scalda con cloruro ammonico.

Miscuglio del joduro di piombo con cloruro e bromuro di piombo. — La miscela dei tre alogenuri di piombo ($PbJ^2 + PbCl^2 + PbBr^2$) scaldata con bromuro di ammonio dà ancora bene e facilmente la reazione del jodo. Però un grande eccesso di bromuro $PbBr^2$ ostacola lo sviluppo del jodo.

Però un miscuglio intimo di PbJ^2 con più o meno di $PbBr^2$ ed anche di $PbCl^2$ quando si scalda direttamente, senza l'aggiunta di bromuro di ammonio, dà egualmente (ma a temperatura più alta) i vapori violetti e reazione intensa coll'acqua amidata, specialmente se non si è riscaldato troppo.

Il *bromuro di ammonio* è dunque un eccellente reattivo dei joduri per via secca, e specialmente per i joduri insolubili. In determinate condizioni probabilmente questa reazione potrà diventare quantitativa, per piccole quantità di joduri. Non ho ancora misurato sino a qual limite abbia luogo questa reazione dei joduri, ma nel caso del joduro d'argento mi pare che sia totale.

In una prossima nota III dirò dell'uso del bromuro di ammonio per ricercare e svelare il jodo nei prodotti organici jodurati e nelle miscele di questi coi composti bromurati e clorurati; ricerche che ho già fatto da lungo tempo.

Torino, R. Università, Novembre 1914.

A proposito della priorità di Alessandro Volta nelle ricerche sulla dilatazione dei gas.

Nota del Socio GUIDO GRASSI.

Nel vol. 5° per l'anno 1914 dell' " Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik „, il prof. Guareschi pubblicò un articolo per dimostrare che la legge della dilatazione dei gas si deve chiamare *legge di Volta*, e non *legge di Gay-Lussac*, come si trova scritto in generale nei trattati di Fisica.

Già da una prima rapida lettura di quell'articolo mi era rimasta l'impressione che l'autore non avesse bene messo in rilievo le caratteristiche distintive delle ricerche del Volta e del Gay-Lussac; per conseguenza la conclusione a cui giungeva il Guareschi non mi lasciava pienamente soddisfatto. Mi aveva poi colpito in particolare la citazione di alcuni brani delle opere di Giovanni Cantoni, che il Guareschi evidentemente porta a sostegno della sua tesi.

Essendo stato io scolaro e poi assistente per parecchi anni di Giovanni Cantoni, non ne avevo riportato l'impressione che egli attribuisse al Volta la cosidetta legge di Gay-Lussac, avendolo sempre inteso chiamare legge di Gay-Lussac quella che a me pare debba così chiamarsi.

Per varie circostanze non ebbi agio di occuparmi subito di tale questione; ma oggi, avendo avuto occasione di riesaminare gli scritti del Cantoni e del Volta, credo opportuno esporre alcune considerazioni in proposito, anche per aderire all'invito del Guareschi, il quale mostra il desiderio di conoscere l'opinione dei colleghi.

Cominciando adunque dalla citazione del Cantoni, osservo che il Guareschi, nel riprodurre un brano del *Manuale di Fisica*,

si arresta al punto dove il Cantoni ricorda il numero trovato dal Volta, come coefficiente di dilatazione dell'aria. Poi aggiunge che il Cantoni ricorda le esperienze di Dalton, di Gay-Lussac, ecc.; *ma*, dice il Guareschi, *la legge non la denomina legge di Dalton, nè legge di Gay-Lussac.*

Ora mi sembra importante notare che il Cantoni, dopo aver ricordato il valore del coefficiente di dilatazione dell'aria trovato dal Gay-Lussac, soggiunge: " Anzi quest'ultimo asserì che " tutti i gas permanenti fossero egualmente ed uniformemente " dilatabili, e che perciò il detto coefficiente 0,00375 valesse " non solo per l'aria, ma ancora per tutti gli altri gas. In co- " sifatta credenza si tennero pressochè tutti i fisici, finchè nel 1834 " Rudberg dimostrò essere il coefficiente di dilatazione dell'aria " notevolmente minore del valore assegnatogli da Gay-Lussac, " e finchè Régnault e Magnus nel 1841 dimostrarono essere " sensibilmente diverso nei varî gas il coefficiente di dilata- " zione, e non essere tutti uniformemente dilatabili col progres- " sivo aumentare della temperatura „.

Il Cantoni dunque, come dice il Guareschi, non parla nè di legge Dalton, nè di legge Gay-Lussac. Ma, soggiungo io, non parla neppure di legge di Volta; espone i risultati delle esperienze e dà a ciascuno ciò che gli spetta; a Volta il merito di aver riconosciuto pel primo che il coefficiente di dilatazione dell'aria a pressione costante è sensibilmente costante; a Gay-Lussac l'aver riconosciuto che *tutti i gas* permanenti hanno lo stesso coefficiente di dilatazione, oltre all'altra proprietà che tutti si dilatano uniformemente. Osserva però come le esperienze posteriori abbiano dimostrato che tutte le suddette leggi non sono che approssimative.

Quanto alla priorità nell'aver formulato l'una o l'altra legge, il Cantoni non se ne occupa, e perciò quando scrive di Gay-Lussac: " quest'ultimo asserì che tutti i gas permanenti fos- " sero egualmente ed uniformemente dilatabili „, non si sofferma a distinguere fra l'*egualmente* e l'*uniformemente*, come certamente avrebbe fatto se avesse avuto l'intenzione di mettere in rilievo i rispettivi diritti di priorità dei diversi sperimentatori

Anche nell'altra citazione, dal discorso di Cantoni, *La mente di Volta*, non risulta ben formulata la conclusione a cui giunge il Guareschi; anzi il Cantoni mette bene in chiaro che il Volta

si limitò a riconoscere la equabile dilatazione dell'aria e indirettamente quella del vapor acqueo.

Che poi il Cantoni non fosse d'opinione, come dissi sopra, di attribuire al Volta la legge dell'uniforme ed eguale dilatabilità di tutti i gas, appare dagli stessi suoi *Elementi di Fisica*, dove a pag. 304, poco dopo aver riprodotto il cenno storico già citato del suo *Manuale di Fisica*, scrive: “ la legge della “ eguale dilatabilità di tutti i gas, asserita da Gay-Lussac „. E di nuovo a pag. 307: “ dopo le menzionate osservazioni di Gay-“ Lussac su l'uniforme ed eguale dilatabilità dei gas... „.

Infine a pag. 161 del volumetto intitolato *Relazione fra alcune proprietà termiche ed altre proprietà fisiche dei corpi*, 2ª ediz., 1868, trattando della vaporizzazione dei liquidi in genere, scrive: “ la densità effettiva del vapore, in istato di tensione massima, “ ad alte temperature, è maggiore di quella che si deduce dalle “ leggi di Boyle e di Gay-Lussac „. E qui evidentemente chiama legge di Gay-Lussac quella della uniforme ed eguale dilatabilità di tutti i gas e vapori, che, nell'epoca a cui accenna il Cantoni, si adottava appunto erroneamente per calcolare la densità del vapore acqueo.

Si può fare una osservazione simile a proposito di un'altra citazione fatta dal Guareschi e da lui con ragione considerata come assai importante; si tratta dell'Arago, il quale scrive: “ Les expériences de ces ingénieux physiciens (Dalton e Gay-“ Lussac) faites à une époque où le Mémoire de Volta, quoique “ publié, n'était encore connu ni en France ni en Angleterre, “ étendent à tous les gaz, permanents ou non, la loi donnée par “ le savant italien „.

Giustamente il Guareschi vede in queste parole un argomento in appoggio della sua tesi; ma, soggiungo io, ciò vale soltanto per quanto riguarda quella parte delle ricerche di Gay-Lussac, colle quali egli dimostrò che tutti i gas permanenti si dilatano uniformemente; perchè, siccome ciò potrebbe accadere anche se i gas non avessero tutti il medesimo coefficiente di dilatazione, è giusto riconoscere che il Gay-Lussac ha veramente trovato qualche cosa di più e di nuovo, che non rientra nella legge di Volta, quando fin dalle sue prime ricerche giunse al risultato che tutti i gas permanenti si dilatano egualmente da 0° a 100°.

A questo punto io vorrei osservare che, data la natura della questione, e considerato che i lavori di Volta e Gay-Lussac si trovano a nostra disposizione, anche senza ricorrere ai giudizi espressi da autori diversi, a me sembra che la questione si risolva direttamente in modo semplicissimo; come d'altronde io son persuaso che già l'hanno risolta la maggior parte di coloro che se ne sono occupati.

Volta e Gay-Lussac hanno trovato due leggi diverse l'una dall'altra; leggi che potrebbero benissimo escludersi a vicenda, perchè nulla vi sarebbe di contraddittorio che esistesse la prima e non la seconda o viceversa. Perciò la prima, quella della *uniforme dilatabilità*, si deve chiamare *legge di Volta*; e qui s'adatta appunto quella considerazione che fa il Guareschi sulla legge di Boyle, cioè che essa fu stabilita da Boyle e Mariotte soltanto per l'aria, poi fu estesa agli altri gas più d'un secolo dopo, eppure conserva sempre il nome de' suoi primi autori. Ciò dipende dall'essere quella una legge che si può stabilire sperimentando su di un corpo solo; perciò similmente la legge di Volta della uniforme dilatabilità, da lui stabilita per l'aria, quando da Gay-Lussac e da altri venne estesa a tutti gli altri gas permanenti, non cessò per questo di essere sempre la legge di Volta.

Ma questa estensione non conduce necessariamente all'altra legge di Gay-Lussac, la quale invece sussiste per sè, ripeto, indipendentemente dalla prima. Ciò appare chiaro dalla prima Memoria (1) di Gay-Lussac, nella quale egli dichiara nettamente di voler soltanto determinare la *dilatazione totale* dei diversi gas fra le temperature 0° e 100°; il suo scopo è di paragonare la dilatazione di un gas qualunque con quella dell'aria, non di determinare la dilatazione di un medesimo gas a diverse temperature, e riassume i risultati colle seguenti parole:

" 1° Tutti i gas, qualunque sia la loro densità e la quan-
" tità di acqua che tengono in soluzione, e tutti i vapori, si
" dilatano egualmente per gli stessi gradi di calore ", e qui si deve intendere, in relazione colle esperienze prima descritte, che

---

(1) È la memoria dal titolo: *Recherches sur la dilatation des gaz et des vapeurs*, pubblicata negli " Ann. de Chimie " del 1802.

si tratta della dilatazione totale da 0° a 100° e non di variazioni intermedie.

Nella seconda conclusione dà il valore numerico della dilatazione trovata per tutti i 100° di riscaldamento, poi subito scrive: “ Mi resta per completare questo lavoro da determinare “ la legge della dilatazione dei gas e dei vapori, allo scopo di “ dedurre il coefficiente di dilatazione per un grado qualunque “ di calore determinato, ed assicurarmi del vero andamento del “ termometro „. Ignorava che il Volta già se n'era occupato, in parte almeno, ma in ogni modo egli si proponeva quella ricerca, perchè diversa dalla sua precedente.

Se invece esaminiamo la Memoria (1) del Volta troviamo la questione invertita. Il primo problema che egli si propone è precisamente quello che il Gay-Lussac dieci anni dopo rimandava ancora all'avvenire. Il Volta comincia infatti col rivolgersi le seguenti domande: “ L'aria si dilata ella uniformemente pel calore, cioè procede con passo equabile, ricevendo eguali aumenti di volume per eguali addizioni di calore? oppure ha una marcia disuguale, e più o meno a salti? e qual'è la quantità di cui cresce per ogni giunta data di calore? „

Descritte le esperienze, dimostrata l'influenza del vapore acqueo, quindi la necessità di operare con un apparecchio ben essiccato, conclude: “ È dunque uniforme ed equabile prossima- “ mente la dilatazione dell'aria pel calore, cioè proporzionale “ agli aumenti del medesimo per tutta l'estensione, che v'è tra “ la temperatura del ghiaccio e quella dell'ebollizione dell'acqua... “ Dico prossimamente, perchè non oserei ancora asserire che “ tale rapporto si osservi colla più rigorosa precisione, ma con “ quella solamente che permettono simili esperienze „. Osserva infine che quando nell'aria vi è del vapore acqueo ma in piccola proporzione, essa ancora si dilata pel calore uniformemente e della quantità circa già notata; “ onde appare „, soggiunge, “ che il vapore acqueo aeriforme anch'esso si dilata come l'aria “ *uniformemente* „. E non dice che si dilata *egualmente*, perchè

(1) Memoria *Sulla uniforme dilatazione dell'aria per ogni grado di calore*, ecc., pubblicata negli “ Annali di Chimica „ del prof. Brugnatelli per l'anno 1793.

non poteva dimostrarlo; le esperienze eseguite non gli fornivano elementi sufficienti per attribuire lo stesso coefficiente di dilatazione al vapor acqueo come all'aria. Egli si limita ad enunciare che anche il vapore, a temperature elevate, deve subire una equabile dilatazione, e non dobbiamo noi fargli dire ciò ch'egli giustamente ha taciuto.

A tutto rigore si potrebbe anzi fare una obiezione al Volta, che cioè egli discorre come se avesse trovato che l'aria mista a poco vapore si dilata uniformemente, come l'aria sola, senza vapore. Ma in fatto nelle sue esperienze pare che egli operasse su *aria naturale,* non priva di vapore acqueo, perchè non v'è cenno ch'egli adoperasse alcun mezzo per essiccare l'aria introdotta nel suo apparecchio, e col riscaldamento preventivo dell'olio e del vetro, egli non faceva che scacciare l'umidità contenuta nel liquido e aderente alle pareti, ma poi introduceva aria atmosferica certamente umida. Paragonava dunque la dilatazione dell'aria mista a poco vapore a quella di altr'aria, che egli chiama *sola*, ma che effettivamente doveva essere umida; sempre poi si trattava di aria mista a vapore in proporzioni ignote.

Nè si deve dimenticare che, per quanto le misure eseguite dal Volta fossero molto accurate ed i risultati abbastanza prossimi al vero, il grado di precisione non era però tale da permettere di ricavarne altre conclusioni oltre quelle da lui enunciate. A prescindere dalla differenza fra il valore del coefficiente di dilatazione comunicato al Van Marum nel 1792, cioè $\frac{1}{220}$ per ogni grado da 0° a 36° R., e quello pubblicato nella Memoria del 1793, cioè $\frac{1}{216}$, lo stesso Volta avverte il lettore del grado di approssimazione attribuibile a' suoi risultati. Egli scrive che per 20 gradi di riscaldamento sempre ha corrisposto una dilatazione di 9 e $^1/_4$ centesimi *circa*; e poi spiega: " col qual *circa* " voglio dire che se non ho potuto precisar sempre 9 e $^1/_4$ giusti, " ho sempre però osservato un poco più di 9 e meno di 10 ".

A noi importa notare che, data la piccolissima quantità di vapore contenuta nell'aria, che certo doveva corrispondere ad una piccola frazione del volume totale, il Volta non avrebbe potuto rilevare una differenza sensibile nella dilatazione anche

se il vapore avesse un coefficiente di dilatazione molto differente da quello dell'aria; perciò il Volta ebbe tutte le ragioni di non dir nulla a questo proposito. Insomma diamo tutto il suo giusto valore a quanto il Volta afferma, ma non trascorriamo ad attribuirgli affermazioni ch'egli coll'accortezza che lo distingueva si guardò bene dal fare.

In conclusione, si può concordare nell'opinione del prof. Guareschi, che la legge della uniforme dilatabilità dei gas si possa chiamare legge di Volta, e che il Gay-Lussac quando con esperienze posteriori riconobbe essere uniforme la dilatazione di tutti i gas non fece che estendere la legge di Volta.

Credo invece che non si debba consentire col prof. Guareschi quando egli vuol ritener compresa nella legge di Volta anche la legge *della eguale dilatazione* di tutti i gas, poichè questa non risulta assolutamente dalle esperienze di Volta, ma soltanto da quelle di Gay-Lussac.

Questa conclusione, naturalmente, è basata sulla conoscenza che abbiamo delle ricerche di Volta, quale risulta dall'unica pubblicazione che abbiamo di lui su questo argomento, cioè la Memoria sopracitata del 1793. Il prof. Guareschi accenna alla scoperta di manoscritti autografi del Volta, relativi ad altre ricerche sui gas e sui vapori; ma finora cotesti manoscritti non furono pubblicati, nè alcuno diede notizia precisa del loro contenuto, almeno per quanto riguarda il nostro argomento.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 31 Gennaio 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti: Chironi, Direttore della Classe, e i Soci Carle, Pizzi, De Sanctis, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta e Stampini, Segretario della Classe.

È scusata l'assenza del Socio Ruffini per indisposizione.

È letto e approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente presenta la Commemorazione del defunto Socio Rodolfo Renier, fatta all'Accademia d'agricoltura, scienze e lettere di Verona dal nostro Socio corrispondente Giuseppe Biadego.

Il Socio De Sanctis presenta una Nota di Giulio Giannelli su *I Romani ad Eleusi,* in continuazione di quella presentata nella precedente adunanza e comprendente la parte 3ª: *Da Antonino Pio a Giuliano l'Apostata.* Sarà inserita negli *Atti.*

Il Socio Brondi, anche a nome del Socio Ruffini, presenta una Nota del Dott. Emilio Betti, *Le " actiones ex responsione in iure " del processo civile romano.* Anche questa Nota sarà inserita negli *Atti.*

Dopo di che la Classe si riunisce in seduta privata per la elezione di Soci nazionali residenti e non residenti. E riescono eletti, salvo l'approvazione Sovrana, a Soci nazionali residenti i Professori Giovanni Vidari e Giuseppe Prato e a Soci nazionali non residenti i Professori Senatore Francesco D'Ovidio e Giuseppe Fraccaroli.

LETTURE

I Romani ad Eleusi.

Nota II[a] di GIULIO GIANNELLI.

§ 3. — Da Antonino Pio a Giuliano l'Apostata.

Finora non si è annoverato Antonino Pio tra gli imperatori iniziati ai misteri d'Eleusi (1): ma un'iscrizione, pubblicata circa venti anni fa e non bene allora interpretata, ci informa, in modo chiaro e sicuro, dell'avvenuta iniziazione di Antonino (2). L'iscrizione, redatta in distici e mutila delle ultime righe, suona così:

Καὶ σοφίῃ κλεινὸν καὶ σεμνῶν φάντορα νυκτῶν
Δηοῦς καὶ κούρης ἁγνὸν ὁρᾷς πρόπολον,
ὅς ποτε Σαυρομάτῶν ἀλεείνων ἔργον ἄθεσμον·
Ὄργια καὶ ψυχὴν ἐξεσάωσε πάτρῃ
καὶ τελετὰς ἀνέφηνε καὶ ἤρατο κῦδος ὅμοιον
Εὐμόλπῳ πινυτῷ καὶ Κελεῷ ζαθέῳ,
Αὐσονίδην τε ἐμύησεν ἀγακλυτὸν Ἀντωνῖνον.

Con questi versi si onora un sacerdote eleusino, di cui si conteneva forse nelle ultime righe cadute (non più di uno o due distici) il nome ed il grado; questo sacerdote, oltre ad essersi reso benemerito della patria in un'azione guerresca, ebbe anche il vanto di iniziare ai misteri un imperatore, che è qui chiamato semplicemente *Ἀντωνῖνον*. Che il sacerdote qui mento-

(1) Vedi Foucart, " Revue de Philologie ", 1892, p. 197 segg.; Stengel, *Griech. Kultusalt.*[2], p. 157; Gruppe, *Griech. Myth.*, II, p. 1496, nota 1.

(2) L'iscrizione, trovata in Eleusi, fu edita, insieme ad altre pure eleusine, dal Philios, in " Bull. Corr. Hell. " XIX (1895), p. 119 sgg.

vato sia un ierofante fu già affermato dal Philios, e giustamente, mi sembra; ciò si deduce infatti con sicurezza non tanto dall'*ἐμύησε* dell'ultimo verso, quanto dalla frase *σεμνῶν φάντορα νυκτῶν* del primo (1).

Chi è l'imperatore che qui, lasciati da parte epiteti e titoli, omessa anche una parte del nome, è chiamato soltanto, per evidenti esigenze del metro, *Αντωνῖνον*? Con questo nome possono indicarsi tanto Antonino Pio quanto Marco Aurelio (2): il Philios però, nel suo studio sopra citato, scarta l'ipotesi che qui possa trattarsi di Antonino e crede poter dimostrare che l'imperatore iniziato dall'anonimo ierofante fu Marco Aurelio. Non si nasconde però il Philios che la sua argomentazione

---

(1) Soltanto nei tempi più antichi sembra che il solo ierofante fosse l'iniziatore dei nuovi adepti alla religione eleusina (Hesych. *s. v.* *μυσταγωγός· ἱερεὺς τοὺς μύστας ἄγων*): più tardi quest'ufficio fu riserbato a tutti i membri delle due famiglie sacre degli Eumolpidi e dei Kerykci (*μυεῖν δ' εἶναι τοῖς οὖσι Κηρύκων καὶ Εὐμολπιδῶν*: Ziehen, *Leges graecorum sacrae*, n. 3, col. *c*, l. 26). Rimase invece sempre còmpito esclusivo dell'ierofante il mostrare agli iniziati i sacri oggetti, alla fine della cerimonia (ierofante: *ὁ ἱερὰ φαίνων*): v. Foucart, *Myst. d'Éleusis*, p. 281 sg. e 405 sgg.; Dittenberger, *Die Eleusinischen Keryken*, " Hermes ", XX (1885), p. 1 sgg., a p. 32. Cfr. " *Ἐφ. ἀρχ.* ", 1883, p. 77 sg., dove il verbo *μυεῖν* è usato per un *ἱερεὺς ἐπὶ βωμῷ*; e " *Ἐφ. ἀρχ.* ", 1894, p. 205, nº 26, dove invece la carica di ierofante è indicata con le parole *ἀνδράσιν ἱερὰ φαίνειν*. V. Harpocr., *s. v.* *ἱεροφάντης* e cfr. Toepffer, *Att. Genealogie*, p. 47 sg.

(2) In un'altra iscrizione metrica, ove è nominato insieme con Commodo, M. Aurelio è chiamato semplicemente *Ἀντωνῖνον* (" *Ἐφ. ἀρχ.* ", 1885, p. 147-8). Antonino Pio è designato nello stesso modo nell'iscrizione onorifica in " *Ἐφ. ἀρχ.* ", 1895, p. 110, nº 27 (cfr. più oltre) e in una serie di basi, rinvenute ad Eleusi, fuori dei Grandi Propilei: " *Ἐφ. ἀρχ.* " 1894, p. 211 sg., nº 37: *θεὸς Ἀντωνῖνος*; che si tratti di Antonino Pio si rileva dalle altre basi, per es. nº 38: *Σαβεῖνα θεοῦ Ἀντωνίνου θυγάτηρ*; nº 39: *Φαυστεῖνα θεοῦ Ἀντωνίνου θυγάτηρ*; nº 40, dove credo poter supplire con sicurezza [*Φαυστεῖνα*] *θεοῦ Ἀντωνίνου θυγάτηρ*; cfr. " *Ἐφ. ἀρχ.* ", 1899, p. 199, nº 20. — Difficilmente si sarebbero così designati L. Vero e Commodo, che pure portarono il nome di Antonino; Settimio Severo non usò mai di questo nome (cfr. *I. G.*, III, 40). La consuetudine dei Greci, di indicare col solo *Ἀντωνῖνος* Antonino Pio e M. Aurelio, e non altri, è indicata dal fatto che essi ricorrono spesso all'appellativo *πρεσβύτερος* che, aggiunto ad *Ἀντωνῖνος*, serve ad indicare il Pio (Clem. Alex., *Strom.*, VII, 17, p. 325): come Pausania usa distinguere *Ἀντωνῖνος ὁ πρότερος* e *Ἀντωνῖνος ὁ δεύτερος* (VIII, 43, 1. 6).

lascia insoluta una grave difficoltà. Da due epigrafi, di cui sarà detto a suo tempo più largamente, rileviamo che anche Commodo fu iniziato ai misteri (1): non solo, ma possiamo affermare con sicurezza che egli fu iniziato contemporaneamente al padre suo Marco Aurelio (2); sicchè nei documenti epigrafici in cui è ricordata l'iniziazione dell'uno, non si manca mai di menzionare anche l'iniziazione dell'altro. Se dunque lo ierofante cui è dedicata questa epigrafe, ha iniziato M. Aurelio, ha necessariamente iniziato anche Commodo: com'è dunque che anche questo titolo di gloria non è attribuito nell'iscrizione al sacerdote? Ecco la difficoltà che il Philios dichiara di non poter sciogliere, non potendosi neppur supporre un cancellamento del nome di Commodo, praticato qualche anno più tardi (3); infatti nè le tracce del marmo sono sufficienti a permetterci di dedurne una tale sostituzione di parole (dovrebbe esser stato raschiato un intiero verso alla fine o varie parole negli altri, in modo da salvare il senso e la metrica), nè potremmo d'altra parte spiegarci perchè lo stesso trattamento non fosse stato applicato alle altre due epigrafi commemoranti l'iniziazione di Commodo. In conclusione, la difficoltà che si presenta a chi voglia riconoscere Marco Aurelio nell'imperatore nominato in questa epigrafe, non è superabile: si veda invece come tutto si accomoda facilmente se accettiamo di riconoscervi il suo predecessore.

Che la iniziazione di Antonino Pio non sia ricordata in alcun altro testo nè letterario, nè epigrafico, non significa nulla: anche di quella di Commodo sappiamo soltanto dalle due iscrizioni sopra ricordate, e di quella di Vero pure soltanto due epigrafi ci informano (4): d'altra parte una serie di statue, collocate in Eleusi in onore di Antonino Pio e de' suoi parenti, ci assicurano della speciale venerazione, cui era fatto segno questo imperatore nella città sacra dell'Attica (5).

Passiamo ora a studiare la notizia contenuta nei v. 3 e 4

---

(1) " *'Εφ. ἀρχ.* ,, 1883, p. 77, n° 6; 1885, p. 147-8.

(2) Vedi più oltre, a pag. 381-382.

(3) Ael. Lampr., *Commodus*, 20. Vedi, per es., il nome di Commodo eraso in *I. G.*, III, 1145.

(4) " *'Εφ. ἀρχ.* ,, 1883, p. 77; 1895, p. 110, n° 27.

(5) " *'Εφ. ἀρχ.* ,, 1894, p. 211 sg.

della iscrizione, nella quale il Philios trova il principale argomento, per non dir l'unico, contro l'identificazione di questo imperatore con Antonino Pio. Ivi si ricorda come l'ierofante, stornando un empio assalto di Sauromati, salvò la patria e i suoi riti venerabili. Questa allusione non può riferirsi che a qualche minacciosa scorreria di barbari; ma non v'è affatto bisogno di pensare ch'essi debbano essere avanzati tanto nell'Ellade, da minacciare i confini stessi dell'Attica. Io credo che si voglia qui soltanto ricordare come quel sacerdote, prima forse di esser chiamato a quell'altissima carica, guidò un contingente eleusino in una guerra contro i barbari invasori; codesta schiera doveva far parte di truppe inviate a trattenere gli assalitori, e la battaglia non si svolse forse tanto vicino alle regioni dell'Acaia; il che non impedì di ricordare con due versi retorici nell'epigrafe la partecipazione dei guerrieri di Eleusi a quella vittoria e di dipingere senz'altro l'ierofante come il salvatore della propria città: con ragione del resto, sotto un certo riguardo, perchè chiunque contribuiva a contenere l'impeto delle orde barbariche, combatteva veramente *pro aris et focis*. Ma il Philios ha voluto senz'altro riconnettere questo episodio con la notizia, serbataci da Pausania, di un'irruzione di Costoboci nella Focide, avvenuta appunto ai tempi del periegeta (1): e ciò l'ha obbligato a datare l'epigrafe sulla base dei malsicuri risultati della sua ipotesi. Cotesta irruzione di barbari è stata in genere ricollegata con la guerra marcomannica (2), e recentemente

(1) Paus., X, 34, 5: *τὸ δὲ Κοστοβώκων* [τε] *τῶν ληστικῶν τὸ κατ' ἐμὲ τὴν Ἑλλάδα ἐπιδραμὸν ἀφίκετο καὶ ἐπὶ τὴν Ἐλάτειαν· ἔνθα δὴ ἀνὴρ Μνησίβουλος λόχον τε περὶ αὐτὸν ἀνδρῶν συνέστησε καὶ καταφονεύσας πολλοὺς τῶν βαρβάρων ἔπεσεν ἐν τῇ μάχῃ.* — Che nell'epigrafe si parli di Sauromati invece che di Costoboci non farebbe difficoltà, perchè un luogo di Plinio c'informa come fossero i Costoboci una tribù di Sarmati (*Nat. Hist.* VI, 19; cfr. Ptolem., III, 5, 8).

(2) Jung, *Römer und Romanen*, p. 20; Hertzberg, *Gesch. Griechenlands*, II, 372; Wietersheim, *Gesch. der Völkerwanderung*, II[1], p. 63 (non trovo, per quanto ho potuto vedere, che sia stata riesaminata la questione nella seconda edizione della sua opera). Finalmente lo Schiller (*Gesch. der röm. Kaiserzeit*, I, p. 631; cfr. p. 644, n. 7) riferisce questo fatto al regno di Antonino; ma dal far ciò siamo impediti dalle parole di Pausania, immediatamente seguenti a quelle citate, nelle quali è detto che il condottiero

l'Heberdey ha voluto riconnettere l'attacco dei Costoboci con quello degli Astygi, ponendolo all'anno 175 (1). L'ipotesi dell'Heberdey non sembra però felice (2), dovendosi, se mai, per un fatto simile, pensare di preferenza al primo periodo della guerra marcomannica, a quello cioè più critico, anteriore alla morte di Vero, quando le frontiere stesse d'Italia furon varcate dalle orde barbariche (3). Ma il Philios è stato costretto ad accogliere questa tarda datazione per non andare incontro ad un'altra difficoltà: noi conosciamo infatti l'ierofante che fu in carica tra gli anni 165 e 170 (data presumibile dell'invasione); è T. Flavio Leostene, della cui vita c'informa minutamente una lunghissima epigrafe (4). Di lui non ci viene detto che abbia preso parte ad alcun combattimento; e perciò il Philios ha dovuto cercare fra altri il suo ierofante guerriero, e lo ha trovato nel successore di Leostene, tal Iulios, che poteva essere in carica attorno al 175. In realtà è molto meglio rinunciare a simili laboriosi ravvicinamenti di fatti che, oltre ad esserci tramandati in maniera vaga e incompleta, non lasciano scorgere con evidenza questa loro pretesa connessione; e riconoscere sinceramente che non siamo in grado di precisare di più l'episodio ricordato nei due versi dell'epigrafe: nè dobbiam sottoporre un documento epigrafico, di cronologia facilmente accertabile, ad una interpretazione dubbia, difficile, sforzata, in servigio di ipotesi tutt'altro che sicure e prive di ogni solido fondamento (5). Dal momento che nell' *'Αντωνῖνον* dell'epigrafe non possiam

---

Mnesibulo, morto in quella battaglia, aveva vinto ad Olimpia nel 161 (= olimp. 235[1]): sicchè l'irruzione dei Costoboci dovè necessariamente esser posteriore a questa data.

(1) *Der Einfall der Kostoboker in Griechenland*, " Arch.-Epigr. Mitth. aus Oesterr. ", XIII, p. 186 sgg. Cfr. Dittenberger, *Sylloge* I², n° 410.

(2) Frazer, *Pausanias*, V², p. 429 sgg.

(3) Così anche l'Hertzberg (II, 372) giudica che l'invasione debba essere avvenuta " wahrscheinlich in den ersten Jahren dieses Krieges ".

(4) " *'Εφ. ἀρχ.* ", 1895, p. 110. — Il testo di questa epigrafe è dato più oltre.

(5) Se un ierofante eleusino avesse combattuto nella piccola schiera di Mnesibulo contro i Costoboci, Pausania ci avrebbe verosimilmente serbato il ricordo di questo fatto, non certo meno memorabile della partecipazione alla battaglia di un vincitore olimpico.

riconoscere Marco Aurelio, senza rinunciare a capire l'ingiustificabile omissione del nome di Commodo; dal momento che nulla si oppone a vederci invece Antonino Pio, non sarà un'ipotetica cronologia della invasione dei barbari quella che ci farà preferire la soluzione meno probabile alla più probabile; ma di questa miglior soluzione invece, appoggiata a documenti sicuri, approfitteremo per determinare l'epoca di quell'avvenimento. Studiando più oltre la serie degli ierofanti che si succedettero in carica durante il regno degli Antonini, avremo modo di accertarci che l'ierofante che iniziò Vero, nel 162 o nel 165, il già ricordato Tito Flavio Leostene, non aveva iniziato Antonino, ma alla presenza di Antonino stesso aveva ricevuto le insegne della sua carica: sicchè il suo predecessore, l'iniziatore cioè di Antonino, l'anonimo ierofante celebrato appunto nella nostra epigrafe, morì prima che il regno di Antonino Pio fosse finito, o anche più precisamente, prima che Antonino si allontanasse da Atene per non più tornarvi. Sia dunque ch'egli abbia dato prova del suo valore nel respingere i Sauromati prima di avere assunto la carica di ierofante, sia che ciò abbia fatto quando già di questa era insignito, una conclusione è certa: che l'invasione avvenne prima che Antonino Pio tornasse dall'Oriente in Italia.

Se anche Antonino Pio fu iniziato, è naturale che ci chiediamo in che epoca si celebrò la cerimonia. Malgrado le recise affermazioni in contrario del biografo della *Historia Augusta* (1), noi possiamo affermare con sicurezza, sulla scorta di due attendibili testimonianze, che Antonino Pio fece un viaggio in Oriente, visitando l'Egitto e la Siria, là recandosi per domare una gravissima insurrezione, qua per trattare personalmente col re dei Parti Vologese III, che stava per muovergli guerra (2). E alle

(1) *Pius*, 7, 11: *Nec ullas expeditiones obiit, nisi quod ad agros suos profectus est ad Campaniam, dicens gravem esse provincialibus comitatum principis, etiam nimis parci.* — Dei moderni il Sievers, *Studien zur Gesch. der röm. Kaiser* (Berlin, 1870), p. 204, e il Domaszewski, *Gesch. der röm. Kaiser*, II, p. 216, hanno negato l'evidenza di un viaggio di Antonino nelle provincie.

(2) La prima testimonianza è un passo di un tardo compilatore antiocheno, Giovanni Malalas, *Chronographia* (ed. Dindorf, Bonn, 1831), p. 280:

due testimonianze cui ho accennato, dovremo ora aggiungerne una terza: e cioè l'epigrafe di Flavio Leostene, che ci ricorda l'avvenuta consacrazione dell'ierofante per mano dell'imperatore: chè se, cosa del resto inaudita, la cerimonia si fosse svolta fuori di Eleusi, per esempio a Roma, l'iscrizione, che ricorda tutti i particolari di qualche interesse della vita del sacerdote, non mancherebbe di farcelo conoscere. Il viaggio di Antonino in Oriente è stato datato agli anni 154-5: sembra che l'imperatore si sia prima recato in Egitto, ad Alessandria, e di lì sia passato poscia ad Antiochia; in Siria si svolsero le trattative con Vologese e fu conclusa la pace, forse nel 154 stesso o nei primi mesi del 155 (1). Tutto fa credere che Antonino, tornando in Italia per la via di terra, sia passato allora per Atene e là si sia trattenuto qualche tempo, iniziandosi ai misteri: avvenuta, subito dopo, la morte dell'ierofante che lo aveva iniziato, egli assistè alla cerimonia di nomina del nuovo ierofante, nella persona di T. Flavio Leostene (2).

Questi fatti apparterrebbero dunque all'anno 155 (3).

L'iniziazione di Vero ci è nota soltanto per due testi epigrafici. Il primo è un titolo onorifico scolpito per celebrare la memoria di un sacerdote eleusino, *Λ. Μέμμιος ἐπὶ βωμῷ Θορίκιος*. Discendente dalla famiglia dei Keryci, che dava al sacerdozio eleusino i suoi daduchi, Memmio aveva coperto molte cariche pubbliche, fra cui l'arcontato eponimo; eletto poi al ministero dell' *ἐπιβώμιος*, lo aveva conservato, come l'epigrafe ci dice, per ben 56 anni (4). Ecco del resto il testo della interessante iscrizione (5):

---

l'altra è un luogo del retore Elio Aristide, XLVII, 36 (ed. B. Keil). Vedi Lacour-Gayet, *Antonin le Pieux et son temps* (Paris, 1888), p. 137. 150 sg. Cfr. Niese, *Man. di Stor. rom.* (trad. it.), p. 452.

(1) Lacour-Gayet, op. cit., p. 150 sg.

(2) Su tutto ciò, vedi il § 4.

(3) Anche lo Schiller, *Geschichte der röm. Kaiserzeit*, I, p. 632, nota 1, aveva datato tra il 153 e il 157 una possibile assenza di Antonino dall'Italia.

(4) Cfr. Foucart, *Mystères*, p. 206.

(5) Pubblicata dal Philios, in " *Ἐφ. ἀρχ.* ", 1883, p. 77, n° 6. Lo stesso sacerdote è ricordato anche in *I. G.*, III, 1031, 1032, 1034, 1040, 1046, 1048;

Ἡ πόλις Λ. Μέμμιον ἐπὶ βωμῷ Θορίκιον...... ἄρξαντα τὴν ἐπώνυμον ἀρχὴν καὶ στρατηγὸν ἐπὶ τὰ ὅπλα καὶ ἐπιμελετὴν γυμνασαρχίας θεοῦ Ἁδριανοῦ καὶ ἀγωνοθέτην τρίς, πρεσβευτήν τε πολλάκις περὶ τῶν μεγίστων, ἐν οἷς καὶ περὶ γερουσίας, μυήσαντα παρόντος θεοῦ Ἁδριανοῦ, μυήσαντα θεὸν Λούκιον Οὐῆρον Ἀρμενικὸν Παρθικόν, καὶ Αὐτοκράτορας Μ. Αὐρήλιον Ἀντωνῖνον καὶ Μ. Αὐρήλιον Κόμμοδον Γερμανικοὺς Σαρματικούς, λειτουργήσαντα τοῖν θεοῖν ἔτεσιν νς̄, τὸν [ἐξ] ἀρχιερέων, τὸν φιλόπατριν.

L. Memmio dunque, dopo avere per lungo tempo iniziato alla presenza di Adriano, cioè nella prima metà del secolo, iniziò egli stesso L. Vero e poi M. Aurelio e Commodo (1). La seconda testimonianza è rappresentatata da un titolo pure onorifico, dedicato questa volta a un ierofante, T. Flavio Leostene; eccone il testo (2):

[Ἡ βουλὴ ἡ ἐξ Ἀρείου πάγου καὶ ἡ βουλὴ τῶ]ν Φ' καὶ [ὁ δῆμος ὁ Ἀθηναίων Τίτον Φλ. Λεωσθένην Παι]ανιέα [Τίτου Φλ. Παιανιέ]ω[ς υἱόν]....... Τίτου Φλ. Λεωσθένους [Παια] νιέω[ς ἔ]κγονον....... Τίτου Φλ. Ἀλκιβιάδου Παιανιέ[ως] ἀδελφὸν....... [ἄρξ]αντα, πανηγυριαρχήσαντα, γυμνασιαρχήσαντα οἴκοθεν [δλ]κείοις, πρεσβεύσαντα δὶς εἰς Ῥώμην ἐπὶ θεοῦ Ἀντωνεί[ν]ου....... ἱεροφαντοῦντα ἐπὶ γέν[ο]υς λαμπρότητι καὶ φιλοτιμίαις πάσαις εὐχαριστήσαντα τῇ πόλι, τὸ στρόφιον παρὰ τῷ αὐτοκράτορι θεῷ Ἀντωνείνῳ λαβόντα καὶ τὸν αὐτοκράτορα μυήσαντος (sic) [Λ]ούκιον Αὐρήλιον Οὐῆρον, δὶς ἐπὶ τῷ ἔτει ἀγαγόντα μυστήρια καὶ τοῦτο κατὰ τὸ θεμιτόν, καὶ

è *ἄρχων* in 1127, 1279; ed è forse da identificare con l'individuo onorato nell'iscriz. edita da Skias, in " *Ἐφ. ἀρχ.* „, 1899, p. 207, n. 34. V. Dittenberger, *Sylloge*, I², n° 411.

(1) Rimando a quanto già scrissi sopra, sulla funzione di iniziazione.

(2) L'epigrafe fu edita da Skias, in " *Ἐφ. ἀρχ.* „, 1895, p. 110, n° 27. Lo stesso ierofante è ricordato anche in *I. G.*, III, 1029, 1030; e lo stesso è probabilmente da riconoscersi nell'epigrafe pubblicata in " *Ἐφ. ἀρχ.* „, 1895, p. 113, n° 28 (*Ἡ βουλὴ ἡ ἐξ Ἀρείου πά[γου καὶ ἡ βουλὴ τῶν — καὶ ὁ δῆ]μος Τίτον Φλάουιο[ν]*). — V. Dittenberger, *Sylloge*, I², n° 409.

προσειδρύσαντα Εὐμολπίδην συναγαγόντα, ἐπεὶ καὶ ἐπιλέγοντα εἴχομεν, ἀρετῆς μεγέθει καὶ τῆς πρὸς τοὺς θεοὺς εὐσεβείας κἂν τούτω χάριν ἀνέθηκεν.

Assicuratici così che Vero partecipò ai misteri eleusini, resta da stabilire la data della sua iniziazione. Sappiamo che, subito dopo la morte di Antonino Pio, scoppiò la guerra partica, mossa da Vologese III; Vero fu incaricato di recarsi in Oriente con truppe fresche, per fronteggiare il pericolo. Però la sua partenza e il viaggio furono tutt'altro che solleciti; l'imperatore si trovava con tutta probabilità ancora in Roma nel marzo del 162; durante la sua marcia, si fermò lungamente a Corinto e ad Atene, dove assistè anche a giuochi e a feste, eppoi in parecchie città dell'Asia (1). Durante la guerra stabilì la sua residenza in Antiochia: ad Efeso si recò nel 164 per sposare Lucilla. Nel 166 era finita la guerra e Vero prendeva tosto la via del ritorno; ritorno che fu fatale all'Impero, perchè in Seleucia scoppiò la peste, che i soldati propagarono poi per quasi tutte le provincie. Giunto Vero in Roma, si celebrò il trionfo, il quale avrà avuto luogo tra il 24 maggio (sappiamo che, a questa data, la flotta misenatica era ancora nel porto di Seleucia, segno che le ostilità non erano ancora ufficialmente cessate) e il 23 agosto 166 (2).

Abbiamo quindi la possibilità di fissare la data dell'iniziazione di Vero al 162 o al 166, essendo questi i due anni, per i quali noi siamo informati con sicurezza di un soggiorno di Vero in Atene. Orbene, o noi troveremo nelle citate epigrafi qualche indicazione evidente per l'una o per l'altra data, e allora ogni discussione sarà troncata; oppure le epigrafi non ci offriranno determinazione alcuna, e dovremo allora affidarci a

---

(1) CAPIT., *Verus*, VI, 7 sgg.; sul suo soggiorno in Atene, v. EUSEB.-HIERONYM., *Chron.*, p. 170 *f* (SCHOENE); CASSIOD., in MOMMSEN, *Chron. min.*, II, 143.

(2) Per la cronologia di questo periodo, vedi P. VON ROHDEN, in *R. E.*, III², 1832 sgg.; *Prosop. Imp. Rom.*, I, 328 sg.; SCHILLER, *Geschichte der röm. Kaiserzeit*, I, 640 sgg.; RITTERLING, " Rhein. Mus. ", LIX (1904), p. 186 sgg.; NIESE, *Manuale di Storia rom.* (trad. ital.), p. 454: cfr. *C. I. L.*, III Suppl., p. 1991 sg.

ragioni più generali di probabilità e di opportunità. Il Foucart sceglie il 166 (1), ricavando questa data dalla prima delle due iscrizioni or ora ricordate. L'imperatore è qui designato con le parole: *Θεὸν Λούκιον Οὐῆρον Ἀρμενικὸν Παρθικόν*. Ora noi sappiamo che Vero ebbe nel 163 il soprannome di *Armeniacus*, nel 165 quello di *Parthicus Maximus*; nel 166 quello di *Medicus* (2) e poi di *pater patriae*: nell'iscrizione non compaiono che i primi due, dunque, conclude il Foucart, esso fu iniziato nel 166, prima di essere acclamato *Medicus*.

L'argomentazione del Foucart, a nostro giudizio, non regge. Dobbiamo anzitutto determinare, giacchè lo possiamo, la data della stesura dell'epigrafe. In essa è ricordata l'iniziazione di Marco Aurelio e di Commodo, i quali inoltre sono chiamati *αὐτοκράτορας*; il primo fatto è da riferirsi, senz'alcun dubbio, all'anno 176, mentre il titolo di *αὐτοκράτωρ* fu concesso a Commodo in quest'anno stesso, a Roma, il 27 novembre (3): d'altra parte Marco Aurelio non vi è chiamato *θεός* (*divus*), come Vero. Ne deduciamo che la morte di L. Memmio e la incisione dell'epigrafe restano comprese tra il 176 e il 180. Orbene, nella iscrizione gli imperatori sono ricordati non coi titoli che avevano al momento dell'iniziazione, ma con alcuni di quelli che si potevano e si dovevano loro dare nell'anno in cui si scolpivano nel marmo quelle parole. Ed infatti a Vero è dato il titolo di *divus*, ch'egli ebbe, naturalmente, solo dopo la morte; e Marco Aurelio e Commodo, oltre che *Γερμανικούς* e *Σαρματικούς* (titoli che essi portavano rispettivamente dal 172 e dal 175) (4), sono chiamati anche *ἀυτοκράτορας*, la qual di-

(1) La data da lui proposta nel già citato articolo in " Revue de Philol. „ è veramente il 165, corretta in quella del 166 nel suo recente libro *Les Mystères d'Él.*, p. 171 e 206: ma la correzione si deve evidentemente solo ai resultati ottenuti, in questo intervallo di tempo, negli studi sulla cronologia di quella guerra partica. Questa data è accettata dal Gruppe, *Griech. Myth.*, II, p. 1496, nota 1, e dal Domaszewski, *Gesch. der röm. Kaiser*, II, p. 220. La data del 167, proposta dallo Stengel, *Griech. Kultusaltertümer*², p. 157, è inesplicabile, essendo a quest'epoca l'imperatore già occupato dalla guerra marcomannica.

(2) V. il citato studio del Von Rohden in *R. E.*, III², 1832 sgg.

(3) V. *R. E.* (*L. Aurelius Commodus*), II², 2464 sgg. (P. von Rohden).

(4) Per Commodo v. *R. E.*, art. cit., per M. Aurelio, *ibid.*, I², 2279 sgg.

gnità Commodo ebbe soltanto al suo ritorno a Roma, dopo l'iniziazione.

Ma, si potrà obiettare, come si spiega allora l'assenza di altri titoli che all'epoca della nostra iscrizione già erano stati conferiti ai due imperatori; quello cioè di *Medicus*, portato da Vero fino dal 166, e quelli di *Armeniacus* e *Parthicus*, di cui anche Marco Aurelio si era fregiato rispettivamente nel 163 e nel 166? Questa selezione dei titoli onorifici dei due imperatori è tutt'altro che capricciosa. Noi sappiamo che, dei tre titoli portati da Vero (*Armeniacus, Parthicus Maximus* e *Medicus*), Marco Aurelio solo rare volte si fregiò dell'ultimo, contentandosi dei primi due, diminuiti anche del " Maximus "; e anche questi poi lasciò cadere dopo la morte del fratello (1).

E che cosa ha fatto l'estensore della nostra epigrafe? Ha nominato Marco Aurelio coi due titoli ch'esso usava portare, senza riesumare gli altri due più antichi, ormai insoliti e, probabilmente, poco simpatici all'imperatore, raggiungendo per di più anche lo scopo di ricordare con gli stessi attributi onorifici i due imperatori colleghi; d'altra parte, non potendo mancare di onorare convenientemente anche Vero, ha menzionato di lui soltanto quei titoli, dei quali si era spesso fregiato, in passato, anche l'imperatore filosofo, tralasciando il *maximus* dopo *Parthicus* e sopprimendo *Medicus*. La nostra epigrafe è stesa insomma con una fine arte diplomatica, resa del resto assai facile dall'avvenuta morte di Vero; e, in ogni modo, anche per chi non resti persuaso da queste considerazioni, resta assicurato che l'epigrafe non può aiutarci a datare l'iniziazione di Vero, poichè gli imperatori vi sono ricordati anche con appellativi che sono sicuramente posteriori all'epoca a cui essi poterono essere iniziati.

---

(1) Schiller, *Gesch. der röm. Kaiserzeit,* I, p. 642. — Così, mentre in *I. G.*, III, 534 (databile tra il 172 e il 175 d. C.), lo troviamo designato come *Γερμανικὸς Παρθικὸς Μηδικός*, nella più tarda III, 39 *a* (databile tra il 175 e il 180) è chiamato soltanto *Γερμανικὸς Σαρματικός*, proprio come nella nostra. In *C. I. L.*, III Suppl., p. 1991 (*constitutiones veteranorum*) M. Aurelio porta solo il titolo di *Armeniacus,* mentre Vero ha pure quello di *Parthicus Maximus* (anno 166); nella costituzione seguente, a p. 1993 (anno 178), M. Aurelio e Commodo hanno soltanto i titoli di *Germanicus* e *Sarmaticus.*

Anche l'altra epigrafe, che fu scritta certo in epoca anteriore alla morte di Vero (che non vi comparisce come *θεός*), non ci aiuta punto a determinare la data della sua iniziazione: essa ci offre però una notizia che non dovrà essere trascurata, quando ricorda che l'ierofante Leostene, in occasione dell'iniziazione di Vero, aveva celebrati due volte nello stesso anno i misteri (*δὶς ἐπὶ τῷ ἔτει ἀγαγόντα μυστήρια, καὶ τοῦτο κατὰ τὸ θεμιτόν*) (1).

Rimane quindi a noi facoltà di scelta fra il 162 e il 166: e non credo si debba dubitare, in tal caso, a scegliere il 162. Fu infatti in quest'anno che Vero, recandosi in Oriente, si soffermò assai a lungo ad Atene; e, come già ricordai, si serbava memoria dell'avere egli assistito a feste ed a giuochi: noi abbiamo invece ragione di dubitare se così lento fu il viaggio di ritorno, mentre nell'esercito imperversava e dovunque attorno dilagava la terribile pestilenza.

Ma poi, come ho avvertito, non è forse insignificante per la nostra questione la frase della epigrafe di Leostene che ricorda come, per l'iniziazione di Vero, si dovettero celebrare due volte in un anno i misteri, alludendosi, come ben si capisce, ai Grandi Misteri. La ripetizione della festa, irregolarità tanto grave da esser menzionata nella epigrafe stessa, si spiega soltanto se Vero giunse in Atene o manifestò il suo desiderio di conoscere i misteri, quando già questi erano stati celebrati, cioè dopo la metà di Boedromione (settembre). Chè se invece, per comodo dell' imperatore, si fossero dovuti celebrare i misteri prima della loro data normale, si sarebbero certamente invitati a parteciparvi allora i misti e gli altri volenterosi di iniziarsi, nè il ritardo di pochi semplici mortali non arrivati in tempo sarebbe stato sufficiente a giustificare la ripetizione di essi, che già altre volte abbiam visto concessa come uno speciale favore all'autocrate di Roma.

Ora noi sappiamo che Vero, partito da Roma nel marzo del 162, si avviò lentamente nell'Italia Meridionale, fermandosi quasi in ogni città e abbandonandosi a bagordi: tantochè am-

---

(1) Di questa epigrafe, edita nel 1895, non disponeva il Foucart quando pubblicava il suo studio in " Revue de Philologie ".

malò a Canusium e suo fratello, che, dopo averlo accompagnato fino a Capua, se n'era ritornato a Roma, accorse ora di nuovo presso di lui, per assisterlo nella sua malattia (1). Ma anche dopo aver traversato il mare, non affrettò punto il suo cammino, e si trattenne invece lungamente in Corinto, e di qui recatosi in Atene, vi rimase per non poco tempo, *inter symphonias et cantica* (2). Così stando le cose, non ci sorprenderemo se Vero arrivò ad Atene alquanto tempo dopo la celebrazione dei misteri; il che ne avrà resa necessaria la ripetizione. È invece assolutamente da escludersi una permanenza di Vero in Atene in questi mesi, all'epoca del suo secondo passaggio per quella città. Finita infatti la guerra del 166, Vero si poneva immediatamente in cammino verso l'Occidente; e, giunto in Roma, vi celebrava il trionfo il 23 agosto del 166 (3).

Non essendo dunque a nostra disposizione nessun dato sicuro per fissare la data dell'iniziazione all'uno piuttosto che all'altro soggiorno di Vero in Atene, le considerazioni generali sopra esposte ci fanno preferire il 162 al 166.

La iniziazione di Marco Aurelio e di Commodo è invece sufficientemente documentata in modo che la datazione di essa non può formare oggetto di discussione (4). Il padre ed il figlio furono iniziati ai misteri insieme. Marco Aurelio si era recato in Oriente per domare la ribellione di Avidio Cassio; ucciso costui nel 175, l'imperatore era già a Smirne nella primavera del 176, e là lo raggiunse Commodo. Di qui passarono in Grecia, e nell'autunno si trovavano ancora in Atene; al principio di

---

(1) Capit., *Verus*, 6, 7; *Marcus Aurelius*, 8, 10. 11. — *R. E.*, III², 1841.

(2) Capit., *Verus*, 6, 9; *R. E.*, III², 1841 sgg.

(3) Durante la sua permanenza in Oriente, Vero non tornò certo in Atene. Dice infatti il suo biografo (7, 3): *egit autem per quadriennium Verus hiemem Laodiciae, aestatem apud Dafnen, reliquam partem Antiochiae.* I quattro inverni sono quelli del 162/3, 163/4, 164/5, 165/6.

(4) L'iniziazione di M. Aurelio è testimoniata da tre luoghi di autori: Dio. Cass., LXXI, 31, 3; Philostr., *Vitae Soph.*, II, 10, 4 (p. 588) Kayser; Capit., *M. Antoninus*, 27; e da due epigrafi, edite dal Philios, in "*'Εφ. ἀρχ.*", 1883, p. 77, n° 6 e 1885, p. 147-8, nelle quali è ricordata pure l'iniziazione di Commodo (l'una riportata sopra nel testo, l'altra qui sotto in nota).

novembre tornavano in Italia (1). Che Commodo sia stato iniziato insieme al padre si rileva non solo dal testo della seconda delle due epigrafi ora citate (2), ma anche dal fatto che la prima di esse, in cui è appunto ricordata l'iniziazione de' due imperatori, è anteriore alla morte di Marco Aurelio (3): non constandoci d'altra parte che Commodo sia tornato in Grecia tra il 176 e il 180, ne dobbiamo concludere che solo in quell'anno, insieme col padre, potè partecipare alle feste eleusine. Questa volta i monarchi si trovarono in Atene al momento giusto e non vi fu bisogno di rimandare, anticipare o ripetere, per causa loro, la cerimonia.

Con lo spengersi della famiglia degli Antonini, anche Eleusi, che da quella dinastia aveva ricevuto lustro ed onore, fu totalmente dimenticata dagli Augusti di Roma. Per lunghissimo tempo non vi fu più alcun imperatore romano che si occupasse de' suoi misteri e dei suoi sacerdoti: se anche Settimio Severo, come il Foucart sostiene e come invece a me non sembra dimostrabile, fu iniziato, ciò avvenne assai prima che l'energico africano fosse levato al trono, quando cioè era ancora in vita M. Aurelio (4).

---

(1) Hertzberg, *Gesch. Griechenl.*, II, p. 409 sgg.; P. von Rohden, *R. E.*, I², 2279 sgg. Cfr. Foucart, art. cit.

(2) " *Ἐφ. ἀρχ.* ", 1885, p. 147: è qui onorata una ierofantide della quale è detto:

Ἥ τε καὶ Ἀντωνῖνον ὁμοῦ Κομμόδῳ βασιλῆας
Ἀρχομένη τελετῶν ἔστεφε μυστιπόλους.

(3) È la citata epigrafe di L. Memmio (" *Ἐφ. ἀρχ.* ", 1883, p. 77): quivi, a differenza di Vero, M. Aurelio non è chiamato *θεός*: segno, come vedemmo, che era ancora vivente quando si stendeva l'iscrizione.

(4) Il Foucart (" Revue de Phil. ", art. cit.) troverebbe in questo passo del biografo di Severo la notizia dell'iniziazione (*Sept. Sev.*, 3): *Post hoc* (dopo aver cioè tenuto la pretura in Spagna e un comando militare) *Athenas petit studiorumque sacrorumque causa et operum ac vetustatum.* L'ipotesi non sarà del tutto inammissibile, ma è certo assai audace: tanto più che è noto come Severo restò scontento e corrucciato delle cattive accoglienze trovate allora ad Atene (Hertzberg, *Gesch. Griechenl.*, II, p. 425); cfr. Gruppe, *Griech. Myth.*, II, p. 1496, nota 1.

Dobbiamo aspettarci però di ritrovare anche per Eleusi un altro fuggevole momento di fortuna presso gli Imperatori. Giuliano, l'imperatore apostata, l'ultimo grande spirito pagano, non poteva trascurare di rendere omaggio ai venerabili culti eleusini e di infondere loro nuova vita. Egli si iniziò ad Eleusi prima di salire all'impero. Com'è noto, dopo la violenta morte del fratello Gallo, per intercessione dell'imperatrice Eusebia, Giuliano ottenne da Costanzo il permesso di recarsi ad Atene a studiare: là egli giunse nell'estate del 355 e là si maturò rapidamente la sua completa conversione alle idee pagane (1). Per suggerimento del filosofo Massimo, suo principale maestro e consigliere, Giuliano si recò a conoscere lo ierofante di Eleusi, che lo fece assistere alla cerimonia d'iniziazione (2). Narrarono più tardi gli scrittori cristiani che il giovane neofita, in un momento di sorpresa o di raccapriccio destato in lui dalla vista dello spettacolo offerto ai misti, si sia involontariamente fatto il segno della croce. Certo è che in Giuliano restò vivo il ricordo di quella funzione (3); l'ierofante che lo aveva iniziato, gli restò poi sempre in particolar modo caro: Giuliano si fece da lui accompagnare in Gallia e lo ebbe prezioso collaboratore per ottenere il favore della Grecia, nella fortunata rivolta contro Costanzo (4). Giuliano non restò in Atene che pochissimi mesi, perchè alla fine del 355 partiva per la Gallia; egli era perciò ad Atene nel mese di Boedromione, epoca normale della cerimonia d'iniziazione; benchè probabilmente ormai il culto regolare eleusino fosse finito.

Di questo breve rifiorimento dei culti eleusini anche presso il mondo pagano dell'Occidente ci resta qualche traccia notevole. Sembra infatti che, durante il regno di Giuliano, si siano associati alla religione di Demetra e Kore altri due illustri ro-

---

(1) Hertzberg, *Gesch. Griechenl.*, III, p. 293. Cfr. Seeck, *Geschichte des Untergangs* etc., IV, 221 segg.

(2) Eunapio, *Vita Maximi*, p. 52 (475), ed. Boissonnade-Didot.

(3) Iul., *orat.*, V, 713 (I, p. 223 sg., Hertlein); cfr. Libanio, *or.*, XIV, 70 (Foerster).

(4) Secondo la tradizione serbataci da Eunapio (*Vita Max.*, p. 52), fu questo il penultimo ierofante eleusino e l'ultimo Eumolpida che ricoprì quella carica.

mani; e cioè quel Vezzio Agorio Pretestato che fu in Roma, insieme con Simmaco e con Nicomaco Flaviano, uno degli ultimi e più strenui difensori del tramontante paganesimo (1), e la moglie sua Aconia Fabia Paolina. Ciò possiamo affermare in base a due epigrafi latine: nella prima leggiamo: *Vettius Agorius Praetextatus ... sacratus Libero et Eleusinis, hierophanta, et Aconia Fabia Paulina C. F., sacrata Cereri et Eleusinis*; nell'altra: *Fabiae Aconiae Paulinae C. F. ... uxori Vetti Praetextati ... sacratae apud Eleusinam deo Iaccho, Cereri et Corae, hierophantriae deae Hecatae* ... etc. (2). Siccome sappiamo che Pretestato fu proconsole di Acaia fin dal 361 o dal 362 (3), è evidente che appunto in uno di quegli anni, regnando ancora Giuliano, egli si fece iniziare ai misteri insieme con la moglie. Poichè non altrimenti possono interpretarsi le parole *sacratus Libero et Eleusinis* della prima iscrizione, e *sacratae apud Eleusinam* della seconda. Con questo fatto invece non debbono esser posti in relazione alcuna i titoli di *hierophanta* e *hierophantria,* i quali si riferiscono invece al sacerdozio di Ecate (4).

Il santuario di Eleusi, fatto restaurare da Giuliano insieme a molti altri della Grecia, fu più tardi completamente distrutto dai Goti di Alarico.

§ 4. — La lista degli ierofanti eleusini nel periodo romano.

Le conclusioni cui siamo giunti fin qui studiando gli imperatori iniziati ad Eleusi, ci offrono l'opportunità di completare e di modificare in parte la lista degli ierofanti eleusini, che per ora conosciamo in modo assai imperfetto.

Per primo il Lenormant compilò la serie degli ierofanti (5); questa andò poi soggetta a notevoli cambiamenti, recati dalle

---

(1) Cfr. Hieron. ep. 61 *ad Pammachium*.

(2) *C. I. L.* VI, 1779. 1780.

(3) Amm. XXII, 7, 6; Zos. IV, 3; cfr. *C. I. L.* VI, 1779.

(4) Cfr. *C. I. L.* VI, 261. 500. 504. 507. 510. 511. 1675. 1778. 31902. 31940; v. Wissowa, *Relig. und Kultus der Römer*², p. 378.

(5) Lenormant, *Recherches archéologiques à Éleusis* (Paris, 1862), p. 143 sgg.

nuove scoperte epigrafiche, finchè fu definitivamente redatta dal Toepffer (1); più recentemente il Philios, tenendo conto di tutti i risultati degli ulteriori studi, vi apportò alcune variazioni (2); la lista fu, alla sua volta, oggetto di nuovi studi per merito del Foucart, che ne diede una nuova redazione, limitandosi però alla prima parte di essa, a quella cioè comprendente gli ierofanti anteriori all'era volgare (3). Il contributo delle nostre ricerche si porterà invece su quella parte della lista spettante al periodo degli Antonini, per la quale appunto crediamo necessario proporre qualche modificazione.

Nella lista del Philios figurano, per questo periodo, quattro ierofanti, e cioè: Decmos del Pireo, d'incerta cronologia, ma riferibile con sufficiente sicurezza alla prima metà del II secolo; poi Phlavios, databile tra il 150 e il 170; indi Iulios, dal 169 al 180 circa; infine Claudios Apollinarios, che avrebbe pontificato dal 180 circa ad oltre il 190 (4).

Ed il Philios, identificando, come già vedemmo, l'Antonino della epigrafe da noi studiata con Marco Aurelio, iniziato nel 176, e l'episodio dei Sauromati con un'invasione di Costoboci del 175, riconosceva nell'ierofante iniziatore di Marco Au-

(1) Toepffer, *Attische Genealogie* (Berlin, 1889), p. 55 sgg.

(2) " Bull. Corr. Hell. ", XIX (1895), p. 131.

(3) *Mystères d'Éleusis*, p. 187 sgg.

(4) *Δ(έκμος) Ιο..... Πειραιεύς* (?) è nominato in una epigrafe onorifica edita dal Philios, in " Bull. Corr. Hell. ", XIX (1895), p. 130: i caratteri sembrano appartenere al II sec. — *Τίτος Φλάουιος Λεωσθένης Παιανιεύς* comparisce fra gli *ἀΐσιτοι* in due cataloghi di pritani, collocati dal Dittenberger agli anni tra il 165/6 e il 168/9 (*I. G.*, III, 1029, 1030); a lui è poi dedicata l'epigrafe edita in " *Ἐφ. ἀρχ.* ", 1895, p. 110, n° 27 e forse anche la seguente n° 28. La famiglia di questo ierofante è studiata da G. Hirschfeld, in " Hermes ", VII (1873), p. 52 sgg. — *Ἰούλιος Ἱεροφάντης* comparisce fra gli *ἀΐσιτοι* in otto cataloghi di pritani che il Dittenberger data fra il 168/9 e il 180 e anche oltre (*I. G.*, 1031, 1032, 1034, 1035, 1038, 1040, 1046, 1048): è nominato anche nel catalogo pubblicato in " *Ἐφ. ἀρχ.* ", 1895, p. 115 sgg., n° 32, databile ad un'epoca posteriore alla morte di Marco Aurelio (180). — *Κλαύδιος Ἱεροφάντης Ἀχαρνεύς* è noto da due cataloghi di pritani, databili al 190 circa il primo (*I. G.*, III, 1049), agli anni immediatamente posteriori al 180 il secondo (III, 1140). — Nella lista del Toepffer è da notare solo l'assenza di Decmos, allora sconosciuto; seguono gli altri nello stesso ordine e con la stessa cronologia.

relio e vittorioso dei barbari quel Iulios che da altre testimonianze ci è resultato in carica tra il 169 e il 180 circa. La cosa è invece per noi assai diversa. L'epigrafe dedicatoria, recentemente rinvenuta, commemorante l'ierofante T. Flavio Leostene (1), ci fa meglio conoscere questo personaggio che avevamo prima trovato nominato soltanto in alcuni cataloghi di pritani: apprendiamo ora che, regnando Antonino e prima probabilmente di essere stato innalzato a quella carica (2), fu due volte a Roma in ambasceria; alla presenza di Antonino Pio stesso rivestì le insegne del suo grado (3) ed iniziò poi l'imperatore L. Vero, commettendo, per riguardo a lui, quella infrazione alle regole del culto, di cui già ci siamo diffusamente occupati. Noi apprendiamo anche però dall'epigrafe stessa l'epoca precisa in cui si inizia l'ierofantato di Flavio Leostene: vi è detto infatti che alla cerimonia, che chiameremo di consacrazione, assisteva Antonino Pio, ma viceversa questi non è fra gli imperatori iniziati da Flavio: segno che quando questi fu eletto alla sua carica, Antonino era stato già iniziato dal precedente ierofante, il quale dovè morire brevissimo tempo dopo l'iniziazione stessa; tantochè l'imperatore fu in tempo, prima di abbandonare l'Oriente, ad assistere alla nomina del suo successore. Questo ierofante è quello appunto che si era reso benemerito della patria, respingendo i barbari; di lui disgraziatamente ignoriamo il nome, ma sappiamo di doverlo collocare fra Decmo e Flavio. Conosciamo così l'anno preciso della sua morte, e cioè il 155; anno che è anche il primo dell'ierofantato di Flavio, la cui morte dovremo porre tra il 162 (anno dell'iniziazione di Vero) e il 169 (anno della morte di Vero, alla quale è

---

(1) " *'Εφ. ἀρχ.* ,, 1895, p. 110. Il testo è stato già riportato nel § 3.

(2) Difficilmente all'ierofante erano affidate cariche o funzioni pubbliche, dopo la sua nomina; mentre era un titolo d'onore essersi reso per l'innanzi benemerito dello Stato: e ciò specialmente al tempo dell'Impero (cfr. Toepffer, *Attische Genealogie*, p. 53 sg.; Foucart, *Mystères*, p. 186 sg.). L'essere invece annoverato fra i pritani non poteva considerarsi, all'epoca di cui ci occupiamo, essere investito di una funzione pubblica vera e propria (Dittenberger, " Hermes ,, XX, p. 35).

(3) Così debbono intendersi le parole: *τὸ στρόφιον παρὰ τῷ Αὐτοκράτορι θεῷ 'Αντωνείνῳ λαβόντα*; sullo svolgimento di questa funzione v. Foucart, *Mystères*, p. 176 sgg.; cfr. Toepffer, *Att. Geneal.*, p. 46 sgg.

anteriore l'epigrafe di Flavio, che non dà all'imperatore il titolo di *θεός*).

La lista degli ierofanti resta allora, in questa parte, così modificata:

Decmos del Pireo: fu in carica verso la metà del II secolo.
L' ierofante iniziatore di Antonino: morì nel 155 dopo C. (1).
Tito Flavio Leostene: pontificò dal 155 al 165-169.
Iulios: tenne l'ufficio dal 165-169 a dopo il 180.
Claudio Apollinare Acarnese: dal 180 circa ad oltre il 190.

Possiamo quindi comporre il seguente prospetto:

(1) Interessa a noi l'epigrafe *I. G.*, III, 713. È un'iscrizione metrica apposta ad uno *μνημεῖον* eretto ad onorare la memoria di un ierofante del quale non si fa il nome. È detto che quel sacerdote *δυσμενέων μόθον οὐ τρέσεν, ἀλλ' ἐσάωσεν | ἄχραντα ἀρρήτων θέσμια Κεκροπίδαις*. Il Dittenberger (seguendo il Boeckh, *C. I. G.*, I, p. 449) suppone che le battaglie cui prese parte l'ierofante, appartengano a quella guerra stessa in cui rifulse Erennio Dexippo (cfr. III, 716), e propone di identificare l'ierofante con quel Polizelo, contemporaneo di Dexippo, nominato in *I. G.*, III, 701 e chiamato *μυστῶν ἡγητήρ*. Il Philios invece (" Bull. Corr. Hell. ", art. cit.) lo identifica con l'ierofante che respinse i Sauromati e cioè, secondo le sue conclusioni, con Iulios; non opponendosi a ciò alcun argomento, neppur di carattere paleografico. Noi preferiamo accostarci al parere del Philios e proponiamo perciò di riconoscere nell'ierofante guerriero l'iniziatore di Antonino Pio, il predecessore di Flavio Leostene.

Personaggio iniziato	Data	Ierofante in carica	Eventuali irregolarità nell'iniziazione (1)
L. Cornelio Silla	84 a. C.	—	—
M. Tullio Cicerone T. Pomponio Attico	79 a. C.	—	—
(A. Claudio Pulcro)	(51 a. C.?)	—	—
M. Antonio	42 a. C.	—	Presenziò alla cerimonia in epoca più tarda della normale.
Ottaviano Augusto	31 a. C.	— (2)	Giunse probabilmente ad Atene alcuni giorni in ritardo.
Adriano: 1° gr. d'iniz. Adriano: epoptia	125 d. C. 128 d. C.	Decmos?	—
Antonino Pio	155 d. C.	Il vincitore dei barbari	?
L. Vero	162 d. C.	T. Flavio Leostene	Si dovè ripetere la cerimonia, essendo Vero giunto in ritardo.
M. Aurelio Commodo	176 d. C.	Iulios	—
(Settimio Severo)?	(177-180)?	Iulios	—
Giuliano l'Apostata	355 d. C.	L'ultimo Eumolpida	—
Agorio Pretestato F. Aconia Paolina	361 o 362 d. C.	—	—

(1) Tengo conto soltanto dell'iniziazione ai Grandi Misteri, senza occuparmi se i singoli iniziati presenziarono o no, avanti, i Piccoli Misteri di Agrai. — (2) Degli ierofanti di questo periodo non se ne conosce con sicurezza alcuno; come resulta dalle liste del Toepffer e del Foucart.

Le 'actiones ex responsione in iure' del processo civile romano.

Nota del D^{r} EMILIO BETTI.

Per molte actiones del processo formolare romano accanto alla formola normale, che è civile, sono proposte nell'albo del pretore — o almeno vengono concesse quando se ne presenti l'occasione — una o più formole *pretorie*, carattere delle quali è tal volta una modificazione della intentio iuris civilis, tal altra volta una modificazione della condemnatio. La modificazione della intentio può essere: *a*) una *fictio* — nelle formulae ad oportere di un servus o peregrinus, nelle f.^{lae} (pure ad oportere) rescissoriae ex in integrum restitutione, nelle f.^{lae} ex bonorum possessione o ex bon. emptione modellate sulle f.^{lae} delle a.^{es} ex hereditate (I. 4, 34. 35), infine — a nostro avviso — nelle f.^{lae} ex confessione in iure in specie delle quattro actiones quibus adversus infitiantem in duplum agimus (I. 4, 9), ex responsione in iure, ex iure iurando (su pretesa civile); *b*) una *trasposizione di subietti* — nelle formulae delle actiones così dette adiecticiae in patrem dominumve, inoltre dell'actio in procuratorem, in tutorem, in curatorem, in actorem (municipum) (non invece, a nostro avviso, dell'a.^{o} in heredem) e nella f.^{la} Rutiliana ex bonorum emptione; *c*) una *praescriptio* — p. es. nella formula dell'a.^{o} incerti ex stipulatu o ex fide bona diretta a una prestazione parziale, o divisa (f.^{la} dell'a.^{o} incerta in sponsorem ex epistula d. Hadriani); *d*) una *adiectio in intentione* — p. es. la compensatio nella f.^{la} dell'a.^{o} certae pecuniae (rei) ex contractu argentariorum. La modificazione della condemnatio (adiectio in condemnatione) può essere: *a*) una *deductio* — nella formola dell'a.^{o} certae pecuniae (rei) ex bon. emptione (Rutiliana) e — a nostro avviso — de eo quod certo loco dari oportet (prima di Giuliano 13, 4, 2, 8) (" deducto eo quod N.^{ii} N.^{ii} interfuit eam pec. Ephesi potius quam Romae solvi "); *b*) una *divisio* — nella formula dell'a.^{o} certae pecuniae (rei) in sponsorem ex ep. d.

Hadriani; *c*) una *taxatio* — quod facere potest nelle f.ae pro socio e rei uxoriae, de peculio et si quid in rem patris versum est (vel si quid dolo malo patris captus A.s A.s est) nella f.la de peculio deque in rem verso (fiduciae), quantum ad eum pervenit nella f.la dell'a.o in heredem, in pupillum, etc. per arricchimento (taxatio molto dubbia) (1), ex iure iurando in litem nell'a.o furti, iniuriarum e altrove; *d*) la soppressione di una clausola propria dell'a.o normale — p. es. nella f.la dell'a.o noxalis sine noxae deditione (2).

Oggetto del nostro studio sono quelle formole pretorie, la modalità delle quali è determinata da quel negozio processuale preliminare alla litis contestatio, che è la responsio alla interrogatio in iure. La responsio in iure riguarda in particolare tre specie di actiones, la legittimazione passiva alle quali è data, iure civili, da un rapporto reale — di regola la proprietà (o patria potestas), in talune circostanze il possesso (almeno il possesso civile) — col corpo (quadrupes o servus o filius noxius, hereditas, fundus unde aqua nocet, unde damnum infectum veretur) onde la obligatio scaturisce e sul quale soltanto pesava in origine (3): a.es noxales (a.o de pauperie), a.es in heredem (ex contractu), a.o aquae pluviae arc. (damni infecti).

---

(1) Sulle ricerche dell'Albertario in proposito riserviamo il nostro giudizio.

(2) Cfr. Biondi in " Bullett. ", 26, p. 22 sgg., 41 sgg. Proposte bensì in luogo o a similitudine di actiones civili, ma in factum conceptae sono l'a.o de pecunia constituta, l'a.o furti adversus nautas etc. e adversus publicanos, furti manifesti, iniuriarum, arborum f. caesarum.

(3) Crediamo che il danneggiato e il creditore ereditario avessero in origine il diritto di *vindicare* (possidere) senz'altro come proprio il caput noxium o le res hereditariae o il fundus unde a. n. (damn. inf. v.) quando il dominus (pater) o lo heres o il possessor non li soddisfacessero, ovvero non assumessero, quasi *vindices*, la defensio della cosa loro. Il termine di a.o confessoria, che per l'a.o l. Aquiliae s'incontra solo in *Ulp.* 9, 2, 23, 11 25, 1, è a nostro avviso non classico (cfr. Segrè, *La denominazione di " a.o confessoria "*, 1 sgg., 43 sgg.). Anche il termine di a.o interrogatoria, che s'incontra solo in Call. 11, 1, 1, 1 e Scaev. 11, 1, 22 (senza la parola actio) non è classico (cfr. Segrè, op. cit., 46[1]): termini classici sono a.o ex confessione, a.o ex responsione (Praet. 11, 1, 11, 1 ex sua responsione iudicium dabo); parimenti, anzi che negatoria, a.o adversus infitiantem, a.o ex falsa responsione. È noto come anche il termine di a.o arbitraria per l'a.o de eo quod c. l. sia itpl. (Arangio, " Bull. ", 25, 154 segg.).

La prima questione che sorge è: la interrogatio in iure è una semplice *facoltà* di chi vuol agire o è una *necessità* imprescindibile del processo? Se la seconda alternativa fosse la vera, ne verrebbe di conseguenza che un'a.° noxalis, in heredem, etc. non potrebbe essere se non *o* ex responsione *o* ex falsa responsione, secondo che alla interrogatio il convenuto abbia risposto di sì o di no. Ma il contrario è il vero: delle actiones anzidette esiste una formola *normale civile ex dominio* (ex patria potestate) o *ex hereditate* (o *ex possessione civili*), la quale *prescinde* da qualsiasi interrogatio in iure (1). Essa può ricostruirsi così: per l'a.° furti nec manifesti noxalis (2): si paret A.° A.° ope consilio Stichi servi q. d. a., *qui servus N.*[i] *N.*[i] *est*, furtum paterae aureae q. d. a. factum esse, q. d. r. a., quam ob rem, quanti ea res fuit cum furtum factum est, tanti eo plurisve N.[m] N.[m] cum A.° A.° pro fure damnum decidere aut Stichum servum noxae dedere (3) oportet, tantae pecuniae duplae aut Stichum servum noxae dedere iudex N.[m] N.[m] A.° A.° condemnato, s. n. p. a. Per l'a.° certae creditae pecuniae in heredem così: si paret N.[m] N.[m], *qui L. Titio ex asse* (*semisse*) *heres est*, A.° A.° HS⟨X milia⟩ dare oportere, q. d. r. a., HS ⟨X milia⟩ iudex N.[m] N.[m] A.° A.° condemnato, s. n. p. a. Per l'a.° aquae pluviae arcendae così: si paret in fundo Corneliano q. d. a., *qui fundus a N.° N.° pos-*

---

(1) Cfr. anche KARLOWA, *Römische Rechtsgeschichte*, 2, 1174; di contrario avviso LENEL *Ed.*[2] 160.

(2) La ricostruzione seguente dell'a.° furti nec manifesti verrà da noi giustificata in altro lavoro di fronte a quella divergente del LENEL (*Ed.*[2] 318); basti rimandare per ora a Jav. l. 15 ex Cassio (60) D. 12, 3, 9 (Basil. 22, 6, 9) e Ulp. l. 37 ed. (1044) D. 50, 16, 192 e all'analogia con la clausola dell'a.° l. Aquiliae (I. 3, 210. 214). L'adiectio " eo plurisve „ (12, 3, 9) = eove pluris = o più di ciò, non trova posto nella ricostruzione del Lenel. Ognuno comprende poi col confronto del passo di Jav. che la citazione in I. 4, 37 non può essere che imprecisa e incompleta; una citazione simile è a nostro avviso anche quella di Cic. p. Tull. 3, 7. 13, 31: prestar fede cieca a tali citazioni non è scrupolosità storica ma feticismo.

(3) Non crediamo che nell'intentio lo " aut noxae dedere „ fosse omesso (così KARLOWA, *R. R. G.* 2, 1171): la citazione di Ulp. 9, 1, 1, 11 prova il contrario. In modo analogo, con l'adiectio in demonstratione " *quae quadrupes N.*[i] *N.*[i] *est* „ e la litis aestimatio " quanti ea res tunc fuit „ è da ricostruire l'a.° de pauperie.

sidetur (arg. 11, 1, 20, 1) (ovvero: N.[i] N.[i] est (arg. 11, 1, 10. 20, 2)), opus factum esse, unde aqua pluvia fundo Capenati q. d.a., qui fundus A.[i] A.[i] est, noceret, q. d. r. a., quam ob rem N.[m] N.[m] eam aquam A.[o] A.[o] arcere oportet, nisi ea res arbitratu iudicis restituetur, quanti ea res est tantae pecuniae (duplae: in orig.) iudex N.[m] N.[m] A.[o] A.[o] cond.[to] s. n. p. a. La caratteristica delle formulae normali ricostruite è l'adiectio in demonstratione o in intentione (secondo che la formula sia incerta o certa) del rapporto che l'actor afferma esistente tra il servus noxius (il debitor defunctus, il fundus nocens) e il convenuto: per diritto civile questi in tanto risponde in quanto quel rapporto esista: l'actor si assume con quella clausola l'onere della *prova* di un punto pregiudiziale.

Ora la interrogatio in iure preliminare è un instituto pretorio, il quale mira a rendere più spedito il processo esimendo l'actor dall'onere di provare il presupposto della legittimazione passiva: essa è quindi per l'actor non un obbligo, bensì una facoltà ch'egli può non esercitare, quando si senta in grado di poter provare da sè quel presupposto. La responsio affermativa ha effetto giuridico quale dichiarazione formale valida di volontà, a prescindere dal fatto se essa corrisponda o non corrisponda alla realtà effettiva: la posizione giuridica confessata deve — in quanto confessata — *valere* senz'altro *come certa* pel iudex della formula ex responsione, come *indiscutibile* per la parte confessa. Tutt'al più il reus può contestare l'esistenza o la validità della responsio stessa: soltanto per questa via indiretta egli può impugnarne il contenuto. La responsio in iure manifesta dunque nel suo effetto vincolante una *volontà di disposizione* più tosto che il riconoscimento di un fatto noto al convenuto e difficile a provarsi per l'attore: non tanto la concessione teoretica per sè presa, quanto il suscipere iudicium in base alla concessione fatta (ex responsione) rappresenta un'assunzione di responsabilità e la volontà determinata di difendere il caput noxium o il patrimonium del defunctus (1) o il fundus unde a. nocet

---

(1) Questo punto di vista sostiene a ragione contro la teoria unilaterale della responsio quale semplice accertamento di un fatto (Bethmann-Hollweg, *Civilprozess*, 2, 550) il Demelius, *Confessio*, 254 sgg. 304. 309 sgg. Soltanto che il Demelius per spirito di opposizione diviene unilaterale a

(unde damnum infectum veretur). Il danneggiato, il creditore ereditario, il proprietario del fundus cui a. nocet, etc., hanno in primo luogo il diritto di venir soddisfatti dal patrimonio del dominus (pater) o dell'heres — quando questi siano disposti a rappresentare in giudizio (defendere) la res (quadrupes, servus, filius, hereditas, fundus) unde obligatio nascitur e a pagare la litis aestimatio —, in secondo luogo — quando costoro non compaiano in giudizio — il diritto di soddisfarsi direttamente sulla stessa res con la ductio del caput noxium o con la missio in bona (o in fundi possessionem — attestata per esplicito da Ulp. 11, 1, 20, 1). Per converso il dominus (pater) o l' heres hanno il diritto alternativo di conservare il caput noxium, i bona, il fundus a condizione di pagare (sufferre, offerre, solvere) la litis aestimatio (1) — ovvero di evitare il pagamento della litis aestimatio, in origine con l'abbandono volontario (deditio in s. etimol.) di quelli, più tardi col trasferimento del proprio diritto su di quelli (mancipatio) (Gai. D. 9, 4, 29) al danneggiato o al creditore (2). Tale diritto alternativo del reus, che fa riscontro a quello dell'actor, si esprime nella intentio delle sole a.es noxales, alle quali soltanto i fr. citati si riferiscono; ma l'analogia processuale fa arguire una configurazione giuridica analoga per le altre actiones.

Orbene, come il servum defendere consiste appunto nel iudicium noxale suscipere e nel litis aestimationem sufferre,

---

sua volta quando afferma che dalla responsio la libertà d'apprezzamento del iudex non viene per nulla circoscritta (p. es. *Confessio*, 279 sgg.). A noi pare invece che i due punti di vista, ben lungi dall'escludersi, sono anzi a vicenda l'uno il necessario complemento dell'altro. Non possiamo approvare la frase che il DEMELIUS (p. 254) adotta dal DEDEKIND " defendere defunctum „: la responsio " se heredem esse „ non estingue il *debito* (dare oportere) *del defunctus* che, lui morto, non esiste più, bensì la *responsabilità* immediata dei bona hereditaria (v. nota 3) *quale oggetto di soddisfazione del debito*, su cui il creditore può metter le mani (missio in bona) quando nessuno ne assuma la defensio.

(1) V. Afr. 9, 4, 28; 33, 8, 16 pr.; Gai. 5, 3, 39 pr.; 30, 70, 3; Ulp. 9, 4, 38 pr.; 21, 1, 17, 18, 23, 8; 47, 10, 17, 4; 9, 1, 1, 16; 15, 1, 11 pr.; 40, 12, 12, 6; Paul. 10, 2, 25, 15: passi relativi tutti alle a.es noxales.

(2) V. I. 4, 75; Gai. 9, 4, 1 (evitare l. a.); Ulp. 9, 4, 8 (evadere l. a.); 5, 3, 13, 14 (evanescere l. a.). Cfr. anche DEMELIUS, *Conf.*, 308 sgg.

il s. non defendere, nel noxae dedere (1), così la responsio affermativa è parte integrante del defendere, la responsio negativa è il contrario del defendere (2). Quale atto di disposizione ch'è presupposto indipendente di legittimazione passiva, la responsio genera un " actione teneri „ pretorio che dai giuristi classici più tardi (Ulp.) viene costruito come *analogo* al teneri da una obligatio ex contractu civile: Ulp. 11, 1, 11, 9 qui interrogatus responderit, sic tenetur quasi ex contractu obligatus (3). Il teneri praetoria actione si giustapone alla obligatio civile ex dominio (patria potestate) noxae (damni) nomine, o ex hereditate contractus defuncti nomine, senza novarla: per modo che, se la responsio non corrisponde a realtà e la intentio dell'actor è fondata, due sono i responsabili: il vero dominus (pater, heres) e l'is qui respondit. Il rapporto tra il teneri pretorio e la obligatio civile è quello di concorrenza per consunzione processuale, come tra la così detta a.° adiecticia e l'a.° directa (4): effetto liberatorio immediato ha la l. contestatio in base alla responsio. In conseguenza il fassus se dominum non ha, lite contestata, altro mezzo per liberarsi che la in integrum restitutio: ciò almeno secondo una teoria Proculiana accolta da Giuliano (4 ad Urs. F. 11, 1, 18 Proculus respondit... idque est verum) (cfr. Paul. 22 ed. 11, 1, 8). Se non che tra il caso dell'a.° noxalis e aquae pl. a. dall'un lato e il caso dell'a.° in heredem e legis Aquiliae dall'altro v'è la differenza che, mentre colà il teneri ha carattere reale (ex persona servi, fundi nomine), qui invece ha carattere personale (suo nomine): il che sembra aver escluso per Paul. 2 quaest. 11, 1, 20 pr. la concorrenza di consunzione.

Poichè la responsio spiega il suo effetto vincolante solo col suscipere iudicium ex responsione, si può dubitare se sino al momento della litis contestatio essa sia *revocabile*. Ora, se la

(1) Cfr. Demelius, *Conf.*, 310; H. Krüger, *Gesch. d. cap. deminutio* I, 387 segg.: Segrè, in " Riv. it. sc. giur. „, 9, 441.

(2) Cfr. Ulp. 11, 1, 9, 4 an ergo non videatur defendere si non responderit videndum; Ulp. 11, 1, 20, 1; in D. 9, 4, 26, 5 il defendere abs. servum si contrappone al sine noxae deditione conveniri.

(3) Su ciò vedi (in parte divergente) Betti, *Sul significato di contrahere in Gaio*, 33.

(4) Su ciò v. Erman, in " Savigny-Zeitschr. „, 19, 311 sgg., 317 sgg.

risposta fu tale (p. es., affermativa) da essere accettata come vera, essa rappresenta per l'is qui agere vult un diritto ormai acquisito, rinunciare al quale dipende dalla sua unica volontà (cfr. 11, 1, 11, 12). Se invece non fu accettata per vera — come negativa o inferiore alla realtà —, si può pensare che sia in facoltà del solo actor tener vincolato il reus alla dichiarazione una volta fatta, o accettare la sua posteriore dichiarazione affermativa (o creduta adeguata alla realtà) secondo che egli si senta o non si senta in grado di provare coi proprî mezzi la posizione giuridica negata. Se non che la revocabilità della responsio falsa (p. es., negativa) è attestata quale facoltà dello stesso respondente: Cels.-Ulp. 11, 1, 11, 12 *licere* responsi paenitere, si nulla captio ex eius paenitentia sit actoris; Paul. (Lab.) 9, 4, 26, 5 *liberum* esse debet defendenti absentem servum huius edicti poenam evitare..... et ideo si negaveris servum in tua potestate esse, postea fateri *poteris* nisi si iam lis adversus te contestata est. Tale limitato diritto del respondente di ritrattare la dichiarazione negativa con una affermativa cessa con la litis contestatio: se in fatti quale programma del processo è stata accettata da entrambe le parti la formula ex falsa responsione è ormai esclusa una condemnatio cum noxae deditione (1).

Se la responsabilità processuale ex responsione (affermativa) si fonda, per quanto riguarda il punto pregiudiziale della legittimazione passiva, sul diritto pretorio (sull'edictum de interrogationibus in iure faciendis), è evidente che il pretore non ha potuto esprimerla, nelle formulae ex responsione, che o mediante la conceptio in factum della formola intera o mediante la fictio di quel punto pregiudiziale. Una terza possibilità non sussiste: da escludersi in particolar modo come un vero monstrum formolare è l'espediente che l'illustre restitutore dell'Edictum perpetuum propone da ultimo per l'a.° noxalis ex responsione (2ª ed., p. 160 sg.): la redazione impersonale e passiva dell'intentio; espediente da lui usato anche nei casi analoghi dell'a.° legis

(1) Salva sempre, s'intende, restitutio in integrum: Octaven. Ulp. 9, 4, 26, 5. Considerazioni analoghe possono ripetersi per le quattro a.^{es} ex infitiatione. Cfr. Wenger, *A.° iudicati*, 42.

Aquiliae confessoria (p. 196) e dell'a.° aquae pluviae arc. interrogatoria (p. 364[1]) e nel caso dell'a.° ad exhibendum (p. 216) (1). Una intentio iuris civilis la quale tacesse proprio il nome di colui che l'actor afferma responsabile iure civili di fronte a lui, mancherebbe di quella definitezza precisa, di quella determinazione rigorosa che nel nesso logico della formola è necessaria a *individuare* il rapporto giuridico dedotto in giudizio e a giustificare in modo *univoco* il condemnari oportere del reus e di niun altro che il reus: a un'a.° in personam in ius concepta così redatta il principio della consunzione processuale (I, 3, 180) — la quale è determinata dalla intentio — non sarebbe applicabile (2). Accanto a questa obiezione insuperabile di principio la redazione impersonale ne incontra altre ben gravi d'indole pratica (3). Il punto di partenza di essa è l'assunto — non provato dai fr. 13 pr., 14 pr., 15 pr., 16 pr. del tit. 11, 1, che *una sola e medesima* formola competesse tanto contro chi è dominus in realtà, quanto contro il semplice fassus se dominum senza modificazioni di sorta: la ricostruzione mira a esprimere in una formola unica i presupposti tanto dell'una che dell'altra actio. L'assunto è contradittorio, perchè *altro* è essere tenuti iure civili ex dominio, *altro* — come si è dimostrato — essere tenuti iure honorario ex responsione, e le formulae che corrispondono all'una e all'altra specie di responsabilità non possono non *esprimere* tale profonda differenza nella stessa lettera loro. Quanto al fr. principale su cui esso si fonda — D. 11, 1, 13 pr. —, a prescindere dal fatto che esso è atto a essere interpretato in vario senso, è evidente dal cambiamento di soggetto che la seconda parte da " quia quae cum alio, etc. " è

---

(1) Anche nel caso dell'a.° ex falsa responsione in heredem, nella 1ª edizione: Lenel, *Edict.*[1] 116; ivi è parimenti impersonale (dominum) l'a.° noxalis ex resp. (*Edict.*[1] 128). Una inconseguenza in cui ci sembra cadere il Lenel è la *differenza* dei criteri adottati per ricostruire la f.la ex responsione in heredem (*Ed.*[2] 143 sgg.) (giusto) e la f.la ex responsione noxalis (errato).

(2) Frasi come il " dari mihi oportere " in I. 3, 181 e il " sibi, nobis dari oportere " " damnum decidi op.re " in I. 4, 34. 45 perdono, staccate dal contesto ogni significato proprio: sono espressioni generiche, risultato di astrazione, ossia tutt'altro che citazioni di formole singole.

(3) V. Partsch, in rec. all'*Edictum*[2] in " Sav. Zeitschr. ", 31, 412 sgg.

stata alterata: Paolo (1080, l. 2, ad Plaut.) voleva dire, a nostro avviso, che nel caso di *falsa* responsio affermativa in tanto (ita) il respondente obligatur (iure honorario) in quanto (si) esista un'actio (in verum dominum) per quel determinato delitto che la responsio concerne: l'a.° ex responsione non esime l'actor che dalla prova del dominium, non dalla prova del delitto stesso (1): il giurista concludeva forse ⟨nam in eum qui respondit actio ex sua responsione datur perinde ac⟩ *si dominus esset*: tale osservazione formolare non aveva più valore pei compilatori.

Eliminata così la terza possibilità, delle due possibilità accennate sopra, la più verosimile è che la intentio della f.la ex responsione fosse ficticia: ciò già per un motivo di economia formolare, importando la fictio una modificazione della f.la normale molto più lieve che la conceptio in factum. Ma soltanto con la fictio si spiega l'equiparazione perfetta del fassus se dominum (heredem) al dominus (heres) effettivo agli effetti della consunzione processuale: perchè questa vi sia occorre che tra le due formulae sussista una *identità esteriore* analoga a quella che sussiste ad es. tra l'a.° contro il dominus e l'a.° contro il suo procurator (2); così si spiegano anche i fr. 11, 1, 14 pr., 15 pr., 16 pr., 20 pr. e la costruzione di Ulp. 11, 1, 11, 9. Se l'effetto della confessio in iure in generale è quello di *sostituire* la pronuntiatio del iudex (confessus pro iudicato habetur), anche l'effetto della responsio in iure — quale confessio di un punto pregiudiziale — dev'essere quello di sostituire, ossia di *escludere*, la pronuntiatio del iudex su quel punto medesimo: orbene tale esclusione si esprime appunto nella fictio: in essa si manifesta l'effetto della responsio quale atto di disposizione. Oltre il contenuto della responsio la fictio non si estende: all'actor incombe la prova di *tutti gli ulteriori* presupposti dell'oportere. L'obiezione, essere " innaturale „ fingere ancora quale dominus (heres) quegli che si è dichiarato tale in pubblico dinanzi al

(1) Una osservazione analoga fa Ulp. 9, 2, 23, 11 (cfr. cod. 25 pr.) a proposito dell'a.° legis Aquiliae ex confessione: hoc ... *solum* remittere actori confessoriam actionem ne necesse habeat docere *eum* (N.m N.m) occidisse: ceterum *occisum esse* hominem a quocumque oportet.

(2) Cfr. P. Krüger, in " Krit. Vierteljahresschrift „, 22, 419 criticando la ricostruzione del Demelius.

pretore (1), ignora che la funzione formolare della fictio non è già quella di far presumere, fingere la verità obiettiva (teoretica) di un fatto irreale come reale, bensì quella di *fissare* un punto *come formalmente certo* pel iudex, di porlo fuori di questione per le parti. Ma la intentio ficticia è attestata per esplicito per l'a.° ex responsione in heredem (e l'analogia fondamentale la prova per le altre a.[es] ex responsione anche a prescindere da Paul. 11, 1, 13 pr.) da Ulp. 11, 1, 11, 1 si quis, cum heres non esset, interrogatus responderit ex parte heredem esse, *sic* convenietur *atque si* ex ea parte heres esset. Il " fides ei contra se habebitur „ non può esprimere (2) un semplice canone d'interpretazione formatosi nella consuetudine giudiziaria, per cui il iudex, competente a esaminare se la posizione giuridica confessata esista in realtà, debba essere più tosto *propenso* a credervi (3).

Com'è noto (4), la fictio si esprime in genere in forma di premessa condizionale equiparativa (*si* esset = *perinde ac si* esset = *dato che* fosse, *posto che* fosse) col verbo al congiuntivo passato (imperfetto o più che perfetto secondo che concerna un rapporto giuridico o un fatto avvenuto): premessa che di regola ha come conseguenza ipotetica (*purchè* ne esistano gli *altri* estremi) la intentio (il modo del cui verbo si trasforma per consecutio in condizionale), ma che tal volta può avere per conseguenza la sola condemnatio. Siccome la fictio che la responsio " se dominum (heredem) esse „ fonda, riguarda un determinato presupposto dell'oportere civile, così essa non può essere inse-

---

(1) Così Demelius, *Confessio*, 274 sgg. e con lui Lenel, *Edictum*[1] 115. *Edictum*[2] 143.

(2) Come sostiene il Demelius, *Confessio*, 279 sgg.

(3) Il fassus se dominum (heredem) è trattato alla stregua del vero dominus (heres), *quasi dominus* (quasi heres; quasi = *quale*); Ulp. 11, 1, 7 è da completare, per analogia col fr. seguente, così: si ... responderit ⟨suam esse⟩ tenebitur ⟨quasi dominus⟩: è evidente l'analogia con l'a.° l. Aquiliae ex confessione: Paul. 11, 1, 8 *tenebitur quasi dominus*; cfr. Paul. 11, 1, 12 pr. si ... responderit se heredem esse ... *pro herede gessisse* videtur. Per Cels.-Ulp. 11, 1, 9, 4 la responsio che non corrisponde a realtà esclude il defendere soltanto nel rapporto interno col rappresentato.

(4) Cfr. Demelius, *Rechtsfiktion*; Bekker, *Akt.*, 2, 106 sgg.; Gradenwitz, in " Sav. Zeitschr. „, 27, 231 sgg.

rita nella formula ex responsione che quale adiectio in intentione: in forma di adiectio in intentione (in demonstratione nelle f.lae con demonstratio) si esprime infatti quel presupposto nella formola civile normale; se per contro il rapporto giuridico ch'è oggetto della fictio fosse soltanto condizione della condemnatio (es. peculium nell'a.o de peculio), allora la fictio non potrebbe a rigor di logica esser inserita nella f.la che quale adiectio in condemnatione. — Oltre la fictio, modalità costante di ogni f.la ex responsione (col qual termine intendiamo la sola formola fondata su responsio *affermativa*), è necessaria una clausola che sottoponga all'esame del iudex l'esistenza effettiva della responsio affermativa da cui la intentio ficticia scaturisce, ogni qual volta l'is qui respondit controverta in prosieguo, l'esistenza della responsio e l'actor (sentendosi in grado di provare meglio la responsio che la posizione giuridica confessata) astringa il respondente alla sua dichiarazione (1). Circa il dove la clausola venisse inserita nella f.la, due sono le possibilità: o quale exceptio o quale praescriptio pro reo. Un argomento di verosimiglianza per la exceptio (si respondit) (2) può trovarsi nelle formulae ficticiae della lex Rubria, ove il fatto da cui la fictio (si... repromisisset, satis dedisset) trae motivo è appunto espresso in una exceptio in condemnatione (si... repromittere, satis dare noluit). Se non che l'analogia non è stringente: poichè colà il fatto della inesecuzione di un obbligo materiale è soltanto *condizione negativa* della fictio e questa consiste nel porre fuori di questione il contrario. Nelle f.lae ex responsione per contro la responsio è il fondamento positivo della fictio, così che il iudex non può neppure prendere in esame la conseguenza ipotetica della fictio (si pareret oportere, quidquid oporteret) sin che non abbia accertato l'esistenza della responsio: l'impugnativa del reus " se non respondisse ", avendo carattere pregiudiziale, deve esprimersi in

(1) Cfr. Lenel, in " Sav. Z. ", 20, 3 sgg.; *Edictum*² 143-4, 159. Nella formola in generale ha bisogno di particolare rilievo (exceptio, adiectio, fictio) soltanto — e tutto — *ciò che o viene esplicitamente controverso* (non fa differenza in che modo sia il verbo, indicativo o congiuntivo, purchè presente o perfetto: p. es. *si* heres *est*, o *qui* heres *est*, o *cum* heres *sit*) *o che* per contro *non può essere più controverso*.

(2) A questa pensa il Lenel, *Ed.*², 159⁶ nel caso analogo dell'a.o ex falsa responsione (si negavit).

una praescriptio (1). Tale praescriptio responsionis non factae (ea res agatur si (qua de re) N.^{s} N.^{s} in iure interrogatus respondit...) è attestata da Ulp. 6 disp. (118) 22, 3, 18, 2 e pel suo carattere pregiudiziale è analoga a una serie di praescriptiones (2): contro il bonorum possessor (Paul. 44, 1, 20), il bonorum emptor, il procurator, il tutor etc. Ove controversia de responsione non vi sia, la praescriptio non potrebbe avere che funzione determinativa (ea res agatur qua de re etc.).

Secondo tutto quanto è stato detto le formulae ex responsione in iure (affermativa) devono dunque ricostruirsi come segue: per l'a.^{o} furti nec manifesti noxalis (ex responsione de dominio servi): Ea res agatur qua de re (quod) [*si*: se controverso] N.^{s} N.^{s} in iure interrogatus *respondit* Stichum servum q. d. a. suum esse. si paret A.^{o} A.^{o} ope consilio Stichi servi q. d. a. furtum paterae aureae q. d. a. factum esse, q. d. r. a., quam ob rem, quanti patera illa fuit cum furtum factum est, tanti eo plurisve N.^{m} N.^{m}, *si Stichus servus q. d. a. eius esset*, cum A.^{o} A.^{o} pro fure damnum decidere, aut Stichum servum noxae dedere, *oporteret*, tantae pecuniae duplae, aut eum servum noxae dedere, iudex N.^{m} N.^{m} A.^{o} A.^{o} condemnato, s. n. p. a. — Per l'a.^{o} certae creditae pecuniae in heredem così: Ea res agatur qua de re (quod) [*si*: se controverso] N.^{s} N.^{s} in iure interrogatus an (quota ex parte) L.^{o} Titio heres esset, *respondit* se L. Titio ex asse (ex semisse) heredem esse. *si* N.^{s} N.^{s} *L. Titio* ex asse (semisse) *heres esset*, tum si *pareret* N.^{m} N.^{m} A.^{o} A.^{o} H S ⟨X milia⟩ dare oportere, H S ⟨X milia⟩ iudex N.^{m} N.^{m} A.^{o} A.^{o} condemnato, s. n. p. a. (3). — Per l'a.^{o} aquae pluviae arcendae: Ea res agatur qua de re (quod) [*si*: se controverso] N.^{s} N.^{s} in iure interrogatus an (event. quota ex parte) fundum Cornelianum q. d. a.

---

(1) Così anche P. Krüger, in " Krit. Vierteljahresschrift ", 22, 420.

(2) L'osservazione è del Lenel, *Edictum*^{2}, 144; cfr. inoltre pp. 178, 411, 95^{5}, 483^{5}.

(3) Così già P. Krüger, in " Krit. Vierteljahresschrift ", 22, 420: ivi v. anche la formula ex responsione dell'actio incerta ex fide bona in heredem, ove però " L. Titius ab A.^{o} A.^{o} " va corretto in " A.^{s} A.^{s} de L.^{o} T.^{o} " e " oportere " in " oporteret ". La formola normale civile di quest'ultima doveva avere la demonstratio *con una adiectio* come l'a.^{o} adiecticia ex fide bona: Quod A.^{s} A.^{s} apud L. Titium, *cui N.^{s} N.^{s} heres est*, mensam argenteam q. d. a. deposuit, q. d. r. a. etc. (cfr. ad es. Lenel, *Edict.*^{2}, 273).

possideret (11, 1, 20, 1) (ovvero: an — quota ex parte — fundus C.[s] q. d. a. eius esset: cfr. 11, 1, 10. 20, 2) *respondit* se illum fundum — ex parte dimidia — possidere (risp.: illum f. — ex p. d. — suum esse). si paret in fundo Corneliano q. d. a. (1), opus factum esse unde aqua pluvia fundo Capenati q. d. a., qui A.[i] A.[i] est noceret, q. d. r. a., quam ob rem N.[m] N.[m], *si is fundum Corn. q. d. a.* (ex parte dimidia) *possideret* (risp.: *si is fundus* Corn. q. d. a. — ex parte dim. — *eius esset*), eam aquam (pro parte dimidia) A.[o] A.[o] arcere *oporteret*, nisi ea res arbitratu iudicis restituetur, quanti ea res est tantae pecuniae iudex N.[m] N.[m] A.[o] A.[o] condemnato, s. n. p. a. — L'*identità* fondamentale di *funzione* pone fuori di dubbio che *tutte* le formulae ex responsione in iure, non solo, ma anche le f.[lae] delle quattro a.[es] ex confessione in simplum e le f.[lae] delle a.[es] ex iure iurando abbiano avuto l'identica *struttura*, da ricostruire secondo il medesimo criterio logico (2).

Accanto alle f.[lae] ex responsione, ossia alle formole fondate su tale *dichiarazione* del reus che (a prescindere dalla sua falsità obiettiva) l'is qui agere vult ha *accettato come vera* per giovarsene nel processo, esistono formulae *ex falsa responsione* in senso tecnico. Con che s'intendono formole che traggono motivo da tale *dichiarazione* del reus che (a prescindere dalla sua verità obiettiva) l'actor *impugna di falsità* intrinseca *affermando vero* e disponendosi a provare tale *il contrario* o in genere qual-

---

(1) Nelle f.[lae] incertae ex responsione, la *demonstratio*, deve di necessità essere redatta in modo *impersonale*, tacere cioè la persona del dominus o possessor, perchè essa deve indicare soltanto quei presupposti dell'oportere che l'actor deve provare. Per contro, la demonstratio delle f.[lae] civili corrispondenti deve designare per esplicito (in una adiectio) la persona del reus, nella sua qualità di dominus etc., perchè in esse l'actor *deve provare* quella determinata posizione dalla quale appunto deriva l'oportere. Che N.[s] N.[s] risponda solo se dominus etc. è bensì regola del ius civile che il iudex non può ignorare, ma questa non è (come crede il Lenel, *Ed.*[2], 364[1]) una ragione perchè la qualità di dominus etc. debba tacersi nella f.[la]: tacendola verrebbe a mancare il nesso logico tra demonstratio e intentio. Dei §§ citati sopra il solo 11, 1, 20, 1 si riferisce all'a.[o] aquae pl. arc., gli altri due all'a.[o] damni infecti.

(2) Sarebbe arbitrario seguire per ciascuna criteri differenti (cfr. nota 1 a pag. 396 e 1 a pag. 403) e restringere il significato dei singoli passi che trattano di f.[lae] ex responsione a quella sola a.[o] di cui proprio si parla ciascuna volta.

cosa di diverso (1). Da tale funzione dell'a.° ex falsa resp. risulta subito evidente che la struttura della f.la ex falsa resp. *non* può *differire* in sostanza dalla struttura della f.la civile normale se non in una lieve modificazione della condemnatio: il fondamento della *responsabilità* qui e colà è il *medesimo*: la posizione giuridica presupposto dell'oportere iure civili che l'actor si accinge a provare: la *intentio* dunque (e con essa la eventuale demonstratio) non può essere che la medesima. La intentio perciò non ha potuto essere ficticia: è naturale bensì che la responsio accettata per vera dall'actor astringa chi la fece a riconoscerla tale; ma è assurdo che la responsio impugnata di falsità possa come tale vincolare senz'altro chi la fece a riconoscere quale dato certo e indiscutibile *il contrario* di ciò che dichiarò o una responsabilità molto superiore a quella che confessò (2). È vero che tale enormità giuridica (non confortata dalla ben lontana analogia delle f.lae ficticiae della lex Rubria) diviene soltanto formale quando alla intentio ficticia si *premetta* una praescriptio la quale faccia condizione p. es. della fictio " si N.s N.s L. Titio heres ex asse esset „ l'esame della questione se il reus sia heres ex maiore parte; ma in questa redazione quello che è propriamente il *nocciolo della questione* processuale viene trasportato *fuori* del corpo *della formola*, alterati di questa l'equilibrio e l'armonia. La vera e propria questione processuale, invece, nella f.la ex falsa responsione non è diversa in nulla da quella della formola normale civile; la conferma irrefutabile di ciò è che le analoghe f.lae ex infitiatione delle quattro a.es quibus adversus infitiantem in duplum agimus *sono appunto quelle nor-*

---

(1) " Falsa „ in senso tecnico processuale è non solo la risposta *negativa* a una domanda categorica (es. an heres sit) (nel qual caso a.° ex falsa responsione = a.° ex negatione, ex infitiatione), ma anche quella risposta a una domanda *quantitativa* (es. quota ex parte heres sit) che l'actor si disponga a dimostrare *inferiore alla realtà*.

(2) A questa obiezione va incontro la redazione proposta da P. Krüger, " Krit. Vierteljahresschr. „, 22, 420, accolta in sostanza dal Lenel, *Ed.*[2] 144, con la sola modificazione che qui la prima parte della praescriptio concernente la responsio impugnata è divenuta una exceptio non stabile, la seconda parte " *cum* re vera maiore ex parte heres *esset* „ forma da sola il contenuto della praescriptio: " ea res agatur *si* ex maiore parte heres *est* „.

mali; la divergenza è soltanto che quivi la dichiarazione de reus è una necessità imprescindibile del processo.

La pars formulae in cui la f.^{la} ex falsa responsione differisce dalla f.^{la} normale non è dunque l'intentio, bensì *la condemnatio*: l'effetto della responsio provata falsa dall'actor è — quale poena mendacii (Ulp. 11, 1, 11, 3. 4) — il condemnari sine noxae deditione nelle a.^{es} noxales, in solidum nelle a.^{es} in heredem, sine rei restitutione nell'a.^{o} aquae pl. arcendae (1). Il che si esprime nelle f.^{lae} delle a.^{es} noxales e aquae pluviae a. con la *soppressione* pura e semplice delle clausole " aut noxae dedere „ (in condemnatione) o risp. " nisi ea res arbitratu tuo restituetur „. Quanto alla f.^{la} delle a.^{es} in heredem si potrebbe pensare che in essa subito prima della condemnatio venisse inserita la fictio " tum si (= perinde ac si, quasi) N.^{s} N.^{s} L. Titio ex asse heres esset „: la differenza logica di questa fictio in cond.^{ne} dalla fictio in intentione è evidente: della fictio in cond.^{ne} può dirsi veramente ch'essa ha un puro fine penale: il iudex dovrebbe anzitutto pronuntiare se l'affermazione sostenuta dall'actor in contradizione con la falsa responsio del reus sia vera, in secondo luogo dovrebbe condemnare in solidum " perinde ac si etc. „. Se non che — quanto alle a.^{es} con intentio certa — noi crediamo che il pretore provvedesse anche qui con un espediente molto più semplice, analogo a quello usato per le altre due specie di a.^{es} ex falsa resp.: con la soppressione della responsabilità limitata *nella condemnatio*, omettendo cioè in questa la *clausola restrittiva* (*divisio*) — analoga a quella dell'a.^{o} *in consponsorem* ex ep. d. Hadriani — alla cui inserzione il reus avrebbe avuto diritto come coheres: " ex ea parte qua ex parte N.^{s} N.^{s} heres est „: adiectio propria della f.^{la} civile normale. La f.^{la} ex falsa resp. dell'a.^{o} certae creditae pecuniae in coheredem " qui respondit se ex minore parte quam esset heredem esse „ deve quindi a parer nostro redigersi: si paret N.^{m} N.^{m}, *cum is maiore ex parte quam ex* ⟨*sextante*⟩ (contenuto della falsa responsio) L. Titio *heres sit*, ex ea parte A.^{o} A.^{o} H S ⟨X milia⟩

---

(1) Il criterio che noi proponiamo è stato seguito dal LENEL (" Sav. Zeitschr. „, 20, 10; *Edictum*^{2}, 150), per la sola actio noxalis ex falsa responsione. Ci sembra una strana inconseguenza il non averlo egli seguito anche per l'a.^{o} in heredem ex falsa resp. (*Edict.*^{2}, 144) (cfr. sopra nota 2 a p. 401).

dare oportere, q. d. r. a., H S ⟨X milia⟩ (senza riduzione corrispondente alla parte) iudex N.^{m} N.^{m} A.^{o} A.^{o} condemnato, s. n. p. a. Modificando in guisa opportuna l'adiectio in demonstratione della f.^{la} normale vanno ricostruite le f.^{lae} ex falsa resp. delle a.^{es} *incertae*, p. es. dell'a.^{o} empti in coheredem qui etc.: Quod A.^{s} A.^{s} de L. Titio, cui N.^{s} N.^{s} maiore ex parte quam ex sextante heres est, hominem St. q. d. a. emit, quidquid (senza " ex ea parte ") etc.; ma qui, e qui soltanto, la funzione di produrre la condemnatio in solidum può essere adempiuta solo da una fictio: " quidquid tum ob eam rem N.^{m} N.^{m}, si L. Titio ex asse heres esset, A.^{o} A.^{o} d. f. oporteret ex f. b., eius etc. ". La ragion di ciò è che la intentio incerta — anzi che essere un'affermazione principale da cui la condemnatio dipenda — non esprime — quasi litis aestimatio — che il contenuto della condemnatio. Della falsa responsio non v'è motivo di far menzione nella f.^{la} ex falsa resp. nè sotto forma di praescriptio pro reo o di exceptio (si negavit, si respondit ex sextante h. e.), nè sotto forma di fictio in condemnatione: non nella prima forma, perchè, come s'è veduto sopra, il reus può sino al momento della litis contestatio evitare la poena mendacii revocando la falsa responsio (9, 4, 26, 5; 11, 1, 11, 12) e controvertere questa significa per implicito riconoscere l'affermazione dell'actor (1); non nella forma di fictio in cond.^{ne}, perchè il *maggior rigore* della condemnatio è *giustificato* già come semplice conseguenza della pronuntiatio " N.^{m} N.^{m} ex *maiore* parte quam ex sextante heredem esse ", o semplicemente (quando la responsio alla interr.^{o} " an heres sit " fu negativa) " heredem esse ". Probabile è per contro una praescriptio pro actore con carattere puramente determinativo (I. 4, 131). Quegli che si assume la responsabilità della condemnatio in solidum non è il iudex bensì

---

(1) Cfr. Lenel, in " Sav. Zeitschr. ", 20, 11; *Edict.*^{2}, 161. A noi sembra peraltro — a meno che non si pensi a una praescriptio pro actore con carattere puramente descrittivo (I. 4, 131) — una strana incoerenza lo ammettere — come fa il Lenel — anche in ipotesi la possibilità della medesima exceptio (si negavit, si respondit se ex semisse heredem esse) per la f.^{la} noxalis ex falsa responsione de dominio (p. 159) e per la f.^{la} ex falsa resp. in heredem (p. 144). La exceptio in condemnatione di cui ci offrono un esempio le f.^{lae} della lex Rubria (si repromittere noluit) non costituisce un'analogia stringente.

il praetor: quando la f.[la] non determina *per quale precisa parte* il convenuto sia heres il iudex è costretto dalla sua lettera stessa (eccettuati, s'intende, i iudicia ex fide bona) a condemnare perinde ac si reus *ex asse heres* (arg. 11, 1, 9, 5).

Nel caso poi che alla interrogatio non sia stata data alcuna risposta — nè di sì, nè di no, nè di quanto —, l'actor che si senta in grado di provare nella persona di chi non rispose i presupposti civili dell'oportere può trarre dalla nulla responsio motivo a far valere contro di lui una responsabilità analoga a quella ex falsa responsione (salvo al convenuto il diritto di revoca): Ulp. 11, 1, 11, 4 qui tacuit in ea causa est ut conveniatur *quasi negaverit*; eod. 7 nihil interest neget quis an taceat (cfr. per anal. I. 2, 24 negante aut tacente); la poena mendacii diviene qui poena contumaciae. Il diritto di fare una dichiarazione positiva esclude la possibilità di una vera controversia sulla mancata responsio, quindi anche la menzione di essa in una praescriptio contenziosa o exceptio (si omnino non respondit); probabile è per contro una praescriptio determinante (pro actore).

Particolare considerazione richiedono le a.[es] *noxales* in quanto per esse il presupposto della legittimazione passiva ha due lati, l'uno di diritto, il dominium (patria potestas) — che si esprime nella intentio (o demonstratio) — l'altro di fatto, il possesso (potestas exhibendi). Secondo il ius civile in origine l'a.[o] noxalis era possibile solo quando il caput noxium fosse praesens in iure (l'a.[o] noxalis deriva infatti a nostro avviso da una primordiale vindicatio noxae e vindicatio non è possibile che presente la res quae vindicatur): il possesso era quindi sottinteso non costituiva un requisito particolare ulteriore. Prima dal pretore, in prosieguo dal diritto consuetudinario si è riconosciuta possibile l'a.[o] noxalis anche quando il caput fosse absens ex iure (Ulp. 9, 4, 21, 1 *etiam absentes* defendi posse PLACUIT). D'allora in poi è sorta quindi la possibilità che il possesso costituisse una *condizione* ulteriore *della condemnatio* e che vi fosse bisogno di farne espressa menzione nella formola quand'esso venisse dal reus espressamente controverso (exceptio in condemnatione) o riconosciuto (fictio in condemnatione), sempre nell'ipotesi che il caput noxium fosse absens ex iure (1). D'allora in poi è di-

(1) Dall'analogia col peculium quale condizione di condemnatio non si

venuta possibile e necessaria — nel caso che il servus q. d. a. sia absens ex iure —, *accanto* alla interrogatio de dominio (an servus eius sit) — ch'è facoltativa —, una particolare interrogatio de potestate exhibendi (an servum in potestate habeat), la quale — come imprescindibile necessità del processo absente servo — deve precedere, non seguire la interr.° de dominio (1). La necessità processuale di tale interrogatio nel caso di assenza, pur non essendo attestata, è una ipotesi che scaturisce dal fatto che la potestas exh. pura e semplice non è — com'è invece il dominium — *fonte* di responsabilità civile: essa può soltanto divenir condizione di condemnatio allorchè coesista col dominium; la pretesa di condanna ex potestate exh. è inseparabile dall'affermazione che il reus è dominus: Ulp. 9, 4, 21, 1 absentes defendi posse... ita demum, si proprii sint servi: nam si alieni praesentes esse oportet, aut si dubitetur, utrum proprii sint an alieni.

D'altra parte il pretore non può aver fatto della potestas exh. una fonte per sè stante di responsabilità a prescindere da qualsiasi interrogatio in iure: quale condizione di condemnatio essa compare infatti *come tale* (senza fictio) nella stessa f.la dell'a.° ex falsa responsione de potestate, dove la condemnatio non è ex responsione ma ex potestate (effettiva). Ivi l'actor si accinge a provare che, *non ostante* la risposta del contrario, il reus — ch'egli afferma o che si è confessato dominus — si trova in possesso del servus: l'espressione formolare di tale obbligo di

---

può indurre che la potestas exhib. non venisse espressa mai nella f.la: pel peculium non esiste infatti alcuna apposita interrogatio in iure (Cfr. KARLOWA, " Röm. Rechtsg. ", 2, 1175).

(1) V. in questo senso LENEL, *Edictum*², 157 sgg. (cfr. PARTSCH, *Rec.*, in " Sav. Z. ", 31, 411); che la int. de pot. seguisse credeva il LENEL, in " Sav. Z. ", 20, 8. Sulla interrog. de potestate exh., v. LENEL, in " Sav. Zeitschr. ", 20, 5 sgg. e KARLOWA, " Röm. Rechtsgesch. ", 2, 1174; essa è attestata in D. 9, 4, 21, 3; 50, 16, 215; 47, 2, 17, 3; 11, 1, 5 . 16 pr., 17; la interrog. de dominio è attestata in D. 9, 4, 26, 3. 27, 1. 39, 1; 11, 1, 8. 13 pr. 1. 14 pr. 20 pr. 7; 9, 1, 1, 15. S'intende che nell'ipotesi che il servus sia praesens in iure, ossia già exhibitus, la interrog. de pot. exhib. non ha ragione di essere più che l'a.° ad exhibendum quando la res da vindicare sia praesens in iure. Quest'analogia conferma la derivazione storica dell'a.° noxalis da una vindicatio noxae. Anche un' adiectio " qui servus praesens in iure est " non esiste nell'a.° noxalis più che nella rei vindicatio.

prova non ha potuto essere che un'exceptio in condemnatione, p. es. nell'a.° noxalis furti nec manifesti: " ...oportet, tantae pecuniae duplae, si servus q. d. a. in potestate N.ⁱ N.ⁱ est dolove malo N.ⁱ N.ⁱ factum est quo minus esset, iudex N.ᵐ N.ᵐ A.° A.° condemnato, s. n. p. a. ". Tale condemnatio con exceptio può trovarsi in combinazione con l'intentio (e demonstratio) tanto di una formula noxalis ex dominio, quanto di una formula ex responsione de dominio e ex falsa responsione de dominio; in quella combinazione ciascuna di dette formole assume *per giunta* il carattere di f.ˡᵃ ex falsa responsione de potestate exhibendi. Una praescriptio (pro reo) responsionis de potestate non factae manca qui per le medesime ragioni esposte prima. Per converso il carattere dell'a.° ex responsione de potestate è che, *in forza* appunto della dichiarazione del reus l'actor è dispensato dal provare che il reus si trova in possesso del servus; l'espressione formolare di tale dispensa da prova non ha potuto essere che una fictio in condemnatione, p. es. nell'a.° furti nec man. noxalis: " ...oportet, tum si servus q. d. a. in potestate N.ⁱ N.ⁱ esset, tantae pecuniae duplae, aut noxae dedere, iudex N.ᵐ N.ᵐ A°. A°. condemnato, s. n. p. a. ". Anche questa condemnatio con fictio può trovarsi in combinazione con l'intentio (e demonstratio) di una delle tre f.ˡᵃᵉ concernenti il dominium, dando a ciascuna di esse, per giunta, il carattere di f.ˡᵃ ex responsione de potestate exhibendi. Anche in questa ha luogo — ove il reus controverta la responsio data e l'actor ve lo voglia astringere — una praescriptio (pro reo) responsionis de potestate non factae (ea res agatur quod (si) N.ˢ N.ˢ in iure interrogatus an Stichus servus q. d. a. in sua potestate esset, respondit eum in sua potestate esse); nel caso che il fassus se dominum atque possessorem controverta poi entrambe le responsiones, la praescriptio le nomina entrambe insieme. L'esistenza della interrogatio relativa dimostra di per sè che della potestas exhibendi doveva farsi (a differenza della presenza in iure che è *tacito* presupposto civile) esplicita menzione nella formola; l'analogia tra le due interrogationes di diritto e di fatto conforta anche l'analogia tra le due fictiones relative e tra l'adiectio dominii in intentione e l'exceptio in condemnatione nelle f.ˡᵃᵉ ex resp. e ex falsa resp. rispettive.

Le varie eventualità delle due interrogationes possono sche-

matizzarsi così (1): I. Interrogatio " an servus eius sit „ (servo praesente in iure): 1) ove il possessore risponda " s. suum *esse* „, allora (a prescindere dal fatto se egli sia dominus o no) egli non può che: o *a*) servum defendere col iudicium noxale ex responsione de dominio (pag. 13), o *b*) sin da ora servum noxae dedere (indefensum relinquere: Gai. 9, 4, 29), ius suum ad actorem transferre (Gai. 9, 4, 29; Ulp. eod. 21 pr. prima parte); *c*) ove si rifiuti di far l'uno e l'altro, egli si espone con la propria persona alla coercizione (Einlassungszwang) pretoria (duci iubere), sotto la minaccia della quale egli — a nostro avviso — è costretto a suscipere iudicium ex responsione (de dominio) sine noxae deditione con la *condanna pura e semplice nella litis aestimatio* (in questo caso quasi poena *contumaciae*, non mendacii) determinata forse dall'actor con jus iurandum in litem (arg. Paul. 9, 4, 22, 3 dominus (sc. qui se dominum fatetur) qui servum in sua potestate esse confitetur (confessio che non ha luogo se il servo è presente) aut exhibere eum debet aut absentem defendere, quod nisi faciat ⟨in litis aestimationem condemnatur⟩ [itpl. punitur] atque si praesentem non noxae dederit (neque defenderit) (2). — 2) Ove il possessore risponda " s. suum non esse „, allora: o *A*) l'actor (o, per essere più precisi, l'is qui agere *vult*) non sentendosi in grado di provare

---

(1) Cfr. in proposito Demelius, *Confessio*, 304 sgg., Lenel, *Edictum*[1], 125 sgg.; " Sav. Zeitschr. „, 20, 10 sgg.; *Edictum*[2], 156 sgg. (cfr. Partsch, *Recens.*, in " Sav. Zeitschr. „, 31, 411 sgg.).

(2) La restituzione del fr. può dirsi sicura: essa ha il solido appoggio dei Basilici 60, 5, 22, 3 *ἐπεὶ εἰς τὸ διάφερον καταδικάζεται* (*τὸ διάφερον* = id quod actoris interest, litis aestimatio) — testo che di certo ignorava il Partsch nel proporre in " Sav. Z. „, 31, 412[1] " ducitur „ —. La medesima regola dovevano esprimere altri due passi alterati nella medesima tendenza: Ulp. 9, 4, 21 pr. (seconda parte) aut si id non faciat iudicium suscip⟨ere cogitur sine noxae deditione, quo in litis aestimationem⟩ condemnabitur [...]; 9, 4, 21, 4 qui neque defendit absentem neque exhibet; ⟨nam in litis aestimationem⟩ condemnantur quasi contumaces. Dover essere condannato nella sola litis aestimatio significa appunto perdere la facoltà di noxae dedere: ed è naturale che la perda chi, rifiutando il iudicium cum noxae deditione — senza tuttavia noxae dedere —, si è preclusa la via ad esercitarla. La *ragione* per cui qui si detrae la clausola " aut n. dedere „ non è una falsa responsio bensì la *disobbedienza* al pretore (contumacia).

il contrario (1), lo fa costringere dal pretore — sotto pena della condanna pura e semplice nella litis aestimatio (Ulp. 9, 4, 21, 4 quod si reus iurare nolit similis est ei qui neque defendit absentem neque exhibet) — a deierare la sua risposta (cfr. per analogia 9, 4, 21, 1. 22, 4); e quando colui abbia giurato, gli pone l'alternativa di: *α*) servum defendere accettando, quasi procurator del dominus a lui noto, il iudicium noxale normale cum satisdatione (2), o *β*) servum relinquere, tollerando che il pretore autorizzi l'actor a impadronirsi del servus (servum duci iubere) (9, 4, 26, 6. 28. 31. 32. 39, 3; 3, 3, 36; 6, 2, 6; 15, 1, 23); *γ*) ove il possessore di sua spontanea volontà nè difenda nè abbandoni il servus si espone alla coercizione pretoria; ovvero *B*) l'actor, sentendosi invece in grado di provare il contrario della responsio datagli, fa costringere — sotto minaccia della ductio — il possessore ad accettare il iudicium noxale ex falsa responsione de dominio sine noxae deditione — quale poena mendacii — (identico in tutto il resto al iud. ex dominio) — 3) Ove il possessore non risponda affatto, allora l'actor può:

---

(1) Questo solo è ciò che importa; non se il rispondende sia *in realtà* il dominus o non sia. In questa inesattezza incorre, nel suo schema quadruplice, il Demelius; v'incorre anche il Lenel, *Edict*[2], 157, riga 7. Cfr. sopra, testo e nota 1 a pag. 402.

(2) Detto iudicium può redigersi con una praescriptio pro actore (I. 4, 131. 131 *a*) puramente descrittiva (non contenziosa) nel modo seguente: Ea res agatur qua de re N.s N.s L. Titii nomine ad quem ea res pertinet agit, L. que Titium quo nomine agit id ratum habere boni viri arbitratu satisdedit (cfr. Lenel, *Edictum*[2], 97 sg.). si paret A.° A.° ope consilio Stichi servi q. d. a. furtum paterae aurae q. d. a. factum esse, q. d. r. a., quam ob rem quanti patera illa fuit ..... L. Titium, si is servus eius esset (tale fictio esprime che l'actor è esonerato dal provare che L. T. sia dominus in realtà, bastando — di fronte al reus — la dichiarazione dello stesso reus che L. T. è dominus), cum A.° A.° pro fure damnum decidere aut St. servum noxae dedere oporteret, tantae pecuniae duplae aut St. s. noxae dedere (non solo " exhibere „ perchè N.s N.s ha promesso la rati habitio del dominus e ove non la ottenga deve pagare la litis aestimatio) iudex N.m N.m A.° A.° condemnato, s. n. p. a. Una praescriptio *pro actore* puramente descrittiva o relativa (ea res agatur qua de re, quod) della responsio può ammettersi in tutte le f.lae ex responsione ex falsa responsione quando manchi controversia del reus, per illuminare meglio il iudex. La praescriptio pro reo (ea res agatur *si*) nelle f.lae ex responsione ha invece funzione di exceptio.

o *a*) fargli minacciare il duci iubere, o *b*) preferire — ove si senta in grado di provare coi proprî mezzi che il possessore è dominus — che la nulla responsio venga trattata alla stregua di una falsa responsio (come in 2 *B*) (11, 1, 11, 4, 7).

II. Interrogatio " an servus in eius potestate sit „ (*servo absente*): 1) ove l'interrogato risponda di sì (a prescindere dal fatto se sia possessore o no), allora: *A*) supposto che l'actor *non* gli rivolga l'ulteriore interrogatio de dominio e non si senta in grado di provare a suo carico l'ulteriore responsabilità ex dominio, l'interrogato deve (a meno che l'actor non gli consenta di s. defendere quasi procurator eius ad quem ea res pertinet) (1) promettere senz'altro (cautio s. sisti) " se servum exhibiturum „ pel futuro processo. Ovvero *B*) supposto invece che l'actor — inoltre — si accinga ad agire anche ex dominio o ex falsa responsione alla ulteriore interrogatio de dominio (disponendosi a provare il dominium) o sia in grado di agire ex responsione de dominio (che egli ottenga dal convenuto dietro ulteriore interrogatio in iure de dominio), allora il reus *preteso* dominus (cuius servus esse *dicitur*) *o fassus* se dominum (a prescindere dal fatto se egli sia o non sia dominus) (Ulp. 9, 4, 21, 1; Paul. eod. 22, 3) (2) deve: o *α*) absentem s. defendere (con iudicium noxale ex dominio (o ex falsa resp. de dominio o ex responsione de dom.) atque ex responsione de pot.), o *β*) absentem s. exhibere (fr. cit. e 9, 4, 21, 4); *γ*) ove non faccia nè l'uno nè l'altro si espone (poena contumaciae) alla condanna pura e semplice nella litis aestimatio (Paul. 9, 4, 22, 3 (restituito come sopra); Ulp. eod. 21, 4 (restit.) cfr. pr. (restit.)). — 2) Ove l'interrogato risponda di no (absentem s. in sua potestate

(1) Il fassus absentem in potestate sua esse non ha *diritto* alla defensio se non quando si dichiari egli dominus o l'actor si accinga a provarlo tale: 9, 4, 21, 1 absentes defendi *posse* ..... ita demum si *proprii* sint servi (cfr. LENEL, *Edict.*[2], 158[1]).

(2) Per vero il modo di esprimersi dei giuristi *parrebbe* accennare alla *realtà* del dominium: 9, 4, 21, 1 nam si *alieni* praesentes esse oportet *aut si dubitetur* utrum proprii sint an alieni; 9, 4, 22, 3 *dominus* ..... debet ..... absentem defendere. Queste espressioni paiono accennare più tosto a una *cognitio praetoris* " an absens servus eius sit quocum agi vult „; se non che esse possono spiegarsi col fatto che Ulp. e Paul. — come civilisti, e non processualisti — considerano la cosa dal punto di vista materiale.

non esse), allora: o *A)* l'actor, non sentendosi in grado di provare il contrario, lo fa costringere dal pretore (Ulp. 9, 4, 21, 4) a deierare la sua risposta; dopo di che l'interrogato è libero da ogni ulteriore responsabilità (almeno per ora, se è dominus). Ovvero *B)* l'is qui agere vult, sentendosi in grado di provare falsa la responsio datagli, sentendosi *inoltre* in grado di provare che l' " infitiatus se possessorem „ è anche dominus (Ulp. 9, 4, 21, 1; Paul. eod. 22, 3) (sia a prescindere da una ulteriore interrogatio de dominio, sia non ostante la risposta contraria di lui a tale interrogatio) — ovvero essendo egli inoltre in grado di agire ex responsione de dominio (ch'egli ottenga dietro ulteriore interrogatio de d.) — fa costringere il falso non possessore (a prescindere dal fatto se questi sia o non sia tale in realtà) a s. defendere adempta facultate noxae dedendi, col iudicium noxale ex falsa responsione de potestate (in combinazione, rispettivamente con la intentio ex dominio o ex falsa responsione de dominio o ex responsione de dominio) (9, 4, 21, 2. 22, 4). — 3) Ove l'interrogato non risponda affatto, allora l'is qui agere vult ha facoltà analoghe a quelle del caso I 3. — La responsio de potestate exhibendi (o la prova che l'actor si accinge a dare dell'esistenza di essa potestas nel caso di falsa responsio) ha per effetto di *sostituire* quel presupposto implicito della legittimazione passiva iure civili, l'esistenza del quale distingue la ipotesi I dall' ipotesi II: la praesentia in iure del servus. Per tal modo la questione dei varî atteggiamenti che assume la *ulteriore* interrogatio de dominio nell' ipotesi II si riduce nei termini di quella questione medesima nella ipotesi I; l'actor può del resto limitarsi alla interrogatio de potestate quando si senta in grado di provare coi propri mezzi l'esistenza del dominium (1).

---

(1) Ove non si ammettesse che la potestas exhibendi o la responsio de potestate exh. potesse esprimersi nella formola dell'a.° ex dominio noxalis quale presupposto esplicito (exceptio, fictio in cond.^{ne}) di condemnatio, allora di un'actio ex responsione — o ex falsa responsione — de potestate exh. non si potrebbe parlare se non come di un'actio in factum concepta. La sua presumibile redazione quale a.° ex falsa responsione — combinata ad esempio con l'affermazione del dominium — sarebbe (a.° furti nec manifesti noxalis): si paret A.° A.° ope consilio Stichi servi q. d. a., qui servus N.^{i} N.^{i} est, furtum paterae aureae factum esse eumque servum in potestate N.^{i} N.^{i} esse, dolove malo N.^{i} N.^{i} factum esse quo minus esset,

Secondo quanto si è detto l'edictum noxale (de interrogationibus) potrebbe dunque ricostruirsi (*a senso*, non a lettera) così: Quod seruus noxiam nocuisse dicetur, si quis eo nomine agere uolet, eum quocum agere volet, an seruus eius sit absensue ex iure seruus in eius potestate sit, in iure interrogare permittam. Si is, cuius praesens in iure seruus esse dicetur, fatebitur seruum suum esse, in eum ex sua responsione, perinde ac si dominus esset, iudicium dabo; si seruum defendere nolet, actori noxae dedere cogam (9, 4, 21 pr.). Si is cuius esse dicetur, negabit seruum suum esse, utrum actor uolet, vel deierare iubebo seruum suum non esse, uel iudicium dabo sine noxae deditione (analog. 9, 4, 21, 2, arg. 9, 4, 21, 1). Cuius seruus esse non dicetur (9, 4, 21, 1) — quiue, cum negauerit seruum suum esse, deierabit suum non esse — ei seruum cum satis datione defendere permittam; si defendere nolet, actorem seruum ducere iubebo. — Si is, in cuius potestate absens ex iure seruus esse dicetur, fatebitur se in sua potestate seruum habere, tum, si seruus eius esse dicetur — sive is in iure interrogatus, an eius sit, seruum suum esse fassus erit — in eum ex sua responsione, perinde ac si in potestate eius seruus esset, iudicium dabo; si is protinus iudicium suscipere nolet, eum actori de seruo exhibendo cauere iubebo (9, 4, 22, 3). Cuius seruus esse non dicetur — quiue, cum negauerit seruum suum esse, deierabit suum non esse — eum actori, nisi actor cum eo agere uolet, de seruo exhibendo cauere iubebo. Si is in cuius potestate esse dicetur, negabit se in sua potestate seruum habere, utrum actor uolet, uel deierare iubebo in potestate sua non esse neque se dolo malo fecisse quo minus esset, uel iudicium dabo sine noxae deditione (9, 4, 21, 1). — Si is cuius seruus in cuiusue potestate absens esse dicetur, de ea re in iure interrogatus omnino non responderit, utrum actor uolet, uel eum duci iubebo, uel iudicium dabo sine noxae deditione (9, 4, 21 pr. 4. 22, 3).

deque ea re N.^m^ N.^m^ in iure interrogatum negasse Stichum servum in potestate sua esse dolove malo suo factum esse quo minus esset, quanti ea res est tantae pecuniae duplae iudex N.^m^ N.^m^ A.° A.° condemnato, s. n. p. a. Se non che un rimaneggiamento così profondo dell'a.° civile non sarebbe consono ai principî di economia formolare.

L'Accademico Segretario: Ettore Stampini.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in–f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in–4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. L. Disp. 7ª, 1914-1915.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 7 Febbraio 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Salvadori, Naccari, Peano, Guareschi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, e Segre, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Guidi.

Viene letto e approvato il verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio Segretario rileva, fra le pubblicazioni pervenute all'Accademia, il tomo 1° delle *Œuvres complètes de T. J. Stieltjes*, pubblicate dalla Società matematica di Amsterdam, e da essa inviate in dono.

Vengono presentate, per la stampa negli *Atti*, le seguenti Note:

Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1914 all'Osservatorio della R. Università di Torino, calcolate dai D.ri Ettore Roggero e Tiziana Comi, presentate dal Socio Naccari;

F. Giolitti, *Sulla protezione parziale dei pezzi di acciaio sottoposti alla cementazione*, presentata dal Socio D'Ovidio;

G. Albenga, *Sul teorema di reciprocità di Land*, dal Segretario per incarico del Socio Guidi;

C. Bonferroni, *Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare*, dal Socio Segre;

A. Comessatti, *Sulle trasformazioni Hermitiane delle varietà di Jacobi*, pure dal Socio Segre.

LETTURE

Sulla protezione parziale dei pezzi di acciaio sottoposti alla cementazione.

Nota di F. GIOLITTI.

(Con 1 tavola).

In una interessante Memoria, pubblicata nello scorso mese di maggio nel " Bulletin de la Société d'encouragement pour l'Industrie Nationale „ sotto il titolo: *Les réserves en cémentation et la diffusion dans les solides*, L. Guillet e V. Bernard espongono, fra i molti altri, i risultati di alcune esperienze da essi eseguite allo scopo di studiare dal punto di vista qualitativo e quantitativo l'efficacia protettiva, contro l'azione carburante dei cementi, esercitata da strati metallici di varia qualità e di vario spessore, sovrapposti a determinate regioni della superficie dei pezzi sottoposti alla cementazione.

Poichè ho avuto occasione di occuparmi, molto tempo prima della Memoria citata or ora, dello stesso problema, sperimentando con depositi metallici simili a quelli studiati da L. Guillet e V. Bernard, e poichè i risultati ai quali sono giunto non coincidono del tutto con quelli dei due sperimentatori francesi, ho ritenuto opportuno far conoscere, in brevissimo cenno, i risultati da me ottenuti.

Data, da un lato, la grande autorità dei due Autori sopra citati, e dato, d'altra parte, il fatto che le mie esperienze sono state ripetute un grande numero di volte, dando sempre gli stessi risultati, appare improbabile che il disaccordo fra i risultati loro ed i miei debba considerarsi come indice di un errore fondamentale in una delle due serie di esperienze. Mi pare, più tosto, che la discordanza accennata dimostri in modo evidente come l'efficacia protettiva dei varî depositi metallici adoperati dipenda in larghissima misura dalle speciali condizioni nelle

quali i depositi stessi si sono formati sulla superficie dell'acciaio: tanto che, variando tali condizioni, il valore protettivo di un dato metallo può variare entro limiti larghissimi. E tali variazioni si verificano non soltanto nel caso in cui si confrontino fra loro depositi di uno stesso metallo, ottenuti con procedimenti fondamentalmente diversi: ma anche quando il confronto sia istituito fra depositi di un dato metallo, ottenuti con un determinato processo (ad esempio: mediante l'elettrolisi).

È evidente l'importanza pratica che una tale osservazione può assumere. Ed è, anzi, appunto quest'ultima considerazione quella che, più di ogni altra, mi ha fatto ritenere opportuna la pubblicazione di alcune delle mie osservazioni.

Ciò posto, espongo, senz'altro, brevemente i risultati di alcune delle mie esperienze.

L'acciaio adoperato per tutte le esperienze riferite nella presente Nota era un acciaio extra-dolce (contenente 0,08 % di carbonio e 0,50 % di manganese), fucinato e tornito in cilindretti di 18 mm. di diametro per 150 mm. di lunghezza. Tutte le cementazioni furono eseguite, nelle condizioni indicate volta per volta, mediante carbone di legno granulare in atmosfera di ossido di carbonio, lentamente ricambiata.

La fig. 1 riproduce (coll'ingrandimento di 30 diametri) la struttura di una provetta d'acciaio protetta soltanto parzialmente da uno strato di nichelio dello spessore di mm. 0,05, deposto per via elettrolitica sopra una metà della sua superficie. La provetta fu cementata per circa quaranta minuti alla temperatura di 900° C. La superficie riprodotta nella fig. 1 corrisponde all'orlo esterno di una sezione praticata nella provetta secondo un piano passante pel suo asse: e, più precisamente, ad una regione dell'orlo stesso, comprendente la linea di raccordo fra la parte della superficie esterna della provetta, protetta dallo strato di nichelio (metà a destra, nella fig. 1) e la parte non protetta (metà a sinistra, nella fig. 1). La superficie piana fu levigata e attaccata colla soluzione alcoolica di acido picrico al 5 %.

Nella figura appare molto evidente il fatto che lo strato di nichelio ha, in questo caso, protetto efficacemente la superficie dell'acciaio dall'azione carburante del cemento.

Le due figure successive (fig. 2 e 3) riproducono (ancora coll'ingrandimento di 30 diametri) (1) due punti dell'orlo di una sezione piana praticata, in modo uguale alla precedente, in una provetta del solito acciaio, cementata per circa un'ora a 1000° C., dopo averla parzialmente protetta con uno strato di nichelio dello spessore di mm. 0,05 depostovi per via elettrolitica in condizioni identiche a quelle della provetta precedente.

La prima delle due figure (fig. 2) riproduce la struttura del metallo adiacente alla superficie della provetta, nella regione di questa non protetta dallo strato di nichelio: mentre la seconda (fig. 3) riproduce la struttura dell'acciaio immediatamente sottostante allo strato di nichelio, nella regione protetta (2).

Come risulta evidente dal confronto delle due micrografie, lo strato di nichelio da me usato non esercita più, alla temperatura di 1000° C., un'azione protettiva completa, come faceva a 900° C.: ma non ha altro effetto, all'infuori di quello consistente nel diminuire leggermente la rapidità e l'intensità dell'azione carburante del cemento. Infatti la zona cementata riprodotta nella fig. 3 non differisce da quella riprodotta nella fig. 2, se non per uno spessore sensibilmente minore.

Infine la fig. 4 riproduce (collo stesso ingrandimento di 30 diametri, e collo stesso attacco coll'acido picrico in soluzione alcoolica al 5 $^0/_0$) la struttura della regione periferica di una provetta del solito acciaio, protetta con uno strato di rame dello spessore di mm. 0,05, depostovi elettroliticamente, e cementata in modo identico alla precedente (circa un'ora a 1000° C.).

Confrontando questa figura colle due precedenti, si vede che lo spessore della zona cementata prodottasi sotto lo strato di rame, ha uno spessore intermedio fra quello della zona ottenuta, operando nelle identiche condizioni, sotto la protezione dello strato di nichelio (fig. 3) e quello della zona cementata ottenuta nella provetta non protetta (fig. 2), operando ancora in condizioni identiche.

---

(1) Attacco colla soluzione alcoolica di acido picrico al 5 $^0/_0$.

(2) Non risultando chiara, nella riproduzione foto-meccanica, la linea corrispondente all'orlo esterno della superficie metallica levigata ed attaccata, la linea stessa è stata accentuata, ritoccando le fotografie.

Una provetta del solito acciaio, protetta solo parzialmente con un deposito elettrolitico di rame, dello spessore di mm. 0,05, e cementata nelle stesse condizioni della provetta parzialmente protetta col nichelio, riprodotta nella fig. 1 (circa 40′ a 900° C.) risultò cementata in modo perfettamente uniforme su tutta la sua superficie.

Il confronto dei risultati or ora riferiti, con quelli ottenuti da L. Guillet e V. Bernard, dà luogo alle seguenti osservazioni:

1° *Protezione per mezzo della ramatura elettrolitica.* — Mentre coi depositi di rame adoperati da L. Guillet e V. Bernard bastava uno spessore dello strato protettore di mm. 0,02 a 0,03 per proteggere totalmente l'acciaio dall'azione carburante del cemento di carbone di legno e carbonato di bario (cemento di Caron) usato alla temperatura di 1000° C., in modo da dare luogo, nelle regioni non protette, ad una zona cementata di mm. 1 a 1,1 di spessore, col deposito di rame da me usato in condizioni all'incirca identiche, l'azione protettiva ottenuta contro l'azione carburante del cemento di carbone di legno ed ossido di carbonio (vedi le figg. 2 e 4) era quasi nulla, e certamente del tutto trascurabile per un'eventuale applicazione pratica.

Tale differenza si accentua ancor più quando si cementi a temperatura più bassa. Basta perciò confrontare l'effetto di completa protezione ottenuto a 850° C. da L. Guillet e V. Bernard con uno strato di rame di mm. 0,01 a 0,02 di spessore, colla protezione praticamente nulla da me ottenuta a 900° con uno strato di rame di spessore più che doppio.

2° *Protezione per mezzo della nichelatura elettrolitica.* — Contrariamente a quanto si verifica per la protezione coi depositi elettrolitici di rame, la protezione esercitata dai depositi di nichelio da me usati è assai più efficace di quella ottenuta da L. Guillet e V. Bernard operando in condizioni analoghe, con depositi di nichelio assai più spessi dei miei.

Infatti Guillet e Bernard riferiscono che dalle loro esperienze risulta che, anche adoperando strati di nichelio molto più spessi di quelli di rame da essi usati, non si ottiene che un leggero rallentamento della cementazione, sia che si operi a 850° come a 1000° C. Abbiamo, invece, già veduto che cogli

strati di nichelio sui quali io ho sperimentato, la protezione ottenuta era ancora completa a 900° C. (vedi fig. 1): ed anche a 1000° C. l'efficacia protettiva dello strato di nichelio (vedi fig. 3) era molto maggiore di quella (vedi fig. 4) del mio strato di rame di pari spessore (mm. 0,05).

Le condizioni sperimentali nelle quali cementavano Guillet e Bernard sono praticamente uguali a quelle nelle quali operavo io. Infatti, come è noto, si può ritenere provato con certezza che l'effetto carburante del cemento di Caron (60 parti di carbone di legno mescolate con 40 parti di carbonato di bario) da essi usato, è dovuto esclusivamente all'azione dell'ossido di carbonio che vi si forma: cioè alle stesse reazioni chimiche alle quali è dovuta l'azione carburante del cemento misto da me usato.

È, quindi, molto probabile che le differenze fra i risultati delle esperienze di Guillet e Bernard e quelli delle mie, siano dovuti a differenti proprietà (di compattezza, di purezza..., ecc.) fra i depositi di uno stesso metallo studiati da essi e da me. E, per chiunque abbia qualche pratica di ramatura e nichelatura galvanica, appare anche assai probabile che tali diverse proprietà dei depositi metallici possano essere dovute a differenze relativamente piccolissime delle condizioni nelle quali i depositi stessi sono stati preparati.

Concludendo: mi pare che le osservazioni riferite nella presente Nota dimostrino in modo molto chiaro che la soluzione pratica del problema della protezione, per mezzo dei depositi metallici, dei pezzi sottoposti alla cementazione, non è ancora per nulla raggiunta. Basterebbe, a provar ciò, il fatto della buona protezione ottenuta (nella prima delle esperienze riferite nelle pagine precedenti) con un deposito sottile di nichelio, preparato senza alcuna speciale precauzione, quando lo si confronti coi risultati perfettamente negativi ottenuti da sperimentatori abili come il Guillet ed il Bernard, con depositi di nichelio assai più spessi.

Dall'insieme dei fatti noti appare sopra tutto necessario, per raggiungere lo scopo, uno studio completo e preciso delle relazioni che passano fra le condizioni nelle quali si sono for-

mati i varî depositi elettrolitici dei singoli metalli ed il loro valore protettivo. Un tale studio non pare che possa essere condotto utilmente a termine se non da sperimentatori dotati di estese conoscenze sperimentali nel campo della galvanostegia.

Per quanto riguarda la protezione ottenuta mediante i depositi di rame preparati col processo Schoop, il problema appare *a priori* meno complesso, almeno dal punto di vista della realizzazione pratica di una sufficiente costanza nelle proprietà degli strati metallici protettori. E le esperienze di L. Guillet e V. Bernard paiono provare l'efficacia del metodo.

Non ho mai avuto occasione di sperimentare tale processo.

Cornigliano Ligure, ottobre 1914.

Sul teorema di reciprocità di Land.

Nota di GIUSEPPE ALBENGA.

È noto che la linea di influenza di una sollecitazione interna qualsiasi (sforzo normale, momento flettente, sforzo di taglio) per una sezione d'una trave piana può ottenersi, seguendo Land [1], come linea elastica (o più generalmente come linea d'influenza della deformazione) della trave supposta interrotta nella sezione considerata e caricata soltanto su ciascuna faccia del taglio da sistemi di forze eguali e contrarie, capaci di produrre unicamente una deformazione relativa unitaria delle due faccie del tipo di quella che corrisponde alla sollecitazione cercata (rispettivamente: spostamento assiale, rotazione, scorri-

---

[1] Cfr. ad esempio " Enzyklopädie der matematischen Wissenschaften „, IV, 2, pag. 484.

mento). L'enunciato e la dimostrazione del principio di reciprocità di Land, sul quale si fonda questo elegante metodo di ricerca delle linee di influenza, non sono, nella forma sotto cui generalmente si incontrano, nè completi nè soddisfacenti [2]. Una dimostrazione rigorosa generalissima deriva subito dal principio di reciprocità di Colonnetti [3], che comprende quello di Land come caso particolare; altra dimostrazione semplicissima può ottenersi applicando il teorema di Betti a sistemi di forze opportunamente scelti.

*
* *

Consideriamo una trave piana qualunque soggetta all'azione di un carico unitario agente in un punto P che per fissare le idee supporremo alla sinistra della sezione S rispetto alla quale noi ricerchiamo le linee di influenza. Per effetto di questo carico unitario avremo nella sezione considerata un momento flettente M, uno sforzo di taglio T, uno sforzo normale N. Tagliamo la trave in corrispondenza della sezione S; noi potremo mantenere il sistema inalterato nella sua forma ed in equilibrio applicando su ciascuna faccia del taglio quelle sollecitazioni che essa riceveva dalla parte di trave che vien distaccata: e cioè

alla trave di sinistra	$-M$,	$-T$,	$-N$
alla trave di destra	M,	T,	N.

Poichè la trave dopo il taglio non mutò forma, le deformazioni delle faccie del taglio avranno conservato la stessa rotazione φ, gli stessi spostamenti η e ζ (rispettivamente nelle direzioni di T e di N) che si avevano nella sezione S prima di interrompere la continuità della trave.

(2) Vedasi Ritter, *Anwendungen der grapischen Statik. Kontinuierliche Balken*, n. 28.

(3) Colonnetti, *Sul principio di reciprocità*. " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", 1912, I e " Giornale del Genio civile ", 1913.

Immaginiamo ora di scaricare la trave [4] e di applicare alla parte sinistra sulla faccia tagliata le sollecitazioni qualisiansi

$$M^*,\ T^*,\ N^*$$

ed alla parte destra le sollecitazioni

$$-M^*,\ -T^*,\ -N^*;$$

si produrranno nelle faccie liberate dal taglio:

per la trave a sinistra certe deformazioni φ_l^*, η_l^*, ζ_l^*
per la trave a destra altre deformazioni φ_r^*, η_r^*, ζ_r^*.

Indichiamo ora con δ lo spostamento del punto P nella direzione del carico 1 per questa condizione fittizia di carico ed applichiamo il teorema di Betti alle sollecitazioni e deformazioni effettive ed a quelle fittizie ora definite.

Avremo per la trave a sinistra:

$$1 \,.\, \delta - M\varphi_l^* - T\eta_l^* - N\zeta_l^* = M^*\varphi + T^*\eta + N^*\zeta$$

e per la trave a destra

$$M\varphi_r^* + T\eta_r^* + N\zeta_r^* = -M^*\varphi - T^*\eta - N^*\zeta$$

onde sommando

$$(1)\qquad 1 \,.\, \delta - M(\varphi_l^* - \varphi_r^*) - T(\eta_l^* - \eta_r^*) - N(\zeta_l^* - \zeta_r^*) = 0.$$

Le forze M^*, T^*, N^* fittizie vennero supposte qualunque: noi potremo sempre determinarle in modo che tra le deforma-

---

[4] Nella trattazione precedente si è implicitamente supposto che le parti in cui la sezione S taglia la trave abbiano un numero sufficiente di vincoli per assicurare l'equilibrio: quando questo caso non si verifichi le sollecitazioni M^*, T^* ed N^* non possono più essere arbitrariamente scelte, ma debbono soddisfare alle condizioni d'equilibrio per il tronco insufficientemente vincolato.

zioni corrispondenti intercedano tre relazioni arbitrarie [5]. Potremo, ad esempio, prescrivere che sia:

(2)

$$\varphi_l^* - \varphi_r^* = 1$$

e al tempo stesso

$$\eta_l^* = \eta_r^*$$

e

$$\zeta_l^* = \zeta_r^*.$$

Introducendo questi valori nella (1) essa diventa

$$1 \,.\, \mathfrak{d} = 1 \,.\, M$$

(unità di forza $\times$ spostamento = unità di rotazione $\times$ momento)

che è la espressione del teorema di reciprocità di Land per la linea d'influenza del momento flettente nella sezione S.

Con analoghe relazioni che rendano nella (1) eguale ad 1 il coefficiente di quella sollecitazione che si considera ed annullino i coefficienti delle altre possono ottenersi le linee di influenza dello sforzo di taglio e di quello normale.

***

È ovvia la estensione delle proprietà precedenti al caso di travi nello spazio.

Bologna, gennaio 1915.

---

[5] Nel caso contemplato alla nota [4] le M^*, N^* e T^* non saranno indipendenti: ma sarà possibile attribuire al sistema oltre agli spostamenti elastici altri movimenti rigidi che permettano di soddisfare le relazioni (2) od altre analoghe.

Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare.

Nota di CARLO BONFERRONI.

Scopo della presente Nota è di ricercare i casi di eccezioni nella dimensione della *Jacobiana* di un sistema lineare di quadriche (dello spazio ordinario); intendendo, con definizione generale, per *Jacobiana* di un sistema lineare ∞^p $(1 < p < 9)$ di quadriche-luogo, la varietà-luogo dei punti che ammettono, per usare la denominazione del Reye, un *associato* [1] infinitamente vicino; varietà che, per $p > 2$, coincide con quella luogo dei punti che son vertici per più che $p - 3$ coni linearmente indipendenti del sistema, cioè con quella luogo delle coppie di punti *congiunti* [2] del sistema.

La questione è già risolta nell'ipotesi particolare che la *Jacobiana* del sistema risulti inderminata [3]; tuttavia, allo scopo di far opera completa, trattammo anche questa ipotesi, tanto più che precedenti ricerche consentivano di farlo senza sforzo alcuno e con metodo sintetico.

La detta ricerca è stata completata con quella de' sistemi lineari contenenti una varietà di coppie di piani d'irregolare

---

[1] Due punti si diranno *associati* quando le quadriche del sistema passanti per l'uno passano anche per l'altro. Reye, *Geometrie der Lage.*

[2] Due punti sono *congiunti* rispetto al sistema quando son reciproci rispetto a tutte le sue quadriche.

[3] Vedi, ad es., Toeplitz, *Ueber Systeme von Formen deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet*, Breslau, 1905; Bertini, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*, Pisa, 1907.

dimensione, inquantochè le due ricerche, in virtù del fecondo concetto di *sistemi armonici* (4), sono intimamente collegate fra di loro.

Rete di quadriche.

1. Dato un S_2 di quadriche (5), la sua Jacobiana (6), cioè il luogo dei vertici de' suoi coni, è data in generale (7) da una curva del 6° ordine. Tuttavia tale J può diventare una superficie (8) o addirittura può riempire tutto lo spazio, essere indeterminata.

Poichè un S_2 a J indeterminata è segato da un piano generico secondo una rete di coniche a J indeterminata, e poichè è noto che tale rete consta di tutte le coppie di rette di un fascio, segue facilmente che lo S_2 si compone di tutte le coppie di piani di un fascio. La cosa del resto risulterà pure dalle considerazioni che faremo.

2. Vediamo ora quando la J di un S_2 sia una superficie, e liberiamoci anzitutto dall'ipotesi che lo S_2 sia riducibile (9), oppure composto di coni (irriducibili in generale).

Un S_2 riducibile può comporsi (10) di coppie di piani così costituite: un piano fisso e l'altro variabile in una stella — ed allora il piano fisso dà la J dello S_2 — oppure lo S_2 si compone di tutte le coppie di piani di un fascio — e si ritrova lo S_2 a J indeterminata. Quanto allo S_2 di coni (irriducibili in generale), o consta esso di coni concentrici — e la J sarà un cono cubico con lo stesso centro — oppure (11) di coni tangenti

(4) *Apolari*, secondo il Reye.

(5) Indicheremo brevemente con S_p un sistema lineare ∞^p di quadriche-luogo, e con Σ_p un sistema lineare ∞^p di quadriche-inviluppo.

(6) D'ora in poi " Jacobiana „ sarà abbreviato in J.

(7) Hesse, " Giornale di Crelle „, 1855, v. 49.

(8) Avvertendo che la superficie può essere completata da una curva, come in alcuni casi diremo esplicitamente.

(9) Vale a dire: composto di quadriche spezzate.

(10) Bertini, *Introduzione alla Geom. proiettiva degli iperspazi*, Pisa, 1907.

(11) Pieri, *Sui sistemi lineari di coni*, " Rivista di matem. di Peano „, 1893.

ad un piano fisso lungo una retta fissa — e la J si comporrà del piano fisso.

Tutti questi S_2 hanno dunque una J d'irregolare dimensione. Ad essi possiamo poi evidentemente aggiungere gli S_2 contenenti uno o due piani doppi.

3. Veniamo allora ad un S_2 non composto di coni e non contenente piani doppi. Affinchè la sua J sia una superficie è necessario e sufficiente che, in seno allo S_2, esista una varietà ∞^1, V_1, di coppie di piani. Se di tale V_1 fa parte un fascio, questo risulterà composto — non volendo introdurre nello S_2 piani doppi — da coppie di piani di cui uno fisso e l'altro variabile in un fascio; poichè lo S_2 può determinarsi congiungendo tale fascio con una quadrica fuori del fascio, si trae che lo S_2 ha conica-base. Ulteriormente lo S_2 ha in generale due punti-base, dai quali proiettando la conica-base si ottengono due coni quadrici che si segano, oltre che lungo la detta conica, lungo una seconda conica: questa è il luogo dei vertici degli ∞^1 coni irriducibili contenuti nello S_2 ed, insieme con il piano della conica-base, costituisce la J dello S_2.

Viceversa, quando un S_2 possiede conica-base, le sue quadriche contenenti tutto il piano della medesima formano un fascio (di coppie di piani).

4. Supponiamo infine che la V_1 di coppie di piani non contenga fasci. Poichè le quadriche degeneri costituiscono in seno allo S_2 una V_1^4 ([12]) di cui una coppia di piani è elemento doppio (almeno), posto che le ∞^1 coppie di piani non formino dei fasci, ne seguirà che esse formano una V_1^2 doppia per la V_1^4 e come tale costituente la V_1^4 stessa: il che è quanto dire che nello S_2 non esistono coni irriducibili; inoltre, per l'osservazione fatta alla fine del n° 3, lo S_2 non avrà conica-base.

Ciò premesso, sieno $\alpha, \beta; \gamma, \delta$ due coppie di piani dello S_2, ad assi certo sghembi, e poniamo

$$a = \alpha\gamma \quad a' = \alpha\delta \quad b = \beta\delta \quad b' = \beta\gamma \quad A = aa' \quad B = bb'.$$

([12]) Tale, cioè, che un fascio dello S_2 ne contiene 4 elementi.

Poichè α appartiene ad una sola coppia di piani dello S_2, sovr'esso lo S_2 segherà un fascio di coniche necessariamente tutte spezzate in coppie di rette: chè, se contenesse un numero finito di coppie di rette, dato che le coppie di piani della V_1 debbono pur segare su α coppie di rette, esisterebbe almeno una di queste coppie di rette per la quale passerebbero infinite coppie di piani della V_1, il che porterebbe ([13]) lo S_2 ad avere conica-base (spezzata), in opposizione ad una precedente avvertenza. Poichè inoltre il fascio di coppie di rette non può manifestamente constare di coppie di rette in involuzione, possiederà una retta fissa, ad es. la a, e la a risulterà base anche per lo S_2.

Ragionando analogamente sopra il piano β si trarrà che o la retta b o la retta b' è base per lo S_2, e siccome b' (che incontra a) va esclusa ([14]), si concluderà che lo S_2 possiede due rette sghembe-base, a e b.

Pensando lo S_2 come l'insieme delle quadriche che contengono a, b e sono *armoniche* ad una quadrica-inviluppo, si riconosce subito che gli assi delle coppie di piani generano una quadrica, J dello S_2, su cui stanno le rette a, b.

5. Se consideriamo lo S_2 di coni tangenti ad un piano fisso lungo una retta fissa come S_2 avente per conica-base una retta-doppia, potremo enunciare il seguente risultato:

La Jacobiana di una rete di quadriche è in generale una curva.

La Jacobiana è una superficie ([15]) *quando la rete è composta di coppie di piani di cui uno fisso e l'altro variabile attorno a un punto, quando contiene piani doppi, quando consta di coni concentrici, quando possiede conica-base, quando ha due rette sghembe-base.*

La Jacobiana è indeterminata quando la rete è costituita dalle coppie di piani di un fascio.

([13]) Poichè mai tre coppie di piani della V_1 stanno in un fascio.

([14]) Sempre per evitare conica-base.

([15]) Si ricordi la nota ([8]).

6. *Tolte le reti riducibili* (con ∞^2 coppie di piani), *come reti con* ∞^1 *coppie di piani rimangono: la rete di coni concentrici, la rete contenente due piani-doppi* [16], *la rete a conica-base, la rete con due rette sghembe-base.*

Sistema lineare ∞^3.

7. La J di un S_3 è in generale una superficie del 4° ordine [17]: si tratta di ricercare gli S_3 a J indeterminata.

Quanto allo S_3 riducibile, constando esso di coppie di piani di cui uno fisso e l'altro arbitrario, la sua J è data dal piano fisso (quadruplo) e quindi è determinata. Relativamente agli S_3 di coni (irriducibili in generale), saranno da considerare lo S_3 di coni concentrici e lo S_3 di coni toccanti un piano fisso lungo una retta fissa: di questi solo il primo ha indeterminata la J.

Venendo agli altri S_3, perchè la J risulti indeterminata sarà necessario che essi contengano una doppia infinità, V_2, di coppie di piani. Se tale V_2 contiene qualche S_2, questo S_2 (riducibile) potrà comporsi di coppie di piani di cui uno fisso — ed allora lo S_3 avrà conica-base (ed in questo S_3 includeremo, pensando la conica-base ridotta ad una retta doppia, lo S_3 di coni toccanti un piano fisso lungo una retta fissa) — oppure lo S_2 si comporrà delle coppie di piani di un fascio — e quindi sarà esso stesso a J indeterminata. In questo secondo caso soltanto la J dello S_3 è indeterminata. La definizione geometrica dello S_3 può darsi così: insieme delle quadriche rispetto alle quali due rette fisse son polari ed è data la proiettività tra i punti dell'una e i piani polari per l'altra [18].

---

[16] Cioè contenente le ∞^1 coppie di piani di un'involuzione in un fascio, involuzione eventualmente parabolica (S_2 con due piani doppi coincidenti).

[17] STEINER, " Werke ", vol. I, pag. 450.

[18] Se le due rette sono sghembe, la proiettività è in posizione involutoria e lo S_3 può anche definirsi come l'insieme delle quadriche che hanno in due certi punti due certi piani tangenti. Se le due rette coincidono, lo S_3 consta di quadriche *raccordate* lungo una retta.

8. La V_2 di coppie di piani non contenga parti lineari. Una rete, R, generica dello S_3 conterrà una V_1 di coppie di piani senza parti lineari, epperò (n° 4) la R avrà due rette-base sghembe, a e b. Sieno $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ due coppie di piani della R, le quali si segheranno lungo a, b e lungo altre due rette a', b' pure sghembe; un S_2 generico fra gli ∞^1 S_2 dello S_3 che contengono le coppie di piani $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, avrà pure due rette-base sghembe: ora tali rette sono o le a, b oppure le a', b' e siccome, al variare con continuità dello S_2 attorno alle coppie di piani $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, la sua base varia con continuità a meno che resti fissa, si trae che sempre le rette a, b costituiranno la base dello S_2 variabile. Di qui si conclude che le rette a, b formano la base dello stesso S_3.

Tale S_3 è poi effettivamente a J indeterminata. Un punto generico ha per *congiunto* il suo coniugato armonico rispetto alle rette a, b. Un punto della a ha per *congiunto* ogni punto della a; così per la b.

9. Concludendo:

La Jacobiana di un sistema lineare ∞^3 di quadriche è in generale una superficie.

La Jacobiana è indeterminata per il sistema di coni concentrici, per il sistema delle quadriche che ammettono due certe rette polari e subordinano una medesima proiettività fra i punti di una e i piani polari per l'altra ([19]), *per il sistema delle quadriche che passano per due rette sghembe fisse.*

10. *Aggiungendo a questi sistemi quello a conica-base, si hanno tutti i sistemi ∞^3 contenenti ∞^2 coppie di piani.*

Sistema lineare ∞^4.

11. Un S_4 ammette in generale ∞^1 coppie di punti *congiunti*, distribuite sopra una curva del 10° ordine, J dello S_4, la quale può ottenersi come sezione delle J di due S_3 dello S_4, de-

---

([19]) Cioè per il sistema contenente tutte le coppie di piani di un fascio.

ducendone la curva Jacobiana dello S_2 comune ai due S_3 ([20]). Ora noi ricerchiamo gli S_4 la cui J aumenta di dimensione.

Osserviamo perciò che due punti *congiunti* rispetto allo S_4 rappresentano una quadrica-inviluppo (degenere) del Σ_4 *armonico* allo S_4; cosicchè basterà conoscere tutti gli S_4 contenenti ∞^2 (almeno) coppie di piani, da essi passare ai Σ_4 duali e prendere di questi ultimi gli S_4 *armonici*: tra questi si troveranno gli S_4 cercati.

12. E poichè un S_4 non può contenere ∞^4 coppie di piani, cominciamo a supporre che ne contenga ∞^3.

Ne hanno intanto ∞^3 gli S_4 di coni, sia concentrici, sia tangenti ad un piano fisso lungo una retta fissa. Lasciando allora da parte questi S_4, supponiamo che la V_3 di coppie di piani dello S_4 contenga una parte lineare: poichè tale parte consta di coppie di piani dei quali uno è fisso, lo S_4 risulterà a conica-base (e includeremo in questo S_4 anche quello dei coni tangenti a un piano fisso lungo una retta fissa). Supposta invece la V_3 priva di parti lineari, un S_3 generico dello S_4 conterrebbe una V_2 non lineare di coppie di piani senza constare di coni concentrici, epperò (n° 8) avrebbe due rette-base sghembe, rette che diverrebbero, com'è facile assicurarsi, base per lo S_4; il che è assurdo.

Pertanto posseggono ∞^3 coppie di piani soltanto lo S_4 di coni concentrici e lo S_4 a conica-base. Passando ai duali e poi agli armonici, si ritrovano gli stessi sistemi ([21]). Lo S_4 di coni concentrici ha J indeterminata, e quello a conica-base ha per J il piano della conica.

13. Mettiamoci ora nell'ipotesi che lo S_4 contenga ∞^2 coppie di piani. Se un S_3 dello S_4 contiene ∞^2 coppie di piani, a seconda della natura di questo S_3 (nn[i] 9-10) lo S_4 può presentare quattro tipi, dei quali prendendo i duali e poi gli *armonici* si ottengono: lo S_4 con quattro punti-base compla-

---

([20]) Vedi anche Reye, " Giornale di Crelle ", 1877, vol. 82, p. 54; Darboux, " Bulletin des Sciences mathématiques ", 1870, vol. 1.

([21]) Precisamente: il primo conduce al secondo, e viceversa.

nari ([22]), lo S_4 con retta-base, lo S_4 che ammette due rette sghembe fisse polari, lo S_4 che ammette punto e piano polare fissi.

Di questi il primo e l'ultimo hanno effettivamente una J aumentata di dimensione, mentre ciò non avviene affatto per il terzo e non avviene necessariamente per il secondo: pensando invero lo S_4 determinato dalla retta-base e dall'*armonia* rispetto a due inviluppi quadrici del tutto generici, si trova che la sua J consta, oltre che della retta-base, di una cubica sghemba di cui la retta stessa è corda. La retta, contata sette volte ([23]), esaurisce con la cubica la curva del 10° ordine Jacobiana di un S_4 tutte le volte che non si verifica aumento di dimensione.

14. Resta a considerare il caso che la V_2 di coppie di piani dello S_4 non sia contenuta (neppure in parte) in un S_3.

Se noi rappresentiamo linearmente le quadriche dello S_4 con i punti di un iperspazio η a quattro dimensioni, otterremo in η una V_3^4 imagine (co' suoi punti) dei coni dello S_4, ed in seno alla V_3^4 una V_2, doppia per la V_3^4 e *immersa* in η, imagine delle coppie di piani dello S_4. Per un punto generico di η passano ∞^1 corde della V_2, e se il punto giace sulla V_3^4, tali ∞^1 corde vengono ad appartenere alla V_3^4 stessa. Una di queste corde, r, è allora imagine di un fascio di coni dello S_4 contenente almeno due coppie di piani; siccome un fascio di coni non concentrici contiene solo una coppia di piani, la r rappresenterà un fascio di coni concentrici, e la superficie luogo delle ∞^1 corde passanti per un punto generico della V_3^4 sarà imagine di ∞^2 coni concentrici dello S_4; ma tali coni, nello S_4, formano sistema lineare, onde la detta superficie è piana e le dette ∞^1 corde formano fascio. In altre parole, la V_3^4 è luogo di ∞^1 piani.

([22]) E casi particolari, tutti caratterizzati dal fatto che lo S_4 contiene un S_2 riducibile, le coppie di piani del quale son date da un piano fisso e uno variabile attorno a un punto.

([23]) In virtù del seguente teorema: un punto-base, con tangente fissa, dello S_4 è punto settuplo per la curva Jacobiana dello S_4. Un punto-base ordinario è invece quadruplo per la stessa.

15. Detto ω un piano generatore della V_3^4, potranno presentarsi due casi, secondo che, al variare di un punto P su ω, l'iperpiano tangente in P alla V_3^4 varia, oppure rimane fisso.

Mettendoci nella prima alternativa, diciamo P e P' due punti di ω in cui gli iperpiani j e j' tangenti alla V_3^4 sono distinti, cioè non hanno in comune che i punti di ω. Detto poi O il centro comune ai coni dello S_2 rappresentato da ω, i punti P e P' rappresenteranno due coni *irriducibili* di centro O. La sezione $j\,V_3^4$ ha punto doppio in P, epperò il cono rappresentato da P conta doppiamente in ogni fascio — dello S_3 rappresentato da j — che lo contenga: se ne trae che O è punto-base per lo S_3. Partendo invece da P' si riconosce che O è base per lo S_3 rappresentato da j'; ed infine che O, base per due distinti S_3 dello S_4, è punto-base per lo S_4 medesimo.

Un piano generatore della V_3^4 porta dunque ad un punto-base dello S_4. Se facciamo allora variare ω, potrà il punto O rimanere fisso? Se ciò avvenisse, dato che la V_3^4 è *immersa* in η, concluderebbesi immediatamente che lo S_4 consta di coni concentrici, il che va escluso. Pertanto O varierà con ω descrivendo una linea base per lo S_4, e tale linea non potendo essere una conica (chè lo S_4 a conica-base contiene ∞^3 coppie di piani), sarà una retta.

Giungiamo così allo S_4 con retta-base. Si può riconoscere che la V_3^4 è data da una V_3^2 contata doppiamente, e che le coppie di piani si rappresentano sopra una V_2^4 rigata, la cui sezione iperpiana generica è un'ordinaria quartica di 2ª specie. Di questo S_4 prendendo il sistema duale e poi l'*armonico*, si ottiene lo S_4 contenente un S_2 a J indeterminata, e questo S_4 ha effettivamente una J aumentata di dimensione. Si consideri invero l'*asse*, a, dello S_2 a J indeterminata, e si pensi lo S_4 individuato mediante lo S_2 e un S_1 sghembo con lo S_2; un punto di a ha rispetto allo S_1, cioè rispetto a tutto lo S_4, per reciproca tutta una retta, e questa retta, al variare del punto sulla a, descrive una quadrica: tale quadrica e l'asse a dànno precisamente la J dello S_4.

16. Passiamo infine alla seconda alternativa: che, cioè, nei diversi punti di ω la V_3^4 ammetta un medesimo iperpiano

tangente. In tal caso non si giunge più a collegare necessariamente ω con un punto-base dello S_4; rimane però sempre il fatto che ω è imagine di una rete di coni concentrici. Diciamo O il loro comun centro, non punto-base dunque. Il punto O ha per reciproca rispetto a tutto lo S_4 una determinata retta, b, non passante per O. Spostando ω è certo — come poco fa s'è già detto — che O varierà; possiamo considerarne così una nuova posizione, O', tale che la retta b', reciproca fissa di O', non passi nè per O' nè per O.

La condizione di ammettere come elementi mutuamente polari la retta OO' e il piano Ob' rappresenta per i coni di centro O due condizioni, e se, spostando ancora ω, la b' uscisse dal piano Ob' e O' venisse in O'', rispetto ai coni di vertice O dovrebbero essere elementi mutuamente polari anche la retta OO'' e il *nuovo* piano Ob''; la qual cosa imporrebbe altre due condizioni ai coni di centro O, onde essi non potrebbero più costituire una rete ([24]). Pertanto la b' si deve mantenere nel piano Ob'; in particolare la b deve stare nel piano Ob', onde O, b, b' sono complanari. Il punto O' è invece fuori di questo piano, perchè qualora O, O', b, b' stessero in un medesimo piano α, lo S_4 segherebbe su α un fascio di coniche (al massimo) onde α apparterrebbe a tre (almeno) quadriche dello S_4 linearmente indipendenti, e ricadrebbesi in tipi di S_4 già considerati (n° 12, n° 13) ed in questo momento da escludersi. D'altra parte le stesse ragioni testè esposte esigono che O', b, b' siano complanari: per conciliare le due cose occorre che b coincida con b', ed allora la retta OO' — che risulta sghemba con la b — avrà per polare fissa rispetto a tutto lo S_4 la b stessa.

Perveniamo dunque allo S_4 che ammette due rette sghembe fisse polari. È poi facile riconoscere che la V_3^4 consta di due V_3^2, e precisamente di due coni di 2ª specie; la loro intersezione è la V_2^4 rappresentativa delle ∞^2 coppie di piani della V_2; però nello S_4 esistono ancora due fasci di coppie di piani, aventi gli assi nell'una e nell'altra rispettivamente delle due rette po-

([24]) Il ragionamento cadrebbe in difetto solo quando O' percorresse la retta OO' ed i coni di centro O fossero le coppie di piani aventi per asse la OO'; senonchè, per evitare un caso già incontrato (n° 13), noi dobbiamo trascurare questa possibilità.

lari, fasci che vengono rappresentati sulle rette singolari (rette-vertici) dei due anzidetti coni.

Di questo S_4 prendendo il duale e poi l'*armonico*, si giunge allo S_4 contenente un S_3 sostenuto da due rette sghembe (basi). Anche questo S_4 ha in realtà una J aumentata di dimensione. Diciamo invero σ lo S_3 sostenuto dalle due rette, e σ' un altro S_3 dello S_4: σ e σ' hanno in comune un S_2, la cui J è una quadrica (n° 4); inoltre σ ha J indeterminata; cosicchè, togliendo dalla J di σ' la quadrica ora detta, rimane un'altra quadrica che evidentemente fa parte della J dello S_4. Le due rette sghembe completano poi la J.

17. Concludendo:

La Jacobiana di un sistema lineare ∞^4 *di quadriche è in generale una curva.*

La Jacobiana diventa una superficie ([25]) *per il sistema a conica-base, per il sistema con quattro punti-base complanari, per il sistema che ammette punto e piano polare fissi, per il sistema contenente tutte le coppie di piani d'un fascio, per il sistema contenente tutte le quadriche che passano per due rette sghembe.*

La Jacobiana è indeterminata per il sistema di coni concentrici.

18. *Quest'ultimo sistema e quello a conica-base sono gli unici sistemi* ∞^4 *contenenti* ∞^3 *coppie di piani* (n° 12).

Se agli altri sistemi ora nominati si aggiungono quello con retta-base e quello che ammette due rette sghembe polari fisse, si hanno tutti i sistemi ∞^4 *con* ∞^2 *coppie di piani.*

Sistema lineare ∞^5.

19. In generale la J di un S_5 consta di 10 coppie di punti ([26]). Per avere gli S_5 la cui J è una curva ([27]), prenderemo (analogamente a n° 11) gli S_3 con ∞^1 coppie di piani, passeremo ai sistemi duali e da questi ultimi ai loro *armonici*.

([25]) Si ricordi la nota ([8]).

([26]) Vedi, ad es., Reye, " Giornale di Crelle ", 1877, vol. 82, p. 54.

([27]) Eventualmente completata da alcune coppie di punti.

Supponiamo che ∞^1 coppie di piani dello S_3 stiano in un S_2; conoscendo (n° 6) la natura di questo S_2, ricaviamo subito i seguenti sistemi: S_5 che ammette tre coppie di punti *congiunti* complanari (della sua J è parte la curva piana del 3° ordine che contiene le tre coppie ora dette come coppie di punti *congiunti*); S_5 con due punti-base (la J contiene la loro retta); S_5 che ammette punto e retta reciproca fissi (la J comprende il punto e la retta); S_5 rispetto a cui tre punti allineati hanno rispettivamente per *congiunti* tre punti pure allineati (le due terne di punti individuano fra le loro rette una proiettività, in cui due punti omologhi sono pure *congiunti*: la J dello S_5 contiene dunque le due rette).

20. Supposto invece che mai ∞^1 coppie di piani dello S_3 stiano in un S_2, mediante considerazioni analoghe a quelle fatte per lo S_4 con una V_2 di coppie di piani *immersa* nello S_4 (operando su uno spazio ordinario anzichè su uno spazio a quattro dimensioni), si trae che le quadriche dello S_3 passan tutte per una retta o ammetton tutte come polari due certe rette sghembe ([28]).

Dal primo S_3 passiamo allo S_5 contenente un S_2 a J indeterminata; la J dello S_5 comprende l'*asse* dello S_2 e una cubica sghemba ottenuta analogamente alla quadrica di n° 15.

Dal secondo S_3 otteniamo lo S_5 contenente un S_3 con due rette-base sghembe. Diciamo σ e σ' due S_4 (dello S_5) contenenti il detto S_3; sappiamo (n° 16) che σ ammette come J le due rette sghembe e una quadrica, f_1; ciò può esprimersi dicendo che un punto di f_1 è tale che il suo coniugato armonico rispetto alle due rette sghembe gli è *congiunto* rispetto a σ. Analogamente per la quadrica, f_2, che fa parte della J di σ'. Pertanto un punto della sezione $f_1 f_2$ è tale che il suo coniugato armo-

---

([28]) A questo secondo S_3 pervenne appunto il Bricard (*Sur certains systèmes linéaires, ponctuels et tangentiels, de quadriques*), " Bulletin de la Soc. math. de France „, 1906) ricercando, sotto speciali ipotesi e con metodo del tutto diverso dal nostro, gli S_3 contenenti ∞^1 coppie di piani. Le ultime considerazioni di questo paragrafo mostrano che le coppie di piani formano, in questo S_3, un inviluppo ∞^1 di 4ª classe e 1ª specie, in pieno accordo con i risultati del Bricard.

nico rispetto alle due rette sghembe gli è *congiunto* sia rispetto a σ che a σ', epperò *congiunto* rispetto allo S_5. Discende di qui che la J dello S_5 comprende una quartica di 1ª specie; le due rette sghembe contengono poi ognuna una coppia di punti *congiunti*.

21. Passando agli S_5 che hanno per J una superficie, faremo ricorso agli S_3 che posseggono ∞^2 coppie di piani (nn. 9, 10). Però lo S_3 contenente un S_2 a J indeterminata porta allo S_5 con retta-base, per il quale le ∞^2 coppie di punti *congiunti* non costituiscono una superficie, ma una retta (la retta-base). E, così pure, lo S_3 sostenuto da due rette sghembe (basi) conduce allo S_5 che ammette due rette polari fisse, la cui J comprende le due rette medesime. Gli altri due S_3 dànno effettivamente S_5 aventi per J una superficie, e precisamente: lo S_3 di coni concentrici, contenente in generale 4 piani doppi, dà lo S_5 con 4 punti-base complanari (29), la cui J comprende il piano dei punti stessi; e lo S_3 a conica-base dà lo S_5 che ammette punto e piano polare fissi, della cui J fa parte il piano fisso.

Lo S_3 riducibile ci darà poi lo S_5 di coni concentrici, quale unico S_5 a J indeterminata.

22. Dunque:

In generale la Jacobiana di un sistema lineare ∞^5 di quadriche comprende 20 punti.

La Jacobiana diventa una curva (30) *per il sistema che ammette tre coppie complanari di punti congiunti, per il sistema con due punti-base, per il sistema che ammette punto e retta reciproca fissi, per il sistema rispetto al quale tre punti allineati hanno rispettivamente tre congiunti pure allineati, per il sistema contenente tutte le coppie di piani di un fascio, per il sistema contenente tutte le quadriche che passano per due certe rette sghembe, per il sistema con retta-base, per il sistema che ammette due rette polari fisse.*

---

(29) E casi particolari, tutti caratterizzati però dalla presenza nello S_5 di un S_3 riducibile.

(30) Si ricordi la nota (27).

La Jacobiana diventa una superficie per il sistema con quattro punti-base complanari e per il sistema che ammette punto e piano polare fissi.

La Jacobiana è indeterminata per il sistema di tutti i coni che hanno un dato centro.

23. Un S_5 contiene in generale ∞^2 coppie di piani: quali S_5 contengono invece ∞^3 coppie di piani? Se queste dànno luogo ad un S_3 riducibile, lo S_5 avrà (in generale) quattro punti-base complanari. Se invece la V_3 di coppie di piani non contiene parti lineari, un S_4 generico dello S_5 conterrà una V_2 non lineare di coppie di piani, onde (n° 18) potrà essere di uno dei seguenti tipi: 1° S_4 contenente tutte le quadriche che passano per due certe rette sghembe; 2° S_4 con retta-base; 3° S_4 che ammette due rette polari sghembe fisse; 4° S_4 che ammette punto e piano polare fissi.

Si vede rapidamente che il primo caso non può avverarsi. Invero il Σ_3 *armonico* allo S_5 dovrebbe, congiunto con una quadrica-inviluppo del tutto generica, dar luogo ad un Σ_4 che ammette una coppia di rette polari fissa; ora queste condizioni definiscono un Σ_5, e poichè i Σ_5 che contengono il Σ_3 sono ∞^8 e inoltre le coppie di rette ora menzionate vengono ad appartenere alla J (tangenziale) di questo, tale J risulterebbe indeterminata. Ora i Σ_3 a J indeterminata ci son noti (si traduca per dualità il n° 9), e questi portano successivamente allo S_5 contenente una V_3 lineare di coppie di piani, allo S_5 con retta-base, allo S_5 che ammette due certe rette polari. Il primo S_5 è già stato considerato; il secondo ed il terzo corrispondono invece al caso che il loro S_4 generico appartenga al 2° o al 3° rispettivamente dei tipi sopra nominati. Se infine lo S_4 generico dello S_5 è del 4° tipo, ricorrendo ai sistemi *armonici* si riconosce subito che lo S_5 medesimo deve ammettere punto e piano polare fissi.

È poi immediato assicurarsi che questi tre S_5 contengono effettivamente ∞^3 coppie di piani.

24. Veniamo da ultimo agli S_5 con ∞^4 coppie di piani. La varietà da essi costituita non sarà lineare, onde un S_4 generico dello S_5 conterrà una V_3 non lineare di coppie di piani,

vale a dire (n° 12) sarà un S_4 di coni concentrici. Qualora si rifletta che due S_4 dello S_5 hanno in comune un S_3, si concluderà subito che lo S_5 medesimo consta di coni concentrici, cioè di tutti i coni che hanno un dato centro.

25. Concludendo: *Contengono* ∞^3 *coppie di piani il sistema* ∞^5 *con 4 punti-base complanari, il sistema* ∞^5 *con retta-base, quello che ammette come polari due rette sghembe fisse, quello che ammette punto e piano polare fissi.*

Possiede ∞^4 *coppie di piani solo il sistema* ∞^5 *composto con tutti i coni che hanno un determinato vertice.*

Sistema lineare ∞^6.

26. In generale un S_6 non ammette punti *congiunti.* Potrà darsi che un S_6 ne ammetta qualche coppia.

Gli S_6 che ammettono ∞^1 coppie di tali punti si otterranno dagli S_2 con ∞^1 coppie di piani (n° 6), e così si avrà: *il sistema che ammette tre coppie complanari di punti congiunti, il sistema che ammette punto e retta reciproca fissi, il sistema con due punti-base, il sistema rispetto al quale tre punti allineati hanno per congiunti rispettivamente tre punti pure allineati.* Ricorrendo agli S_2 con ∞^2 coppie di piani, aggiungeremo: *il sistema con retta-base, il sistema che ammette punto e piano polare fissi.* Quest'ultimo è l'unico S_6 avente per J una superficie. Non esistono S_6 a J indeterminata.

27. Cerchiamo ora gli S_6 contenenti ∞^4 coppie di piani, anzichè ∞^3, come di solito. Poichè la V_4 di coppie di piani non può essere, nemmeno in parte, lineare, un S_5 generico dello S_6 conterrà una V_3 non lineare di coppie di piani, onde sarà di uno de' tipi enumerati alla fine del n° 23. Senonchè il caso che lo S_5 generico ammetta come polari due certe rette sghembe è da scartarsi, inquantochè il Σ_2 armonico allo S_6 dovrebbe essere tale da originare sempre, qualunque sia la quadrica-inviluppo con cui lo si congiunga, un Σ_3 con due rette-base; il che è manifestamente assurdo.

Ciò posto, gli altri due tipi di S_5 portano allo S_6 con retta-base e allo S_6 che ammette punto e piano polare fissi. I quali S_6 contengono effettivamente ∞^4 coppie di piani.

Qualora lo S_6 contenesse ∞^5 coppie di piani, un S_5 generico dovrebbe constare di coni concentrici, il che esigerebbe che lo stesso S_6 si componesse di coni concentrici: non potrà dunque darsi che un S_6 contenga ∞^5 coppie di piani.

28. Cosicchè: *Contengono* ∞^4 *coppie di piani il sistema* ∞^6 *con retta-base e il sistema* ∞^6 *che ammette punto e piano polare fissi.* *Non esistono sistemi* ∞^6 *contenenti* ∞^5 *coppie di piani.*

Sistema lineare ∞^7, sistema lineare ∞^8.

29. Un S_7 e un S_8, che in generale non ammetton punti *congiunti*, ne potranno però ammettere qualche coppia (anzi lo S_8 una sola). Gli S_7 aventi per J una curva si ottengono dai fasci di quadriche riducibili, e si hanno così: *il sistema con due punti-base, il sistema che ammette punto e retta reciproca fissi.* Non si hanno altre possibilità.

30. Seguendo poi il solito metodo, si riconosce agevolmente che *un sistema* ∞^7 *e un sistema* ∞^8 *contengono sempre rispettivamente* ∞^4 *e* ∞^5 *coppie di piani.*

Sulle trasformazioni Hermitiane delle varietà di Jacobi.

Nota di ANNIBALE COMESSATTI.

Un noto teorema, di cui può farsi larga applicazione alla teoria delle superficie iperellittiche, stabilisce che ogni trasformazione *Hermitiana* d'una superficie di Jacobi V_2 corrisponde ad una trasformazione birazionale in sè della curva C, di genere 2, associata alla superficie: e che in conseguenza ogni gruppo G_r di r trasformazioni Hermitiane di V_2 si rispecchia in un gruppo isomorfo di trasformazioni birazionali di C in se stessa (*). Scopo della presente Nota è di trasportare tali risultati alle varietà di Jacobi V_p, i cui punti corrispondono birazionalmente senza eccezioni alle serie lineari g_p d'una curva algebrica (irriducibile) C, di genere p.

Le trasformazioni Hermitiane d'una superficie di Jacobi V_2 son caratterizzate dalla proprietà di mutare in se stesse le funzioni θ di 1° ordine, i cui argomenti sono integrali semplici, normali, di 1ª specie, di V_2; ovvero dalla proprietà equivalente di trasformare in sè il sistema algebrico Σ, costituito dalle ∞^2 curve D ciascuna delle quali corrisponde alle coppie di punti contenute parzialmente in una g_3^1 di C. L'estensione di tali proprietà caratteristiche, conduce a considerare quelle trasformazioni birazionali fra due varietà di Jacobi V_p, V_p' (inerenti a due curve C, C' di genere p) che mutano il sistema Σ costituito dalle ∞^p V_{p-1} di V_p, ciascuna delle quali corrisponde

(*) Enriques–Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* [“ Acta Mathematica „, t. 32 (1909), pp. 283–392; t. 33 (1910), pp. 321-403], n. 62 e segg.

alle g_p di C contenute parzialmente in una g_{2p-1}^{p-1}, nell'analogo sistema Σ' di V_p'. Orbene, al n° 3 pervengo a dimostrare che *ad ogni trasformazione siffatta corrisponde una trasformazione birazionale fra* C *e* C'; indi, facendo coincidere le due curve, ne deduco (n[i] 5, 6, 7) le conclusioni cercate.

I risultati del n° 3 mi permettono inoltre di dare un'altra dimostrazione del teorema di R. TORELLI, relativo all'identità birazionale di due curve C, C' dello stesso genere p, le quali possiedano due sistemi d'integrali normali di 1ª specie, colla stessa tabella di periodi normali (*).

Il prof. SEVERI s'è valso del mio risultato del n° 3, per semplificare in un punto una sua ricerca inedita sulla identità birazionale di due curve a moduli generali, aventi la stessa varietà di JACOBI: ed ha voluto cortesemente inserire le sue osservazioni in fine della Nota.

1. Sia C una curva algebrica, irriducibile, di genere p. Scelto sulla riemanniana relativa a C un sistema di cicli normali, indichiamo con $u_1, u_2, \ldots, u_p$ gl'integrali normali di 1ª specie relativi, nei quali supponiamo fissate anche le costanti arbitrarie, e con $U_1, U_2, \ldots, U_p$ le somme dei valori di $u_1, u_2, \ldots, u_p$ nei gruppi di p punti di C.

Definiremo come *varietà di* JACOBI relativa a C, una varietà algebrica a p dimensioni V_p, i cui punti corrispondano birazionalmente senza eccezioni alle serie lineari g_p, d'ordine p di C.

Da tale definizione risulta, pel teorema d'ABEL, che i punti di V_p sono pure in corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, coi gruppi di valori di $U_1, U_2, \ldots, U_p$, incongrui rispetto ai periodi. E da ciò segue subito che V_p è priva di varietà *eccezionali*, cioè di varietà M_k che si mutino in varietà M_{k-i} $(i > 0)$

(*) R. TORELLI, *Sulle varietà di Jacobi* [“Rendiconti della R. Accad. dei Lincei„ (5), XXII, fasc. 3°, pp. 98-103]. Si potrebbe far vedere, con qualche elaborazione, che il teorema I di questa Nota (nn. 1-6) è in sostanza equivalente a quello da noi dimostrato ai nn. 2, 3, benchè la dimostrazione sia completamente diversa. Ma il risultato di TORELLI non si presterebbe con egual duttilità agli ulteriori sviluppi.

semplici per una varietà $\overline{V}_p$ trasformata birazionale di V_p, in tal guisa che ad un punto di M_{k-i} risponda una M_i, contenuta in M_k, e variabile ivi in un sistema algebrico ∞^{k-i} (d'indice 1).

E invero, poichè $U_1, U_2, \ldots, U_p$ posson considerarsi come integrali semplici di 1ª specie appartenenti a V_p — e quindi a $\overline{V}_p$ —, i valori di questi integrali dovrebbero conservarsi costanti nei punti d'una M_i, che provenisse nel modo suddetto da un punto semplice di $\overline{V}_p$; e ciò contraddice alla biunivocità della corrispondenza fra i punti di V_p e i gruppi di valori di $U_1, U_2, \ldots, U_p$.

La varietà V_p è birazionalmente identica alla W_p che rappresenta senza eccezioni i gruppi di p punti di C: e nella trasformazione birazionale fra W_p e V_p, le varietà *eccezionali* ad h dimensioni, che, entro W_p, rappresentano le g_p^h speciali di C, si mutano in punti di V_p. Alla totalità delle g_p speciali, rispondono entro V_p i punti d'una varietà algebrica a $p-2$ dimensioni, w_{p-2}.

Tale w_{p-2} è *irriducibile*. E invero la totalità delle g_p speciali di C può riferirsi biunivocamente senza eccezioni a quella delle g_{p-2}, pigliando come omologhe due serie mutuamente residue rispetto alla serie canonica: e la totalità delle g_{p-2} è birazionalmente identica (non però in generale senza eccezioni) a a quella dei gruppi di $p-2$ punti di C, che è ovviamente irriducibile.

Consideriamo ora su V_p i punti che corrispondono alle g_p contenute (parzialmente) in una serie lineare $g_{2p-1}^{p-1}\ |A|$; essi costituiscono una varietà algebrica V_{p-1} che, al variare di $|A|$, descrive un sistema algebrico Σ, ∞^p.

Il sistema Σ è mutato in se stesso da tutte le trasformazioni *ordinarie* (di 1ª e 2ª specie) che appartengono a V_p (*);

(*) Per la definizione e le proprietà di queste trasformazioni, in relazione ai gruppi di p punti di C, vedi Castelnuovo, *Le corrispondenze univoche tra gruppi di* p *punti sopra una curva di genere* p [“ Rendiconti del R. Istituto Lombardo „ (2), XXV (1892), pp. 1189-1205]. Cfr. pure le altre Note dello stesso A.: *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* [“ Rendic. della R. Acc. dei Lincei „ (5), XIV (1905), fasc. 10, 11, 12]. Facciamo osservare al lettore che le trasformazioni di 2ª specie qui considerate, sono quelle che Castelnuovo chiama di 1ª specie, e viceversa.

anzi si può sempre determinare una trasformazione di 2ª specie, che muti una nell'altra due assegnate varietà di Σ (*).

Queste sono poi, come è pur noto, suscettibili d'una importante definizione trascendente. In modo preciso, se s'indica con θ la funzione theta di p variabili del 1° ordine, a caratteristiche nulle, la cui tabella dei periodi coincide con quella dei periodi normali di $u_1, u_2, \ldots, u_p$, allora l'equazione

$$\theta(U_1 - g_1, U_2 - g_2, \ldots, U_p - g_p) = 0,$$

è soddisfatta, per dati valori delle costanti $g_1, g_2, \ldots, g_p$, in tutti e soltanto nei punti d'una V_{p-1} di C. Inoltre la serie lineare g_{2p-1}^{p-1} di C, che corrisponde a quella V_{p-1}, risulta costituita dai gruppi di $2p-1$ punti $x_1, x_2, \ldots, x_{2p-1}$, per cui sono soddisfatte le congruenze:

$$\sum_{i=1}^{2p-1} u_r(x_i) \equiv g_r - k_r, \text{ (modd. periodi) } (r = 1, 2, \ldots, p),$$

nelle quali $k_1, k_2, \ldots, k_p$ sono costanti che dipendono solo dai cicli normali e dalle origini delle integrazioni (**).

Non è escluso che la V_p non possa contenere qualche altro sistema Σ_1 analogo a Σ, il quale si costruisca nello stesso modo a partire da un'altra corrispondenza biunivoca stabilita fra i punti di V_p e le g_p di C: e ciò accade quando V_p ammette delle trasformazioni birazionali (*singolari*) in se stessa, che non

(*) Omettiamo la semplicissima dimostrazione. Si prova pure facilmente che due assegnate V_{p-1} di Σ possono sempre mutarsi una nell'altra mediante una trasformazione di 1ª specie: sicchè ne risulta che ogni V_{p-1} di Σ è mutata in sè da una trasformazione di 1ª specie. Si può in proposito osservare che le V_{p-1} di Σ sono birazionalmente identiche alla varietà delle g_{p-1} di C, e che la suddetta trasformazione di 1ª specie si rispecchia in quella nella quale sono omologhe due g_{p-1} mutuamente residue rispetto alla serie canonica di C.

(**) Costanti introdotte da Riemann nella teoria delle θ-abeliane di cui quell'A. si serve per risolvere il problema d'inversione di Jacobi. Per le proprietà delle θ, di cui dobbiamo far uso, rimandiamo al libro di Krazer, *Lehrbuch der Thetafunctionen* (Leipzig, Teubner, 1903), cap. X.

mutano in sè il sistema Σ (*). Benchè per il nostro scopo sia indifferente considerare uno qualunque tra questi sistemi, imagineremo per maggior chiarezza fissato un riferimento fra le g_p di C e i punti di V_p, in modo che il sistema Σ risulterà ben determinato.

Fra le V_{p-1} di Σ vi sono quelle che corrispondono alle g_{2p-1}^{p-1} costituite dalla serie canonica di C coll'aggiunta di un punto fisso. Esse passano tutte per la w_{p-2} corrispondente alle g_p speciali di C e formano un sistema Φ, ∞^1, birazionalmente identico a C. Il sistema Φ ha *grado* 1, cioè è tale che p sue varietà generiche si tagliano, fuori di w_{p-2}, in un punto; e le curve di V_p che provengono dalle g_p aventi $p-1$ punti fissi sono unisecanti delle varietà di Φ.

2. Consideriamo ora due curve C, C' dello stesso genere $p>1$, eventualmente coincidenti, e imaginiamo che tra le due varietà di JACOBI V_p, V_p' relative, interceda una trasformazione birazionale, T, la quale muti il sistema Σ di V_p nell'analogo sistema Σ' di V_p'. Ci proponiamo di provare che *le due curve* C, C' *sono birazionalmente identiche.*

Alla trasformazione T corrisponde una trasformazione $\overline{T}$ tra le g_p di C e quelle di C', la quale muta le g_p contenute parzialmente in una g_{2p-1}^{p-1} di C, in g_p analoghe di C'. Possiamo anzi supporre, dopo aver moltiplicata eventualmente T per una trasformazione ordinaria di V_p' in sè, che la $\overline{T}$ muti le g_p contenute in un'assegnata g_{2p-1}^{p-1} $|A|$ di C, nelle g_p contenute in una analoga serie $|A'|$ di C', pure assegnata.

Fissiamo come serie $|A|$ quella costituita dalla serie canonica $|K|$ di C e da un punto fisso P, e come serie $|A'|$ quella formata dalla serie canonica $|K'|$ di C' coll'aggiunta d'un punto fisso P'.

(*) E non è neppure escluso che su V_p non possano esistere due sistemi Σ, Σ_1 provenienti da due curve C, C_1 *non birazionalmente identiche*, in tal guisa che V_p risulti la varietà di JACOBI di ambedue le curve. Per $p=2$ si conoscono esempî effettivi: Cfr. HUMBERT, *Sur les fonctions abéliennes singulières* (Deuxième Mémoire) [“Journal de Mathématiques„ (5), XVI (1900), pp. 279-386], nn. 171 a 181.

Consideriamo ora le g_p speciali di C, e diciamo Ω la totalità ∞^{p-2} delle g_p corrispondenti su C'. Poichè le g_p speciali di C sono contenute in ciascuna delle ∞^1 serie lineari g_{2p-1}^{p-1}, che si ottengono aggregando a $|K|$ un punto (fisso) arbitrario di C (*), così le g_p di Ω saranno contenute in ∞^1 serie lineari g_{2p-1}^{p-1} formanti un sistema algebrico Γ, di cui fa parte la serie $|A'|$.

Supponiamo che la g_p generica di Ω non sia speciale. Allora gli ∞^{p-2} gruppi di p punti da cui risulta costituita Ω, dovendo esser contenuti in $|A'|$ e non in $|K|$, avranno tutti il punto fisso P'. Dicasi Ω_0 la totalità degli ∞^{p-2} gruppi di $p-1$ punti residui, Γ_0 la totalità delle ∞^1 g_{2p-2}^{p-2} residue delle serie di Γ rispetto al punto P', le quali conterranno tutte i gruppi di Ω_0. Noi proveremo che si possono presentare soltanto i due casi seguenti:

a) I gruppi di Ω_0 hanno un punto fisso Q, in tal guisa che le g_p di Ω si individuano aggregando ai punti P' e Q, gruppi di $p-2$ punti di C;

b) I gruppi di Ω_0 sono contenuti (parzialmente) in quelli d'una serie lineare g_{2p-2-h}^{p-2} $|R|$, $(h>o)$, necessariamente *speciale*, in tal guisa che le g_p di Ω si individuano aggregando a P' gruppi di $p-1$ punti contenuti in $|R|$.

Invero, facciamo dapprima l'ipotesi che qualcuna delle g_{2p-2}^{p-2} di Γ_0 abbia $h>0$ punti fissi. Allora i gruppi di Ω_0, dovendo esser contenuti in quelle serie, avranno come fisso qualcuno fra quegli h punti, ovvero saran contenuti parzialmente nella g_{2p-2-h}^{p-2} *speciale* residua della serie considerata rispetto al gruppo dei suoi punti fissi. Si cade dunque necessariamente in uno dei due casi *a), b)*.

Se invece nessuna delle serie di Γ_0 ha punti fissi, e quindi non ne hanno neppure i gruppi di Ω_0, consideriamo un generico gruppo M di $p-2$ punti di C', e i gruppi di Ω_0 che passano per M. Essi sono in numero finito, ed appartengono tutti alle serie di Γ_0; pertanto gli ∞^1 gruppi di queste serie che passano per M, hanno degli altri punti comuni, fra cui si trovano quelli

(*) Queste sono le sole g_{2p-1}^{p-1} che contengono tutte le g_p speciali di C. Invero il gruppo d'una serie siffatta, che passa per $p-1$ punti di C, dovrà contenere gli ulteriori punti di tutti i gruppi speciali che contengono quei $p-1$ punti, cioè il gruppo canonico da essi individuato.

fra i punti dei suddetti gruppi di Ω_0, che non stanno in M. Indichiamo con R la totalità dei punti comuni alle serie di Γ_0 per M (inclusi quelli di M), ed osserviamo che, presi in R $p-2$ punti qualunque, costituenti un gruppo N, il gruppo R resta definito rispetto ad N come lo era rispetto ad M. Ne deduciamo che R varia in una *involuzione* I, ∞^{p-2}, di C', d'ordine $t \geq p-1$, i cui gruppi contengono tutti quelli di Ω_0; involuzione che non può avere punti fissi, perchè non ne hanno le serie di Γ_0.

Se la dimensione $p-2$ di I è >1, cioè se $p>3$, potremo, a norma d'un noto teorema di HUMBERT-CASTELNUOVO, considerare soltanto le due ipotesi seguenti:

1ª) I è una serie lineare $|R|$, d'ordine necessariamente minore di $2p-2$ (altrimenti le serie di Γ_0 coinciderebbero), e di dimensione $p-2$. Una tale ipotesi, che del resto condurrebbe al caso *b)*, è da escludersi, perchè le serie di Γ_0 avrebbero qualche punto fisso:

2ª) I si ottiene riunendo a $p-2$ a $p-2$ (in tutti i modi possibili) i gruppi d'una involuzione irrazionale γ_r^1 di C' $(r>1)$. Siccome è $p>3$, e d'altronde dev'essere $r(p-2) < < 2p-2$, così sarà $r=2$: e pertanto ogni gruppo di I risulterà costituito da $p-2$ coppie d'una γ_2^1. Inoltre ogni gruppo G di una delle serie di Γ_0, sarà composto colla γ_2^1, dovendo contenere il gruppo di I individuato da $p-2$ qualunque dei suoi punti, non coniugati nella γ_2^1.

Ne consegue che, sulla curva D imagine della γ_2^1, le serie di Γ_0 hanno per corrispondenti ∞^1 serie lineari g_{p-1}^{p-2}, e quindi che D è una curva razionale o ellittica.

Ma d'altronde ambedue queste ipotesi conducono a conseguenze assurde. E invero, se D fosse razionale, I risulterebbe una serie lineare, mentre, come abbiamo sopra osservato, ciò non può verificarsi: e se D fosse ellittica lo sarebbe anche la totalità semplicemente infinita delle serie di Γ_0 perchè tale è la varietà delle ∞^1 g_{p-1}^{p-2} di D; mentre invece le serie di Γ_0 sono riferite biunivocamente ai punti di C, che ha il genere >1.

Esaminiamo infine il caso $p=3$: ed escludiamo subito che I sia una serie lineare g_t^1, $(t<4)$, perchè ciò riporterebbe al caso già trattato che le g_4^1 di Γ_0 abbiano qualche punto fisso. Siccome ogni gruppo d'una delle serie di Γ_0 deve risultare com-

posto con I (in quanto contiene il gruppo di I che passa per uno dei suoi punti), così I sarà una involuzione *irrazionale* γ_2^1: e coinciderà con Ω_0, perchè i gruppi di Ω_0 che son formati anch'essi da due punti ciascuno, devono essere contenuti in quelli di I.

Ora ciò è assurdo. E invero una involuzione γ_2^1 appartenente ad una curva C' di genere 3 ha il genere < 3, mentre i gruppi di Ω_0 son riferiti biunivocamente alle g_3^1 (speciali) di C, e quindi costituiscono una serie di genere 3.

3. Ora è facile costruire una trasformazione *ordinaria* $\overline{\tau}$ delle g_p di C' in sè, la quale muti le g_p di Ω nelle g_p speciali di C'. Infatti, nel caso *a)*, tale è la trasformazione di *1ª specie*, in cui si corrispondono due g_p mutuamente residue rispetto alla g_{2p}^p, individuata dalla serie canonica di C', a cui si aggiungano i due punti P' e Q; e nel caso *b)* tale è la trasformazione di *2ª specie* individuata dal far corrispondere al gruppo $G + P'$ il gruppo $G + S$, G essendo un gruppo di $p - 1$ punti (*), ed S uno dei punti residui della serie canonica di C' rispetto alla g_{2p-2-h}^{p-2} $|R|$, che contiene i gruppi di Ω_0. È da osservarsi che in tal guisa si ottengono tutte le g_p speciali di C', perchè, come abbiamo già notato, l'insieme di queste g_p costituisce una varietà algebrica *irriducibile*.

Pertanto la trasformazione $\overline{T\tau}$ (**) muta le g_p di C, in g_p di C', facendo corrispondere a g_p speciali, g_p speciali: e poichè essa, come per ipotesi la $\overline{T}$, trasforma le g_p di C contenute parzialmente in una g_{2p-1}^{p-1} in g_p analoghe di C', così determinerà una corrispondenza biunivoca fra quelle g_{2p-1}^{p-1}, che contengono i gruppi speciali.

E dunque ad una serie costituita dalla serie canonica $|K|$ di C e da un punto fisso P, corrisponderà una serie analoga di C': onde i punti residui saranno omologhi in una trasformazione birazionale σ fra C e C'.

(*) Risulta subito che una trasformazione siffatta è *indipendente* da G. Cfr. Castelnuovo, Nota citata dell'" Ist. Lombardo ", pag. 1197.

(**) Al principio del n. prec. abbiamo escluso che le g_p di Ω fossero tutte speciali. È ovvio che allora $\overline{\tau}$ è l'identità.

In altre parole, se si indica con τ quella trasformazione di V_p' in sè che corrisponde a $\bar{\tau}$, la trasformazione $T\tau$ fra i punti di V_p e quelli di V_p', muta le V_{p-1} del sistema Φ, in V_{p-1} dell'analogo sistema Φ' di V_p': e tale corrispondenza induce una trasformazione birazionale σ fra C e C', che sono birazionalmente identiche (rispettivamente) ai sistemi Φ e Φ'.

4. Applichiamo anzitutto il teorema dimostrato al caso di due curve C, C' dello stesso genere p, le quali possiedano rispettivamente due sistemi di integrali normali di 1ª specie $u_1, u_2, \dots, u_p$; $u_1', u_2', \dots, u_p'$, cogli stessi periodi normali. Detti $x_1, x_2, \dots, x_p$; $x_1', x_2' \dots, x_p'$ due gruppi di p punti di C, C', le formole

$$\sum_{i=1}^{p} u_h(x_i) \equiv \sum_{i=1}^{p} u_h'(x_i') + \pi_h, \text{ (modd. periodi)},$$
$$(h = 1, 2, \dots, p), \ (\pi_h \text{ costanti}),$$

stabiliscono una trasformazione birazionale tra le g_p di C e quelle di C': e mediante essa, ai gruppi di p punti di C per cui è

$$\theta\left(\left(\sum_{i=1}^{p} u(x_i) - g\right)\right) = 0 \ (*),$$

i quali, per dati valori delle g, son contenuti (nº 1) in una g_{2p-1}^{p-1} di C, corrispondono gruppi di p punti di C' per cui è soddisfatta l'equazione

$$\theta\left(\left(\sum_{i=1}^{p} u'(x_i') - g + \pi\right)\right) = 0,$$

e che per ciò sono anch'essi contenuti in una g_{2p-1}^{p-1} di C'. Ne consegue l'identità birazionale delle due curve.

5. Supponiamo ora che le due curve C, C', a cui si riferisce il teorema, coincidano. Allora T sarà una trasformazione di V_p in sè, che muterà in se stesso il sistema Σ, cioè trasfor-

---

(*) Per brevità, qui e nel seguito scriveremo $\theta((u))$ in luogo di $\theta(u_1, u_2, \dots u_p)$.

merà in se stesse (a meno d'un fattore esponenziale) le funzioni θ degli argomenti $U_1, U_2, \ldots, U_p$, considerate al n° 1. Diremo in tal caso che T è una *trasformazione Hermitiana* di V_p in se stessa, che si denominerà *singolare* se non coincide con qualcuna delle trasformazioni ordinarie esistenti su V_p.

Per quanto abbiamo dimostrato ai nn. 2, 3, esiste sempre una trasformazione ordinaria τ, tale che il prodotto $T\tau$ muta in sè la w_{p-2} corrispondente alle g_p speciali di C, e quindi il sistema Φ delle V_{p-1} di Σ, che passano per essa.

A due tali V_{p-1} omologhe in $T\tau$, sono associati, nel modo indicato alla fine del n° 1, due punti di C corrispondentisi in una trasformazione birazionale σ. Viceversa due gruppi G, G', di p punti, trasformati l'uno nell'altro da σ, dànno luogo a due gruppi di p V_{p-1} di Φ, le quali si tagliano, rispettivamente, in due punti A, A', corrispondenti in $T\tau$. In altre parole, la trasformazione $\overline{T\tau}$ fra le g_p di C, che corrisponde a $T\tau$, è proprio quella indotta da σ fra quelle g_p.

Ne segue che, se σ è l'identità, tale dovrà essere anche $T\tau$; e perciò, essendo τ ordinaria, lo sarà anche T.

Adunque, se T è singolare, σ non sarà identica (scriveremo $\sigma \not\equiv 1$) e quindi si potrà enunciare il teorema:

Ogni trasformazione Hermitiana singolare d'una varietà di Jacobi V_p *in se stessa, corrisponde ad una trasformazione birazionale in sè, della curva* C *di genere* p *associata alla varietà.*

6. Supponiamo ora che T sia una trasformazione ordinaria di V_p: potrà essere $T\tau$, e quindi σ, diversa dall'identità?

Per esaminare questo caso, consideriamo su C la trasformazione $\overline{T\tau}$ e, mantenendo le notazioni del n° 1, scriviamone le equazioni sotto la forma:

$$U_h' \equiv \pm U_h + c_h, \quad (h = 1, 2, \ldots, p) \quad (c_h \text{ costanti}),$$

valendo il segno $+$ o $-$ secondo che $\overline{T\tau}$ è di 2ª o di 1ª specie. Una trasformazione siffatta farà corrispondere ai gruppi di p punti di C per cui si ha

$$\theta((U - g)) = 0,$$

quelli per cui è soddisfatta l'equazione

$$\theta\,((U' - c \mp g)) = 0\ (^*),$$

cioè ai gruppi di p punti contenuti nella serie lineare g_{2p-1}^{p-1} individuata dalle somme $g_h - k_h$ degl'integrali u_h (n° 1), gruppi contenuti in una serie analoga relativa alle somme $c_h \pm g_h - k_h$. Pertanto fra tali somme V_h, V_h' relative a due g_{2p-1}^{p-1} corrispondenti, si avranno, nei due casi, le relazioni

$$V_h' \equiv V_h + c_h, \qquad (h = 1, 2, ..., p)$$
$$V_h' \equiv - V_h + c_h - 2k_h,$$

che, applicate a due serie, costituite dalla serie canonica (**) e da due punti fissi corrispondenti in σ (n° 3) ci porgono le equazioni di σ sotto le due forme

$$(1) \qquad u_h' \equiv u_h + c_h, \qquad (h = 1, 2, ..., p).$$
$$(2) \qquad u_h' \equiv - u_h + c_h + 2k_h,$$

Ora si esclude subito che su C possa esistere qualche trasformazione rappresentata dalle (1). Invero, essendo $p > 1$, una trasformazione siffatta dovrebbe esser ciclica d'indice ν, e perciò genererebbe un'involuzione I_ν, nei gruppi della quale, l'integrale u_h darebbe una somma congrua a

$$\nu\, u_h + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\, c_h,$$

(in cui con u_h s'indica il valore di quell'integrale, in un punto qualunque d'un gruppo di I_ν), e perciò *variabile* al variare del

---

(*) Nel caso delle trasformazioni di 1ª specie convien tener conto della *parità* della θ, da cui segue

$$\theta\,((-(U' - c) - g)) = \theta\,((U' - c + g)).$$

(**) Si tenga presente che la somma dei valori di u_h nei punti d'un gruppo canonico è congrua a $-2k_h$ (cfr. KRAZER, loco cit., pag. 438).

gruppo. Ma allora ad I_ν *apparterrebbero* p integrali di 1ª specie, e quindi il genere di I_ν risulterebbe p, in contraddizione con una nota osservazione di WEBER.

Invece le trasformazioni rappresentate da equazioni del tipo (2), sono involutorie: e le coppie di punti corrispondenti generano su C una g_2^1, la quale induce fra le g_p di C, e quindi su V_p, la trasformazione di 1ª specie g rappresentata dalle equazioni

$$U_h' \equiv -U_h + c_h \text{ (*)}, \quad (h = 1, 2, \ldots, p).$$

Se ora si tien conto che, data una trasformazione ordinaria T di V_p esistono sempre due trasformazioni, pure ordinarie, $\tau_1 \equiv T^{-1}$, τ_2, tali che $T\tau_1 \equiv 1$, $T\tau_2 \equiv g$, si conclude che:

Se la curva C *non è iperellittica, ogni trasformazione ordinaria di* V_p *ha per corrispondente su* C *l'identità: se invece* C *è iperellittica, ad ogni trasformazione ordinaria si può far corrispondere l'identità o la* g_2^1 *di* C.

I risultati di questo numero possono enunciarsi anche dicendo che su V_p non esistono trasformazioni ordinarie (differenti dall'identità) che mutino in sè la w_{p-2} corrispondente alle g_p speciali di C: fatta eccezione, se C è iperellittica, per *una* trasformazione di 1ª specie.

7. Supponiamo ora che C non sia iperellittica e che T sia singolare. Allora è *unica* la trasformazione τ tale che $T\tau$ muti in sè la w_{p-2}, perchè se in tal modo si comportasse un'altra trasformazione ordinaria $\pi \mathrel{\not\equiv} \tau$, anche la trasformazione $\tau^{-1}\pi \mathrel{\not\equiv} 1$

(*) Che tali siano le equazioni della trasformazione indotta dalla (2) fra le g_p di C, può dedursi, oltre che dal n. 5, anche dall'osservare che, per essere la serie canonica di C composta colla g_2^1, la somma di u_h relativa ad un gruppo canonico dev'esser congrua a $(p-1)(c_h + 2k_h)$. Siccome tal somma è d'altronde congrua a $-2k_h$, così si hanno le relazioni

$$p(c_h + 2k_h) \equiv c_h \text{ (modd. periodi)}, \quad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

dalle quali segue che la somma di u_h relativa ad un gruppo di p punti, si riproduce cambiata di segno ed aumentata di c_h, quando si trasforma quel gruppo mediante la (2).

dovrebbe mutare in sè la w_{p-2}, mentre, per quanto si è detto sopra, ciò non può verificarsi.

Analoghi ragionamenti valgono se si imagina moltiplicata *a sinistra* la T per una trasformazione ordinaria. Ne consegue che è *unica* la trasformazione ordinaria π, tale che πT muti in sè la w_{p-2}. Ma di più è facile provare che $\pi T \equiv T\tau$.

E invero poichè la T, come del resto *qualunque* trasformazione birazionale di V_p in sè, muta le trasformazioni ordinarie in trasformazioni pure ordinarie (della stessa specie) (*), così sarà ordinaria anche la $\tau_1 \equiv T^{-1}\pi T$, e inoltre la $T\tau_1$ essendo eguale a πT muterà in sè la w_{p-2}. Dovrà essere perciò $\tau_1 \equiv \tau$ e quindi $T\tau \equiv \pi T$, c. d. d.

Adunque, in definitiva, ogni trasformazione Hermitiana T di V_p in sè, *individua una* trasformazione $T_1 \equiv T\tau \equiv \pi T$ che muta in sè la w_{p-2}: la quale è l'identità se T è ordinaria.

Analogamente si prova che, se C è iperellittica, esistono due trasformazioni ordinarie τ, τ_1, l'una di 1ª, l'altra di 2ª specie, tali che $T\tau$ e $T\tau_1$ mutano in se stessa la w_{p-2}; e ciascuna di quelle due trasformazioni è il prodotto dell'altra per g. Si hanno inoltre le identità

$$T\tau \equiv \pi\, T, \qquad T\tau_1 \equiv \pi_1 T,$$

nelle quali con π, π_1 s'indicano due trasformazioni ordinarie, appartenenti rispettivamente alla stessa specie di τ, τ_1.

Sicchè, se ci limitiamo a considerare soltanto le due trasformazioni τ, π di 2ª specie, possiamo dire, anche in questo caso, che la trasformazione $T_1 \equiv T\tau \equiv \pi T$ (*associata* a T), è *individuata* da T. Se T è una trasformazione ordinaria di 2ª specie, T_1 è l'identità; se invece T è di 1ª specie, T_1 coincide con g.

Siano ora T, U due trasformazioni Hermitiane, $T_1 \equiv T\tau$, $U_1 \equiv U\omega$ le rispettive trasformazioni associate. Posto, come è

(*) Ciò si può p. es. ricavare servendosi delle equazioni di T sotto la forma

$$U'_h \equiv \lambda_{h1}\, U_1 + \lambda_{h2}\, U_2 + \dots + \lambda_{hp}\, U_p \text{ (modd. periodi)}, \quad (h = 1, 2, \dots, p)$$
$$\lambda_{hk} \,| = 1,$$

e delle note equazioni spettanti alle trasformazioni ordinarie.

lecito, $T\tau \equiv \pi T$, $\pi TU \equiv TU\sigma$, π e σ essendo trasformazioni ordinarie (di 2ª specie se C è iperellittica), avremo

$$T_1 U_1 \equiv T\tau U\omega \equiv \pi TU\omega \equiv TU\sigma\omega,$$

e questo prova che alla trasformazione TU è associato il prodotto $T_1 U_1$ delle trasformazioni associate a T, U. Tenendo conto dei precedenti risultati, se ne deduce subito che:

Ad ogni gruppo G_r *di* r *trasformazioni Hermitiane di* V_p *in sè, corrisponde un gruppo isomorfo di trasformazioni birazionali in sè della curva* C, *di genere* p, *associata alla varietà.*

Il grado di meriedria dell'isomorfismo, è dato dal numero delle trasformazioni T a cui è associata una medesima T_1. Se C non è iperellittica, segue subito dalla definizione di T_1, che due T siffatte sono l'una il prodotto dell'altra per una trasformazione ordinaria: se C è iperellittica, vale la stessa conclusione, coll'avvertenza che in tal caso la trasformazione è di 2ª specie. E viceversa.

Se ne trae senza difficoltà che:

Il grado di meriedria dell'isomorfismo, è dato dal numero delle trasformazioni ordinarie contenute in G_r *(inclusa l'identità): ovvero dalla metà di questo numero, se* C *è iperellittica, e* G_r *contiene trasformazioni di 1ª specie* (*).

Padova, gennaio 1915.

Osservazioni del prof. F. SEVERI.

Questo lavoro del COMESSATTI mi dà occasione di esporre una parte del procedimento ch'io aveva seguíto per dimostrare che due curve a moduli generali, i cui integrali normali di 1ª specie abbian gli stessi periodi, son birazionalmente iden-

(*) Se $p = 2$ la w_{p-2} si riduce a un punto (imagine della g_2^1) e le trasformazioni T_1 a trasformazioni che lascian fisso quel punto. Le conclusioni di questo num. e dei precedenti conducono allora a risultati ben noti. Cfr. ENRIQUES-SEVERI, loco cit., nn. 62-65.

tiche. Il TORELLI, nella Nota sopra citata, ha provato che l'uguaglianza di quei periodi basta per affermare l'identità birazionale delle due curve, qualunque siano i moduli, ed il COMESSATTI ritrova la proposizione stessa al n° 4. Ma resta l'altra questione, a cui rispondeva il mio procedimento: Si può ancora dire che due curve C, C' son birazionalmente identiche, quando lo sono le loro varietà di JACOBI? Qui occorre proprio limitarsi a considerar curve a moduli generali (cfr. colla nota (*) a piè della pag. 447).

Orbene, nelle mie ricerche in proposito, io aveva dimostrato che *data la varietà di Jacobi inerente ad una curva* C, *che non possegga corrispondenze simmetriche singolari, la* C *resta individuata (a meno, beninteso, di trasformazioni birazionali).*

Espongo qui rapidamente come si perviene a questo teorema. Proviamo in primo luogo, per induzione, che sulla V_q delle q-ple ($q \leq p$) di punti d'una C di genere p — priva di corrispondenze simmetriche singolari — la *base minima* è formata dal sistema continuo Σ delle ∞^1 varietà Φ_{q-1}, ciascuna delle quali rappresenta le q-ple con un punto fissato, e dalla N_{q-1} rappresentante le q-ple tolte dai gruppi di una qualunque g_n^{q-1} di C.

All'uopo, si considerino su V_q le superficie L, imagini delle q-ple con $q-2$ punti fissi (superficie delle coppie di punti di C), e le curve H, imagini delle q-ple con $q-1$ punti fissi: per un punto qualunque di V_q passano q varietà Φ, per una curva H ne passano $q-1$, per una superficie L, $q-2$; ecc.

A causa dell'ipotesi fatta circa la C, una varietà algebrica F_{q-1}, appartenente a V_q, taglia su di una L una curva avente una certa valenza γ. Dico che, se si denotano con F_0, N_0 le varietà composte rispettivamente mediante le Φ che escon dai punti ove le F, N son segate da una H, e che non contengon questa curva, ha luogo la relazione

$$F - \gamma N \equiv F_0 - \gamma N_0. \tag{1}$$

Il teorema è vero per $q = 2$ (*). Per passare da $q-1$ a q, ta-

(*) SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica*, ecc. [" Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino " (1903)], n. 23.

gliamo le F, N, F_0, N_0 con una Φ contenente la H fissata. Poichè Φ è identica alla varietà delle $(q-1)$-ple di C, si potrà applicare il teorema ammesso alle varietà sezioni, e s'avrà

$$(2) \qquad (F, \Phi) - \gamma (N, \Phi) \equiv (F_0, \Phi) - \gamma (N_0, \Phi),$$

la quale, in virtù di un noto criterio di equivalenza (*), prova che la varietà (effettiva o virtuale) $F_0 - \gamma N_0$, al muoversi di H entro Φ, varia in un sistema lineare fisso. Se a questo punto si osserva, che, date due H qualunque, se esse non stanno in una Φ, si può sempre trovare una terza H che stia in una Φ con ciascuna delle due date, si conclude che $F_0 - \gamma N_0$ si muove in un sistema lineare fisso, comunque varî H entro V_q.

Dopo ciò, la (2) ci mostra che la $F - \gamma N$ e le $F_0 - \gamma N_0$ staccano varietà equivalenti sopra *ogni* Φ; e poichè Φ non ha punti multipli, così ne segue (**) la (1).

(*) Severi, *Osservazioni varie di geometria*, ecc. [" Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti ", t. XLV (1905-06), pp. 625-643], p. 635, teor. V.

(**) Vedi il criterio di equivalenza enunciato ai nn. 5, 6 della mia Nota *Alcune relazioni d'equivalenza*, ecc. [" Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti ", t. LXX (1910-11), pp. 373-382], p. 379, criterio precisato e dimostrato da Torelli, *Un criterio d'equivalenza per le curve di una superficie algebrica* [Questi " Atti ", t. XLIX (1913-14), pp. 845-858], p. 815. Qui veramente il criterio stesso si applica al caso generale di varietà di dimensione qualunque, mentre il Torelli lo dimostra per curve di una superficie. Indicherò un modo semplice, per passare da questo al caso generale, dimostrando che, " se entro una V_k, due varietà M_{k-1}, A, B, staccano varietà equivalenti sulle W_{k-1} di un sistema irriducibile, ∞^1, Σ, e se inoltre la generica W non ha varietà multiple variabili a $k-2$ dimensioni, le A, B son equivalenti o differiscono per varietà fondamentali di Σ ". Dimostriamo il teorema per induzione, passando da $k-1$ a k, supposto, beninteso, $k > 2$. Fissiamo entro V un fascio lineare $|C|$, privo di varietà spezzate. Per l'ipotesi fatta, entro una C, le varietà (C, A), (C, B), staccano varietà equivalenti sulle (C, W), le quali son prive di varietà multiple variabili, a $k-3$ dimensioni. Ne deriva che le (C, A), (C, B) si equivalgono o differiscono per varietà fondamentali del sistema segato da Σ su quella C. Poichè ciò vale per ogni C, ne segue senz'altro l'asserto, in virtù del primo fra i criterî d'equivalenza da me dimostrati (nella Memoria, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, degli " Annali di matematica pura ed applicata " (3), XII (1905), pp. 55-80, n. 6).

Salendo fino a $q = p$, se ne trae che *sopra la varietà di Jacobi relativa ad una curva priva di corrispondenze simmetriche singolari, la base minima è data dal sistema* Σ, giacchè in tal caso può prendersi come particolare g_n^{q-1}, con cui costruire N, la g_{2p-2}^{p-1} canonica, la quale dà origine a p-ple rappresentate da una M_{p-1} eccezionale, che si trasforma in una M_{p-2}, quando come varietà di Jacobi si prenda quella che rappresenta le g_p di C.

Il sistema Σ, ∞^1, che qui si considera, è contenuto totalmente nel sistema che il Comessatti indica pure con Σ. Poichè tutti i sistemi continui appartenenti alla V_p di Jacobi inerente alla nostra C, son multipli del sistema completo Σ, su V_p non potrà esservi che un sol sistema di tal tipo.

A partire da questo punto, mediante le relazioni aritmetiche che possono scriversi una volta conosciuta la base, io deducevo che un'altra curva C', cui spettasse la stessa V_p, era di necessità birazionalmente identica a C. Mediante il teorema dimostrato ai nn. 2, 3 del lavoro del Comessatti, questo fatto consegue ormai immediatamente.

Noterò che il ragionamento geometrico esposto, prova pure che *ad una* V_p *inerente ad una curva* C *priva di corrispondenze simmetriche singolari, non possono appartenere funzioni intermediarie.*

È poi noto, come all'ipotesi che C non contenga corrispondenze simmetriche singolari, si possa sostituire l'altra che essa sia a moduli generali (Vedi la mia Memoria, *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile*, ecc., nei " Math. Annalen ", Bd. LXXIV (1914), pp. 1-30).

Padova, 29 gennaio 1915.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 14 Febbraio 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Chironi, Direttore della Classe, Carle, De Sanctis, Ruffini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta e Stampini, Segretario della Classe.

Assistono, per invito fatto a tutti i Socii residenti dell'altra Classe, i Socii D'Ovidio, Foà, Guareschi, Mattirolo, Balbiano, e i Socii corrispondenti della nostra Classe Alessandro Luzio e Vittorio Cian.

È letto e approvato l'atto verbale della seduta precedente.

Il Presidente presenta un opuscolo del Socio corrispondente Giuseppe Biadego, contenente la Commemorazione, da lui fatta all'Accademia d'agricoltura, scienze e lettere di Verona, dei Socii di essa Accademia Ettore Calderara, Luigi Adriano Milani, Alessandro D'Ancona, Francesco Cipolla. Poscia il Presidente con commosse parole ricorda come la morte di Alessandro D'Ancona sia stata un lutto per tutti coloro che conoscono la storia delle lettere e della vita politica italiana: ricorda che il D'Ancona, il quale era annoverato fra i più luminosi ornamenti della nostra Accademia, appartenesse a Torino anche per

aver compiuti i suoi studî nella sua Università quando venne fra noi dalla nativa Toscana, palpitante d'italianità, nei tempi in cui si preparava il riscatto della patria. Ricorda in fine i vincoli d'amicizia che lo legavano al D'Ancona sin dagli anni della sua giovinezza, quando dalle mani di lui stesso ricevette il memorabile studio sul Campanella. Dopo di che il Presidente dà la parola al Socio Sforza, che legge la sua Commemorazione di Alessandro D'Ancona.

Terminata la lettura del Socio Sforza, la Classe per acclamazione ne delibera l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini.

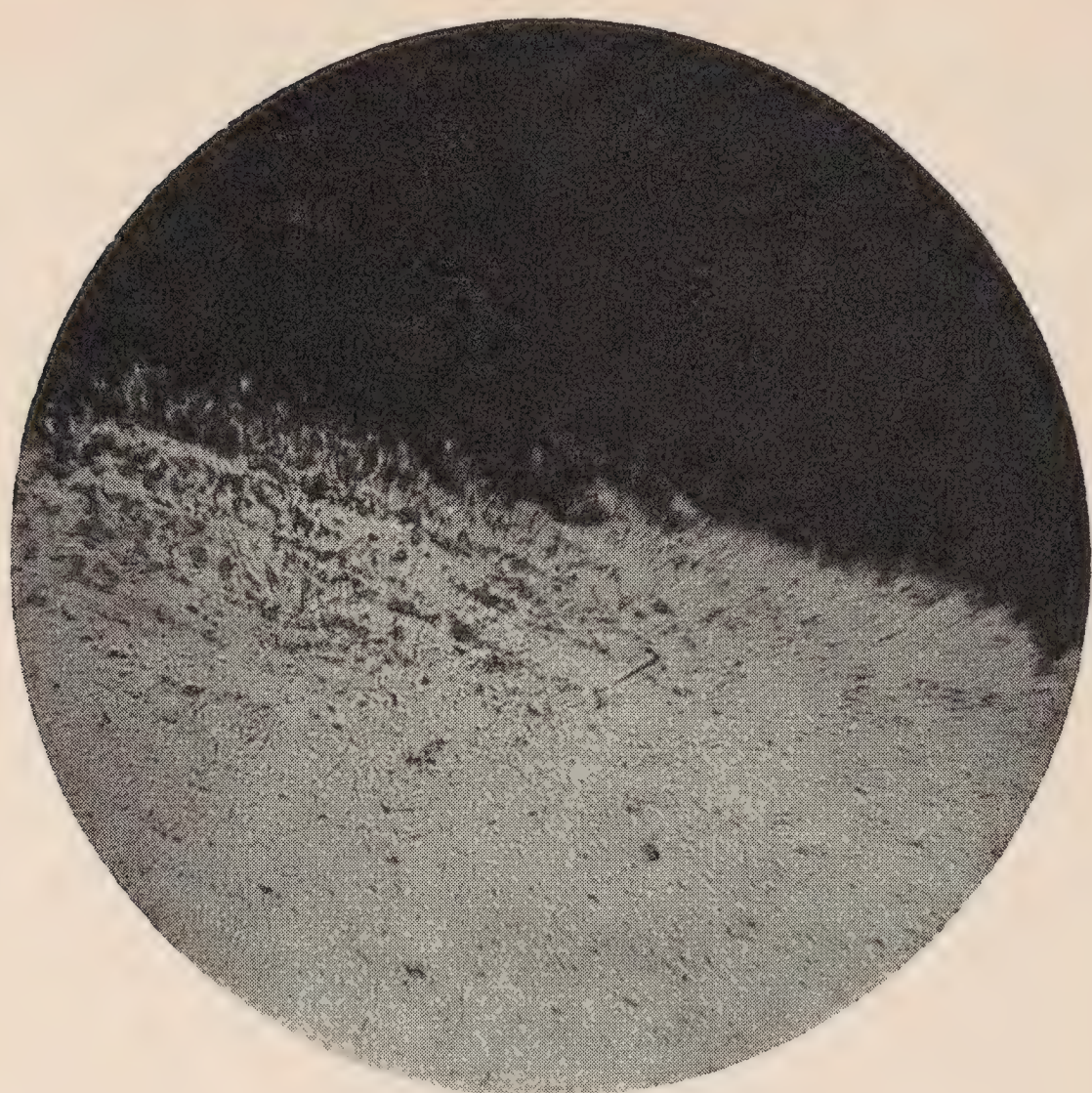



Fig. 1.

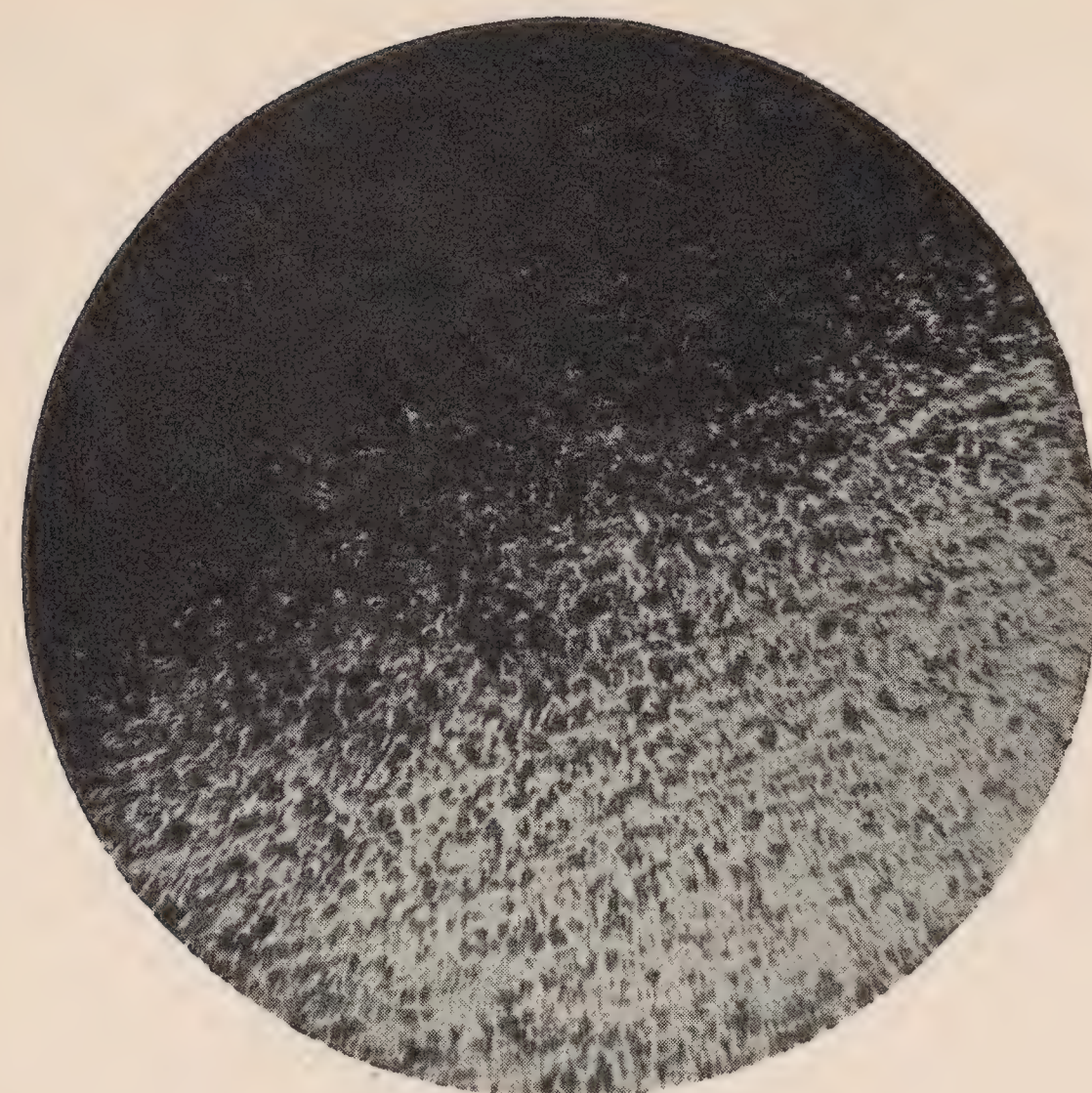



Fig. 2.

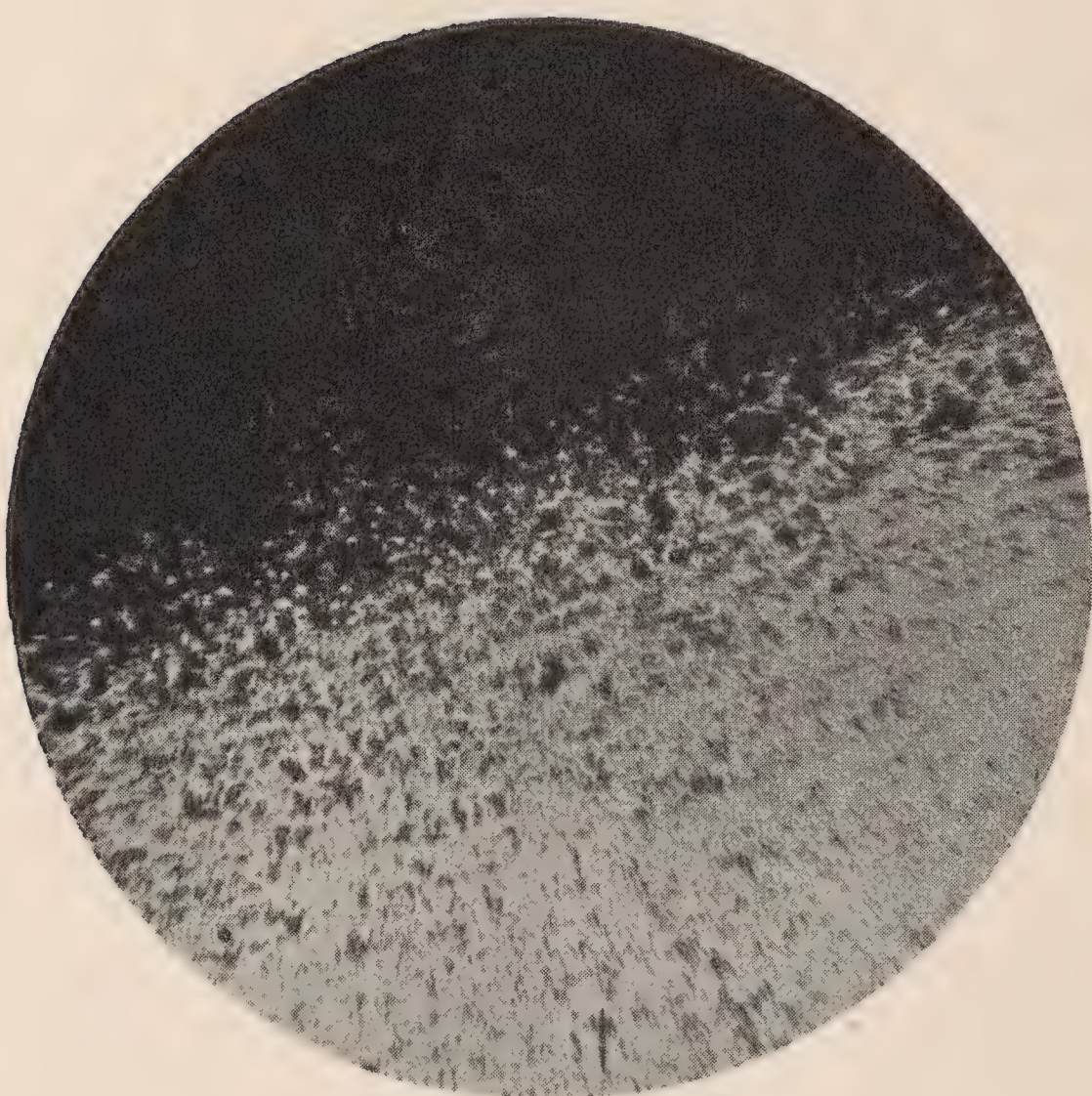



Fig. 3.

Fig. 4.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. L. Disp. 8ª. **1914-1915.**

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 21 Febbraio 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio e i Soci Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari e Segre, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Naccari.

È letto e approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente comunica una Circolare della Società Leonardo da Vinci, di Firenze, che invita ad aderire ad un ordine del giorno con cui si chiede " che i monumenti artistici e storici, le gallerie e i musei, le biblioteche e gli archivi, tutte insomma le sedi e le raccolte di documenti d'arte e di cultura, siano dagli eserciti belligeranti risparmiati, con ogni sforzo, durante e dopo l'azione guerresca, come quelli che sono, per l'avvenire, testimoni gloriosi del passato, e che non soltanto all'una o all'altra nazione ma appartengono a tutto il mondo civile ". La Classe unanime aderisce a tale voto.

Il Socio Somigliana presenta in omaggio il 1° numero del " Bollettino del Comitato glaciologico italiano ", e ne discorre.

Il Socio Jadanza legge una Commemorazione del Socio Nazionale Lorenzoni. Verrà inserita negli *Atti*.

Pure per gli *Atti* vengono offerte dagli Autori le seguenti Note:

N. Jadanza, *Nota sul calcolo numerico dei logaritmi neperiani di 2 e 5*;

G. Peano, *Resto nella formula di quadratura Cavalieri-Simpson*;

e vengono presentate queste altre:

E. Laura, *Sopra il problema della propagazione di moto all'esterno di una sfera in un mezzo elastico isotropo indefinito,* dal Socio Somigliana;

L. Loredan, *Sugli organi nervosi terminali sensitivi nei muscoli cutanei dei mammiferi,* dal Socio Fusari;

G. Lignana, *Sulla misura della differenza di fase di due correnti sinoidali*, dal Socio Grassi;

F. Chelli, *Osservazioni del passaggio di Mercurio sul disco del Sole il 6-7 novembre 1914*, dal Socio Segre.

Pei volumi delle *Memorie* il Socio Fusari presenta un lavoro del Dott. Marco Pitzorno, *Nuove ricerche sulla struttura dei gangli della catena del simpatico nei Vertebrati inferiori.* Riferiranno su di esso i Soci Foà e Fusari.

LETTURE

GIUSEPPE LORENZONI

Commemorazione del Socio NICODEMO JADANZA

Illustri Colleghi,

Il giorno 7 luglio 1914 fu un giorno di lutto per la Scienza astronomico-geodetica italiana per la morte di Giuseppe Lorenzoni, Direttore dell'Osservatorio astronomico di Padova e Professore in quella Università. Oggi che io debbo parlare di Lui, vengo dinanzi a voi con una certa trepidazione per il timore di non aver saputo ritrarre al suo giusto valore l'opera scientifica di codesto nostro Socio, che dev'essere annoverato tra i migliori astronomi che abbia avuto l'Italia.

Giuseppe Lorenzoni nacque a *Cison di Valmarino* in Provincia di *Treviso* e propriamente nella frazione *Rolle* di detto comune il 10 luglio 1843; fece i primi studi sotto la guida di suo padre maestro elementare, le scuole secondarie a Venezia, e le superiori a Padova, dove si laureò Ingegnere nel luglio del 1864.

Per la sveltezza del suo ingegno e per la docilità della sua indole fu scelto da Giovanni Santini, prima ancora che compisse i suoi studi, e cioè dal 1° novembre 1863, assistente all'Osservatorio di Padova. Nel 1867 fu confermato assistente e gli fu affidato l'incarico delle lezioni di Astronomia; nel 1872 fu nominato Professore straordinario e nel 1878, dopo la morte del Santini, ebbe la nomina di ordinario e di Direttore dell'Osservatorio. Tenne anche, come incaricato, la cattedra di Geodesia dal 1869 al 1885.

" Ufficio principale (sono sue parole) dell'Astronomo teo-

" rico-pratico è di seguire con assiduità il corso degli Astri
" collo scopo di perfezionarne le teorie e preparare materiali
" per la scoperta di nuove leggi e di cause ancora ignote della
" natura. Egli è nell'adempier bene siffatto ufficio che la vita
" di un buon Astronomo diventa dura, penosa, obligante, che gli
" fanno duopo qualità speciali: organi squisiti, salute inaltera-
" bile, intelligenza, destrezza, perseveranza, pochi bisogni, pochi
" legami, conveniente istruzione e fervore scientifico „.

Lorenzoni ebbe tutte le qualità per essere un eccellente Astronomo teorico-pratico e lo fu.

Uno dei primi lavori, oltre quelli di ufficio, fu di ridurre al 1850,0 le osservazioni che l'astronomo Virgilio Trettenero (morto in giovane età nel 1863) aveva fatto al cerchio meridiano di Padova nella zona compresa fra 0° e 3° di declinazione australe.

Fu uno tra i primi cultori italiani della spettroscopia, e dopo aver ottenuto per l'osservatorio uno spettroscopio di Hoffman, ne studiò la teoria e l'uso pratico e potè così prendere parte alla spedizione organizzata dal Tacchini nel 1870 per osservare la eclisse totale di sole del 22 dicembre a Terranova di Sicilia.

Formatasi la Società degli Spettroscopisti italiani, egli contribuì assiduamente ai lavori di essa insieme a Secchi e Tacchini. Alcune Note, che trovansi nei primi volumi delle Memorie di detta Società, riguardanti le osservazioni fatte sopra alcune righe lucide dello spettro cromosferico solare, ebbero in quel tempo una importanza eccezionale. In esse Memorie si trova anche una interessante ricerca teorica intorno *a un mezzo atto a rendere visibile tutta in una volta una immagine monocromatica completa della cromosfera e delle protuberanze solari.*

L'attività del Lorenzoni si manifestò in modo eminente nei lavori della Commissione geodetica italiana.

Di tale Commissione di cui lo Schiaparelli fu l'anima, il Lorenzoni fu il braccio destro. Fin dal 1873 lo troviamo nelle riunioni di detta Commissione come rappresentante del Professore Santini, Direttore dell'Osservatorio di Padova, in seguito come membro effettivo di essa. Non mancò mai alle riunioni di essa fino al 1909.

Nel settembre del 1874 eseguì le misure della latitudine e di azimut all'estremo N. O. della base di Lecce.

Nell'aprile e maggio 1875 prese parte alle operazioni per la determinazione delle differenze di longitudine fra Padova, Milano, Vienna e Monaco di Baviera.

Nel luglio 1875 prese parte alle differenze di longitudine tra Padova, Milano, Napoli e Genova, e nel 1874-1890 fece la determinazione di azimut a Padova. Altri lavori astronomici da Lui fatti si trovano registrati a pagina 73 del Processo verbale delle sedute della *Commissione geodetica Italiana* tenute a Milano nel 1895 e 1900.

La Commissione geodetica italiana aveva fin dal 1869 preso impegno di contribuire colle altre nazioni alla soluzione dell'importantissimo problema della ricerca della intensità della gravità; però fino al 1880 non si era fatto nulla di concreto. Incaricato il LORENZONI da detta Commissione, presentò alla riunione tenuta a Firenze il 14 e 15 giugno 1880, una importante relazione *Intorno alle principali ricerche sulla lunghezza del pendolo a secondi eseguite nell'ultimo ventennio* (1860-1880), facendo notare che nella Conferenza generale della Commissione internazionale tenuta a Stuttgart nel 1877, *fu constatato che da parte della nostra Commissione non si era ancora fatto nulla in proposito alle ricerche sul pendolo.*

Nel presentare la suddetta relazione egli si espresse nei seguenti termini:

" Onorevoli Colleghi. Un anno fa la nostra Commissione
" ristretta risolveva in massima d'intraprendere ricerche sulla
" lunghezza del pendolo semplice che batte i secondi, e m'inca-
" ricò di fare uno studio preliminare sull'indirizzo da dare a
" cosifatte ricerche, e sulla qualità dell'apparato che dovrebbe
" acquistarsi. Io credo che essa siasi indotta a darmi un tale
" incarico per il motivo, che io aveva avanzato riservatamente
" l'opinione che convenisse anche agli Italiani di prendere parte
" alle misure del pendolo. Poichè, senza parlare dell'impegno
" morale da noi contratto nel 1869 e nel 1875 di occuparci di
" tali misure, basta fermare per poco il pensiero su quanto si
" faceva in argomento presso le altre nazioni in questi ultimi
" vent'anni, per riconoscere che si sta per giungere alla riso-
" luzione di un altro importante problema scientifico, senza che
" gli studiosi italiani vi abbiano quasi in nulla contribuito. E
" se le cose avessero a procedere presso noi come fino ad ora,

“ probabilmente dovremmo, tosto o tardi, sopportare, come già
“ in altri tempi, che gli stranieri vengano a fare nel nostro
“ paese ricerche e determinazioni che avrebbero il diritto di
“ attendersi da noi „.

La Commissione, oltre a concedere tutte le spese occorrenti per l'acquisto del pendolo a reversione e degli altri strumenti necessari alle esperienze, stanziava una somma adeguata
“ affinchè il Lorenzoni possa intervenire alla prossima adunanza
“ dell'Associazione geodetica internazionale e possa visitare gli
“ Osservatorî e gli stabilimenti meccanici stranieri per assu-
“ mere sui luoghi le più esatte informazioni intorno alle ri-
“ cerche a lui affidate, e per prendere cogli artefici i prelimi-
“ nari concerti relativamente agli strumenti da acquistare „.

Il Lorenzoni andò alla Conferenza internazionale riunitasi a Monaco di Baviera nel settembre (dal 13 al 16) 1880, ed ebbe agio di conferire cogli scienziati che si erano occupati dello stesso argomento, cioè coi signori Hirsch, Albrecht, Plantamour, Bruhns ed Oppolzer, e dopo aver visitato l'Ufficio della *Gradmessung* di Vienna, dove potè esaminare in tutte le sue parti il pendolo austriaco vedendolo funzionare e ricevendo varie istruzioni circa il modo di eseguire le osservazioni, ebbe una lunga conferenza coi signori Repsold, nella quale furono discussi alcuni punti riguardanti la costruzione dell'apparecchio. L'apparecchio fu commesso ai signori Repsold alla fine del 1880 e in principio del 1882 pervenne all'Osservatorio di Padova. Dopo esperienze preliminari nell'agosto del 1885 fu eseguita una serie completa di osservazioni, dalla quale scaturirono alcuni insegnamenti di cui tenne conto in una seconda serie di osservazioni fatta nel febbraio 1886, sei mesi dopo la prima, quando nella stanza di osservazione si verifica la minima temperatura, mentre nell'agosto ha luogo la massima.

Il Lorenzoni ha reso conto delle operazioni da lui eseguite in una classica Memoria di 248 pagine e 9 tavole, pubblicata dall'Accademia dei Lincei nel 1888. Essa ha per titolo: *Relazione sulle esperienze istituite nel R. Osservatorio astronomico di Padova in agosto 1885 e febbraio 1886 per determinare la lunghezza del pendolo semplice a secondi*, e si compone di tre parti, la prima dedicata alla *teoria*, la seconda al luogo di *osservazione, strumenti ed errori strumentali*, la terza alle *ricerche sperimentali.*

Il risultato finale si trova a pag. 228 di detta Memoria ed è il seguente:

Lunghezza del pendolo semplice che batte i secondi a Padova nel luogo di osservazione, cioè a 19 metri circa sul livello del mare

$$993^{mm}\ 547^{\mu},7 \pm 4^{\mu},5 \text{ (errore probabile).}$$

Un confronto fatto col medio di alcuni valori ottenuti da altri Osservatori e ridotti al parallelo di Padova col coefficiente di Helmert diede un risultato quasi esattamente coincidente con quello ottenuto dal Lorenzoni, e perciò ne concluse:

Non sembra dunque che a Padova esista una sensibile anomalia della gravità.

Intanto il Colonnello Roberto Sterneck nel 1887 aveva inventato un apparato pendolare molto comodo per misure della gravità relativa, e, dopo parecchie stazioni fatte in diversi luoghi, andò a Padova dove nel giorno 27 settembre 1891 il Lorenzoni potè eseguire coll'apparato di Sterneck le osservazioni con esito pienamente soddisfacente.

Nei primi di ottobre dello stesso anno 1891 il Lorenzoni ebbe l'opportunità di conoscere dal Comandante Defforges l'apparato ed il metodo da questi usato per la determinazione della gravità relativa in Francia. Stimando utilissimo di avere a sua disposizione diversi mezzi per le ricerche di gravità onde istituire dei confronti tra i risultati ottenuti con essi, propose l'acquisto tanto dell'apparato di Sterneck, quanto di quello di Defforges.

La Commissione geodetica italiana, aderendo al desiderio del Lorenzoni, ordinò l'acquisto dei due apparati. Con quello di Sterneck il Lorenzoni fece le esperienze a Padova nei giorni 3 e 4 luglio del 1892 e con quello di Defforges fece prima esperienze a Parigi nei giorni 4 e 7 agosto dello stesso anno e quindi a Padova dal 18 settembre al 1° ottobre 1892 e dal 16 al 24 febbraio 1893.

Risultato di queste esperienze fu che: *la lunghezza del pendolo semplice data per Padova dalle sue osservazioni del 1885 e 1886 e ridotta a Vienna si trovò inferiore di 80 micron a quella direttamente determinata ivi da* Oppolzer.

Quale la ragione di tale differenza? Da principio si credette all'esistenza di un errore rilevante nelle esperienze del LORENZONI del 1885 e 1886, ma i confronti istituiti nello stesso anno 1892 dal Colonnello STERNECK del valore di OPPOLZER con quelli ottenuti da varî autori in diversi luoghi condussero al sospetto che nel metodo di determinare la lunghezza del pendolo semplice, mediante il pendolo convertibile, vi sia qualche fonte di errore sistematica ed ignota.

Il LORENZONI, osservatore scrupoloso e coscienzioso, nell'intento di cercare se mai quella differenza dovesse attribuirsi a qualche cosa che prima era stata trascurata, rifece alcune esperienze nel 1893, ma non trovò nulla che potesse infirmare le osservazioni del 1885 e 1886.

Dopo di avere, mediante gli apparati di STERNECK e DEFFORGES, collegato il valore della gravità a Padova con quelli di Vienna e di Parigi e indirettamente con quelli di molte altre stazioni europee, nell'autunno del 1893 collegò con Padova anche i valori della gravità ottenuti da BIOT a Milano e dai Professori PISATI e PUCCI a Roma, ottenendone risultato soddisfacente.

Da un prospetto di 18 determinazioni della lunghezza del pendolo a secondi eseguite in diversi luoghi ed in epoche diverse e ridotte all'Istituto Geografico di Vienna, che trovasi in una delle memorie del LORENZONI (1), si rileva che tra il minimo ed il massimo vi è una differenza di 128 micron. Il LORENZONI perciò scrive:

" *Questo prospetto ci dice che il problema della determina-*
" *zione della lunghezza del pendolo semplice che batte i secondi*
" *domanda nuovi studi prima di dirsi completamente risolto* „.

Da quanto è stato detto si vede che il LORENZONI nulla ha trascurato per risolvere un problema così importante, o, come scrisse *Bacone da Verulamio*:

ut natura magis magisque detegatur.

---

(1) Questo prospetto si trova insieme a molte altre interessanti considerazioni sui valori della lunghezza del pendolo e specialmente sull'attendibilità della 5ª cifra dopo la virgola nella lunghezza del pendolo espresse in metri in una nota (nota 2ª) dell'Ing. O. ZANOTTI BIANCO intitolata *I concetti moderni della figura della Terra* (" Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, XL, 1904).

" Non era il Lorenzoni uno spirito brillante, un facile ora-
" tore: no; era uno studioso di mente acuta e di una sì alta
" coscienza dei suoi obblighi che gli fu stimolo incessante per
" acquistare una intensa coltura e per impartire corsi mirabili
" di precisione e svariati negli argomenti e astronomici e geo-
" detici „ (1).

La caratteristica di detti corsi è la dovizia delle notizie storiche sui diversi argomenti con brevi accenni biografici degli autori che di essi si occuparono. Ciò manifesta l'intento di rendere il dovuto omaggio all'opera dei predecessori, e più efficace l'insegnamento.

Io ebbi la fortuna di conoscerlo di persona nell' aprile del 1906, quando la Commissione Geodetica Italiana si riunì a Roma; subito mi colpì la sua bontà e la sua modestia ed in me si accrebbe la reverenza che aveva sempre avuto per l'onorando Maestro. Fui con lui a Padova pochi giorni dopo e visitai quell' Osservatorio. Lo rividi poi di nuovo a Roma nell'aprile del 1909.

Il Presidente della Commissione Geodetica Italiana, Senatore Giovanni Celoria, con gentile pensiero, volle che la riunione del 1912 si facesse a Padova colla speranza di rendere più facile il suo intervento alle adunanze di detta Commissione. Fu vana speranza! Le condizioni di sua salute non lo permisero, ed egli si scusò con la seguente lettera:

Padova, 23 giugno 1912.

" *Illustre Signor Presidente*,

" Quei disturbi di salute che mi interdicono da tempo non
" breve l' adempimento dei maggiori miei doveri d'ufficio e mi

---

(1) Dalla bella *Commemorazione di* Giuseppe Lorenzoni fatta da Elia Millosevich all'Accademia dei Lincei nella seduta dell'8 novembre 1914. Sono eloquenti le ultime parole di detta commemorazione, che qui ripetiamo: " Era membro di Accademie, Società ed Istituzioni scientifiche ita-
" liane o straniere; senonchè la eccezionale sua modestia e la semplicità
" della sua anima influirono perchè negli ambienti non scientifici passasse,
" non dirò inosservato, ma certamente non designato. Ma ben lo designa
" la storia dell'astronomia italiana, come il più benefico maestro dell'ul-
" timo quarantennio „.

" hanno indotto a chiedere al Reale Governo il collocamento a
" riposo, mi vietano altresì la soddisfazione di partecipare, come
" avrei desiderato, con la presenza a questa importante Riu-
" nione, la quale dopo ventinove anni (Ella ben se ne ricorda)
" si ripete qui in Padova per trattare ancora, come allora, que-
" stioni d'ordine scientifico, la cui pratica soluzione forma l'og-
" getto di questa Commissione Geodetica fino dalla sua prima
" costituzione avvenuta nel 1865.

" Della mia forzata assenza domando scusa a Lei signor
" Presidente, e ai chiarissimi colleghi, qui convenuti, ai quali
" mi sarebbe stato grato di porgere a viva voce quel saluto
" riverente e affettuoso che Ella vorrà, io spero, in mio nome
" dar Loro, e avrei voluto io stesso mostrare gli strumenti gra-
" vimetrici qui, a spese della Commissione, adunati nell'ultimo
" trentennio, ma che potranno egualmente essere veduti con la
" scorta dei miei colleghi dell'Osservatorio.

" Aggradisca, illustre ed amato Presidente, l' espressione
" del mio profondo ossequio e della mia inalterabile affezione.

Devotissimo, Obbligatissimo Suo

G. Lorenzoni „.

A questa lettera fu risposto col seguente telegramma:

" La R. Commissione Geodetica Italiana oggi radunata,
" udita la di lei mirabile lettera, commossa, unanime Le invia
" un saluto riverente e fa voti fervidi perchè presto Ella sia
" restituita alla Scienza che tanto onora.

Il Presidente: G. Celoria „.

Il nostro augurio non fu di lunga durata; nell'ora prima del 7 luglio 1914 si spense la vita di colui che aveva per circa 50 anni lavorato a prò della Scienza da lui prediletta.

Il suo spirito aleggia intorno all'Osservatorio di Padova, da Lui reso così celebre, ed illuminerà il suo successore, già educato alla sua scuola, affinchè possa mantenerne e magari accrescerne il lustro.

Torino, gennaio 1915.

Nota.

A completare la figura del Lorenzoni non riuscirà inutile sapere che Egli, appena avuto un posto, pensò subito ad aiutare la famiglia. Sposatosi nel 1866, prese con sè i fratelli e le sorelle, tutti più giovani di Lui, e dei quali fu un secondo padre e la sua ottima Signora una madre affettuosissima. La madre del Lorenzoni visse fino a tarda età; morì nel 1898. Era *beata* di parlare del suo *Beppi* ricordando il tempo in cui era ragazzo *sempre buono, serio, studioso, mai giochi, mai vizii*..... e più tardi *tutto affetto e tutto premure per la famiglia*.....

Queste notizie le ho avute dal Prof. A. Antoniazzi suo allievo ed attuale Direttore dell'Osservatorio di Padova. Egli è stato cortese d'inviarmi l'elenco qui annesso delle pubblicazioni e la fotografia del Lorenzoni. Accolga l'egregio collega i miei ringraziamenti.

Pubblicazioni del Prof. G. Lorenzoni.

Negli Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.

1. *Sull'eclisse totale del sole dell'11 dicembre 1871.* Calcolo preparatorio. Serie III, tomo XVI, pp. 2118-48 (con una tavola).
2. *Sulle osservazioni spettroscopiche del bordo solare fatte nel R. Osservatorio di Padova l'11 dicembre 1871.* Nota. Serie IV, tomo I, pp. 389-92 (con una tavola).
3. *Sulla eclisse parziale di sole del 26 maggio 1873.* Nota. Serie IV, tomo II, pp. 1960-82 (con due tavole).
4. *Rapporto al R. Ministero della Istruzione pubblica relativo alla spedizione scientifica nell'Africa equatoriale.* Serie V, tom. II, pp. 409-23.
5. *Di un mezzo atto a rendere visibile tutta in una volta una immagine monocromatica completa della cromosfera e delle protuberanze solari.* Ricerca teorica. Serie IV, tomo III, pp. 1293-318 (con una tavola).
6. *Sulla direzione nello spazio della coda della cometa Coggia* (III-1874). Serie V, tomo I, pp. 1105-24 (con due tavole).
   Nota seconda. Serie V, tomo II, pp. 241-50 (con una tavola).
7. *Dimostrazione dell'equazione di Clairaut indipendente dalla proprietà della linea geodetica di essere la brevissima.* Serie V, tomo II, pp. 591-97 (con una tavola).

8. *Sulle formule fondamentali della trigonometria sferica e su quelle che servono pel calcolo della parallasse nelle coordinate di un astro.* Nota. Serie V, tomo III, pp. 1052-69 (con una tavola).
9. *Rapporto della Commissione deputata a esaminare le proposte del m. e. Torelli nella sua Memoria " Matteo Fontaine Maury e la meteorologia applicata all'Agricoltura ".* In Commissione coi Membri Bellavitis e Pazienti. Serie V, tomo IV, pp. 1089-93.
10. *Sulla determinazione delle coordinate angolari mediante gli strumenti astronomici e, in particolare, sullo strumento dei passaggi.* Principii e formole. Serie V, tomo IV, pp. 1273-373 (con 4 tavole).
11. *Ringraziamento al signor Principe Boncompagni per il dono di un fac-simile di alcune lettere inedite del Lagrange.* Comunicazione. Serie V, tomo V, pp. 453-55.
12. *Sul luogo sferico dei punti nei quali è minima la variazione dell'azimut rispetto al tempo.* Nota. Serie V, tomo V, pp. 749-74 (con una tavola).
13. *Sulla eclisse parziale di sole del 18 (19 mattina) luglio 1879 osservata nella R. Specola di Padova.* Comunicazione. Serie V, tomo V, pp. 913-17.
14. *Sull'andamento del pendolo di Frodsham n° 1604 posseduto dal R. Osservatorio astronomico di Padova.* Nota. Serie V, tomo VII, pp. 279-308.
15. *L'equatoriale Dembowski al R. Osservatorio di Padova.* Comunicazione. Serie V, tomo VII, pp. 779-80.
16. *Di una modificazione al cronografo di Fuess eseguita dal meccanico di Padova Giuseppe Cavignato.* Comunicazione. Serie V, tomo VII, pp. 1087-96 (con figura nel testo).
17. *Sulle osservazioni della cometa* b *(III) 1881 fatte al R. Osservatorio di Padova.* Memoria. Serie V, tomo VIII, pp. 683-713 (con due tavole).
18. *L'astronomia in questi ultimi tempi.* Discorso letto nella solenne adunanza del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti il 15 agosto 1882. Serie V, tomo VIII, pp. 1575-612.
19. *Sulle determinazioni di tempo eseguite ad Arcetri nell'autunno del 1882 colla osservazione dei passaggi di stelle pel verticale della Polare.* Nota. Serie VI, tomo II, pp. 343-96 (con due tavole).
20. *Dimostrazione delle formole di precessione e nutazione.* Memoria. Serie VI, tomo III, pp. 1025-92 (con due tavole).
21. *Sulla equazione differenziale del moto di un pendolo fisico il cui asse di sospensione muovesi rimanendo parallelo a sè stesso.* Nota. Serie VI, tomo V, pp. 331-75 (con una tavola).
22. *Eclisse totale della luna e contemporanee occultazioni di stelle osser-*

vate a Padova nella notte del 28 gennaio 1888. Comunicazione. Serie VI, tomo VI, pp. 609-20.

23. *Correzione di scala ed elevazione sul mare del barometro dell'Osservatorio di Padova e risultati medî con esso ottenuti nel ventennio 1868-1877.* Nota. Serie VI, tomo VI, pp. 1367-97.
24. *Sulla deviazione dal piede della verticale di un grave liberamente caduto dalla superficie della terra sul fondo di una cava.* Nota. Serie VI, tomo VII, pp. 759-84 (con una tavola).
25. *Relazione sui lavori presentati al concorso della fondazione Tomasoni sul tema: " Storia del metodo sperimentale in Italia ".* Serie VII, tomo I, pp. 319-43.
26. *Il movimento e il cielo di Venere secondo Dante.* Annotazioni (con una tavola e una appendice sulle formole per calcolare lo splendore di Venere). Serie VII, tomo II, pp. 1061-88.
27. *Determinazione relativa della gravità terrestre negli Osservatorî di Vienna, di Parigi e di Padova mediante gli apparati e colla cooperazione dei signori colonnello di Sterneck e comandante Defforges.* Serie VII, tomo IV, pp. 1373-441.
28. *Nuovo esame delle condizioni del supporto nelle esperienze fatte a Padova nel 1885 e 1886 per determinare la lunghezza del pendolo a secondi e mezzo pratico per individuare gli assi geometrici di rotazione nelle due posizioni reciproche del pendolo convertibile.* Serie VII, tomo V, pp. 9-31.
29. *Determinazione relativa della gravità terrestre a Padova, a Milano e a Roma fatta nell'autunno del 1893 mediante l'apparato pendolare dello Sternek.* Serie VII, tomo V, pp. 255-93.
30. *L'effetto della flessione del pendolo sul tempo della sua oscillazione.* Nota. Serie VII, tomo VII, pp. 466-74.
31. *Discorso nell'assumere il seggio presidenziale dell'Istituto Veneto.* Serie VII, tomo VIII, p. 152.
32. *Parole pronunciate nei funerali del m. e. Segretario Paulo Fambri.* Serie VII, tomo VIII, pp. 497-99.
33. *L'effetto della flessione del pendolo sul tempo della sua oscillazione.* Nota. Serie VII, tomo IX, pp. 61-68.
34. *Commemorandosi il primo cinquantenario dalla fondazione del Panteon Veneto, nell'occasione in cui vi si collocava il busto di Daniele Manin il 20 marzo 1898.* Parole. Serie VII, tomo IX, pp. 680-83.
35. *Sulle librazioni apparenti della luna.* Appunti e schiarimenti storici. Tomo LX, part. II, pp. 91-140.
36. *Informazione storica premessa alla Nota del dott. Antoniazzi: " Passaggi dei lembi della luna e posizione del cratere Moesting A os-*

servati al Circolo Meridiano di Padova negli anni 1897 e 1898 „. Tomo LX, parte II, Annessi, pp. 1-31.

37. *Osservazioni di occultazioni e di eclissi* (Contributi dell'Osservatorio astronomico della R. Università di Padova). Tomo LXI, parte II, Annessi, pp. 59-86.
38. *Pietro Tacchini nei primordi della sua carriera astronomica a Padova, raccomandato da Giuseppe Bianchi a Giovanni Santini.* Tomo LXIV, parte I, pp. 89-95.
39. *Il problema della correzione di un'orbita secondo il prof. Bauschinger.* Memorie. Tomo LXV, part. II, pp. 319-70.
40. *Il passaggio di Mercurio sul disco del Sole osservato alla Specola di Padova il 14 novembre 1907.* Comunicazione. Tomo LXVII, parte I, pp. 47-49.
41. *Prefazione ed Appendice alla Nota del dott. G. A. Favaro sul* " *Confronto fra le osservazioni dell'eclisse solare del 30 agosto fatte a Padova e i calcoli eseguiti con la* ' *Connaissance des Temps* ' *ed il* ' *Nautical Almanac* ' „. Tomo LXVII, parte II, pp. 879-882, 903-908.
42. *Commemorazione del m. e. prof. Giuseppe Ciscato.* Tomo LXVIII, parte I, pp. 7-17.
43. *Lo strumento universale all'Osservatorio astronomico di Padova.* Note di cronaca retrospettiva. Tomo LXX, parte II, pp. 1343-65.
44. *L'areobarografo dell'Osservatorio astronomico di Padova.* Descrizione e Teoria. Tomo LXXI, parte II, pp. 203-221.

Sunti di Memorie e di Note presentate alle Adunanze del Reale Istituto Veneto. Nella I parte degli Atti: Tomo LX, pp. 72-74; tomo LX, pp. 79-80; tomo LXI, pp. 43-44; tomo LXI, p. 102; tomo LXI, pp. 110-111; tomo LXIII, pp. 57-58; tomo LXIV, pp. 86-87; tomo LXV, pp. 39-42; tomo LXVII, p. 98; tomo LXIX, pp. 6-15; tomo LXIX, pp. 53-54; tomo LXIX, pp. 214-216; tomo LXIX, pp. 216-217; tomo LXX, pp. 14-19; tomo LXX, p. 50; tomo LXX, pp. 176-177; tomo LXXI, pp. 5-6.

Nelle Memorie del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.

45. *Posizioni medie di 1425 stelle pel principio del 1860 distribuite nella zona compresa fra 0° e 3° di declinazione australe, dedotte dalle osservazioni fatte dal defunto prof. Trettenero nel R. Osservatorio di Padova a datare dal 18 aprile 1861 fino al 3 febbraio 1863.* Volume XV, pp. 329-374.

Nella Rivista periodica dei lavori della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova.

46. *Sulle osservazioni udometriche eseguite in Padova dall'anno 1725 al 1871.* Volume XXII, pp. 71-134 e 3 tavole.
47. *La velocità e la direzione del vento a Padova nel decennio 1870-80 desunte dall'anemografo Parsinetti-Brusotti.* Vol. XXX, pp. 153-178 e 3 tavole.

Negli Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova (Nuova Serie).

48. *L'insegnamento di Astronomia e Meteore del prof. Lodovico Riva e i Documenti relativi alla fondazione dell'Osservatorio astronomico di Padova.* Vol. I, pp. 121-162.
49. *In occasione del primo centenario della nascita dell'astronomo Santini (30 gennaio 1787).* Notizie sul viaggio da lui compiuto in Germania nell'autunno del 1843, desunte da memorie inedite. Vol. III, pp. 133-183.
50. *Sulla teoria degli errori fortuiti nelle osservazioni dirette.* Vol. V, pp. 203-223.
51. *Il castello di Padova e le sue condizioni verso la fine del secolo decimottavo.* Vol. XII, pp. 171-224 (con 4 tavole).
52. *Ricordi intorno a Giuseppe Toaldo, ad amici suoi e al suo tempo.* Vol. XXIX, pp. 271-316 (con tavola).

Negli Atti della Reale Accademia dei Lincei.

53. *Commemorazione del Socio straniero Carlo Cristiano Zachariae.* Serie V. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XVII, 1° semestre, pp. 166-172.

Nei Rapporti sulle osservazioni dell'eclisse totale di Sole del 22 dicembre 1870, eseguite in Sicilia dalla Commissione italiana (Palermo, Lao, 1872).

54. *Rapporto del dott. G. Lorenzoni,* pp. 101-106.

Nelle Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani.

55. *Osservazioni spettroscopiche del bordo solare fatte nel R. Osservatorio di Padova durante l'anno 1871.* Volume I, pp. 7-16 (e una tavola).

56. *Tavole per convertire l'angolo di posizione di un punto del bordo solare nella corrispondente distanza polare eliografica.* Volume I, pp. 17-21 (e una tavola).
57. *Protuberanze solari osservate a Palermo, Roma e Padova nel luglio e agosto 1871 da Tacchini, Secchi e Lorenzoni.* Vol. I, tav. III.
58. *Immagini spettroscopiche del bordo solare disegnate a Palermo, Roma e Padova nei giorni 11 e 12 dicembre 1871 da Tacchini, Secchi e Lorenzoni.* Vol. I, tav. V.
59. *Immagini del bordo solare osservate a Palermo, Roma e Padova nel febbraio e marzo 1872 da Tacchini, Secchi e Lorenzoni.* Vol. I, tav. XVI.
60. *Bordi solari osservati a Palermo, Roma e Padova nel mese di aprile 1872 da Tacchini, Secchi e Lorenzoni.* Vol. I, tav. XIX.
61. *Immagini spettroscopiche del bordo solare osservate da Secchi, Tacchini e Lorenzoni nel mese di agosto 1872.* Vol. II, tav. XXVII.
62. *Osservazioni delle righe lucide* f *e* b *dello spettro cromosferico solare, e riflessioni sulla visibilità spettroscopica delle immagini monocromatiche quando queste appariscono projettate sopra uno spettro continuo.* Vol. II, pp. 20-37 (con una tavola).
63. *Osservazioni dell'eclisse parziale di sole del 26 maggio 1873 fatte nel R. Osservatorio di Padova.* Vol. II, pp. 73-74.
64. *Sopra un modo di disporre la fessura dello spettroscopio nel foco dei raggi di una qualunque rifrangibilità e sopra qualche spettro cromosferico osservato a Padova in luglio ed agosto 1873.* Vol. II, pp. 134-137 (con una tavola).
65. *Delle eclissi parziali di Sole e sulla maniera di osservare i contatti collo spettroscopio.* Estratto di una Nota. Vol. II, pp. 137-141 (con una tavola).
66. *Discussione delle osservazioni eseguite in Roma e in Padova sull'eclisse parziale di sole del 26 maggio 1873.* Vol. II, pp. 145-158 (con una tavola).
67. *Di un mezzo atto a rendere visibile tutta in una volta una immagine monocromatica completa della cromosfera e delle protuberanze solari.* Ricerca teorica. Vol. III, pp. 45-61 (con una tavola).
68. *Aggiunta alla Nota " Discussione delle osservazioni eseguite in Roma ed in Padova sull'eclisse parziale di sole del 26 maggio 1873 ".* Vol. II, pp. 61-64.
69. *Osservazioni della Cometa di Winnecke fatte nel R. Osservatorio astronomico di Padova.* Vol. III, App., pp. 19-20.
70. *Risultati di ricerche istituite sopra lo sciame meteorico di ottobre.* Dissertazione inaugurale per ottenere la Laurea filosofica nella Università di Vienna di Ludwig Grüber. Vol. III, App., pp. 31-38 (con una tavola).

71. *Eclisse parziale di sole del 29 settembre 1875 osservata alla Specola di Padova.* Vol. IV, p. 106.
72. *Reticolato in proiezione gnomonica per lo studio delle radiazioni meteoriche.* Vol. V, App., pp. 18-20 (con due figure ed una tavola).
73. *Sulla direzione nello spazio della coda della cometa Coggia* (III-1874). Vol. V, App., pp. 21-35 (con una tavola).
74. *Sul calcolo dell'altezza del mercurio in un pendolo a compensazione.* Vol. V, App., pp. 1-11.
75. *Sulla determinazione del foco dei raggi di una determinata rifrangibilità in un obbiettivo telescopico.* Vol. IX, pp. 117-118.
76. *Sopra un semplice modo di determinare i fochi ed i cerchi di aberrazione dei raggi di varia rifrangibilità in un obbiettivo da cannocchiale* (traduzione). Vol. IX, pp. 119-125 (con una tavola).
77. *Osservazioni dell'eclisse parziale di sole del 16 (17 mattina) giugno 1890 fatto all'Osservatorio di Padova.* Vol. XIX, pp. 140-141.
78. *Bibliografia. Il problema della correzione di un'orbita secondo il prof. Bauschinger.* Vol. XXXV, pp. 37-38.

Nelle Pubblicazioni della R. Commissione geodetica italiana.

79. *Resoconto delle operazioni fatte a Milano ed a Padova nel 1875 in corrispondenza cogli astronomi Austriaci e Bavaresi per determinare le differenze di longitudine fra gli Osservatorî astronomici di Milano e di Padova e quelli di Vienna e di Monaco, per G. Celoria e G. Lorenzoni.* Pubblicazioni del “ R. Osservatorio di Brera in Milano ”, n. XIV.
80. *Determinazione della latitudine e di un Azimut sull'estremo Nord-Ovest della base di Lecce.* Padova. Tipografia del Seminario, 1875 (con una tavola).
81. *Intorno alle principali ricerche sulla lunghezza del pendolo a secondi eseguite nell'ultimo ventennio (1860-1880).* Notizie sommarie. Estratto dal Processo Verbale delle sedute della Commissione italiana per la misura dei gradi, tenutesi in Firenze il 14 e 15 giugno 1880, pp. 39-47.
82. *Relazione sulle esperienze istituite nel R. Osservatorio astronomico di Padova in agosto 1885 e febbraio 1886 per determinare la lunghezza del pendolo semplice a secondi, premessa la esposizione dei principii del metodo e la descrizione dello strumento di Repsold.* Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei. Serie IV, vol. V, pp. 41-285 (con 9 tavole).

83. *Determinazioni di Azimut eseguite nel R. Osservatorio astronomico di Padova in giugno e luglio 1874, con un altazimut di Repsold ed in luglio 1890, con un altazimut di Pistor*. Padova, Seminario, 1891.
84. *Operazioni eseguite nell'anno 1875 negli Osservatorî astronomici di Milano, Napoli e Padova in corrispondenza coll'Ufficio Idrografico della R. Marina per determinare le differenze di longitudine fra Genova, Milano, Napoli e Padova.* Resoconto dei professori G. Lorenzoni, G. Celoria, A. Nobile. Pubblicazioni del " R. Osservatorio di Brera in Milano ", n. XXIV.
85. *Differenze di longitudine fra Roma, Padova ed Arcetri determinate da L. Respighi, A. Abetti, G. Lorenzoni nel 1882 e nel 1884.* Relazioni di G. Lorenzoni, A. Abetti, A. Di Legge. Con Appendice e due tavole. Padova, Seminario, 1891.
86. *Differenza di longitudine fra gli Osservatorî di Padova e di Bologna determinata nel 1897 dagli astronomi dell'Osservatorio di Padova G. Lorenzoni e G. Ciscato.* Relazioni, con due tavole e figure nel testo. Padova, Seminario, 1907.
87. *Il supporto bipendolare " Mioni " a recipienti pneumatici*, pp. 1-19 (con due tavole e figure nel testo). Padova, Seminario, 1912.

Nelle " Astronomische Nachrichten ".

88. *Osservazioni di Pianeti*: Bd. 65, p. 231; Bd. 70, p. 255; Bd. 72, p. 190; Bd. 73, pp. 375-378.
89. *Osservazioni di Comete*: Bd. 82, pp. 143-199; Bd. 98, p. 233; Bd. 102, p. 39; Bd. 123, p. 333.
90. *Osservazioni di eclissi di sole e passaggio di Mercurio*: Bd. 82, p. 123; Bd. 117, p. 279; Bd. 125, p. 35; Bd. 128, p. 109; Bd. 177, p. 379; Bd. 178, p. 359.
91. *Eclissi di luna, occultazioni di stelle e di pianeti, eclissi dei satelliti di Giove*: Bd. 96, p. 189; Bd. 125, pp. 43-44; Bd. 132, p. 393; Bd. 133, p. 55; Bd. 143, p. 105.
92. *Aberrazione di rifrangibilità negli obbiettivi composti di due lenti, e sue conseguenze, specialmente nelle osservazioni spettroscopiche*: Bd. 78, pp. 289-292.
93. *Sulle righe spettrali della cromosfera* f *ed* h: Bd. 79, p. 5.
94. *Giovanni Santini, " Todes-Anzeige "*: Bd. 90, p. 79.
95. *Sopra le stelle* $Sant_3$ *494 e 495*: Bd. 98, p. 287.
96. *Metodo Encke-De Gasparis per comprendere i termini di quarto ordine nel calcolo delle distanze in una prima determinazione di orbita*: Bd. 132, pp. 225-228.
97. *Giuseppe Ciscato, " Todes-Anzeige "*: Bd. 179, p. 227.

Nel “ Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft „.

98. *F. R. Helmert. Beiträge zur Theorie des Reversionspendel.* Recensione, 34 Jahrgang (1899), pp. 215-232.

Nel giornale “ La Natura „.

99. *Sulla figura della Terra.* Recensione della Memoria del Colonnello A. R. Clarke, intitolata: “ On the Figure of the Earth „. Volume III.

Nel Bollettino della Società geografica italiana.

100. *Relazione su due questioni presentate al III Congresso Geografico Internazionale di Venezia*:
   Questione 2: *Stato attuale delle determinazioni telegrafiche di differenze di longitudine*, ecc.
   Questione 5: *Studio delle variazioni della gravità coll'aiuto del pendolo*, maggio e giugno 1880.

Nella pubblicazione dell'Università di Padova, intitolata “ Il quarto centenario di Nicolò Copernico nell'Università di Padova „.

101. *Nicolò Copernico e il moto della terra*, pp. 17-37. Padova, Prosperini, 1873.

Nell'Annuario della R. Università degli studi di Padova per l'anno scolastico 1889-90.

102. *Sulle condizioni del progresso astronomico.* Discorso inaugurale, pp. 21-53.

Nel Bullettino meteorologico dell'Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri.

103. *Aurora boreale del 13 maggio 1869.* Lettera al P. F. Denza. Anno IV, vol. IV, p. 46.
104. *Pareli, aloni, archi tangenti e cerchio parelico osservati a Padova la mattina del 31 marzo 1889.* Vol. XXIV, p. 107.

105. *Osservazioni di stelle cadenti*:
Periodo di agosto 1869. Lett. al P. F. Denza, vol. IV, p. 97.
" " novembre 1869. Lett. al P. F. Denza, vol. IV, p. 127.
" " agosto 1871. Lett. al P. F. Denza, vol. VI, p. 131.

---

106. *Giovanni Santini, la sua vita e le sue opere*. Discorso letto nella Chiesa di S. Sofia in Padova del dì trigesimo della morte dell'illustre astronomo. Padova, Seminario, 1873.
107. *Sulla bara del prof. Giuseppe Ciscato il 16 ottobre 1908 in Malo*. Padova, Seminario.

Sul calcolo numerico dei logaritmi neperiani di 2 e 5.

Nota del Socio NICODEMO JADANZA.

Il sig. SERRET nel tomo I del suo eccellente trattato di calcolo differenziale ed integrale a pag. 172 dà la formola seguente:

$$(1)\quad \log 10 = \frac{1}{M} = 20\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \dots\right] + 6\left[\frac{1}{81} + \frac{1}{3.81^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{81^5} + \dots\right] - 6\left[\frac{1}{2049} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2049^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2049^5} + \dots\right]$$

per il calcolo del *modulo* dei logaritmi.

Per il calcolo di log 2 dà la solita serie:

$$(2)\quad \log 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \dots\right].$$

È facile far vedere che colle medesime tre serie che servono al calcolo di log 10 si possono calcolare log 2 e log 5.

Poniamo perciò

$$(3)\qquad \begin{cases} X = 2\left[\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3.9^3} + \dfrac{1}{5.9^5} + \ldots\right] \\[2ex] Y = 2\left[\dfrac{1}{81} + \dfrac{1}{3.81^3} + \dfrac{1}{5.81^5} + \ldots\right] \\[2ex] Z = 2\left[\dfrac{1}{2049} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2049^3} + \ldots\right] \end{cases}$$

Partendo dalla nota serie di Cagnoli

$$\log(N + h) - \log N =$$
$$= 2\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3} \cdot \frac{h^3}{(2N+h)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{h^5}{(2N+h)^5} + \ldots\right]$$

e ponendo una volta $h = 1$, un'altra, $h = 2$, ed un'ultima volta $h = 4$ si ottiene:

$$\log \frac{41}{40} = Y$$
$$\log \frac{5}{4} = X$$
$$\log \frac{4100}{4096} = \log \frac{4100}{2^{12}} = Z.$$

Ora è

$$10 = \left(\frac{5}{4}\right)^{10} \cdot \left(\frac{41}{40}\right)^3 \cdot \left(\frac{4096}{4100}\right)^3$$

quindi

$$(4)\qquad \log 10 = 10\,X + 3\,Y - 3Z$$

che è la formola del Serret.

Analogamente essendo

$$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{4096}{4100}$$
$$5 = \left(\frac{5}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{41}{40}\right)^2 \cdot \left(\frac{4096}{4100}\right)$$

si avranno i logaritmi neperiani di 2 e 5 espressi da:

$$\log 2 = 3X + Y - Z \tag{5}$$
$$\log 5 = 7X + 2Y - 2Z. \tag{6}$$

Il calcolo delle tre serie X, Y, Z riesce facilissimo stante la loro rapida convergenza. Se si fanno le successive potenze di $\frac{1}{9}$ la serie Y si calcola con poco lavoro.

Così, p. e., calcolando soltanto le prime dieci potenze di $\frac{1}{9}$ ed i primi due termini della 3ª delle (3), si è ottenuto:

$$X = 0{,}223\ 143\ 551\ 304$$
$$Y = 0{,}024\ 692\ 612\ 588$$
$$Z = 0{,}000\ 976\ 085\ 973$$

dalle quali per mezzo delle (4), (5) e (6) si ottengono con 10 cifre decimali:

$$\log 10 = \frac{1}{M} = 2{,}302\ 58\ 509\ 29$$
$$\log\ 2 = 0{,}693\ 14\ 718\ 05$$
$$\log\ 5 = 1{,}609\ 43\ 791\ 24.$$

Resto nella formula di quadratura Cavalieri-Simpson.

Nota del Socio G. PEANO.

La formula di quadratura qui considerata, è:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right],$$

la quale è vera, se la funzione f è intera, di grado non superiore al terzo; e per funzioni qualunque, è di uso frequente, come formula di approssimazione.

Questa formula si trova, sotto forma geometrica, in

B. Cavalieri, *Centuria di varii problemi*, Bologna, a. 1639, p. 446;

e poi in

J. Gregory, *Exercitationes geometricae*, Londini, anno 1668;
R. Cotes, *Harmonia mensurarum*, Catabrigiæ, anno 1722, p. 33;

e infine in

Th. Simpson, *Mathematical dissertations*, London, 1743, p. 109.

È invalso l'uso di chiamare " formula di Simpson „ la formula precedente. Non volendo andare troppo contro l'uso, mi sia permesso di unirvi il nome del primo autore.

Il passo di Cavalieri, e le altre citazioni, sono riprodotte nel *Formulario mathematico*, da me edito, ediz. 5ª, anno 1908, pag. 368; e a questo libro mi riferirò in seguito, essendo esso una fra le più ampie raccolte di teoremi di matematica, ora esistenti.

La pratica provò che la formula di Cavalieri-Simpson, applicata a funzioni qualunque, dà buone approssimazioni. Quindi parecchi autori espressero il desiderio di conoscere un limite dell'errore in questa approssimazione.

Nel mio libro: *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale*, Torino, Bocca, 1887, a pag. 208, pubblicai l'espressione del resto, cioè della differenza fra il primo ed il secondo membro, sotto la forma:

$$= -\frac{(b-a)^5}{4!\,5!} D^4 f(x),$$

ove x è un valore medio fra a e b.

Poco dopo, lo stesso risultato fu pubblicato dal Markov, nel libro:

Марковъ, *Исчисленіе кончинихъ разностей*, S. Petersburg, 1889;

tradotto in tedesco, col titolo:

Markoff, *Differenzenrechnung*, Leipzig, 1896.

L'essere questo autore arrivato allo stesso risultato, seguendo lo stesso mio metodo, risulta dal fatto che questo calcolo è un'applicazione dei teoremi sulle funzioni interpolari, enunciati poco prima, cioè nel 1882, da Schwarz e Stieltjes (Vedasi *Formulario*, pag. 307). Collo stesso procedimento, il prof. Mansion dell'Università di Gand, trovò nel 1887 il resto nelle formule di quadratura di Gauss.

L'espressione del resto nella formula Cavalieri-Simpson ora si trova in molti trattati di Calcolo.

Come caso particolare della regola esposta nella mia nota:

Resto nelle formule di quadratura, espresso con un integrale definito, " Rendiconti Acc. Lincei „, 4 maggio 1913,

ivi diedi pure l'espressione del resto nella formula di Cavalieri-Simpson, sotto forma di integrale.

Nella presente nota, mi propongo di arrivare allo stesso risultato, per via diretta e più elementare.

*
* *

Considero la formula di Taylor, col resto sotto forma di integrale (*Formulario*, pag. 366):

$$(1)\qquad f(b) = f(a) + (b-a)\,\mathrm{D}f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}\mathrm{D}^2 f(a) + \dots$$
$$+ \frac{(b-a)^n}{n!}\mathrm{D}^n f(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n \mathrm{D}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Trasporto $f(a)$ dal secondo nel primo membro; invece di $f(b) - f(a)$ scrivo $\int_a^b \mathrm{D}f(x)\,\mathrm{d}x$; e al posto di $\mathrm{D}f$ scrivo f; ottengo:

$$(2)\qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\,f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}\mathrm{D}f(a) + \dots$$
$$+ \frac{(b-a)^n}{n!}\mathrm{D}^{n-1} f(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n\, \mathrm{D}^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

la quale è una formula di quadratura, che si può ottenere direttamente coll'integrazione per parti; ed è appunto sotto questa forma che essa fu enunciata da Joh. Bernoulli nel 1694 (Vedi *Formulario*, pag. 303; Taylor la diede nel 1715).

Senza ledere alla generalità, posso supporre che i limiti dell'integrale nella formula di Cavalieri-Simpson, siano -1 e $+1$; sicchè vado cercando un'espressione della differenza:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\,[f(-1) + 4f(0) + f(1)].$$

Nella formula (2) faccio $a = 0$, $b = 1$; e ad n dò il valore 4:

$$(3)\qquad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(0) + \frac{1}{2}\,\mathrm{D}f(0) + \frac{1}{6}\,\mathrm{D}^2 f(0)$$
$$+ \frac{1}{24}\,\mathrm{D}^3 f(0) + \frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^4\,\mathrm{D}^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'$\int_{-1}^{0} f(x)$, posto $x = -z$, diventa $\int_0^1 f(-z)\,dz$; a cui applicando la formula (3), ottengo:

$$(4) \qquad \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = f(0) - \frac{1}{2}\,Df(0) + \frac{1}{6}\,D^2f(0) - \frac{1}{24}\,D^3f(0) + \frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^4\,D^4f(-x)\,dx.$$

Sommo membro a membro le eguaglianze (3) e (4):

$$(5) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = 2f(0) + \frac{1}{3}\,D^2f(0) + \frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^4\,[D^4f(x) + D^4f(-x)\,dx].$$

D'altronde, dalla (1), facendo $a = 0$, $b = 1$, $n = 3$, ricavo:

$$(6) \qquad f(1) = f(0) + Df(0) + \frac{1}{2}\,D^2f(0) + \frac{1}{6}\,D^3f(0) + \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\,D^4f(x)\,dx.$$

Applicando questa formula (6) alla funzione $f(-x)$, ove x è la variabile, ho:

$$(7) \qquad f(-1) = f(0) - Df(0) + \frac{1}{2}\,D^2f(0) - \frac{1}{6}\,D^3f(0) + \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\,D^4f(-x)\,dx.$$

Sommo le (6) e (7):

$$(8) \qquad f(-1) + f(+1) = 2f(0) + D^2f(0) + \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\,[D^4f(x) + D^4f(-x)]\,dx.$$

Dalla (5) e (8) basta eliminare $D^2f(0)$, coll'algebra elementare, onde avere $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$ espresso mediante $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, e un integrale contenente $D^4f(x)$; e questa espressione deve coincidere con quella di Cavalieri-Simpson, col resto sotto forma di integrale.

Ricavo perciò $D^2 f(0)$ dalla (8), e sostituisco nella (5):

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = 2f(0) + \frac{1}{3}[f(-1) + f(1) - 2f(0)]$$
$$+ \int_0^1 \left[\frac{1}{24}(1-x)^4 - \frac{1}{18}(1-x)^3\right][D^4 f(x) + D^4 f(-x)]\,dx.$$

La parte integrata $2f(0) + \frac{1}{3}[f(-1) - 2f(0) + f(1)]$ è un'altra forma di $\frac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(4)]$, cioè del secondo membro della formula di quadratura; si noti che

$$f(-1) - 2f(0) + f(1)$$

è la differenza seconda della funzione f, pei tre valori -1, 0, 1 della variabile. Il polinomio entro integrale:

$$\frac{1}{24}(1-x)^4 - \frac{1}{18}(1-x)^3 = -\frac{1}{24}(1-x)^3\left(x + \frac{1}{3}\right).$$

Perciò si ha infine:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(1)] \tag{9}$$
$$-\frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^3\left(x + \frac{1}{3}\right)[D^4 f(x) + D^4 f(-x)]\,dx$$

che è la formula di quadratura di Cavalieri, col resto sotto forma di integrale.

In questo resto, il fattore $(1-x)^3\left(x + \frac{1}{3}\right)$ conserva il segno costante positivo, mentre x varia nei limiti dell'integrale, 0 ed 1; perciò (*Formulario*, pag. 347) si può portare fuori dell'integrale il secondo fattore, $D^4 f(x) + D^4 f(-x)$, che si può anche scrivere $2D^4 f(z)$, ove z indica un valore compreso fra -1 e $+1$. Si avrà:

$$\int_0^1 (1-x)^3\left(x + \frac{1}{3}\right)[D^4 f(x) + D^4 f(-x)]\,dx$$
$$= 2D^4 f(z)\int_0^1 (1-x)^3\left(x + \frac{1}{3}\right)dx.$$

Ora

$$\int_0^1 (1-x)^3 \left(x+\frac{1}{3}\right) dx = \int_0^1 (1-x)^3 x \, dx + \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x)^3 dx$$
$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{2}{15},$$

come risulta, per esempio, considerandoli come integrali euleriani di prima specie, cioè applicando la formula (*Formulario*, pag. 357):

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!}.$$

Sostituisco nella (9) all'ultimo integrale il valore ora calcolato, ed ho:

$$(10) \quad \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)] - \frac{1}{90} D^4 f(z)$$

ove z è un valore incognito, compreso fra -1 e $+1$.

Volendosi l'integrale fra i limiti a e b, faremo il cambiamento di variabile $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$; posto $g(t) = f(x)$, si avrà:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} g(t)\, dt;\; g(-1) = f(a),\; g(0) = f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$
$$g(1) = f(b),\; D^4 gt = \left(\frac{b+a}{2}\right)^4 D^4 f(x);$$

e infine:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{90 \times 32} D^4 f(x),$$

ove l'x nel resto è un valore medio fra a e b. Il coefficiente $\frac{1}{90 \times 32}$ si può leggere $\frac{1}{4!\, 5!}$, come è scritto nel principio della presente nota.

Sopra il problema della propagazione di moto all'esterno di una sfera in un mezzo elastico isotropo indefinito.

Nota 1ª di ERNESTO LAURA.

In una Memoria pubblicata in questa Accademia (1), partendo da una osservazione del Love (2) relativa alla continuità dello spostamento attraverso al bordo dell'onda propagantesi in un mezzo elastico indefinito, postulai il problema esterno della Dinamica elastica nel seguente modo.

Sia σ una superficie chiusa convessa, all'esterno della quale vi ha un mezzo indefinito, elastico, isotropo, inizialmente in quiete, indeformato e non sollecitato da forze di massa (queste ipotesi sono *sempre* sottintese nel seguito). Sieno $\sigma_t^{(a)}$, $\sigma_t^{(b)}$ due superficie mobili con il tempo parallele a σ e da questa ottenute portando sulle sue normali verso l'esterno, a partire dai punti di σ stessa, dei segmenti rispettivamente eguali ad at, bt (le a, b essendo le velocità delle onde longitudinali e trasversali). Se il moto ha inizio all'istante $t=0$ dai punti di σ, ad un istante t qualunque la porzione di spazio compresa tra σ e $\sigma_t^{(a)}$ è entrata in vibrazione, mentrecchè all'esterno di $\sigma_t^{(a)}$ vi ha ancora la quiete. Nello spazio limitato da σ e $\sigma_t^{(b)}$, spazio totalmente contenuto nel primo ora considerato, essendo $b<a$, la vibrazione è decomponibile in una parte trasversale

(1) Vol. LXIV, Serie II.

(2) A. E. H. Love, *Wave-motions with discontinuities at wave-fronts*. " Proc. Lond. Math. Society ", Vol. I, 2ª Serie, p. 37.

ed una longitudinale, mentre nella porzione rimanente compresa tra $\sigma_t^{(b)}$ e $\sigma_t^{(a)}$ la vibrazione è puramente longitudinale. Supponiamo che sopra σ sieno date delle tensioni definite per tutti gli istanti posteriori a $t=0$. La determinazione del moto propagato all'esterno di σ equivale allora al problema seguente di analisi:

Determinare sei funzioni (u_1, v_1, w_1) (u_2, v_2, w_2) le prime tre definenti una vibrazione longitudinale, e le tre rimanenti una vibrazione trasversale.

Le (u_1, v_1, w_1) sono inoltre regolari nello spazio compreso tra σ e $\sigma_t^{(a)}$ e ivi verificano le equazioni:

$$\left\{\begin{array}{l} a^2\Delta(u_1, v_1, w_1)=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(u_1, v_1, w_1) \qquad \Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \text{rotor}\,(u_1, v_1, w_1)=0. \end{array}\right.$$

Le (u_2, v_2, w_2) sono regolari nello spazio compreso tra σ e $\sigma_t^{(b)}$ e ivi verificano le equazioni:

$$\left\{\begin{array}{l} b^2\Delta(u_2, v_2, w_2)=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(u_2, v_2, w_2) \\ \text{div}\,(u_2, v_2, w_2)=0. \end{array}\right.$$

Sopra σ si ha poi per ogni $t \geq 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} X_n^{(1)}+X_n^{(2)}+L=0 \\ Y_n^{(1)}+Y_n^{(2)}+M=0 \\ Z_n^{(1)}+Z_n^{(2)}+N=0 \end{array}\right.$$

dove le $(X_n^{(1)}, Y_n^{(1)}, Z_n^{(1)})$ $(X_n^{(2)}, Y_n^{(2)}, Z_n^{(2)})$ sono le tensioni unitarie dovute rispettivamente agli spostamenti (u_1, v_1, w_1) (u_2, v_2, w_2) attraverso all'elemento superficiale di normale n (normale esterna a σ) e (L, M, N) sono le tensioni date *a priori*, le quali sono funzioni definite per i valori di $t \geq 0$. Sopra i bordi mobili delle onde propagantisi si ha poi:

$$\begin{array}{llll} u_1=v_1=w_1=0 & \text{per} & t\geq 0 & \text{sopra} \quad \sigma_t^{(a)} \\ u_2=v_2=w_2=0 & \text{per} & t\geq 0 & \text{sopra} \quad \sigma_t^{(b)}. \end{array}$$

Nella Memoria già citata dimostrai l'unicità di soluzione di questo problema, e onde pormi in un caso concreto, mostrai come il moto rappresentato dalle formole di Stokes relative alla propagazione di onde dovute ad un centro di forza, debitamente interpretato, rientra nel quadro della propagazione di moto all'esterno di una superficie quale ho supposto a priori. Restava però da discutere la questione della compatibilità delle condizioni imposte sulla superficie σ e sopra i due bordi d'onda. Nel presente lavoro intendo colmare tale lacuna risolvendo il problema prima posto per forma specificata della superficie σ. Si presenta quindi naturale il caso in cui σ è una superficie sferica, bene prestandosi al nostro problema una analisi delle vibrazioni armoniche di una sfera originariamente dovuta al Laplace [1] e con vantaggio usata posteriormente dall'Jaerish [2], dal Lamb [3], dal Chree [4].

Il risultato essenziale di queste Note è la *dimostrazione della possibilità dello sviluppo in serie di funzioni sferiche* dello spostamento per date tensioni o velocità superficiali. Sono stato perciò portato a definire dei moti che ho detto *quasi-liberi*, possedendo essi da un lato la proprietà delle vibrazioni libere di dare spostamenti o tensioni nulle sopra una superficie sferica, e non soddisfacendo viceversa a quelle condizioni che assicurano la continuità dello spostamento attraverso alla superficie di separazione tra la porzione di spazio entrata in vibrazione e quella ancora in quiete. Questi moti sono collegati con particolari polinomî, di cui già è cenno in una Memoria dello Stokes [5] sulla quale dovremo in seguito ritornare, lo studio delle radici dei quali porta a concludere, qualora il mezzo sia fluido, che i sopradetti moti sono o aperiodici o armonici non semplici, *sempre* con carattere smorzato.

---

(1) Cfr. H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge, 1906, pag. 478 e seguenti. — A. E. H. Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge, 1906, pag. 265 e seg.

(2) P. Jaerish, " J. f. Math. Crelle ", vol. 85, 1880.

(3) H. Lamb, " Lond. Math. Soc. Proc. ", vol. 13, 1882.

(4) C. Chree, " Cambridge Phil. Soc. Trans. ", vol. 16, 1889.

(5) Stokes, *On the Communication of Vibrations from a Vibrating Body to sorrouding Gas*, " Math. and Phys. Papers ", t. IV, pag. 299.

La considerazione di questi moti può avere speciale importanza nel porre sotto luce nuova il problema esterno relativo all'equazione:

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

Ho dato allo svolgimento di questo lavoro la disposizione seguente:

Premessa nel capitolo I una formola relativa all'equazione delle onde sferiche già usata da varî autori (Kirchhoff, Love, ecc.), dò ad essa una forma particolare che mi permette nel capitolo seguente di assegnare quelle condizioni a cui devono soddisfare le funzioni che in essa figurano necessarie e sufficienti per assicurare la continuità, in tutto lo spazio esterno alla sfera e per ogni istante $t > 0$ dello spostamento (ma non delle velocità e tensioni). Le funzioni incognite soddisfanno allora per effetto *delle condizioni superficiali* a particolari equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti con 2° membro, e vengono determinate dalle condizioni al bordo dell'onda in modo unico, queste condizioni fornendo i valori iniziali di esse e delle loro derivate. Le soluzioni delle considerate equazioni differenziali private del 2° membro dànno luogo alla considerazione dei moti quasi-liberi, i caratteri qualitativi dei quali dipendono dalle radici delle corrispondenti equazioni caratteristiche. A tale ricerca sono dedicati i Capitoli III e IV.

L'applicazione dei risultati ottenuti al problema esterno della Dinamica elastica nel caso della sfera è fatta nella seconda parte di questo lavoro. I procedimenti usati si possono considerare come generalizzazioni di quelli usati dal Lamb nella oramai classica sua memoria sulle vibrazioni libere della sfera elastica, o dal Chree per determinare le vibrazioni forzate pure della sfera quando le tensioni sono di carattere armonico semplice.

Le formole che si ottengono sono piuttosto complesse; lo scopo prefisso essendo però quello di dimostrare la non sovrabbondanza delle condizioni imposte alle funzioni incognite, resta egualmente raggiunto.

I^a Parte

I. — Sviluppo in serie dell'integrale generale dell'equazione delle onde sferiche.

1. — Considero l'equazione caratterisca delle onde sferiche:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi \tag{1}$$

dove c è la velocità di propagazione delle onde, e Δ è l'operatore di Laplace.

Sia ψ_n un polinomio armonico di ordine n; avremo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \psi_n = 0 \\ x \dfrac{\partial \psi_n}{\partial x} + y \dfrac{\partial \psi_n}{\partial y} + z \dfrac{\partial \psi_n}{\partial z} = n \psi_n . \end{array} \right. \tag{2}$$

Sia inoltre $R_n(r,t)$ una funzione di t e di $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ tale che $R_n \psi_n$ sia soluzione di (1). Avremo:

$$\psi_n \frac{\partial^2 R_n}{\partial t^2} = c^2 R_n \Delta \psi_n + 2c^2 \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial R_n}{\partial y} \frac{\partial \psi_n}{\partial y} + \frac{\partial R_n}{\partial z} \frac{\partial \psi_n}{\partial z} \right) + \\ + c^2 \psi_n \Delta R_n . \tag{3}$$

E poichè:

$$\Delta R_n = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r R_n)$$

la (3) tenendo conto delle (2), previa soppressione di un fattore ψ_n, diviene:

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r R_n) + \frac{2c^2 n}{r} \frac{\partial R_n}{\partial r} . \tag{4}$$

L'integrale generale della (4) si può scrivere facilmente. Posto $n = 0$ si ha:

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r R_0).$$

Quindi:

$$r R_0 = f\left(t - \frac{r-R}{c}\right) + \varphi\left(t + \frac{r-R}{c}\right) \tag{5}$$

dove f, φ sono funzioni arbitrarie dei loro argomenti. Applichiamo ai due membri della (4) l'operazione $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$. Avremo:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial R_n}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{c^2}{r}\frac{\partial^2 . rR_n}{\partial r^2}+\frac{2c^2 n}{r}\frac{\partial R_n}{\partial r}\right\}=$$

$$=\frac{c^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2}+\frac{2(n+1)}{r}\frac{\partial R_n}{\partial r}\right\}=\frac{c^2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\,.\,\frac{1}{r}\frac{\partial R_n}{\partial r}\right)+$$

$$+\frac{2c^2(n+1)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial R_n}{\partial r}\right).$$

E poichè:

$$\frac{\partial^2 R_{n+1}}{\partial t^2}=\frac{c^2}{r}\frac{\partial^2 R_{n+1}}{\partial r^2}+\frac{2c^2(n+1)}{r}\frac{\partial R_{n+1}}{\partial r},$$

avremo:

$$R_{n+1}=\frac{1}{r}\frac{\partial R_n}{\partial r}. \tag{6}$$

Per la (5) e questa formola di ricorrenza, discende che l'integrale generale della (4) è:

$$R_n=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^n\frac{f\left(t-\frac{r-R}{c}\right)+\varphi\left(t+\frac{r-R}{c}\right)}{r}$$

dove, come comunemente si fa, ho posto:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^n F=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\ldots\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)F.$$

Per il nostro scopo, poichè ci limitiamo a considerare la propagazione all'esterno della sfera $r=R$, dovremo usare solo del termine relativo a:

$$\frac{f\left(t-\frac{r-R}{c}\right)}{r}.$$

L'integrale della (4) di cui ci serviremo sarà cioè:

$$R_n=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^n\frac{f\left(t-\frac{r-R}{c}\right)}{r}.$$

Useremo nel seguito la notazione:

$$(7) \qquad \} f(\tau_c) \{_n = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^n \frac{f\left(t - \frac{r-R}{c}\right)}{r} \qquad \tau_c = t - \frac{r-R}{c}.$$

La $\} f(\tau_c) \{_n$ dipende poi ovviamente dalla $f(\tau_c)$ e dalle sue prime n derivate.

L'integrale generale della equazione delle onde sferiche, regolare all'esterno della sfera $r = R$, si può allora porre sotto la forma:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} [\, \} f_{1,n}(\tau_c) \{_n \, \psi_{1,n} + \} f_{2,n}(\tau_c) \{_n \, \psi_{2,n} + \dots + \} f_{2n+1,n}(\tau_c) \{_n \, \psi_{2n+1,n}]$$

dove le $f_{1,n} \dots f_{2n-1,n}$ sono funzioni arbitrarie, e le $\psi_{1,n} \dots \psi_{2n+1,n}$ sono $(2n+1)$ polinomi sferici armonici indipendenti di grado n.

2. — Tra le R_n intercedono oltre alla (6) delle relazioni di ricorrenza che è utile, per gli sviluppi ulteriori, conoscere. Dalla (6) moltiplicando i due membri per r e derivando poscia rispetto a r discende:

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} = r \frac{\partial R_{n+1}}{\partial r} + R_{n+1}.$$

Cioè, ancora per la (6):

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} = R_{n+1} + r^2 R_{n+2}.$$

La (4) si può poi scrivere:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 R_n}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + \frac{2(n+1)}{r} \frac{\partial R_n}{\partial r} = \frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + 2(n+1) R_{n+1}.$$

Sicchè, per la (8):

$$(9) \qquad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 R_n}{\partial t^2} = (2n+3) R_{n+1} + r^2 R_{n+2}.$$

3. — La funzione:

$$\{ f(\tau_c) \}_n = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^n \frac{f\left(t - \frac{r-R}{c}\right)}{r}$$

dipende dalla f e dalle sue prime n derivate. Poniamo:

$$(10) \qquad \{ f(\tau_c) \}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{kn}}{c^k} \frac{f^{(k)}(\tau_c)}{r^{2n-k+1}} = \frac{1}{r^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} a_{kn} \left(\frac{r}{c}\right)^k f^{(k)}(\tau_c)$$

dove ho posto:

$$f^{(k)}(\tau_c) = \frac{d^k f(\tau_c)}{d\tau_c{}^k} = \frac{\partial^k f(\tau_c)}{\partial t^k} = (-c)^k \frac{\partial^k f(\tau_c)}{\partial r^k} .$$

Determiniamo i coefficienti a_{kn} della (10). Per l'identità (6) si ha:

$$\{ f(\tau_c) \}_{n+1} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{ f(\tau_c) \}_n .$$

Quindi, per la (10):

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_{k,n+1}}{c^k} \frac{f^{(k)}(\tau_c)}{r^{2n-k+3}} = \sum_{k=1}^{n+1} - \frac{a_{k-1,n}}{c^k} \frac{f^{(k)}(\tau_c)}{r^{2n-k+3}} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} \frac{-(2n-k+1)}{c^k} \frac{a_{kn}}{r^{2n-k+3}} f^{(k)}(\tau_c).$$

Identificando i coefficienti delle diverse derivate di $f(\tau_c)$ si hanno le formole di ricorrenza:

$$-(2n+1)\, a_{0,n} = a_{0,n+1}$$
$$a_{k-1,n} + (2n-k+1)\, a_{k,n} = -a_{k,n+1} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$
$$-a_{n,n} = a_{n+1,n+1} .$$

Da queste con procedimento induttivo si ricava:

$$(11) \qquad a_{k,n} = (-1)^n \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}(n-k)!\,k!} .$$

Resta così dimostrata lecita la posizione (10).

II. — Le condizioni ai bordi dell'onda.

4. — Non ogni funzione verificante l'equazione delle onde sferiche:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi$$

e regolare all'esterno di una superficie σ chiusa si può considerare come potenziale di velocità di un moto propagantesi all'esterno di σ in un fluido in quiete. Una simile funzione oltre che avere il carattere di potenziale ritardato deve annullarsi per ogni istante $t > 0$ sopra la corrispondente superficie $\sigma_t^{(a)}$. Nel caso in cui la superficie σ sia una sfera di raggio R avremo dunque la condizione:

$$\varphi = 0 \qquad \text{per} \qquad r = R + ct . \tag{12}$$

Consideriamo ora la vibrazione elementare:

$$\varphi = \{ f_{i,n}(\tau_c) \}_n \, \psi_{i,n}$$

nella quale le lettere hanno il significato di prima. Per la (10) la condizione (12) dà, poichè $\tau_c = 0$ per $r = R + ct$:

$$\frac{1}{(R+ct)^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{kn}}{c^k} (R+ct)^k f_{i,n}^{(k)}(0) = 0 .$$

E poichè la sommatoria è un polinomio di grado n in t dovremo in essa annullare i coefficienti delle diverse potenze di t. Otterremo per tal modo:

$$\left.\begin{array}{r} a_{0,n} f_{i,n}(0) + a_{1,n} \frac{R}{c} f'_{i,n}(0) + \ldots + a_{n,n} \frac{R^n}{c^n} f_{i,n}^{(n)}(0) = 0 \\ a_{1,n} f'_{i,n}(0) + \ldots + a_{n,n} \frac{nR^{n-1}}{c^{n-1}} f_{i,n}^{(n-1)}(0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,n} f_{i,n}^{(n)}(0) = 0 \end{array}\right\}$$

E poichè il determinante delle

$$f_{i,n}(0),\ f'_{i,n}(0),\ \ldots,\ f^{(n)}_{i,n}(0)$$

è

$$a_{0,n}\, a_{1,n} \ldots a_{n,n} \neq 0$$

consegue:

$$f_{i,n}(0) = f'_{i,n}(0) = \ldots = f^{(n)}_{i,n}(0) = 0.$$

Otteniamo così il risultato fondamentale per il seguito del presente lavoro:

La funzione:

$$\varphi = \{ f(\tau_c) \}_n \psi = \left(\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\right)^n \frac{f\left(t - \dfrac{r-R}{c}\right)}{r} \cdot \psi \tag{13}$$

dove ψ *è un polinomio armonico di grado* n, *caratterizza un possibile moto all'esterno della sfera* $r = R$ *solo quando la funzione* f *soddisfa alle condizioni:*

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0. \tag{14}$$

5. — La funzione prima indicata si può assumere, supposto che la f soddisfi pure alle (14), come *potenziale di velocità* di un moto generato all'esterno della superficie sferica $r = R$ in un mezzo fluido nel quale c è la velocità di propagazione del suono. Invero sulla superficie separante la porzione entrata in vibrazione da quella in quiete, cioè sulla sfera $r = R + ct$, si ha per il teorema della quantità di moto:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + c\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Da cui consegue [1]:

$$\varphi = 0$$

sopra la stessa superficie. Questa condizione, per quanto precede, equivale proprio alle (14).

---

[1] Cfr. la Memoria dell'A., Cap. I.

III. — I polinomi U_n, V_n.

6. — Sia Y_n una funzione di Laplace di ordine n; è soluzione dell'equazione caratteristica delle onde sferiche per quanto precede la funzione:

$$\varphi = \} f(\tau_c) \{_n r^n Y_n = \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} a_{kn} \left(\frac{r}{c}\right)^k f^{(k)}(\tau_c) \, . \, Y_n \, . \tag{15}$$

Poniamo:

$$(-1)^n U_n(\xi) = a_{n,n} \xi^n + a_{n-1,n} \xi^{n-1} + \ldots + a_{0n} \, ,$$

od anche:

$$U_n(\xi) = \alpha_{n,n} \xi^n + \alpha_{n-1,n} \xi^{n-1} + \ldots + \alpha_{0,n} \tag{16}$$

avendo posto:

$$\alpha_{i,n} = (-1)^n a_{i,n} = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}(n-k)!\,k!} \, . \tag{16bis}$$

La funzione prima considerata (15) si potrà scrivere simbolicamente:

$$\varphi = \frac{1}{r^{n+1}} U_n \left(\frac{r}{c} \frac{d}{dt}\right) f(\tau_c) \, Y_n \tag{17}$$

e il significato della (17) è ben chiaro. Se in essa poniamo:

$$f = e^{\lambda t},$$

allora, poichè:

$$\frac{d^m}{dt^m} e^{\lambda t} = \lambda^m e^{\lambda t},$$

la (17) diviene:

$$\varphi = \frac{1}{r^{n+1}} U_n \left(\frac{r\lambda}{c}\right) e^{\lambda \left(t - \frac{r-R}{c}\right)} Y_n \, . \tag{18}$$

Ne consegue che la φ data dalla (18) si annulla sopra la sfera:

$$r = R$$

qualora λ soddisfi all'equazione algebrica di grado n in λ:

$$U_n\left(\frac{R\lambda}{c}\right)=0.$$

Deriviamo la φ rispetto ad r. Otterremo:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\left\{-\frac{n+1}{r^{n+2}}U_n\left(\frac{r\lambda}{c}\right)+\frac{\lambda}{cr^{n+1}}U_n'\left(\frac{r\lambda}{c}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{r^{n+1}}\frac{\lambda}{c}U_n\left(\frac{r\lambda}{c}\right)\right\}e^{\lambda\left(t-\frac{r-R}{c}\right)}Y_n.$$

La $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$ si annulla sopra la sfera $r=R$ qualora:

$$\left[-(n+1)-\frac{\lambda R}{c}\right]U_n\left(\frac{R\lambda}{c}\right)+\frac{\lambda R}{c}U_n'\left(\frac{R\lambda}{c}\right)=0.$$

Porremo nel seguito:

$$V_{n+1}(\xi)\equiv-\xi U_n'(\xi)+(n+1+\xi)U_n(\xi). \tag{19}$$

Da quanto precede si rende evidente il legame tra le φ annullantisi sopra la sfera $r=R$, le φ le cui derivate normali si annullano sopra la sfera stessa e le radici delle equazioni algebriche:

$$\left\{\begin{aligned}&U_n(\xi)=0\\&V_{n+1}(\xi)=0.\end{aligned}\right. \tag{20}$$

7. — Per lo studio delle radici delle equazioni (20) giova determinare certe relazioni ricorrenti colleganti i polinomi U_n e V_n con indici consecutivi. Dalla relazione intercedente tra le $a_{k,n}$, $a_{k,n+1}$, $a_{k-1,n}$ del N. 3 discende:

$$\alpha_{k,n+1}=\alpha_{k-1,n}+(2n-k+1)\,\alpha_{k,n}.$$

Da questa moltiplicando per ξ_k i due membri, sommando sull'indice k e notando che sono nulli gli $\alpha_{k,n}$ per i quali $k>n$ si ha:

$$U_{n+1}=(2n+1+\xi)\,U_n-\xi\,U_n'. \tag{21}$$

Questa relazione permette di determinare facilmente i successivi polinomî U_n. Si ha ad esempio:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \xi + 1 \\
U_2 &= \xi^2 + 3\xi + 3 \\
U_3 &= \xi^3 + 6\xi^2 + 15\xi + 15 \\
U_4 &= \xi^4 + 10\xi^3 + 45\xi^2 + 105\xi + 105 \\
U_5 &= \xi^5 + 15\xi^4 + 105\xi^3 + 420\xi^2 + 945\xi + 945 \\
U_6 &= \xi^6 + 21\xi^5 + 210\xi^4 + 1260\xi^3 + 4725\xi^2 + 10395\xi + 10395 \\
U_7 &= \xi^7 + 30\xi^6 + 420\xi^5 + 3570\xi^4 + 19845\xi^3 + 71820\xi^2 + \\
&\quad + 155925\xi + 155925 \text{ ecc.}
\end{aligned}
$$

8. — Una relazione tra le U_n non contenente derivate si ha notando la identità [1]:

$$\alpha_{k,n} - (k+1)\,\alpha_{k+1,n} = \alpha_{k-1,n-1}\,. \tag{22}$$

Da essa si ricava:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n}\,\xi^k - \sum_{k=1}^{n} (k+1)\,\alpha_{k+1,n}\,\xi^k = \sum_{k-1}^{n} \alpha_{k-1,n-1}\,\xi^k.$$

Ed anche:

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,n}\,\xi^k - \sum_{k=0}^{n} (k+1)\,\alpha_{k+1,n}\,\xi^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,n-1}\,\xi^{k+1}.$$

Cioè:

$$U_n - U_n' = \xi\, U_{n-1}\,. \tag{23}$$

Dalla (21) e (23) si ricava infine:

$$U_{n+1} = (2n+1)\,U_n + \xi^2\, U_{n-1}\,. \tag{24}$$

che dà la relazione cercata.

---

[1] Che si dimostra ricorrendo all'espressione di $\alpha_{k,n}$. Si ha infatti:

$$\alpha_{k,n} - \alpha_{k+1,n}(k+1) = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}(n-k)!\,k!} - (k+1)\frac{(2n-k-1)!}{2^{n-k-1}(n-k-1)!\,(k+1)!} =$$

$$= \frac{(2n-k)! - 2(n-k)(2n-k-1)!}{2^{n-k}(n-k)!\,k!} = \frac{(2n-k-1)!}{2^{n-k}(n-k)!\,(k-1)!} = \alpha_{k-1,n-1}.$$

9. — Dalla (24) si ricava:

$$\begin{aligned} U_n &= (2n-1)\, U_{n-1} + \xi^2\, U_{n-2} \\ U_{n-1} &= (2n-3)\, U_{n-2} + \xi^2\, U_{n-3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_2 &= 3\, U_1 + \xi^2. \end{aligned}$$

Se tra le prime $(k-1)$ di queste equazioni elimino:

$$U_{n-1},\ U_{n-2},\ \ldots,\ U_{n-k+1}$$

otterrò la U_n espressa mediante le U_{n-k} e U_{n-k-1}. Si ha facilmente:

$$(25)\quad U_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & \xi^2 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ -1 & 2n-3 & \xi^2 & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & -1 & 2n-5 & \xi^2 \ldots\ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & \ldots\ldots & 2n-2k+1 \end{vmatrix} U_{n-k} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 2n-1 & \xi^2 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ -1 & 2n-3 & \xi^2 & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & -1 & 2n-5 & \xi^2 \ldots\ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 2n-2k-1 \end{vmatrix} \xi^2 U_{n-k-1}$$

I coefficienti di U_{n-k} e $\xi^2\, U_{n-k-1}$ sono determinanti del tipo:

$$(26)\qquad P_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \ldots\ldots 0 \\ -1 & a_2 & b_2 \ldots\ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots\ldots & a_n \end{vmatrix}$$

nel quale le $a_1 \ldots a_n$ $b_1 \ldots b_{n-1}$ sono quantità positive. E poichè dalla (26) si ricava:

$$P_n = a_n\, P_{n-1} + b_{n-1}\, P_{n-2}$$

dove P_{n-1}, P_{n-2} sono determinanti di ordine $n-1$, $n-2$ rispettivamente formati analogamente a P_n, e poichè d' altra parte

$$P_1 = a_1 > 0 \qquad P_2 = a_1 a_2 + b_1 > 0$$

si conclude che P_n è pure positivo. Dalla (25) si ricava allora: *il polinomio* U_n *si può esprimere linearmente mediante* U_{n-k}, U_{n-k-1}, *con coefficienti positivi.* Si può per di più notare che questi coefficienti sono polinomi in ξ^2 di grado k. Quest' osservazione ci sarà utile nel seguito.

10. — Pure tra i polinomi V_n intercedono relazioni che interessa di ricavare. Dall'equazione di definizione:

$$V_{n+1} = (n + 1 + \xi)\ U_n - \xi\, U_n'$$

deriva per la (23)

$$V_{n+1} = (n + 1)\ U_n + \xi^2\ U_{n-1}. \tag{27}$$

Equazione che sottratta dalla (24) dà:

$$V_{n+1} = U_{n+1} - n U_n. \tag{28}$$

Da questa poi consegue facilmente, tenendo conto della (23):

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V'_{n+1} &= U_{n+1} - U'_{n+1} - n(U_n - U_n') = \xi\, U_n - n\xi U_{n-1} = \\ &= \xi[U_n - (n-1)\, U_{n-1}] - \xi U_{n-1} = \xi V_n - \xi U_{n-1}. \end{aligned}$$

Quindi:

$$V_{n+1} - V'_{n+1} = \xi\,(V_n - U_{n-1}). \tag{29}$$

Le (27), (28), (29) dànno le richieste relazioni intercedenti tra le U_n e le V_n e che abbisogneranno nel seguente capitolo.

10bis. — I polinomi U_n sono soluzioni di particolari equazioni differenziali del 2° ordine, facilmente deducibili dalle relazioni ora trovate tra le U_n. Si derivi l'identità:

$$U_n - U'_n = \xi^2 U_{n-1}$$

e si tenga conto dell'analoga, in cui n è cambiato in $n-1$; avremo:

$$U_n' - U''_n = \xi U'_{n-1} + U_{n-1} = \xi(U_{n-1} - \xi U_{n-2}) + \\ + U_{n-1} = (\xi + 1) U_{n-1} - \xi^2 U_{n-2}.$$

Quindi tra le identità:

$$\begin{aligned} U_n &= U_n' + \xi U_{n-1} \\ U_n' &= U''_n + (\xi + 1) U_{n-1} - \xi^2 U_{n-2} \\ U_n &= (2n - 1) U_{n-1} + \xi^2 U_{n-2} \end{aligned}$$

si eliminino le U_{n-1}, U_{n-2}. Otterremo la richiesta equazione differenziale nella forma:

$$(*) \qquad \xi U''_n + 2n U_n - 2(n + \xi) U_n' = 0.$$

Questa equazione è però riducibile a quella delle funzioni di Bessel di ordine $\left(n + \frac{1}{2}\right)$, come discende dal fatto che:

$$\frac{1}{r^{n+1}} U_n\left(\frac{r\lambda}{c}\right) e^{-\frac{r\lambda}{c}} Y_n$$

dove Y_n è una funzione sferica di ordine n, è soluzione della equazione:

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda^2}{c^2} \varphi$$

e d'altra parte è risaputo che le soluzioni di questa equazione [1], proprie per la sfera, si possono esprimere mediante funzioni di Bessel di ordine $\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Si ponga nella (*):

$$U_n = e^{\xi} \xi^{n + \frac{1}{2}} H_n$$

---

[1] Cfr. F. Pockels, *Ueber die partielle Diff. gleichung* $\Delta u + K^2 u = 0$. Lipsia, 1890, pagina 110 e seguenti.

si ottiene per la H_n l'equazione:

$$H_n'' + \frac{H_n'}{\xi} - \left\{ \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\xi^2} + 1 \right\} H_n = 0$$

e quindi ponendo $\xi = ix$:

$$H_n'' + \frac{H_n'}{x} + \left(1 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right) H_n = 0$$

che è proprio l'equazione differenziale delle funzioni di Bessel di ordine $\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

IV. — Le radici dei polinomi U_n, V_n.

11. — Le proprietà delle radici delle equazioni:

$$U_n(\xi) = 0$$

come quelle delle equazioni $V_n(\xi) = 0$, possono venir discusse sia direttamente partendo dalla definizione di questi polinomî, sia tenendo conto della relazione che essi hanno con l'equazione caratteristica delle onde sferiche. Con questo secondo metodo otterremo il risultato fondamentale seguente:

La parte reale delle radici delle equazioni:

$$U_n(\xi) = 0 \qquad V_n(\xi) = 0$$

è sempre negativa.

Poichè queste equazioni sono a coefficienti reali, le loro radici si presenteranno a coppie complesse coniugate. Sieno ξ, ξ' due radici complesse coniugate di $U_n(\xi) = 0$. Vogliamo dimostrare che si ha:

$$\xi + \xi' < 0.$$

Consideriamo perciò le funzioni:

$$(30) \qquad \varphi_n = \frac{1}{r^{n+1}} U_n\left(\frac{r\xi}{R}\right) e^{c\frac{\xi}{R}\left(t - \frac{r-R}{c}\right)} Y_n ;$$

$$\varphi_n' = \frac{1}{r^{n+1}} U_n\left(\frac{r\xi'}{R}\right) e^{c\frac{\xi'}{R}\left(t - \frac{r-R}{c}\right)} Y_n$$

dove come al solito Y_n è una funzione di Laplace di ordine n. Per quanto precede esse soddisfanno alle equazioni:

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi_n \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \varphi_n'}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi_n' \end{cases}$$

ed inoltre si annullano sopra la superficie sferica $r = R$. Dalle (31) si ricava:

$$\varphi_n' \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} - \varphi_n \frac{\partial^2 \varphi_n'}{\partial t^2} = c^2 (\varphi_n' \Delta\varphi_n - \varphi_n \Delta\varphi_n').$$

Ed integrando allo spazio compreso tra le sfere $r = R$ e $r = R + ct$ si ha, per la solita formola di trasformazione degli integrali di spazio in integrali superficiali, e notando inoltre che φ_n e φ_n' si annullano sopra la sfera $r = R$:

$$(32)\qquad \int_{S_t} \left(\varphi_n' \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} - \varphi_n \frac{\partial^2 \varphi_n'}{\partial t^2}\right) dS = c^2 \int_{\sigma_t} \left(\varphi_n' \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} - \varphi_n \frac{\partial \varphi_n'}{\partial r}\right) d\sigma$$

dove ho indicato con S_t lo spazio prima considerato e con σ_t la sfera $r = R + ct$. Le funzioni φ_n, φ_n' sono complesse coniugate, i due membri della (32) sono perciò degli imaginari puri.

Tenendo ora presente il n° 6 si ha:

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial r} = -\frac{1}{r^{n+2}} V_{n+1}\left(\frac{r\xi}{r}\right) e^{c\frac{\xi}{R}\left(t - \frac{r-R}{c}\right)} Y_n.$$

La (32) si può scrivere allora:

$$(33)\qquad \frac{c^2}{R^2} \int_{S_t} \frac{1}{r^{2n+2}} U_n\left(\frac{r\xi}{R}\right) U_n\left(\frac{r\xi'}{R}\right) Y_n^2 (\xi^2 - \xi'^2)\, e^{c\frac{\xi+\xi'}{R}\left(t - \frac{r-R}{c}\right)} dS =$$
$$= c^2 \int_{\sigma_t} - \frac{1}{r^{2n+3}} \left[U_n\left(\frac{r\xi'}{R}\right) V_{n+1}\left(\frac{r\xi}{R}\right) - U_n\left(\frac{r\xi}{R}\right) V_{n+1}\left(\frac{r\xi'}{R}\right)\right] Y_n^2\, d\sigma.$$

Se ω è la sfera di raggio uno concentrica a σ_t, il 2° membro della (33) diviene:

$$-\frac{c^2}{(R+ct)^{2n+1}} \left[U_n \left\{\frac{(R+ct)\,\xi'}{R}\right\} V_{n+1} \left\{\frac{(R+ct)\,\xi}{R}\right\} - \ldots\right] \int_{\omega} Y_n^2\, d\omega.$$

Prendiamo il limite di questa espressione per $t = \infty$. Poichè U_n è di grado n nel suo argomento, e V_{n+1} di grado $n+1$, si vede subito che il richiesto limite vale:

$$-\frac{c^2}{R^{2n+1}}(\xi'^n \xi^{n+1} - \xi'^{n+1}\xi^n)\int_\omega Y_n^2\, d\omega = -\frac{c^2\,\xi^n\,\xi'^n}{R^{2n+1}}(\xi - \xi')\int_\omega Y_n^2\, d\omega.$$

Calcoliamo l'analogo limite del 1° membro della (33). Diciamo $d\sigma$ l'elemento della sfera $r = R + c\tau$ dove τ varia da 0 a t. Avremo:

$$dS = c\, d\sigma\, dt.$$

Ed il 1° membro della (33) diverrà:

$$\frac{c^3}{R^2}\int_0^t d\tau \int_\sigma \frac{1}{(R+c\tau)^{2n+2}} U_n\left(\frac{\overline{R+c\tau.\xi}}{R}\right) U_n\left(\frac{\overline{R+c\tau.\xi'}}{R}\right) Y_n^2(\xi^2-\xi'^2)\, e^{c\frac{\xi+\xi'}{R}(t-\tau)} d\sigma =$$

$$= \frac{c^3(\xi^2-\xi'^2)}{R^2}\int_0^t \frac{1}{(R+c\tau)^{2n}} U_n\left(\frac{\overline{R+c\tau.\xi}}{R}\right) U_n\left(\frac{\overline{R+c\tau.\xi'}}{R}\right) e^{c\frac{(\xi+\xi')(t-\tau)}{R}} d\tau \int Y_n^2 d\omega.$$

Supposto $\xi - \xi'$ diverso da zero (cioè la ξ non reale), da questa e dal limite ora calcolato discende:

$$(34) \quad c(\xi+\xi')\lim_{t=\infty}\int_0^t \frac{1}{(R+c\tau)^{2n}} U_n\left(\frac{\overline{R+c\tau.\xi}}{R}\right) U_n\left(\frac{\overline{R+c\tau.\xi'}}{R}\right) e^{\frac{c}{R}(\xi+\xi')(t-\tau)} d\tau =$$

$$= -c^2\frac{\xi^n\,\xi'^n}{R^{2n-1}}.$$

Gli elementi dell'integrale del 1° membro sono quantità positive, poichè $U_n\left(\overline{\frac{R+c\tau}{R}\,\xi}\right)$, $U_n\left(\overline{\frac{R+c\tau}{R}\,\xi'}\right)$ sono complesse coniugate; il 2° membro è reale e negativo, quindi, come volevasi dimostrare, si ha:

$$\xi + \xi' < 0.$$

Il caso $\xi + \xi' = 0$, cioè la ξ è imaginaria pura, non può avverarsi a meno che non si abbia $\xi = 0$, radice non mai ammessa da $U_n(\xi) = 0$. Dalla (34) discende dunque pure: *L'equazione:*

$$U_n(\xi) = 0$$

non ammette radici imaginarie pure.

12. — Il ragionamento prima fatto continua a sussistere se le ξ, ξ' sono due radici complesse coniugate dell'equazione:

$$V_{n+1}(\xi) = 0.$$

Quindi concludiamo pure: *La parte reale delle radici dell'equazione:*

$$V_{n+1}(\xi) = 0$$

è negativa e non mai nulla.

13. — La precedente analisi nulla ci dice relativamente alle radici reali dei polinomi U_n, V_n. Tale parte della ricerca si può condurre servendoci delle relazioni di ricorrenza determinate nei precedenti N[ri]. Dalle relazioni

$$U_n - U'_n = \xi\, U_{n-1}$$
$$U_{n+1} = (2n+1)\, U_n + \xi^2\, U_{n-1}$$

si deduce subito che: *i polinomi U_n non posseggono radici multiple.*

Due qualunque dei polinomi

$$U_1,\ U_2, \ldots$$

non hanno invero radici comuni. Se infatti U_n, U_{n+1} avessero una radice comune, per le precedenti relazioni, essa sarebbe comune pure a U_1 e U_2, il che è assurdo. La U_n non possiede poi radici multiple, poichè queste, per la prima delle relazioni scritte, sarebbero comuni a U_n e a U_{n-1}, contrariamente a quanto già abbiamo dimostrato.

14. — Sia α una radice reale di

$$U_n(\xi) = 0.$$

Dalla relazione (25):

$$U_n = A_k\, U_{n-k} + B_k\, U_{n-k-1}$$

nella quale sappiamo che A_k, B_k sono quantità reali positive,

discende che $U_{n-k}(\alpha)$ e $U_{n-k-1}(\alpha)$ sono di segni contrari. D'altronde:

$$U_2(\alpha) = \alpha^2 + 3\alpha + 3$$

è una forma quadratica positiva, quindi: *Se* α *è una radice di* $U_n(\xi) = 0$ *la successione:*

$$U_1(\alpha) \qquad U_2(\alpha)\ldots \qquad U_{n-1}(\alpha)$$

presenta tutte variazioni di segno.

Inoltre poichè:

$$U_{n+1} = (2n + 1)\, U_n + \xi^2\, U_{n-1}$$

le quantità $U_{n+1}(\alpha)$ e $U_{n-1}(\alpha)$ hanno lo stesso segno. E poichè U_{n+k} $(k > 0)$ si esprime linearmente con U_n e U_{n-1} a coefficienti positivi, pure U_{n+k} ha lo stesso segno di U_{n-1}. Si conclude quindi: *Nell'ipotesi precedente la successione*

$$U_{n+1}(\alpha),\ U_{n+2}(\alpha),\ldots$$

presenta tutte permanenze di segno, ed il segno comune di questa quantità è quello di $U_{n-1}(\alpha)$. Questa quantità è poi positiva o negativa secondo che n è dispari o pari.

Sieno α, β due radici reali consecutive di $U_n(\xi) = 0$, tra α e β non vi sieno cioè radici di U_n. Allora $U_n'(\alpha)$ e $U_n'(\beta)$ non saranno nulle, poichè α e β non possono essere radici multiple; e inoltre di segno contrario, poichè U_n' ammette almeno una radice compresa tra α e β. Per la relazione (21) si ha:

$$U_{n+1}(\alpha) = -\alpha\, U_n'(\alpha)$$
$$U_{n+1}(\beta) = -\beta\, U_n'(\beta).$$

E poichè se le U_n ammettono radici reali, queste sono negative, i coefficienti di U_n essendo positivi, si conclude che $U_{n+1}(\alpha)$ e $U_{n+1}(\beta)$ sono di segno contrario. Ciò d'altronde è assurdo, poichè i segni di $U_{n+1}(\alpha)$ e $U_{n+1}(\beta)$, che sono quelli di $U_{n-1}(\alpha)$, $U_{n-1}(\beta)$, dipendono, per quanto precede, dalla parità di n. Si deduce dunque:

Le equazioni:

$$U_1(\xi)=0 \qquad U_3(\xi)=0 \quad \dots \quad U_{2n+1}(\xi)=0 \dots$$

ammettono una unica radice reale (negativa).

Le equazioni:

$$U_2(\xi)=0 \qquad U_4(\xi)=0 \quad \dots \quad U_{2n}(\xi)=0 \dots$$

non ammettono alcuna radice reale.

14bis. — Ricorrendo alle relazioni (25) si può dimostrare nuovamente che i polinomi U_n non ammettono radici imaginarie pure. Sia invero $i\alpha$ una tale radice. Poniamo in generale

$$U_k(i\alpha)=U_k^{(1)}(\alpha)+i\,U_k^{(2)}(\alpha)$$

indicando con $U_k^{(1)}(\alpha)$, $U_k^{(2)}(\alpha)$ quantità reali. Le relazioni (25), quando per ξ poniamo la radice $i\alpha$ di U_n e separiamo la parte reale dalla parte imaginaria, dànno identità del tipo:

$$(35)\qquad \begin{cases} A_k(i\alpha)\,U_k^{(1)}(\alpha)+A_{k-1}(i\alpha)\,U_{k-1}^{(1)}(\alpha)=0 \\ A_k(i\alpha)\,U_k^{(2)}(\alpha)+A_{k-1}(i\alpha)\,U_{k-1}^{(2)}(\alpha)=0 \end{cases}$$

poichè le $A_k(i\alpha)$ sono quantità reali, le $A_k(\xi)$ essendo polinomî nella ξ^2. Dalle (35) discende:

$$\frac{U_k^{(1)}(\alpha)}{U_k^{(2)}(\alpha)}=\frac{U_{k-1}^{(1)}(\alpha)}{U_{k-1}^{(2)}(\alpha)}$$

la quale è valida per $k=2,\dots,n-1$. In particolare per $k=2$ si ha:

$$\frac{-\alpha^2+3}{3\alpha}=\frac{1}{\alpha},$$

eguaglianza non verificata che per il valore $\alpha=0$, manifestamente non radice di alcuna U_n.

15. — Dal ragionamento fatto al n° 13 discende pure la proprietà seguente: *Se* $-\alpha_1$, $-\alpha_3$, $-\alpha_5$, ... *sono le radici reali rispettivamente delle equazioni:*

$$U_1=0\,,\quad U_3=0\,,\quad U_5=0\,,\quad \dots$$

si ha allora:

$$\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_5 < \dots$$

Infatti, poichè l'equazione $U_{2p+1} = 0$ ammette una unica radice reale $-\alpha_{2p+1}$, si avrà:

$$U_{2p+1}(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > -\alpha_{2p+1}$$
$$U_{2p+1}(x) < 0 \quad \text{per} \quad x < -\alpha_{2p+1}.$$

D'altronde se $-\alpha_{2m+1}$ è la radice reale di $U_{2m+1} = 0$, allora, per quanto precede, se è $p < m$, si ha:

$$U_{2p+1}(-\alpha_{2m+1}) < 0$$

e se invece $p > m$ si ha:

$$U_{2p+1}(-\alpha_{2m+1}) > 0.$$

Nel 1° caso si ha dunque:

$$-\alpha_{2m+1} < -\alpha_{2p+1}$$

e nel 2°:

$$-\alpha_{2m+1} > -\alpha_{2p+1}. \qquad \text{c. v. d.}$$

16. — Con procedimenti analoghi si discutono le radici reali dei polinomî V_n. Ci serviremo perciò delle relazioni (27), (28), (29):

$$V_{n+1} = (n+1)\,U_n + \xi^2\,U_{n-1} \tag{27}$$
$$V_{n+1} = U_{n+1} - nU_n \tag{28}$$
$$V_{n+1} - V'_{n+1} = \xi\,(V_n - U_{n-1}). \tag{29}$$

Dimostreremo dapprima che V_{2n} non ha radici reali, cioè che $V_{2n}(\xi)$ è positivo per qualunque valore di ξ. Sia α una radice reale di V_{2n}. Le (27) e (28) divengono:

$$\left.\begin{aligned} 2n\,U_{2n-1}(\alpha) + \xi^2\,U_{2n-2}(\alpha) = 0 \\ U_{2n}(\alpha) - (2n-1)\,U_{2n-1}(\alpha) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Eguaglianze evidentemente contradittorie, poichè, per quanto

precede, essendo $U_{2n}(\alpha)$, $U_{2n-2}(\alpha)$ entrambe positive, la $U_{2n-1}(\alpha)$ è negativa per la 1ª e positiva per la 2ª.

Dimostriamo ora che V_{2n+1} non può ammettere più di *una* radice reale. Ne ammetta due e sieno α, β; supponiamo inoltre che esse sieno consecutive, che cioè tra di esse non sia contenuta alcuna radice di V_{2n+1}. La V'_{2n+1} ammetterà almeno una radice in questo intervallo; sicchè avremo:

$$V'_{2n+1}(\alpha)\, V'_{2n+1}(\beta) < 0. \tag{36}$$

La (29) diviene, ponendo in essa per ξ prima α poi β, e cambiando n in $2n$:

$$\left\{\begin{array}{l} -V'_{2n+1}(\alpha) = \alpha\,[V_{2n}(\alpha) - U_{2n-1}(\alpha)] \\ -V'_{2n+1}(\beta) = \beta\,[V_{2n}(\beta) - U_{2n-1}(\beta)]. \end{array}\right. \tag{37}$$

Poichè dalla (27) cambiando n in $2n$ e ponendo α e poi β in luogo di ξ si ricava:

$$\left.\begin{array}{l} (2n+1)\, U_{2n}(\alpha) + \xi^2\, U_{2n-1}(\alpha) = 0 \\ (2n+1)\, U_{2n}(\beta) + \xi^2\, U_{2n-1}(\beta) = 0 \end{array}\right\}$$

e tenendo presente che U_{2n} è sempre positivo, si conchiude che $U_{2n-1}(\alpha)$ e $U_{2n-1}(\beta)$ sono negativi. Quindi i binomi:

$$V_{2n}(\alpha) - U_{2n-1}(\alpha) \qquad V_{2n}(\beta) - U_{2n-1}(\beta)$$

sono positivi, poichè la V_{2n} è sempre positiva; cioè sono di uno stesso segno. Dalle (37), notando che α e β sono entrambe negative, poichè i coefficienti di V_{2n+1} sono tutti positivi, e dalla (36) d'altronde si ricava che questi due stessi binomi hanno segni contrarî. Quindi vi ha contradizione.

Questo ragionamento presuppone implicitamente che α e β sieno radici semplici. Si può facilmente dimostrare che α non può essere radice multipla di V_{2n+1}. Se lo fosse, dalla (29) deriverebbe:

$$V_{2n}(\alpha) - U_{2n-1}(\alpha) = 0.$$

E quindi, poichè $V_{2n}(\alpha)$ è sempre positivo, si avrebbe che pure

$U_{2n-1}(\alpha)$ sarebbe positivo. Questa deduzione è poi contradetta dalla (27) che debitamente modificata dà:

$$(2n+1)\,U_{2n}(\alpha) = -\alpha^2\,U_{2n-1}(\alpha)$$

e dice quindi, poichè U_{2n} è sempre positivo, che $U_{2n-1}(\alpha)$ è negativo.

17. — Possiamo infine dimostrare che V_n non può avere radici imaginarie pure. Sia $i\alpha$ una tale radice (con α reale). La (27), ponendo in essa n al posto di $n+1$, dà:

$$(38)\qquad \begin{cases} n\,U^{(1)}_{n-1}(\alpha) - \alpha^2\,U^{(1)}_{n-2}(\alpha) = 0 \\ n\,U^{(2)}_{n-1}(\alpha) - \alpha^2\,U^{(2)}_{n-2}(\alpha) = 0 \end{cases}$$

dove ho indicato con $U^{(1)}_{n-1}(\alpha)$ e $U^{(2)}_{n-1}(\alpha)$ la parte reale e il coefficiente di i di $U_{n-1}(i\alpha)$. Dalle (38) discende:

$$\frac{U^{(1)}_{n-1}(\alpha)}{U^{(1)}_{n-2}(\alpha)} = \frac{U^{(2)}_{n-1}(\alpha)}{U^{(2)}_{n-2}(\alpha)}\,.$$

Eguaglianza che già abbiamo dimostrata assurda (Cfr. n. 14).

18. — Riassumendo si ha infine il teorema:

Le equazioni:

$$V_1 = 0 \qquad V_3 = 0 \quad \ldots \quad V_{2n+1} = 0 \ \ldots$$

ammettono una unica radice reale (negativa). Le equazioni

$$V_2 = 0 \qquad V_4 = 0 \quad \ldots \quad V_{2n} = 0 \ \ldots$$

non ammettono radici reali.

Possiamo aggiungere una ulteriore proprietà delle radici di questi polinomi. Indichiamo con $-\beta_{2n+1}$ l'unica radice reale di $V_{2n+1} = 0$.

Dalla (27), cambiando n in $2n$, si ricava:

$$(2n+1)\,U_{2n}(-\beta_{2n+1}) + \beta^2_{2n+1}\,U_{2n-1}(-\beta_{2n+1}) = 0.$$

Dalla quale:

$$U_{2n-1}(-\beta_{2n+1}) < 0.$$

Tenendo conto del n° 15 e delle notazioni usate si ha perciò:

$$-\beta_{2n+1} < -\alpha_{2n-1}, \qquad \beta_{2n+1} > \alpha_{2n-1}.$$

Per la (28) si ha invece:

$$U_{2n+1}(-\beta_{2n+1}) - 2n\, U_{2n}(-\beta_{2n+1}) = 0$$

dalla quale:

$$U_{2n+1}(-\beta_{2n+1}) > 0.$$

Sicchè:

$$-\beta_{2n+1} > -\alpha_{2n+1}, \qquad \beta_{2n+1} < \alpha_{2n+1}.$$

La relazione di grandezza delle quantità (positive) α_i, β_i è dunque data dalle diseguaglianze:

$$\alpha_1 < \beta_3 < \alpha_3 < \beta_5 < \alpha_5 < \ldots$$

V. — Risoluzione del problema esterno relativo alla equazione delle onde sferiche nel caso della sfera.

19. — Il problema da risolvere è il seguente: *Determinare la funzione* φ *soddisfacente all'equazione:*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi$$

regolare per ogni $t > 0$ *nello spazio esterno alla sfera* $r = R$ *e interno alla sfera* $r = R + ct$, *supposto:*

1° *che sopra la sfera* $r = R$ *sieno dati i valori di* $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ *o di* $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ *continui rispetto a* t *e definiti per ogni* $t \geq 0$;

2° *che sopra la sfera variabile con il tempo* $r = R + ct$ *e per ogni* $t > 0$ *si abbia:*

$$\varphi = 0 .$$

In luogo di dare i valori di $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ sopra la sfera $r = R$ si possono dare i valori della φ; questi, per la condizione imposta al bordo dell'onda, dovranno soddisfare alla condizione $\varphi = 0$ per $r = R$ e per $t = 0$. Sopra la sfera $r = R$ si abbia:

$$\varphi = \lambda_{1n}(t)\, Y_{1,n} + \lambda_{2,n}(t)\, Y_{2,n} + \dots + \lambda_{2n+1,n}(t)\, Y_{2n+1,n}$$

dove le $Y_{i,n}$ sono $(2n+1)$ funzioni indipendenti di Laplace di ordine n; inoltre si ha:

$$\lambda_{i,n}(0) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, 2n+1 .$$

La soluzione che dovremo prendere per la φ sarà allora ovviamente:

$$\varphi = \{ f_{1,n} \}_n\, \psi_{1,n} + \dots + \{ f_{2n+1,n} \}_n\, \psi_{2n+1,n}$$

dove le $\psi_{i,n}$ sono $2n+1$ polinomî armonici indipendenti di ordine n, e potremo porre:

$$\psi_{i,n} = r^n\, Y_{i,n} .$$

La condizione che deve essere verificata sopra la superficie $r = R$ fornisce delle equazioni differenziali lineari di ordine n a cui soddisfanno le f_{in}, mentre le condizioni al bordo dànno le condizioni iniziali delle funzioni stesse.

Indicando la funzione generica $f_{in}(t)$ con $f(t)$, e $\lambda_{i,n}(t)$ con $\lambda(t)$, la funzione $f(t)$ soddisfa, per quanto precede, all'equazione differenziale:

$$a_{n,n}\left(\frac{R}{c}\right)^n f^{(n)}(t) + \dots + a_{0,n}\, f(t) = R^n \lambda(t) \tag{39}$$

o in forma simbolica:

$$U_n\left(\frac{R}{c}\,\frac{d}{dt}\right) f(t) = R^{n+1}\,\lambda(t). \tag{39bis}$$

Le condizioni al bordo (Cfr. n° 4):

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0 \quad f^{(n)}(0) = 0 \tag{40}$$

assicurano l'unicità di soluzione, poichè forniscono le condizioni iniziali della funzione incognita. L'ultima condizione dipende dall'ipotesi fatta $\lambda(0) = 0$. Dalle (39) e (40) discende che se $\lambda(t)$ è nulla identicamente, non vi è moto all'esterno della sfera; questo fatto vale per una superficie σ qualunque convessa ed equivale alla unicità di soluzione del problema esterno per l'equazione delle onde sferiche. Mi sembra interessante il porre in evidenza il fatto seguente: nella soluzione del problema esterno o interno dell'equazione di Laplace ottenuta mediante sviluppi in serie di funzioni elementari, i coefficienti di questa serie, tenendo conto delle condizioni ai limiti, vengono determinati risolvendo equazioni algebriche lineari; nella soluzione del problema esterno dell'equazione delle onde sferiche la determinazione dei coefficienti della serie di funzioni sferiche è fatta integrando delle *equazioni differenziali lineari.*

20. — Si ponga nella (39):

$$f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\,\psi(\tau)\,d\tau. \tag{41}$$

Supposto:

$$\psi(0) = 0$$

le condizioni (40) sono soddisfatte; la (39) si traduce poi, per la posizione (41), come è noto, in una equazione integrale tipo Volterra. Avrebbe interesse l'esaminare se un fatto simile si presenta pure nel caso di una superficie σ qualunque.

Sugli organi nervosi terminali sensitivi nei muscoli cutanei dei mammiferi.

Nota del Dott. LORENZO LOREDAN, Assistente.

La maggior parte degli autori che si sono occupati del significato fisiologico delle più complesse terminazioni nervose sensitive dei muscoli striati (fusi neuro-muscolari ed organi muscolo-tendinei), sono d'accordo nel ritenere che ciascuna di esse serva a trasmettere specifiche sensazioni, formanti parte del complesso senso muscolare.

Questo fatto però non è ancora completamente provato, e pure ipotesi sono le opinioni emesse sulla vera natura di queste specifiche sensazioni.

Alle indicate questioni, ancora insolute, potrebbe portare qualche contributo, come osservano Regaud e Favre pei fusi neuro-muscolari, e Regaud pei fusi tendinei, la conoscenza esatta della ripartizione di questi organi nei diversi muscoli del corpo.

Mancano però ancora dati sufficentemente estesi e precisi, perchè la distribuzione, in alcuni muscoli, di queste terminazioni nervose possa esser messa in relazione, insieme alla loro struttura, e disposizione negli apparati muscolari, colle diversità anatomiche e funzionali dei muscoli stessi.

Il gruppo dei muscoli cutanei, per quanto mi consta, è stato oggetto di poche osservazioni in cui vennero presi in considerazione i soli fusi neuro-muscolari.

Non credo che vi sia nessuna ricerca degli organi muscolotendinei, e dei corpuscoli simili ai corpuscoli di Pacini, studiati per primi da Golgi e Mazzoni.

Cipollone, in seguito alle sue indagini sui muscoli zigomatico, elevatore del labbro superiore, elevatore del naso e buccinatore nel coniglio, riferisce che in questo animale i muscoli

della faccia innervati dal nervo facciale, non contengono fusi neuro-muscolari.

Pure il Baum considera mancanti di fusi neuro-muscolari i muscoli cutanei; la sua ricerca però si estende unicamente ai muscoli del padiglione dell'orecchio nell'uomo.

Nell'accurata enumerazione che il Gregor fa dei muscoli contenenti fusi neuro-muscolari, fra i cutanei non è fatta menzione che del *M. frontale* e del *M. orbicolare* della bocca.

In questi due muscoli Schulze, secondo la sua descrizione, potrebbe aver veduto alcuni fusi neuro-muscolari.

Il materiale delle mie ricerche comprende i seguenti muscoli del topo bianco e del coniglio:

della testa: *M. orbicularis oculi*
M. orbicularis oris
M. levator labii
M. caninus
M. zigomaticus maior
M. zigomaticus minor
M. vertico auricolaris
M. occipito auricolaris;
del tronco: *Platysma myoides*,
M. cutaneus maximus,
M. extensor caudae medialis (Krause).

Questi muscoli furono esaminati in 10 topi bianchi e 5 conigli.

Come tecnica istologica usai la modificazione del Ruffini al metodo Löwit-Fischer.

Questo metodo, nel mettere in evidenza le espansioni nervose terminali, dà risultati quasi costanti.

Mi servivano di controllo muscoli scheletrici presi fra le fibre tendinee e le muscolari, dove ero sicuro di poter osservare terminazioni nervose sensitive.

In questi muscoli, allorchè le placche motrici mostravano una buona impregnazione, anche le terminazioni sensitive erano evidenti.

Nei muscoli cutanei tenni calcolo dei soli preparati, quasi tutti del resto, in cui il metodo era pienamente riuscito per le placche motrici.

Provai inoltre il metodo di Cayal, nella sua seconda formula, con previa fissazione in alcol ammoniacale, che, come osserva l'autore, è la preferibile nel caso presente.

Dovetti però abbandonare questa tecnica, che pur diede un prezioso aiuto nello studio della struttura delle terminazioni nervose, per la sua incostanza nel metterle in evidenza.

In qualche animale esaminai i muscoli sopra enumerati completamente in preparati fatti per dissociazione, cercando di non perdere nessuna fibra nè muscolare nè tendinea.

In altri animali, per quei muscoli che presentano un'inserzione scheletrica ed un'inserzione cutanea, presi in esame sopratutto i brevi apparati tendinei col tratto di fibre muscolari adiacenti.

Feci inoltre delle inclusioni e sezioni in serie del muscolo, unitamente alla porzione di cute corrispondente, per avere una più chiara visione dei brevi tendini ad inserzione cutanea.

Esaminai pure la fascia in quei pochi muscoli dove questa si trova distinta, e così pure il perimisio, che isolavo nel dissociare le fibre muscolari e tendinee.

Topo bianco.

Nel topo bianco il risultato delle mie ricerche fu negativo per tutti i muscoli cutanei della testa da me presi in esame, sia riguardo ai fusi neuro-muscolari, che ai fusi-tendinei, ed ai corpuscoli di Golgi-Mazzoni.

Fra i muscoli cutanei del tronco non mi fu dato di scorgere alcuno di questi organi nervosi terminali nel *platysma myoides*.

Nel *M. cutaneus maximus* il mio reperto è negativo per i fusi neuro-muscolari e corpuscoli di Golgi-Mazzoni, positivo invece per i fusi tendinei.

Nel tendine di questo muscolo che si inserisce alla cresta del tubercolo maggiore dell'omero osservai costantemente da 6 a 9 organi muscolo-tendinei.

Hanno la stessa disposizione che queste terminazioni presentano negli altri muscoli: si trovano cioè nella parte del tendine più prossima alle fibre muscolari, più spesso ad immediato contatto con queste, ed altre volte separati da un breve tratto di tendine.

Nel *M. extensor caudae medialis* osservai una sola volta un singolo organo muscolo-tendineo nel tendine d'inserzione presso i processi spinosi delle vertebre caudali.

Coniglio.

Nei muscoli cutanei della testa ebbi lo stesso reperto negativo che nel topo bianco, e così pure nel *platysma myoides*.

Nel *M. extensor caudae medialis* non osservai mai alcuna espansione terminale sensitiva.

Nel *M. cutaneus maximus* vi è completa assenza di fusi neuro-muscolari e corpuscoli di Golgi-Mazzoni.

Sono invece costantemente presenti nel suo tendine d'inserzione all'omero da 5 a 7 organi muscolo-tendinei.

La disposizione di questo tendine che nella sua parte terminale si unisce a quello del *M. grande pettorale* potrebbe far sorgere il dubbio che i fusi tendinei da me osservati non appartengano al *M. cutaneus maximus*, ma al *M. gran pettorale*, di cui qualche fibra tendinea avrebbe potuto esser rimasta unita al muscolo da me preso in esame.

Ma alcuni miei preparati mi convinsero che questo dubbio non ha ragione d'esistere.

Infatti l'unione fra i due tendini appartiene solo al tratto più vicino all'inserzione: per cui è possibile tagliare unitamente alle fibre muscolari la parte più prossima a queste del tendine colla sicurezza di non aver asportato alcuna fibra del *M. gran pettorale*.

I preparati di tutta la larghezza del muscolo così prelevato contengono egual numero di organi muscolo-tendinei, che il muscolo col tendine in tutta la sua estensione.

Concludendo, nel topo bianco e nel coniglio i fusi neuromuscolari, e i corpuscoli di Golgi-Mazzoni mancano in tutti i muscoli cutanei da me esaminati.

Gli organi muscolo-tendinei mancano nei muscoli cutanei della testa e nel *Platysma myoides*.

Sono presenti in numero da 5 a 9 nel tendine d'inserzione all'omero del *M. cutaneus maximus*: la loro presenza non è costante nel tendine d'inserzione alle vertebre caudali del *M. extensor caudae medialis*.

Voglio ora ricordare tre fatti che potrebbero essere in relazione col mio reperto:

1° La mancanza, in generale, nei muscoli cutanei di una fascia, alla quale si crede da alcuni autori spetti un ufficio, più o meno importante, nel meccanismo d'eccitazione dei fusi neuromuscolari.

2° L'intima connessione che esiste, specie alle inserzioni cutanee, fra questi muscoli e la cute che pure contiene corpuscoli di Pacini, ed organi che coi fusi tendínei presentano una grande somiglianza di struttura.

3° La situazione del tendine omerale del *M. cutaneus maximus* (il solo muscolo costantemente provveduto di organi muscolo-tendinei), il quale per raggiungere il suo punto d'inserzione abbandona lo strato sottocutaneo, e si insinua fra il *M. gran pettorale* ed il *M. deltoide*.

Prima però di poter trarre da questi fatti conclusioni d'ordine fisiologico credo che le indagini debbano essere estese sopra altri animali.

Ringrazio sentitamente il Prof. Fusari che mi ha suggerito l'argomento di questa ricerca.

Istituto di Anatomia umana della R. Università di Torino,
diretto dal Prof. R. Fusari.

Cl. Regaud e M. Favre, *Les terminaisons nerveuses et les organes nerveux sensitifs des muscles striés,* " Revue générale d'histologie „, 1904.

Cl. Regaud, *Organes nerveux sensitifs de l'appareil locomoteur,* " Revue générale d'histologie „, 1907.

Cipollone, *Ricerche sull'anatomia normale e patologica delle terminazioni nervose nei muscoli striati,* Torino, 1897.

J. Baum, *Beiträge zur Kenntnis der Muskelspindeln,* " Anatom. Hefte „, 1900.

A. Gregor, *Ueber die Vertheilung der Muskelspindeln in der Musculatur des menschlichen Fötus* „, " Arch. für Anatomie u. Physiol. „, 1904.

Schulze, vedi Gregor.

Krause, vedi Brann, *Klassen und Ordnungen des Thier-Reichs,* Leipzig, 1874-1900.

Ramón y Cajal, *Algunos métodos de coloración de los cilindrosejes, neurofibrillas y nidos nerviosos.* " Trabajos del Lab. de Inv. biol. „, t. III, 1904.

Sulla misura della differenza di fase di due correnti sinoidali.

Nota dell'Ing. Prof. GIUSEPPE LIGNANA.

Fu attribuito a Galileo Ferraris un metodo di misura della differenza di fase di due correnti alternate, basato sull'uso di un apparecchio costituito nel seguente modo: due spirali fisse (fig. 1) normali fra loro sono percorse dalle due correnti alternate sinoidali di cui si vuole misurare la differenza di fase; in una spirale *ab* mobile attorno all'asse di simmetria delle spirali fisse si produrrà per induzione una f. e. m. che misurata in varie posizioni della spirale indotta permette di dedurre la differenza di fase delle due correnti alternate.

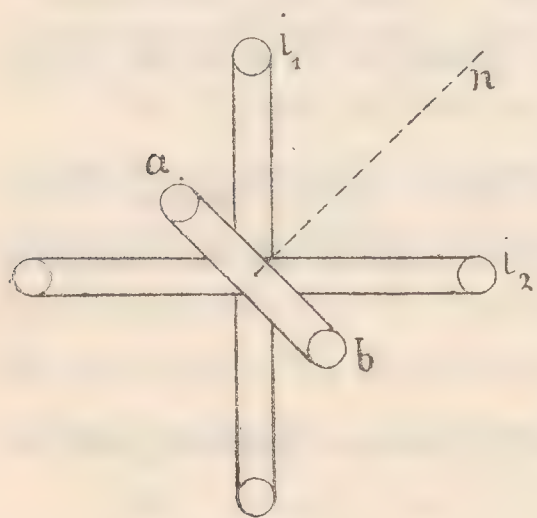



Fig. 1.

Siccome non fu data una giusta interpretazione del modo di adoperare cotesto apparecchio per lo scopo suddetto, così ho creduto opportuno di esporre in questa Nota uno studio particolareggiato dell'apparecchio attribuito a G. Ferraris per vedere fin dove esso si presti alla pratica applicazione.

Le due correnti alternate i_1 e i_2 dànno luogo a due campi magnetici normali tra loro, proporzionali ed in fase colle correnti stesse: il coefficiente di proporzionalità fra corrente e campo magnetico è costante, supposto che non ci sia ferro all'interno delle spire; si può quindi nel diagramma vettoriale scegliere per le correnti ed i campi scale diverse per modo che lo stesso vettore ci possa rappresentare sia la corrente che il campo magnetico da essa prodotto.

Indichiamo con x ed y i valori istantanei dei due campi normali, e con X e Y le ampiezze, sarà ancora

$$x = X \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$
$$y = Y \operatorname{sen}(\omega t + \beta)$$

ove ω è la pulsazione della corrente ed α e β sono le fasi delle due grandezze alternate. La differenza di fase φ ci è data dalla relazione

$$\varphi = \alpha - \beta .$$

Questi due campi si compongono e dànno luogo ad un campo ellittico che possiamo considerare come risultante di un campo rotante di valore costante e di un campo alternativo di direzione fissa. La f. e. m. indotta nella spira mobile dipende dalla posizione della spira stessa: con un voltometro o un elettrometro misuriamo il valore efficace di questa f. e. m. indotta nelle varie posizioni della spira; portando il valore della f. e. m. misurata sulla normale n alla spira nelle varie posizioni si viene a tracciare sperimentalmente una curva.

Per vedere che curva si ottiene si può procedere per via analitica. Con questo procedimento dovremo scrivere il flusso concatenato colla spira indotta, flusso che evidentemente dipende dalla posizione della spira cioè dall'angolo che la normale n alla spira fa con uno dei piani contenenti una delle spire fisse: la f. e. m. indotta è la derivata di questo flusso rispetto al tempo e quindi sarà ancora una funzione sinoidale del tempo. L'ampiezza o il valore efficace sarà evidentemente una funzione della posizione della spira; otteniamo così l'equazione della curva cercata in coordinate polari.

Invece di seguire questa via puramente analitica è più conveniente seguire un procedimento geometrico che ci porta direttamente alla costruzione della curva ricercata.

Ricorriamo alla nota scomposizione dei vettori alternativi in due vettori costanti rotanti in verso opposto e uguali a metà dell'ampiezza dell'alternativo. Per effetto di questa scomposizione i due campi X ed Y dànno luogo ad un campo rotante costante che indicheremo con R e ad un campo alternativo di ampiezza A e di direzione fissa nello spazio.

Esaminiamo ora le f. e. m. indotte nella spira da questi campi R rotante ed A alternativo.

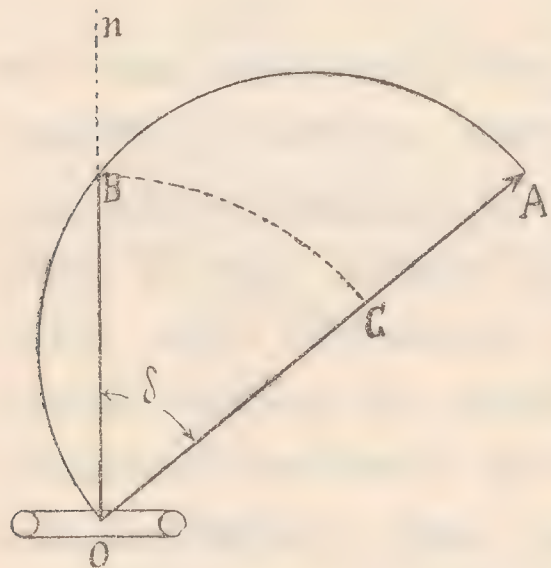
Il campo rotante R di valore costante induce una f. e. m. sinoidale la cui ampiezza o valore efficace è costante qualunque sia la posizione della spira, però la fase di questa f. e. m. varia colla posizione della spira stessa.

Nel diagramma vettoriale dovremo rappresentare questa f. e. m. con un vettore proporzionale ad R portato sulla normale n al piano della spira, cosicchè variando la posizione della spira il vettore rappresentativo della f. e. m. indotta si sposta assieme all'asse n della spira.

In una conveniente scala lo stesso vettore R riportato sulla n ci rappresenta la f. e. m. indotta.

Il campo alternativo di ampiezza A ha una direzione fissa nello spazio; la f. e. m. da esso indotta avrà quindi fase costante e ampiezza variabile in funzione della posizione della spira, poichè la sola componente di A normale al piano della spira $A \cos \delta$ (fig. 2) dà luogo a flusso concatenato: l'altra componente $A \operatorname{sen} \delta$ essendo complanare colla spira non dà luogo a f. e. m. indotta.

Fig. 2.

Il vettore rappresentativo di questa f. e. m. indotta sarà rappresentato nella scala già scelta per la f. e. m. dovuta al campo rotante, da un vettore uguale ad $OA \cos \delta$ ma portato nella direzione fissa del campo qualunque sia la posizione della spira. Per ottenere graficamente il valore assoluto di questa f. e. m. indotta descriveremo la circonferenza che ha per diametro il vettore alternativo.

Il segmento OB in cui questa circonferenza taglia la normale n alla spira in una posizione qualunque dà il valore assoluto della f. e. m. indotta in quella posizione: riportando OB nella direzione di OA in OC il segmento OC è la rappresentazione vettoriale della f. e. m. indotta dal campo alternativo.

Per ottenere il vettore che rappresenta la f. e. m. risultante nella spira indotta eseguiamo la seguente costruzione. Tracciamo la circonferenza di raggio OR uguale al campo rotante; col diametro OA che ci rappresenta il campo alternativo fisso descriviamo una seconda circonferenza (fig. 3). Sia On la normale al piano della spira in una determinata posizione; OR sarà il vettore che ci rappresenta in ampiezza e fase la f. e. m. indotta dal campo rotante: OB ci dà l'ampiezza della f. e. m. indotta dal campo alternativo, il vettore rappresentativo di

questa f. e. m. dovremo però prenderlo nella direzione di OA, per cui faremo $RC = OB$ e parallelo ad OA. Il vettore OC risultante di OR e RC è nella rappresentazione vettoriale la f. e. m. indotta nella spira quando l'asse della spira ha la posizione *on*.

Fig. 3.

Centro in O con raggio OC determiniamo il punto D sulla n e questo sarà un punto della curva che ci eravamo proposto di costrurre.

Evidentemente poi la curva luogo dei punti C è una ellisse che ha per semiasse minore il valore R del campo rotante e per semiasse maggiore $A + R$.

La curva luogo dei punti D gode della proprietà che la perpendicolare ad on nel punto D è tangente all'ellisse luogo dei punti C.

Nel caso limite che esista il solo vettore alternativo la curva luogo dei punti D si riduce a due circonferenze tangenti in O e di diametro uguale al valore del vettore alternativo.

Nel caso limite che esista il solo vettore rotante le curve dei punti C e D si confondono colla circonferenza di raggio uguale al valore del vettore rotante e con centro in O.

Vediamo ora come si possa determinare la differenza di fase fra le due correnti: riferiamoci alla fig. 4.

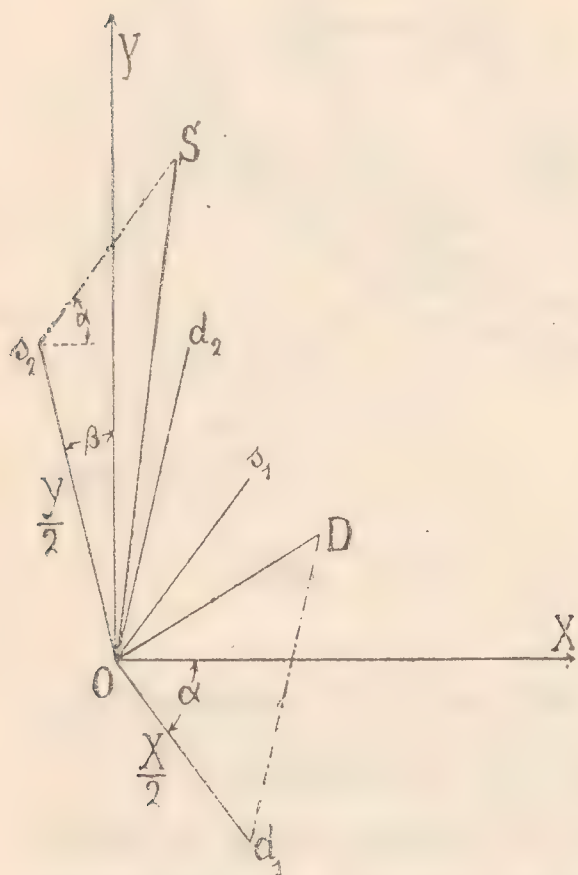
Il vettore alternativo X di fase α è rappresentato scomposto nei suoi due rotanti di sinistra e destra $\overline{os_1}$ e $\overline{od_1}$ di valore $\frac{X}{2}$; analogamente $\overline{os_2}$ e $\overline{od_2}$ ci rappresentano i rotanti di sinistra e destra del vettore Y che ha fase β. Componendo os_1 con os_2 otteniamo OS rotante a sinistra e componendo i due rotanti di destra otteniamo OD rotante a destra.

Fig. 4.

I due vettori OS ed OD di valore assoluto diverso rotando in versi opposti dànno luogo ad un vettore rotante R, differenza dei due suddetti vettori, e ad un vettore alternativo A di ampiezza uguale a due volte il minore dei due vettori OS e OD nella direzione della bisettrice dell'angolo formato da OS con OD.

I valori di OS ed OD in funzione dei vettori alternativi primitivi saranno (fig. 4):

$$(1)\quad \begin{cases} \overline{OS}^2 = \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4} + \frac{XY}{2} \operatorname{sen} \varphi \\ \overline{OD}^2 = \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4} - \frac{XY}{2} \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

ove $\varphi = (\alpha - \beta)$ è la differenza di fase che si vuol determinare.

Supponiamo di spostare la spira mobile finchè la f. e. m. indotta sia massima, allora l'asse della spira coincide col semiasse maggiore dell'elisse e la tensione misurata è proporzionale al valore di $A+R$, indichiamo con a la lettura fatta al voltometro in tali condizioni

$$a = A + R = OS + OD$$

supponendo uguale ad uno la costante di proporzionalità.

Portando in seguito la spirale a 90° gradi sulla posizione precedente, al voltometro avremo una lettura b corrispondente al minimo valore della f. e. m. indotta dovuta al solo campo rotante R

$$b = R = OS - OD\,;$$

da queste relazioni otteniamo

$$\frac{a+b}{2} = OS$$

$$\frac{a-b}{2} = OD$$

che sostituite nella (1) ci dànno

$$\frac{(a+b)^2}{4} = \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4} + \frac{XY}{2} \operatorname{sen} \varphi$$

$$\frac{(a-b)^2}{4} = \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4} - \frac{XY}{2} \operatorname{sen} \varphi$$

da cui dividendo la prima per la seconda

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{a\,b}{a^2+b^2}\left(\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}\right).$$

Per determinare X ed Y basta portare la spirale mobile ad essere complanare prima con l'una e poi con l'altra delle spirali fisse, il rapporto fra le f. e. m. indotte nella spira sarà

il rapporto fra le ampiezze X ed Y dei due vettori alternativi primitivi, senza preoccuparsi se sia $\frac{X}{Y}$ piuttosto che $\frac{Y}{X}$, poichè nella formula compare la somma di uno dei rapporti col suo reciproco.

In luogo di determinare il rapporto delle f. e. m. indotte per determinare il rapporto $\frac{X}{Y}$ potrà essere conveniente determinare direttamente il rapporto fra le intensità di correnti nelle due spirali fisse determinandone il valore con amperometri.

Sono dunque necessarie quattro determinazioni sperimentali per ottenere il valore dello sfasamento.

Se le due correnti sono uguali, allora $X = Y$; si ottiene

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{2\, a\, b}{a^2 + b^2}$$

ed in tal caso le determinazioni sperimentali si riducono a due.

Termino ringraziando vivamente il chiarissimo prof. Guido Grassi che volle benevolmente incoraggiarmi nel presente studio.

Gennaio 1915.

Osservazioni del passaggio di Mercurio sul disco del Sole il 6-7 novembre 1914.

Nota di FERNANDO CHELLI.

In occasione del passaggio di Mercurio sul disco del Sole, passaggio avvenuto il 6-7 novembre 1914 (tempo medio astronomico), il prof. Boccardi, direttore dell'Osservatorio di Pino Torinese, mi incaricò di osservare i contatti del bordo del pianeta con quello del Sole e di eseguire misurazioni di ascensione retta e declinazione del pianeta stesso. Pel primo scopo mi disse di servirmi dell'equatoriale Merz-Cavignato avente un obbiettivo di 32 cm. di apertura libera; pel secondo scopo adoperai il piccolo cerchio meridiano di Bamberg (apertura dell'obbiettivo 95 mm.), che è per ora il solo cerchio meridiano in servizio nell'Osservatorio (essendo temporaneamente fuori uso il vecchio cerchio meridiano di Reichenbach) e che ho in consegna per eseguire con esso le osservazioni di declinazioni di stelle della zona di Albany, stelle già osservate in ascensione retta dal prof. Boccardi, che cominciò pure le osservazioni di declinazione.

Sarebbe stato mio desiderio eseguire con l'equatoriale misure micrometriche del diametro di Mercurio e misure di differenze di ascensione retta e di declinazione tra il Sole e Mercurio, ma dovetti assolutamente rinunciarvi, perchè, essendo stato da pochissimo tempo trasportato l'istrumento a Pino dal Palazzo Madama, non è stato ancora possibile fare la verifica della sua installazione e non si è potuto ancora mettere a posto il meccanismo elettrico pel movimento dello strumento stesso in angolo orario.

Dovetti quindi limitarmi all'osservazione dei contatti, osservazioni che, per la prima parte, furono rese difficili dalle condizioni del cielo, tanto che non potei avvertire il primo con-

tatto esterno di Mercurio col Sole, se non quando il pianeta era già in parte proiettato sul disco solare.

Premetto che l'equatoriale ha 32 cm. di apertura libera, che osservai per proiezione su di uno schermo posto ad una distanza dall'oculare tale che il disco solare appariva avere un diametro di circa 30 cm., e che l'ingrandimento adoperato fu il minimo di cui disponga lo strumento, ed uguale a 65. La distanza focale dell'obbiettivo è m. 4,46.

Per l'osservazione mi servii del cronometro d'oro Thomas Earnshaw, N. 940, regolato sul tempo medio dell'Europa Centrale. Per essere più sicuro dell'ora, feci il confronto prima dell'osservazione dell'entrata del pianeta sul disco solare e dopo l'uscita del pianeta: pel confronto adoperai il pendolo Martin (pure a tempo medio) di cui è noto l'andamento e che il giorno stesso fu confrontato col pendolo normale Cavignato (a tempo siderale), il quale è sincronizzato dal pendolo Riefler a pressione costante, che sta in una cantina della palazzina grande dell'Osservatorio. Come dirò in seguito, il giorno stesso fu determinato il tempo, servendosi del pendolo Cavignato.

Limitandomi al secondo di tempo, il che in queste osservazioni è più che sufficiente, ebbi:

I confronto:	Earnshaw	$22^h.31^m.56^s$
	Martin	22 .30 . 0

In quel momento lo stato del Martin era — $0^m.32^s$, onde risulta che lo stato del cronometro d'oro era — $2^m.28^s$.

II confronto:	Earnshaw	$3^h.17^m.57^s$
	Martin	3 .16 . 0

Lo stato del Martin era ancora — $0^m\,32^s$, onde lo stato del cronometro d'oro risulta — $2^m\,29^s$.

Vidi Mercurio proiettato sul disco solare solo a $23^h\,1^m\,4^s$ del cronometro d'oro. Sarebbe agevole dedurre da questa determinazione l'ora in cui il lembo del pianeta toccava il lembo del Sole, tenendo conto del diametro osservato e della frazione di disco che vedevo proiettata sul Sole. Però, siccome non mi

piace arzigogolare su tali argomenti, considero assolutamente perduto il primo contatto esterno. Per gli altri contatti ho:

1° contatto interno:

Ora del cronom.	Stato del cronom.	Tempo medio E. C.	
$23^h.\ 2^m.\ 8^s$	$-2^m.28^s$	$22^h.59^m.40^s$	del 6 nov. 1914

2° contatto interno:

3 . 8 .59	— 2 .29	3 . 6 .30	„ 7 „ „

2° contatto esterno:

3 .10 .57	— 2 .29	3 . 8 .28	„ 7 „ „

Le date suesposte sono espresse in tempo medio astronomico dell'Europa Centrale.

Il prof. Boccardi mi ha comunicato che il prof. Pio L. Emanuelli dell'Osservatorio Vaticano di Roma aveva calcolato per l'Osservatorio di Pino Torinese gli istanti dei contatti, servendosi delle formole del “ Nautical Almanac „ di Londra e della “ Connaissance des Temps „ di Parigi. I risultati del suo lavoro sono i seguenti:

1° contatto esterno:

Coi dati del “ Nautical Almanac „		Coi dati della “ Connaissance des Temps „
$22^h.58^m.\ 3^s,9$	del 6 novembre 1914	$22^h.57^m.42^s,5$

1° contatto interno:

23 . 0 .18 ,3	„ 6 „ „	22 .59 .55 ,7

2° contatto interno:

3 . 6 .37 ,6	„ 7 „ „	3 . 6 .21 ,1

1° contatto esterno:

3 . 8 .50 ,0	„ 7 „ „	3 . 8 .34 ,6

sempre esprimendo le date in tempo medio astronomico dell'Europa Centrale.

Quindi facendo le differenze nel senso osservazione-calcolo e arrotondando sempre al secondo:

	Dai dati del " N. A. "	Dai dati della " C. d. T. "
1° contatto interno:	-38^s	-16^s
2° " interno:	-8	$+9$
2° " esterno:	-22	-7

Benchè non si sia potuto osservare il primo contatto esterno, si vede che il diametro adottato per Mercurio nel calcolo dei contatti ($=9'',9$) è troppo diverso da quello effettivo, e d'altronde, fin dal 1907, il prof. Stroobant dell'Osservatorio Reale del Belgio, dalle osservazioni dei contatti nel passaggio di Mercurio avvenuto in quell'anno, concludeva che il diametro doveva essere di molto ridotto. Ciò è stato confermato anche nelle osservazioni dirette del diametro fatte durante il passaggio del 1914 in varî osservatorî, fra cui anche il nostro, come dirò in seguito.

Il fatto che la declinazione di Mercurio era molto bassa (e quindi la distanza zenitale del pianeta era molto forte) ha ostacolato alquanto le osservazioni, perchè le immagini erano oscillanti. Come osservazione fisica posso dire solo che il disco del pianeta appariva molto più nero di alcune grandi macchie che ho veduto nella zona equatoriale del Sole. I bordi dei due astri mi apparvero sufficientemente nitidi, malgrado l'oscillazione delle immagini, e ciò deriva anche in parte dall'aver adoperato un piccolo ingrandimento.

***

La parte più importante dell'osservazione del pianeta è l'osservazione meridiana fatta con il piccolo Cerchio meridiano di Bamberg. È inutile stia a descrivere lo strumento, che è già stato descritto dal prof. Boccardi nella sua Memoria sulla latitudine di Torino (Palazzo Madama).

Rammenterò solo che il diametro dell'obbiettivo è di mm. 95, la sua distanza focale è di 920 mm.: il diametro del cerchio graduato verticale è di 40 cm. tra gli assi dei due microscopî lettori; esso è diviso di 4′ in 4′: lo spazio compreso tra due

successive divisioni comprende due denti della seghetta (onde 1 dente = 2'); siccome la testa del tamburo è divisa in 120 parti, si legge direttamente il secondo di arco e si stima il decimo. Avvezzo a ingrandimenti forti, avrei preferito che i microscopî dessero un ingrandimento maggiore; coll'ingrandimento attuale non garantisco l'esatta collimazione del secondo, cosa che, d'altronde, accade anche ad altri che hanno adoperato tali strumenti.

Il micrometro ordinario ha 15 fili fissi disposti in 3 gruppi di 5 ognuno: i logaritmi delle distanze filari sono rispettivamente:

I-VIII	1.47989	VI-VIII	0.87904	VIII-XI	1.18099
II-VIII	1.42318	VII-VIII	0.58512	VIII-XII	1.27724
III-VIII	1.35679			VIII-XIII	1.35603
IV-VIII	1.27990	VIII-IX	0.57852	VIII-XIV	1.42177
V-VIII	1.18176	VIII-X	0.87841	VIII-XV	1.48370

Vi è inoltre il filo mobile che si può disporre come filo orario e come filo di declinazione. Il valore medio di una rivoluzione della vite fu determinato dal prof. Boccardi eguale a 54",509 e la testa del tamburo è divisa in 100 parti. Dei varî oculari adottai quello che dà ingrandimento maggiore (126), perchè mi sono avvezzato ad osservare sempre con ingrandimenti forti. Infine il valore di una parte della livella dell'asse fu rideterminato nell'estate 1914 dalla dottoressa Castelli, assistente in questo Osservatorio, e risultò eguale a 1",228: quello di una parte della livella di spia risultò eguale a 2",1244.

Per l'osservazione di Mercurio applicai all'oculare un vetro turchino cupo che diminuì a sufficienza lo splendore del Sole: il disco di Mercurio apparve nitidissimo, sebbene un po' oscillante.

Osservai ambidue i lembi del pianeta a tutti i 15 fili fissi e feci l'osservazione di declinazione quando il pianeta era in mezzo al campo, portando il filo mobile tangente al bordo superiore: non potei portare il filo mobile anche sul lembo inferiore, perchè mi sarebbe occorso saltare l'osservazione a qualcuno dei fili fissi. Registrai i tempi dei passaggi mediante un cronografo a secco di Mioni, servendomi del pendolo Cavignato-

Mioni sincronizzato dal pendolo Riefler a pressione costante. Lessi la livella mobile prima dell'osservazione e dopo l'osservazione, quest'ultima volta però dopo aver girato lo strumento col cerchio ad E, allo scopo di eliminare la diseguaglianza dei perni e l'errore della livella. Lessi il barometro e il termometro appena finita l'osservazione. Non potei subito osservare stelle fondamentali, perchè non fu possibile vederne. Nel pomeriggio ne osservai due, oltre alla stella 50 α Cygni, che mi servì a determinare il tempo. Siccome osservando una zenitale col metodo del rovesciamento dello strumento a metà dell'osservazione, non occorre la conoscenza dell'azimut e della collimazione strumentali per determinare la correzione dell'orologio, era mia idea fare una osservazione supplementare per determinare a e c, ma la sera il tempo non permise e quindi dovetti rinunciare alla determinazione diretta, ricorrendo ad un ripiego per la determinazione dell'ascensione retta di Mercurio al momento del suo passaggio pel meridiano della Sala Meridiana.

Per la riduzione delle osservazioni ho adoperato le formole che si adoperano quando si riducono le osservazioni della Luna, il che significa che nulla è stato trascurato, sebbene la parallasse di Mercurio sia ben poca cosa in confronto di quella della Luna.

Perciò ho ridotto i tempi dei passaggi pei fili laterali a quello pel filo di mezzo mediante la formola:

$$l = \frac{1 - \rho \operatorname{sen} p \cos(\varphi' - \delta)}{(1 - \lambda) \cos \delta} f$$

e l'ascensione retta mediante la formola

$$\alpha = h + \Delta t + \frac{1 - \rho \operatorname{sen} p \cos \varphi'}{(1 - \lambda) \cos \delta} \left[\frac{\operatorname{sen}(\varphi - \delta')}{\cos \delta'} a + \frac{\cos(\varphi - \delta')}{\cos \delta'} b + c \sec \delta' \right]$$

dove:

f = distanza equatoriale del filo laterale dal filo di mezzo
φ = latitudine geografica del luogo di osservazione
φ' = latitudine geocentrica del luogo di osservazione
ρ = raggio terrestre pel luogo di osservazione

p = parallasse equatoriale orizzontale del pianeta
δ = declinazione geocentrica del pianeta
δ' = declinazione del pianeta affetto dalla parallasse
λ = incremento dell'ascensione retta del pianeta in 1^s di tempo siderale
α = ascensione retta geocentrica del pianeta
h = ora osservata pel passaggio al filo di mezzo
Δt = correzione dell'orologio
a, b, c = le solite costanti strumentali, azimut, inclinazione e collimazione.

Tutte le posizioni del pianeta si riferiscono sempre al centro. Siccome si osserva un lembo si deve applicare la correzione $\pm \frac{R}{(1-\lambda)\cos\delta)}$ in cui R è il raggio. Avendo io osservato ambedue i lembi, la media dei tempi dà l'ora del passaggio del centro e la differenza, moltiplicata per $(1-\lambda)\cos\delta$, dà il diametro $2R$.

Prima di scrivere le osservazioni fatte, calcolo le quantità occorrenti per la riduzione. Gli f sono stati trascritti precedentemente. $\varphi = +45^\circ\, 2'\, 21'',1$ in base alla determinazione da me fatta nel 1912. Servendomi della tavola a pag. 558 del " Nautical Almanac „ pel 1914 ho:

$$\varphi' = +44^\circ\, 50'\, 37'',1 \qquad \log\rho = 9.9992616.$$

A pagina 452 del " Nautical Almanac „ pel 1914 trovo per Mercurio

$$p = 13'',03$$

Movimento orario in ascensione retta $= -3'\,1'',4 = -12^s,09$
(l'ora è di tempo medio);

da quest'ultimo deduco

$$\lambda = -0^s.00335 \qquad 1-\lambda = 1.00335.$$

Assumo poi come

$$\delta = -16^\circ\, 18',3$$

da cui

$$\varphi' - \delta = 61^\circ\, 8',9.$$

Calcolo δ' mediante la formola approssimata

$$\delta' = \delta - p \operatorname{sen} (\varphi' - \delta)$$

che mi dà

$$\delta' = -16^{\circ}\, 18',5.$$

Inoltre dai dati precedenti ho

$$\varphi - \delta' = 61^{\circ}\, 20',9$$

da cui

$$\log B = \log \frac{\cos(\varphi - \delta')}{\cos \delta'} = 9.6986.$$

La correzione dell'orologio è stata determinata in base a quella risultante dall'apposita osservazione di 50 α Cygni (Deneb), tenendo conto dell'andamento nell'intervallo: ho avuto così

$$\Delta t = -1^{m}.41^{s},13.$$

Coi dati suesposti ho ottenuto

$$\log F = \log \frac{1 - \rho \operatorname{sen} p \cos(\varphi' - \delta)}{(1 - \lambda) \cos \delta} = 0.01637$$

$$\log P = \log \frac{1 - \rho \operatorname{sen} p \cos \varphi'}{(1 - \lambda) \cos \delta} = 0.01636.$$

Registro ora le osservazioni di Mercurio e la relativa riduzione al filo di mezzo:

I lembo:

Fili	Tempi osservati	Riduz. al filo di mezzo $= Ff$	Tempi ridotti al filo di mezzo
I	$14^{h}.48^{m}.\ 5^{s},46$	$+\ 31^{s},35$	$14^{h}.48^{m}.36^{s},81$
II	9 ,36	+ 27 ,51	36 ,87
III	13 ,12	+ 23 ,61	36 ,73
IV	17 ,20	+ 19 ,78	36 ,98
V	21 ,09	+ 15 ,78	36 ,87
VI	28 ,91	+ 7 ,86	36 ,77
VII	32 ,82	+ 3 ,99	36 ,81
VIII	36 ,78		36 ,78
IX	40 ,80	— 3 ,93	36 ,87
X	44 ,83	— 7 ,85	36 ,98

XI	52 ,52	— 15 ,75	36 ,77
XII	56 ,30	— 19 ,66	36 ,64
XIII	49 . 0 ,30	— 23 ,57	36 ,73
XIV	4 ,06	— 27 ,42	36 ,64
XV	8 ,47	— 31 ,63	36 ,84

Media: passaggio del 1° lembo al filo di mezzo $14^h.48^m.36^s,81$

II lembo:

Fili	Tempi osservati	Riduz. al filo di mezzo = *Ff*	Tempi ridotti al filo di mezzo
I	$14^h.48^m. 6^s,16$	+ $31^s,35$	$14^h.48^m.37^s,51$
II	9 ,98	+ 27 ,51	37 ,49
III	13 ,90	+ 23 ,61	37 ,51
IV	17 ,78	+ 19 ,78	37 ,56
V	21 ,61	+ 15 ,78	37 ,39
VI	29 ,63	+ 7 ,86	37 ,49
VII	33 ,38	+ 3 ,99	37 ,37
VIII	37 ,45		37 ,45
IX	41 ,42	— 3 ,93	37 ,49
X	45 ,40	— 7 ,85	37 ,55
XI	53 ,07	— 15 ,75	37 ,32
XII	57 ,03	— 19 ,66	37 ,37
XIII	49 . 0 ,89	— 23 ,57	37 ,32
XIV	4 ,77	— 27 ,42	37 ,35
XV	9 ,11	— 31 ,63	37 ,48

Media: passaggio del 2° lembo al filo di mezzo $14^h.48^m.37^s,44$

Per la durata del passaggio di Mercurio attraverso ciascun filo ottengo

Filo	Durata del passaggio	Filo	Durata del passaggio	Filo	Durata del passaggio
I	$0^s,70$	VI	$0^s,72$	XI	$0^s,55$
II	0 ,62	VII	0 ,56	XII	0 ,73
III	0 ,78	VIII	0 ,67	XIII	0 ,59
IV	0 ,58	IX	0 ,62	XIV	0 ,71
V	0 ,52	X	0 ,57	XV	0 ,64

Media della durata del passaggio del pianeta attraverso un filo: $0^s,64$.

Letture alla livella mobile:

prima dell'osservazione	W 25,6	E 53,1
dopo l'osservazione	W 51,8	E 24,3

la quale dà

$$b = -2,6 \frac{1.228}{60} = -0^s,05$$

da cui

$$\log P.B.b = 8^n.441 \qquad P.B.b = -0^s,03.$$

Per ottenere l'ora del passaggio del centro di Mercurio pel filo di mezzo faccio la media dei tempi dei passaggi ai due lembi ottenendo $14^h\,48^m\,37^s,12$.

Tenendo conto della correzione dell'orologio, scritta precedentemente, ottengo:

tempo siderale del passaggio del centro di Mercurio pel filo di mezzo $14^h\,46^m\,55^s,99$.

Allora applicando la formola che dà l'ascensione retta ho:

$$\alpha = 14^h\,46^m\,55^s,99 - 0^s,03 + P(Aa + Cc).$$

Pel calcolo di $Aa + Cc$ usufruisco delle osservazioni delle stelle 9 β Capricorni e 11 ρ Capricorni che adopererò anche pel calcolo della δ di Mercurio. In quel momento non era possibile vedere bene stelle circumpolari, e dopo non si potè, causa le nuvole.

Dal " Nautical Almanac „ pel 1914 ho (tenendo conto dell'aberrazione diurna):

Stella 9 β Capricorni:

$\alpha = 20^h\,16^m\,13^s,99 \quad \delta = -15^\circ\,3'\,\,8'',2$ onde $\lg \sec\delta = 0.01516$

Stella 11 ρ Capricorni:

$\alpha = 20^h\,24^m\,\,0^s,64 \quad \delta = -18^\circ\,5'\,50'',8$ onde $\lg \sec\delta = 0.02203$

dall'osservazione di 50 α Cygni (Deneb) ho ottenuto

$$\Delta t = -1^m\,41^s,16.$$

Le osservazioni fatte sono le seguenti:

9 β Capricorni:

Fili	Tempi osservati	Riduz. al filo di mezzo $= f \sec \delta$	Tempi ridotti al filo di mezzo
I	$20^h.17^m.21^s,89$	$+ 31^s,26$	$20^h.17^m.53^s,15$
II	25 ,81	+ 27 ,44	53 ,25
III	29 ,60	+ 23 ,55	53 ,15
IV	33 ,29	+ 19 ,73	53 ,02
V	37 ,47	+ 15 ,74	53 ,21
VI	45 ,05	+ 7 ,84	52 ,89
VII	49 ,60	+ 3 ,98	53 ,58
VIII	53 ,21		53 ,21
IX	56 ,77	— 3 ,92	52 ,85
X	18 . 0 ,94	— 7 ,83	53 ,11
XI	8 ,58	— 15 ,71	52 ,87
XII	12 ,62	— 19 ,61	53 ,01
XIII	16 ,50	— 23 ,51	52 ,99
XIV	20 ,27	— 27 ,35	52 ,92
XV	24 ,43	— 31 ,54	52 ,89

Media: tempo del passaggio al filo di mezzo = $20^h.17^m.53^s,07$
stato del pendolo . . . . = — 1 .41 ,16
ora siderale del passaggio al filo di mezzo = 20 .16 .11 ,91

11 ρ Capricorni:

Fili	Tempi osservati	Riduz. al filo di mezzo $= f \sec \delta$	Tempi ridotti al filo di mezzo
I	$20^h.25^m. 7^s,92$	$+ 31^s,76$	$20^h.25^m.39^s,68$
II	11 ,92	+ 27 ,87	39 ,79
III	15 ,76	+ 23 ,92	39 ,68
IV	19 ,78	+ 20 ,04	39 ,82
V	23 ,75	+ 15 ,99	39 ,74
VI	31 ,66	+ 7 ,96	39 ,62
VII	35 ,71	+ 4 ,05	39 ,76
VIII	39 ,62		39 ,62
IX	43 ,76	— 3 ,99	39 ,77
X	47 ,52	— 7 ,95	39 ,57
XI	55 ,50	— 15 ,96	39 ,54
XII	59 ,70	— 19 ,92	39 ,78
XIII	26 . 3 ,58	— 23 ,88	39 ,70
XIV	7 ,37	— 27 ,78	39 ,59
XV	11 ,50	— 32 ,04	39 ,46

Media: tempo del passaggio al filo di mezzo $= 20^h.25^m.39^s,67$
stato del pendolo . . . . $= - \ 1\ .41\ ,16$
ora siderale del passaggio al filo di mezzo $= 20\ .23\ .58\ .51$

Fu letta la livella mobile prima e dopo l'osservazione (sempre nella posizione cerchio a ovest) e si lesse:

prima dell'osservazione . .	W 27,1	E 54,5
dopo l'osservazione	W 26,6	E 54,2
e in media	W 26,9	E 54,3 }
rovesciando lo strumento lessi	W 53,6	E 25,8 }

allora dai due valori (riuniti con una graffa) ottengo

$$b = -1.8\ \frac{1.228}{60} = -0^s,04.$$

Inoltre ho:

per 9 β Capricorni

$\varphi - \delta = 60^o.5',5$ $\log B = 9,713$ $\log Bb\ 8^n.279$ $Bb = -0^s,02$

per 11 ρ Capricorni

$\varphi - \delta = 63\ .7\ ,2$ $\log B = 9,677$ $\log Bb\ 8^n.243$ $Bb = -0\ ,02$

e allora applicando la formola

$$\alpha = \theta + Aa + Bb + Cc$$

ottengo:

per la 9 β Capricorni

$$20^h.16^m.13^s,99 = 20^h.16^m.11^s,91 - 0^s,02 + Aa + Cc$$

per la 11 ρ Capricorni

$$20\ .24\ .\ 0\ ,64 = 20\ .23\ .58\ ,51 - 0\ ,02 + A_1a + C_1c$$

ossia rispettivamente

$$Aa + Cc = 2^s,10$$
$$A_1a + C_1c = 2\ ,15.$$

Ora, per avere questi valori riferiti a Mercurio, interpolo su di $1^o \frac{1}{4}$ la differenza $0^s,05$ per 3^o di declinazione: ottengo

$$\frac{1,25}{3,05}\ .\ 5 = 2$$

così per $\delta' = -16^o\ 18'$ ottengo

$$Aa + Cc = 2^s,12.$$

Allora

$$\log P(Aa + Cc) = 0{,}343$$

da cui

$$P(Aa + Cc) = 2^s{,}20.$$

E sostituendo

$$\alpha = 14^h.46^m.55^s{,}99 - 0^s{,}03 + 2^s{,}20 = \mathbf{14^h\ 46^m\ 58^s{,}16}$$

che è l'ascensione retta apparente geocentrica del centro di Mercurio al momento del suo passaggio pel meridiano della Sala Meridiana.

Nota la durata del passaggio del disco del pianeta attraverso un filo (si è visto essere $0^s{,}64$) otterrò facilmente il valore del diametro mediante la formola

$$2R = 0^s{,}64\,(1 - \lambda)\cos\delta$$

che mi dà

$$2R = 0^s.614 = 9'',21$$

e allora

$$R = 4'',60$$

che è notevolmente inferiore a quello adottato nelle effemeridi, che è $4'',94$.

Siccome poi il logaritmo della distanza di Mercurio dalla Terra era in quel momento 9,829, ottengo come valore del semidiametro alla distanza media $3'',11$ invece del $3'',34$ adottato nelle effemeridi.

Passo ora all'osservazione di declinazione. La lettura del filo mobile portato tangente al lembo superiore del pianeta è stata 91,7: tutte le altre osservazioni sono state fatte tenendo fisso il filo mobile alla lettura 60,0. Consegue che alle letture fatte ai microscopî occorre aggiungere $17'',3$ perchè esse siano comparabili con le altre. Questo valore $17'',3$ è stato calcolato per le 0,317 di rivoluzione adottando come valore di una rivoluzione della vite $54'',51$.

Le letture ai due microscopî sono state fatte collimando coi due fili mobili alla divisione che precede la intaccatura centrale della seghetta: poi i due fili mobili sono stati portati a collimare alla divisione immediatamente susseguente all'intac-

catura, leggendo in quest'ultimo caso i soli secondi. Poi è stata letta la livella di spia, e infine il barometro e i termometri. Rammento che l'osservazione è stata fatta quando il pianeta era presso a poco nel centro del campo, onde le eventuali correzioni da farsi per la riduzione al meridiano e per tener conto della variazione della declinazione nel brevissimo intervallo, sono assolutamente trascurabili, perchè inferiori agli errori di osservazione. Infatti per circa 10^s di angolo orario, la prima correzione importa $0'',04$ e la seconda $0'',3$ essendo $+ 108'',4$ il movimento orario di Mercurio in δ in quel momento. Tuttavia, per maggiore esattezza, terrò conto di quest'ultima correzione: effettivamente l'osservazione di declinazione fu fatta quando il pianeta aveva un angolo orario di circa $+ 10^s$, onde per ridurmi al momento in cui l'astro era in meridiano, dovrò aggiungere alla δ osservata la piccola quantità $- 0'',3$.

Le osservazioni sono le seguenti:

Microscopio I	$6^\circ.28'.6'',0$	Microscopio II	$186^\circ.27'.10'',6$
	$8\ ,1$		$10\ ,2$
Livella di spia:	verso l'osservatore 25,3		verso l'astro 43,5
Barom. $710^{mm},18$	termom. attacc. $15^\circ,9$		termom. esterno $15^\circ,5$

Per tener conto della correzione del *run* ho adottato la formola che dà il prof. Abetti nel fascicolo 7° delle " Pubblicazioni dell'Osservatorio di Arcetri „

$$\Delta (l' + l) = \frac{-2400 + (l' + l)}{2400} (l' - l)$$

in cui l è la lettura fatta alla divisione che precede e l' quella fatta alla divisione che segue la intaccatura centrale della seghetta.

Infine occorre tener conto della flessione del cannocchiale. Questa fu determinata dal dott. Favaro e gli risultò eguale a $2'',43$: pel modo come è stata calcolata, rispetto al segno, questa correzione deve essere applicata aumentando la lettura fatta ai microscopî della quantità $+ 2'',43 \operatorname{sen} z$ se la stella è a S e il cerchio a W, come succede appunto nel nostro caso.

Per la rifrazione adopero le tavole di Albrecht (*Formeln und Hilfstafeln*, IV edizione).

Così ottengo:

Microscopio	I	6°.28′. 6″,1	Media 276°.27′.38″,2
„	II	186 .27 .10 ,3	

per la livella la correzione è — $4^p,4$ e in secondi — 9″4
per la flessione, essendo $\delta' = -16°.18',5$ e $\varphi = +45°.2',4$
ho $z = +61°.20',9$
e allora la correzione risulta $+2'',43 \operatorname{sen} z = +2'',1$.

Aggiungendo ancora 17″,3 dovuti alla lettura col filo mobile, il valore trovato del semidiametro cioè 4″,6 e la riduzione al meridiano 0″,3 ottengo per la lettura apparente 276°.27′.53″,1.

Per calcolare la rifrazione devo trovare la distanza zenitale, e a tal uopo ho osservato la linea di gronda di un tetto a Superga, nelle due posizioni del cerchio, ottenendo:

Oculare a W (cerchio a sinistra):

Microscopio I	215°.53′.14″,2	Microscopio II	35°.52′. 9″,0
	13 ,2		10 ,0
Livella di spia:	verso l'osservatore 42,3		verso l'oggetto 25,2

Oculare a E (cerchio a destra):

Microscopio I	34°.25′.11″,5	Microscopio II	214°.24′,5″,6
	13, 9		5 ,3
Livella di spia:	verso l'osservatore 14,3		verso l'oggetto 31,6.

Riducendo e non tenendo conto della flessione, che si annulla nella media delle osservazioni in opposte posizioni del cerchio, e non tenendo conto della rifrazione terrestre, perchè non mi occorre la distanza zenitale del punto collimato, ho successivamente:

Cerchio a sinistra:

Microscopio	I	215°.53′.13″,9	Media 125°.52′.41″,5
„	II	35 .52 . 9 ,0	

Livella $= +3^p,75 = +8'',0$

Cerchio a destra:

Microscopio	I	34°.25′.12″,2	Media 304°.24′.38″,9
„	II	214 .24 . 5 ,6	

Livella $= +7^p,05 = +15'',0$

da cui

$$Z = \frac{1}{2}\left[(304^{\circ}.24'.38'',9 + 15'',0) + (125^{\circ}.52',41'',5 - 8'',0)\right] = $$
$$= 215^{\circ}.8'.43'',7.$$

Allora la distanza zenitale apparente del centro di Mercurio è data dalla lettura al centro di Mercurio meno la lettura allo zenit, perchè il cerchio è a destra, e così ottengo 61° 19′ 9″,4.

Entro con questo valore nelle tavole di Albrecht e coi valori scritti sopra per la temperatura e la pressione. Ottengo come valore della rifrazione, dopo di aver ridotto la pressione osservata a 600 metri alla gravità normale (cioè da 710,18 a 710,10), 1′ 36″,50.

Quindi la distanza zenitale vera è

$$61^{\circ}\,20'\,45'',9$$

allora

$$\delta' = \varphi - \zeta = -16^{\circ}\,18'\,24'',8.$$

Ho osservato ancora in declinazione le stelle 9 β Capricorni e 11 ρ Capricorni, sempre tenendo il filo mobile a 60,0. L'osservazione è stata fatta con cerchio a W e stella a S e quindi con cerchio a destra.

Le osservazioni sono le seguenti:

Barom. 710^{mm},06 termom. attacc. 12°,8 termom. esterno 12°,2

9 β Capricorni:

Microscopio I	5°.12′.59″,5	Microscopio II	185°.12′,6″,4
	13 , 1 ,7		7 ,1

Livella di spia: verso l'osservatore 19,5 verso l'oggetto 39,8

11 ρ Capricorni:

Microscopio I	8°.15′.32″,2	Microscopio II	188°.14′.36″,1
	32 ,0		37 ,9

Livella di spia: verso l'osservatore 19,9 verso l'oggetto 40,2

Barom. 710^{mm},08 termom. attacc. 12°,6 termom. esterno 12°,0.

Riducendo alla gravità normale, le due letture al barometro sono rispettivamente 709,98 e 710,00.

Così ottengo:

Stella 9 β Capricorni:

Microscopio	I	5°.13′.0″,1	Media 275°.12′.33″,2
„	II	185 .12 .6 ,4	

Livella $= + 0^{p},35 = + 0'',8$

la distanza zenitale apparente risulta approssimativamente 60°.3′.50″: mediante essa calcolo la correzione per la flessione e la rifrazione: ottengo rispettivamente + 2″,1 e 1′.32″,8.

Quindi:	lettura alla stella	275°.14′.8″,9
	declinazione della stella	— 15 . 3 .8 ,2
	equatore strumentale	260 .11 .0 ,7

Stella 11 ρ Capricorni:

Microscopio	I	8°.15′.32″,0	Media 278°.15′.4″,6
„	II	188 .14 .37 ,3	

Livella = — 0p,05 = — 0″,1

la distanza zenitale apparente risulta approssimativamente 63°.6′.21″; mediante essa calcolo la correzione per la flessione ottenendo + 2″,2 e la rifrazione ottenendo 1′.45″,3.

Quindi:	lettura alla stella	278°.16′.52″,0
	declinazione della stella	— 18 . 5 .50 ,8
	equatore strumentale	260 .11 , 1 ,2.

La lettura apparente pel centro di Mercurio in meridiano era 276° 27′ 53″,1: aggiungendo la rifrazione si ha 276° 29′ 29″,6. Quindi la declinazione di Mercurio risulta rispettivamente dalle osservazioni delle due stelle — 16° 18′ 28″,9 e — 16° 18′ 28″,4.

Questi valori si accordano molto bene, specie se si tien conto che le immagini erano tutt'altro che tranquille. Il valore dedotto dall'osservazione dello zenit strumentale è un po' diverso da questi, pur rimanendo ampiamente entro i limiti dell'esattezza data ordinariamente dallo strumento di Bamberg, in cui, per quante precauzioni si vogliano prendere, c'è sempre da aspettarsi degli scherzi per parte della livella di spia. L'avere scelto stelle di declinazione molto prossime a quella di Mercurio mi rende più sicuro riguardo ad eventuali errori di graduazione del cerchio, quindi dò peso doppio ai risultati avuti differenzialmente dalle osservazioni delle stelle, i quali anche mi portano a risultati quasi indipendenti dalla costante di flessione del cannocchiale. Ottengo dunque in definitiva:

$$\delta' = -16°.18'.27'',9$$

per ottenere δ, cioè la declinazione geometrica, adopero la formola

$$\delta = \delta' + \rho p . \text{sen}\,(\varphi' - \delta')$$

in cui con i dati già altre volte scritti

$$\varphi' - \delta' = 61^\circ.9',1$$

allora

$$\rho p\ \text{sen}\,(\varphi' - \delta') = + 11'',4$$

e perciò

$$\boldsymbol{\delta = - 16^\circ\, 18'\, 16'',5}.$$

che è la declinazione apparente geocentrica del centro di Mercurio al momento del suo passaggio pel meridiano della Sala Meridiana dell'Osservatorio di Pino Torinese.

Rimane ora da fare il confronto tra i risultati da me ottenuti e quelli calcolati. Adotto i valori pubblicati nel " Nautical Almanac ", che si fonda sulle tavole di Newcomb. Siccome il " Nautical Almanac " dà le posizioni apparenti pel mezzogiorno medio di Greenwich, occorre calcolare che ora era a Greenwich quando Mercurio passava pel meridiano del luogo di osservazione. Il passaggio è avvenuto a $14^h\,46^m\,58^s,16$ di tempo siderale; il tempo siderale a mezzogiorno medio del 6 novembre era (" Nautical Almanac ") $14^h\,59^m\,20^s,85$, essendosi tenuto conto della differenza di longitudine Greenwich-Pino Torinese, che è di $0^h\,31^m\,6^s,7$. Risulta: tempo medio di Greenwich al momento dell'osservazione $23^h\,12^m\,36^s,7$.

Interpolando l'ascensione retta terrò conto dell'aberrazione diurna che è $+ 0^s,02$, e così ho:

$$\alpha = 14^h\,46^m\,57^s,96 \qquad \delta - 16^\circ\,18'\,16'',4.$$

Quindi facendo le differenze nel senso osservazione meno calcolo

$$\Delta\alpha = + 0^s,20 \qquad \Delta\delta = - 0'',1.$$

Pino Torinese, 9 febbraio 1915.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 28 Febbraio 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE G. P. CHIRONI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Socii: Pizzi, De Sanctis, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta e Stampini, Segretario della Classe.

Il Presidente scusa l'assenza di S. E. Boselli, Presidente dell'Accademia, e dei Socii Manno e Ruffini. Si compiace di annunziare che la salute del Socio Manno è migliorata, del che la Classe si rallegra.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 14 febbraio.

Il Presidente dà lettura della lettera circolare della Società Leonardo da Vinci di Firenze, con la quale la nostra Accademia è invitata a dare la sua adesione ad un ordine del giorno che conchiude " che i monumenti artistici e storici, le gallerie e i " musei, le biblioteche e gli archivi, tutte insomma le sedi e le " raccolte di documenti d'arte e di cultura, siano dagli eserciti " belligeranti risparmiati, con ogni sforzo, durante e dopo l'azione " guerresca, come quelli che sono, per l'avvenire, testimoni glo- " riosi del passato, e che non soltanto all'una o all'altra nazione " ma appartengono a tutto il mondo civile ". Il Presidente fa

presente alla Classe che già la Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della nostra Accademia, nella seduta del 21 febbraio corrente, ha unanime aderito a tale voto, e propone che anche la nostra Classe dia la sua adesione. Messa ai voti la proposta del Presidente è approvata all'unanimità. Perciò il Presidente avverte che si può considerare come approvata dall'unanime voto della Accademia l'adesione all'ordine del giorno della Società Leonardo da Vinci di Firenze.

Il Socio De Sanctis presenta, per l'inserzione nelli *Atti*, una Nota del Dottor Bacchisio Motzo, contenente la 3ª e 4ª parte del suo studio *Aristea*.

Il Socio Patetta, anche a nome del Socio Einaudi, presenta, pure per l'inserzione negli *Atti*, una Nota della Dottoressa Dina Bizzarri, *Sull'epoca dell'introduzione della "Lira" e della Magistratura Podestarile in Siena*.

Il Socio Sforza presenta, per la pubblicazione nelle *Memorie*, uno studio del Dottor Ubaldo Mazzini dal titolo *L'Anfiteatro romano di Luni illustrato e descritto*. Si nomina perciò una Commissione, costituita dello stesso Socio Sforza e del Socio De Sanctis, la quale riferisca in una prossima adunanza sulla Memoria del Dr. Mazzini. Dopo di che il Presidente dichiara sciolta l'adunanza.

LETTURE

ARISTEA

Nota IIª del Dott. BACCHISIO MOTZO.

III. — Di alcune notizie storiche della lettera a Filocrate.

L'autore, come tutti i falsari, volle conciliare all'opera sua piena credibilità: così introducendo il *πρόσταγμα* del Filadelfo per la liberazione dei Giudei e l'*εἴσδοσις* di Demetrio di Falero e la corrispondenza tra il re ed il pontefice, fa risaltare l'uso vigente alla corte tolemaica di tutto scrivere e riporre negli archivi dai quali avrebbe attinto (1); e dopo riferiti i discorsi tenuti nei sette banchetti dati dal re ai LXXII interpreti si appella ai *χρηματισμοί* di Filadelfo, in cui tutto veniva registrato che il re dicesse o facesse nel corso della giornata (2). Ma queste proteste non creano più alcuna illusione: anzi lo

---

(1) § 28 *πάντα γὰρ διὰ προσταγμάτων καὶ μεγάλης ἀσφαλείας τοῖς βασιλεῦσι τούτοις διῳκεῖτο καὶ οὐδὲν ἀπερριμμένως οὐδ' εἰκῇ διόπερ καὶ τὰ τῆς εἰσδόσεως καὶ τὰ τῶν ἐπιστολῶν ἀντίγραφα κατακεχώρικα καὶ τὸ τῶν ἀπεσταλμένων πλῆθος καὶ τὴν ἑκάστου κατασκευήν.*

(2) § 297–300 *ψεύσασθαι μὲν οὖν οὐ καθῆκόν ἐστι περὶ τῶν ἀναγραφομένων· εἰ δὲ καί τι παραβαίην οὐχ ὅσιον ἐν τούτοις· ἀλλ' ὡς γέγονεν οὕτως διασαφοῦμεν ἀφοσιούμενοι πᾶν ἁμάρτημα· διόπερ ἐπειράθην... παρὰ τῶν ἀναγραφομένων ἕκαστα τῶν γινομένων ἔν τε τοῖς χρηματισμοῖς τοῦ βασιλέως καὶ ταῖς συμποσίαις μεταλαβεῖν· ἔθος γάρ ἐστι, καθὼς καὶ σὺ γινώσκεις, ἀφ' ἧς ἂν ἡμέρας ⟨ὥρας⟩ ὁ βασιλεὺς ἄρξηται χρηματίζειν μέχρις οὗ κατακοιμηθῇ πάντα ἀναγράφεσθαι τὰ λεγόμενα καὶ πρασσόμενα... πάντ' οὖν ἀκριβῶς παρὰ τῶν ἀναγεγραμμένων, ὡς ἐλέχθη, μεταλαβόντες κατακεχωρίκαμεν.* Sull'uso ricordato da Aristea cf. Wilcken “ Philologus „ LIII (1894) 80-126.

scusarsi e l'insistere sulla verità del racconto mostrano che all'autore mancava la fede serena che vuole ispirare nei lettori. Certamente egli non ricorse agli archivi e ai *χρηματισμοί* del Filadelfo più di quel che non sia un ufficiale vissuto alla sua corte. È oramai acquisito che la lettera a Filocrate è un romanzo apologetico con colorito storico.

L'opera non è però priva d'interesse e basta a provarlo il largo ed utile uso fattone dagli studiosi dell'Egitto tolemaico. Un documento che rappresenta le condizioni dell'Egitto e della Palestina verso la fine del II secolo a. C. e che permette di farci un concetto delle aspirazioni e delle idee che fervevano nella società giudaica di quel tempo, merita l'attenzione dello storico. Anche per gli avvenimenti del periodo più antico, a cui l'autore pretende di appartenere e di cui immagina di raccontare un episodio, la sua testimonianza può essere utile. Poichè infatti egli volle dare alla sua invenzione l'aspetto di storia, una certa conoscenza, per quanto vaga e malsicura, del regno di Filadelfo non dovette mancargli. Alcune sue notizie che sono state dichiarate senz'altro erronee, controllate e vagliate si mostrano vere, o molto probabili, o contenere in mezzo ad esagerazioni un nucleo di verità.

Tradizioni storiche attendibilissime conservatesi in seno alle comunità giudaiche di Egitto ha utilizzato Aristea nell'esporre l'origine della loro colonia divenuta poi così florida. A proposito dei prigionieri condottivi da Tolemeo Sotere osserva che già altri Giudei erano andati in Egitto *ἤδη μὲν καὶ πρότερον ἱκανῶν εἰσεληλυθότων σὺν τῷ Πέρσῃ καὶ πρὸ τούτων ἑτέρων συμμαχιῶν ἐξαπεσταλμένων πρὸς τὸν τῶν Αἰθιόπων βασιλέα μάχεσθαι σὺν Ψαμμητίχῳ, ἀλλ' οὐ τοσοῦτοι τῷ πλήθει παρεγενήθησαν ὅσους Πτολεμαῖος ὁ τοῦ Λάγου μετήγαγε* (§ 13). Questa notizia fu per il passato trascurata tanto che qualche storico fece incominciare la diaspora in Egitto dal regno di Tolemeo Filometore: altri la disse del tutto inventata (1). Dopo

(1) Willrich " Archiv f. Papyrusforsch. „ I (1901) p. 48 Wendland in Kautzsch *Apokryphen* II p. 6. Cfr. anche § 35 *Ἐπεὶ συμβαίνει πλείονας τῶν Ἰουδαίων εἰς τὴν ἡμετέραν χώραν κατῳκίσθαι γενηθέντας ἀνασπάστους ἐκ τῶν Ἱεροσολύμων ὑπὸ Περσῶν καθ' ὃν ἐπεκράτουν χρόνον.*

la splendida conferma documentaria data dai papiri aramaici di Elefantina, le parole di Aristea possono chiamarsi l'atto di nascita di quella colonia. Esse ci assicurano che un contingente notevole di milizie giudaiche fu fornito dal re Zedechia a Psammetico II suo alleato quando nel 590 intraprese la spedizione contro l'Etiopia di cui abbiamo un monumento contemporaneo nell'iscrizione di Abu-Simbel (1). Tra gli *ἀλλόγλωσσοι* che l'iscrizione ricorda accanto ai mercenari greci e agli egiziani, sono da annoverare anche questi Giudei che non tornarono più in patria ma furono stanziati nelle colonie militari di Siene e di Elefantina.

Non si può tacciare Aristea d'ignoranza (2) se ricorda figli di Filadelfo accanto alla sorella e seconda sposa Arsinoe *εἰ αὐτός τε ἔρρωσαι καὶ ἡ βασίλισσα Ἀρσινόη, ἡ ἀδελφή, καὶ τὰ τέκνα καλῶς ἂν ἔχοι* (§ 41, cf. §§ 45 e 194), poichè non ne segue ch'egli li supponga figli di Arsinoe II, la quale fu secondo lo scoliaste a Teocrito (XVII, 128) *ἄτεκνος*, potendosi intendere dei figli del Filadelfo e della prima Arsinoe adottati dalla seconda. Evergete è proclamato ufficialmente figlio di Arsinoe II (3).

Tra gli errori storici più gravi sarebbe la menzione di una vittoria navale del Filadelfo su Antigono Gonata. Nel ricevere i LXXII il re avrebbe detto: *μεγάλην δὲ τέθειμαι τὴν ἡμέραν ταύτην ἐν ᾗ παραγεγόνατε καὶ κατ' ἐνιαυτὸν ἐπίσημος ἔσται πάντα τὸν τῆς ζωῆς ἡμῶν χρόνον· συντέτυχε γὰρ καὶ κατὰ τὴν νίκην ἡμῖν προσπεπτωκέναι τῆς πρὸς Ἀντίγονον ναυμαχίας· διὸ καὶ δειπνῆσαι σήμερον μεθ' ὑμῶν βουλήσομαι* (§ 180). Il Wendland (4) seguìto da altri pensa che Aristea abbia scambiato per vittoria la sconfitta subìta dalla flotta del Filadelfo a Cos nel 258, o meglio nel 253, in seguito alla quale l'Egitto perse la supremazia marittima. Il Mahaffy (5) e l'Abrahams (6) tentano la difesa dell'autore ricorrendo alla battaglia vittoriosa di Andro, di molto posteriore. Ma Aristea immagina che i rap-

---

(1) *Corpus Inscript. Sem.* I 1 nr. 112 pp. 131-135.

(2) Wendland *Epist. ad Phil.* p. xxvi e Kautzsch *Apokr.* II p. 1.

(3) Cf. Dittenberger *Or. gr. inscr. sel.* I 54, 55, 56 etc.

(4) *Epist. ad Phil.* p. xxvi.

(5) *Empire of Ptolemies* p. 49.

(6) Art. cit. p. 336.

porti tra il re e i Giudei si svolgano circa gli anni 277-270 in cui a lato al Filadelfo regna la sorella Arsinoe. Non solo la battaglia di Andro ma anche quella di Cos sono perciò escluse. Da un complesso di circostanze che poi esporrò risulta anzi che tali rapporti sono immaginati come anteriori alla guerra di Siria del 274/3 e non si errerebbe attribuendo la vittoria al cui anniversario l'autore accenna ai primi anni del regno di Filadelfo. Che egli abbia preso su questo punto un abbaglio non pare da ammettere; il fatto che non aveva nessuna importanza per il suo racconto doveva essere notorio se l'introdusse incidentalmente a conferma dell'invenzione principale che gli era a cuore. Noi conosciamo ben poco gli avvenimenti di quegli anni per poter negare un scontro vittorioso dell'armata egiziana con quella di Antigono. L'Egitto aveva perduto la supremazia del mare nel 306 per la sconfitta di Salamina. Demetrio Poliorcete ne conservò il dominio anche dopo la disfatta e la morte di Antigono Monoftalmo a Ipso, avendo così il campo libero per le sue spedizioni in Celesiria (295) e poi in Asia. Solo con la sua prigionia (286) tale dominio andò perduto. " Il giovane Antigono Gonata, lasciato dal padre all'atto della sua partenza per l'Asia nel 286 a. C. a guardia dei possessi greci, soprafatto dall'onda della ribellione incoraggiata dall'Egitto, poteva a stento mantenersi nella chiave dei possessi greci Corinto, nel Pireo ed in poche altre fortezze e doveva lasciare che Tolemeo I con la sua flotta, riprendendo i disegni di rivincita della disfatta subìta nel 306 a. C., liberasse le isole soggette al dominio macedone, cioè imponesse il proprio protettorato in sostituzione di quello precedente all'organizzazione nominalmente autonoma sotto cui si riunivano le principali delle Cicladi che aveva il suo centro in Delo il *κοινὸν τῶν νησιωτῶν* (285 circa a. C.) " (1). Nell'anno in cui Filadelfo è associato al padre l'egemonia marittima torna così all'Egitto. Con questo avvenimento sono da ricollegare i rinnovati rapporti di amicizia e di alleanza tra la città di Mileto e il Filadelfo appena

---

(1) E. Pozzi *Le battaglie di Cos e di Andro e la politica marittima di Antigono Gonata* " Memorie R. Accad. Scienze di Torino " 1913 Serie II 63 p. 334.

salito al trono attestatici da un'epigrafe di recente pubblicata (1). Che la flotta di Antigono priva del favore di amici alleati e sudditi che defezionavano subisse qualche disastro e venisse battuta dall'egiziana è il naturale presupposto dell'autorità incontrastata che i Lagidi esercitano da quel momento nell'Egeo sino alla battaglia di Cos. Alla notizia di Aristea manca la conferma di altre fonti, ma gli avvenimenti del 285 la rendono verosimile. Potè trattarsi di un semplice scontro vittorioso e non di una grande battaglia, ma poichè ebbe la conseguenza e il significato di segnare il ritorno del predominio marittimo all'Egitto, dovette esser considerato e da storici compiacenti esaltato come una grande vittoria che riparava la sconfitta di Salamina, e coincidendo con gl'inizi del regno del Filadelfo, come il suo primo successo militare e politico e commemorato perciò ogni anno solennemente. Anche nella guerra di Cremonide (270-263) Filadelfo sostenne con la flotta e col tesoro la ribellione degli stati greci ad Antigono Gonata, ma è troppo tardi per attribuire a questo periodo la vittoria ricordata da Aristea.

Indicazioni utili a lumeggiare i rapporti dei primi Lagidi con le popolazioni della Celesiria ci dà la lettera a Filocrate, purchè se ne usi con molto criterio. Nel 312 dopo la vittoria di Gaza Sotere ebbe l'omaggio o la pronta resa delle città di quella regione (2) che l'anno innanzi s'eran dovute dare ad Antigono. In Gerusalemme egli entrò senza resistenza, secondo quanto narrava Agatarchide (3), approfittando del giorno

---

(1) Cf. *Milet, Ergebnisse der Ausgrabungen und Untersuchungen* etc. Heft III. *Das Delphinion* von G. Kawerau u. A. Rehm. Berlin 1914 iscrizione nr. 139 r. 28-9.

(2) Diod. XIX 85, 4 *μετὰ τῆς δυνάμεως ἐπῄει τῶν κατὰ Φοινίκην πόλεων τὰς μὲν πολιορκῶν τὰς δὲ πειθοῖ προσαγόμενος.*

(3) In Joseph *Antiq.* XII 5-6 e meglio *c. Apion.* I 205-212 *εἰσιόντος εἰς τὴν πόλιν Πτολεμαίου τοῦ Λάγου μετὰ τῆς δυνάμεως καὶ τῶν ἀνθρώπων ἀντὶ τοῦ φυλάττειν τὴν πόλιν διατηρούντων τὴν ἄνοιαν ἡ μὲν πατρὶς εἰλήφει δεσπότην πικρόν.* La data di questo avvenimento, assegnata da alcuni (cf. p. es. Droysen *Gesch. d. Hellenismus* II 167) al 320 e giudicata incerta dal Wellhausen *Israel. und jud. Gesch.*[7] p. 219, dal Lehmann-Haupt *Israel, seine Entwicklung im Rahmen der Weltgeschichte* (1911) pp. 184-5 è assegnata al 301 dopo la battaglia di Ipso. La data del 320 è da scartare: le truppe di Tolemeo contro Laomedonte erano guidate da Nicanore

di sabato in cui gli abitanti avrebbero trascurato la custodia delle mura. Ma al sopravvenire delle forze congiunte di Antigono e del figlio Demetrio, Sotere ritenne più opportuno abbandonare il paese e ritirarsi dietro le difese naturali dell'Egitto ad attendere che contro di esse s'infrangesse l'urto avversario. Forse nell'intento di fare il deserto davanti al nemico, forse per togliergli dei punti d'appoggio, o non contando di tornarvi a dominare per lungo tempo, Tolemeo prese una risoluzione che mostra a quali orrori quelle guerre davan luogo: ruinò e saccheggiò le città portando via quanto potè e tra l'altro certamente una parte della popolazione: *κατέσκαψε τὰς ἀξιολογωτάτας τῶν κεκρατεμένων πόλεων Ἄκην μὲν τῆς Φοινίκης Συρίας, Ἰόππην δὲ καὶ Σαμάρειαν καὶ Γάζαν τῆς Συρίας, αὐτὸς δὲ τὴν δύναμιν ἀναλαβὼν καὶ τῶν χρημάτων ὅσα δυνατὸν ἦν ἄγειν καὶ φέρειν ἐπανῆλθεν εἰς Αἴγυπτον* (Diod. XIX, 94, 7). Ecateo di Abdera, che è verisimilmente la fonte di Diodoro, non ha tenuto conto che delle città più importanti, come pure da storiografo di corte ha ricordato il fatto assai brevemente. Anche Gerusalemme fu tra le città così trattate, come attesta una notizia di Appiano (1) che è da riferire a questo tempo. Ed un'eco dell'avvenimento si conservò nelle tradizioni della colonia giudaica di Egitto. Aristea ed un'altra fonte che è trascritta in Giuseppe Flavio narrano il trasporto

---

(cfr. Niese *Gesch. der griech. u. makedon. Staaten* I 230, 4 e Bouché-Leclercq *Histoire des Lagides* I p. 32, 5). Anche il tempo dopo la battaglia di Ipso è da escludere: la notizia di Agatarchide sulla presa della città devesi mettere in rapporto con quella di Appiano sulla sua distruzione: ambedue si lasciano collocare bene nel 312-11, nei quali avviene la deportazione della popolazione giudaica e samaritana secondo le fonti giudaiche, e al 311 spetta la distruzione di Samaria attestata anche da Diodoro.

(1) *Syriaca* 50 dopo aver detto che Pompeo *κατέσκαψεν* Gerusalemme soggiunge: *ἣν δὴ καὶ Πτολεμαῖος ὁ πρῶτος Αἰγύπτου βασιλεὺς καθῃρήκει.* Il confronto col caso di Pompeo fa pensare che Sotere si contentasse di smantellarne le fortificazioni e di saccheggiarla portando via col resto parte degli abitanti. Che Aristea taccia della sorte toccata a Gerusalemme non deve far meraviglia: egli aveva buoni motivi per non mostrare il re di Egitto padrone del centro del principato giudaico formato dagli Asmonei in Giudea: neppure con una sola parola lascia trasparire che Filadelfo abbia signoreggiato la Giudea col resto della Celesiria.

della popolazione dai paesi che Tolemeo aveva sottomessi, sebbene la tradizione giudaica da essi usufruita non ricordasse più che i Giudei e i Samaritani.

Antiq. XII 7 Ὁ δὲ Πτολεμαῖος πολλοὺς αἰχμαλώτους λαβὼν ἀπό τε τῆς ὀρεινῆς Ἰουδαίας καὶ τῶν περὶ τὰ Ἱεροσόλυμα τόπων καὶ τῆς Σαμαρείτιδος καὶ τῶν ἐν τῷ ὄρει τῷ Γαριζεὶν κατῴκισεν ἅπαντας εἰς Αἴγυπτον ἀγαγών.	*Ep. ad Phil.* § 12 ἐκεῖνος γὰρ ἐπελθὼν τὰ κατὰ κοίλην Συρίαν καὶ Φοινίκην ἅπαντα συγχρώμενος εὐημερίᾳ μετὰ ἀνδρείας τοὺς μὲν μετῴκιζεν οὓς δὲ ᾐχμαλώτιζε, φόβῳ πάντα ὑποχείρια ποιούμενος· ἐν ὅσῳ καὶ πρὸς δέκα μυριάδας ἐκ τῆς τῶν Ἰουδαίων χώρας εἰς Αἴγυπτον μετήγαγεν.

Mentre la fonte di Giuseppe dice molti i prigionieri presi in Giudea e in Samaria, Aristea esagerando parla di più che 100.000 persone tolte alla sola Giudea. Il fatto è tuttavia reale: che il maggior incremento della colonia giudaica si dovesse ai prigionieri trasportati in Egitto da Sotere era cosa tanto nota (1) che il loro orgoglio nazionale non tentò neppure dissimularla anzi prevalse la tendenza ad esagerare. Il pseudo Ecateo (2), oltre quelli trasportativi per forza ricorda altri, tra cui sarebbe stato un Ezechia pontefice, che più o meno spontaneamente erano stati indotti a lasciare la patria e stabilirsi in Egitto. Le fonti indicano che si trattò d'una *μετοικία* o *κατοικία* forzata di queste popolazioni: la condizione giuridica personale anteriore dovette influire sulla sorte riservata ai singoli individui nel nuovo paese. Di ottomila soldati fatti prigionieri nella battaglia di Gaza, racconta Diodoro (XIX 85) che Sotere li stanziò come coloni in varie località dell'Egitto, e la pratica fu continuata dai successori, come da Evergete per i prigionieri fatti nella spedizione di Asia. Un trattamento analogo ebbero gli abitanti strappati da Sotere alla Celesiria, che non potevano con-

---

(1) Così più tardi la colonia giudaica di Roma si sviluppò per i molti prigionieri condottivi da Pompeo e poi in gran parte manomessi.

(2) In *c. Apion.* II 186-7.

siderarsi in massa come schiavi, trovandosi quel paese antecedentemente sotto il dominio del Lagide. I migliori furono stanziati da Sotere come coloni nei *φρούρια* sparsi nell'interno dell'Egitto (1). Seguendo un sistema già adottato dai Persiani, i Lagidi mirarono a rompere in qualche modo la compattezza etnica del popolo egiziano in cui il germe della ribellione mai non posava, disseminando in mezzo ad esso nuclei di altre popolazioni in contrasto d'idee, costumi ed interessi, concedendo ai coloni una condizione privilegiata di fronte agli indigeni. Coloni giudaici nel nomo Arsinoitico, e un villaggio intitolato a Samaria ci attestano i papiri per il regno di Filadelfo; e poichè non abbiamo notizia che questi ve li abbia condotti è da credere che trattisi dei prigionieri già fatti da Sotere e dei loro discendenti (2). Non pochi tuttavia rimasero in condizioni servili, come le fonti giudaiche dicono espressamente.

Riferendosi a questi avvenimenti Giuseppe Flavio (*antiq.* XII 3) afferma che in seguito alle guerre dei diadochi le città rimasero come vuote di abitanti e che Sotere fu per la Celesiria tutto il contrario di quel che il nome significa, cioè un distruttore. Del tutto infondata è la supposizione di uno storico recente (3) che negli anni successivi mostra le popolazioni ansiose di tornare sotto il mite scettro del Lagide. Se Polibio (V 86-87) a proposito della guerra tra Antioco III e Filopatore afferma che quelle popolazioni furono sempre propense più per i Lagidi che per i Seleucidi ciò vale a partire da Tolemeo Filadelfo a cui spetta il merito di aver inaugurato verso di esse una politica di benevolenza che dette stabili frutti.

La dominazione di Antigono e di Demetrio Poliorcete fu

---

(1) *Epist. ad Phil.* § 13 *ἀφ' ὧν ὡσεὶ τρεῖς μυριάδας καθοπλίσας ἀνδρῶν ἐκλεκτῶν εἰς τὴν χώραν κατῴκισεν ἐν τοῖς φρουρίοις*: § 14 *ἐπιλέξας τοὺς ἀρίστους ταῖς ἡλικίαις καὶ ῥώμῃ διαφέροντας καθώπλισε, τὸ δὲ λοιπὸν χύμα πρεσβυτέρων καὶ νεωτέρων ἔτι δὲ καὶ γυναικῶν εἴασεν εἰς τὴν οἰκετείαν* cf. § 36 *φρούρια κτίσας ἀπέδωκεν αὐτοῖς ὅπως τὸ τῶν Αἰγυπτίων ἔθνος φόβον [μὴ] ἔχῃ διὰ τούτων.* Cf. *antiq.* XII 8 *πολλοὺς αὐτῶν εἰς τὰ φρούρια καταλοχίσας.* La notizia che Sotere avrebbe dato a questi Giudei i diritti dei Macedoni di Alessandria è aggiunta di Giuseppe alla fonte.

(2) Cf. Schürer III[4] pp. 37 e seg.

(3) Bouché-Leclercq *Histoire des Lagides* I 154.

infatti di breve durata: nel 301 in seguito alla battaglia di Ipso la Celesiria ricadde nelle mani di Sotere che senza aver preso parte efficace alla lotta profittava del bottino pur con qualche contestazione di Seleuco a cui nella divisione delle spoglie di Antigono era stata assegnata. Sulle loro divergenze e sull'odio delle popolazioni verso Sotere dovette contare Demetrio che rimasto padrone del mare e di alcune città della Fenicia, tentò incunearsi tra i domini di Siria e di Egitto e si avanzò sino a Samaria impadronendosene, senza tuttavia riuscire a stabilirvi il suo dominio. La sua morte e quella di Seleuco (281) parvero assicurare il possesso egiziano.

Con l'avvento al trono del Filadelfo e più specialmente per la minaccia di rivendicazioni da parte di Antioco, che sistemate le sue divergenze con Antigono Gonata per mezzo della guerra del 279-8 si preparava a sostenere con le armi i diritti paterni, incomincia un nuovo indirizzo nei rapporti dell' Egitto verso la Celesiria: al pugno di ferro che schiaccia adoperato dal padre, Filadelfo sostituì i favori e i benefizi cercando di far dimenticare i danni passati e di accaparrarsi la fiducia e la riconoscenza delle popolazioni. Questa politica si svolse più attiva negli anni che scorsero tra la venuta di Arsinoe II in Egitto e al trono e la guerra del 274/3 contro di Antioco, negli anni appunto in cui Aristea immagina svolgersi l'azione del suo racconto. Noi ne abbiamo parecchie prove.

Ake che, come s'è visto, Sotere aveva rovinata è da Filadelfo rifondata e da lui prende il nome di Tolemaide (1): Aristea ricordandola incidentalmente la chiama *Πτολεμαΐδα τὴν ὑπὸ τοῦ βασιλέως ἐκτισμένην* (§ 114). A capo della flotta egiziana è Filocle che è anche re di Sidone e non è vana l'ipotesi che sotto il nome greco si celi un membro della dinastia indigena ancora esistente, a cui veniva così affidato il comando di una parte importante delle forze egiziane (2). Tiro riceve nuova

(1) Cfr. Schürer op. cit. II[4] 143 n. 200. Il nome semitico cessa nelle monete verso il principio del regno del Filadelfo. Cfr. anche Lehmann *Der erste syrische Krieg* in " Klio „ 3 (1903) p. 518.

(2) Beloch *Die auswärtigen Besitzungen der Ptolomäer* in " Archiv f. Papyrusforsch. „ 2 (1903) pp. 234–5.

vita e nuovo assetto politico sì da incominciare una nuova êra (1). Verso l'Arabia, l'antica Rabba degli Ammoniti (2), anch'essa danneggiata nelle guerre precedenti, è rifondata o ellenizzata e prende il nome di Filadelfia in onore di Arsinoe II che fu contraddistinta con quel titolo attribuito poi anche a Tolemeo II. La fondazione di Filoteria sulle rive del lago di Tiberiade (Polyb. V 70) dal nome di una sorella del Filadelfo risale probabilmente anch'essa al primo periodo del suo regno (3). Di altri due atti conserva vaga memoria il solo Aristea, ma tenuto conto del loro accordo con la politica generale svolta dal Filadelfo in quel tempo devono contenere un fondo di verità. Uno è la liberazione dei prigionieri trasportati già da Sotere in Egitto e rimasti in parte in istato di servitù. Aristea (§§ 12-27) seguendo la tradizione giudaica anche in questo caso ricorda i soli Giudei e per vantare la grandezza del benefizio suppone che negli anni trascorsi dalla deportazione (311) al decreto di libertà (dopo il 280) non ne siano morti e li calcola a più di 100.000 (§ 19); e dimentica d'aver già detto che 30.000 ne avrebbe stanziati come coloni militari Sotere nei *φρούρια*; ma sfrondando il suo racconto si può pensare che trattisi di un provvedimento preso in genere verso gli abitanti della Celesiria, che mentre assumeva l'aspetto di un atto magnanimo doveva dopo più di 30 anni giovare a un numero ristretto di persone. Aristea presenta l'atto come una giusta riparazione (§ 37) e per bocca di Filadelfo tenta giustificare Sotere in quanto la deportazione avrebbe avuto luogo più per licenza militare che per suo volere (§ 23). L'altro fatto è l'invio di ricchi doni e di 100 talenti al tempio di Gerusalemme e al pontefice (§ 40). Aristea avrà al solito esagerato, ma è da ritenere che Filadelfo mentre largheggiava con le altre popolazioni non trascurasse la giudaica così numerosa anche fuori della Giudea propriamente detta. Un atto di omaggio al loro tempio, e più un aiuto finanziario non do-

---

(1) Schürer op. cit. II⁴ 98. La nuova era incomincia col 274.

(2) *Ib.* p. 189 sg.

(3) La città è ricordata da Polibio (V 70) come importante al tempo di Antioco il grande (218), da Sincello (I 558 ed. Dindorf) dietro una fonte giudaica tra i domini di Alessandro Ianneo, da Stefano Bizantino *s. v.* Cfr. Schürer op. cit. I³ 286 n. 32.

vevano rimanere inefficaci sui loro animi: Filadelfo dando una prova di pietà e di munificenza li attirava nella sua orbita in vista della prossima guerra con Antioco. Pur senza farne gran caso, noterò che la ricca mensa per il tempio, in Epifanio (1) che attinge ad Aristea ma pare conservi l'eco di altre tradizioni, è detta eseguita espressamente in compenso di quella già rubata, il che Aristea tace, ma è naturale pensare che nel saccheggio di Sotere i ricchi utensili del tempio non venissero rispettati. Noterò anche che la descrizione degli oggetti donati dal Filadelfo, se da una parte è ispirata alle prescrizioni dei libri mosaici, ha il suo raffronto migliore in quella che Callissene Rodio (2) fa delle ricchezze sfoggiate nella grande processione dal Filadelfo e fu ad Aristea suggerita da qualche scrittore che parlava degli splendori di quel regno.

Così mentre Aristea si studia di mostrare il re munifico e generoso unicamente con i Giudei, noi sfrondando le sue notizie e ricollegandole con gli avvenimenti storici di quegli anni possiamo affermare che del nuovo atteggiamento politico a base di largizioni e di privilegi adottato dal Filadelfo verso le popolazioni della Celesiria rovinate dalle guerre paterne profittarono anche i Giudei. I rapporti benevoli che esistettero tra essi e il Filadelfo, di cui la tradizione giudaica aveva conservato memoria, dettero ansa ad Aristea che scriveva in ben altri tempi a rappresentare questo re come un umile adoratore ed ammiratore della Legge e promotore della sua versione.

---

(1) *De mensuris et ponderibus* § 10 (in Wendland *Ep. ad Philocr.* p. 145) *καὶ νῦν δὲ τράπεζαν χρυσῆν... ἀντὶ τῆς τραπέζης τῆς ληφθείσης ἀπὸ τοῦ ἁγίου τόπου Ἱεροσολύμων ἀπέστειλα μετὰ καὶ δώρων καὶ κειμηλίων τῷ ἱερῷ τόπῳ.* Epifanio conosce un saccheggio del tempio per parte di Sotere, che è dissimulato da Aristea e dalla fonte di Giuseppe.

(2) Cf. Lumbroso *Recherches* pp. 125 sg. Il testo di Callissene in *Frag. hist. graec.* III 58-65.

IV. — Aristea e l'origine dei LXX.

Ma che cosa giustamente il racconto di Aristea ci autorizza a credere sulle origini della versione greca dei libri mosaici? Se le sue affermazioni sui rapporti benevoli tra Filadelfo e i Giudei, per quanto esagerate, hanno un fondamento nella realtà, non potrebbe dirsi altrettanto per l'intervento del re nella versione?

Critici anche autorevoli, come il Buhl (1), lo Swete (2), l'Abrahams (3) e molti altri, propendono a concedere al racconto una certa fede, pur restando incerti sulla misura della verità che esso contenga. Due argomenti specialmente sembrerebbero favorirlo: la vicinanza dell'autore agli avvenimenti che pretende narrare e la conferma che gli studi egittologici avrebbero arrecato ai suoi dati. Ma dimostrato che lo scritto è di circa un secolo posteriore al 200, data supposta da molti autori, cade il primo argomento. Quanto al secondo si citano volentieri le parole che il Lumbroso scriveva una cinquantina d'anni fa. " Depuis quarante ans un rayon de lumière inattendu a jailli des inscriptions et des papyrus, qui jette sur elle un jour nouveau; chose frappante: il n'est pas un titre de cour, une institution, une loi, une magistrature, une charge, un terme technique, une formule, un tour de langue remarquable dans cette lettre, il n'est pas un témoignage d'Aristée concernant l'histoire civile de l'époque, qui ne se trouve enregistré dans les papyrus ou les inscriptions et confirmé par eux „ (4).

---

(1) *Kanon u. Text* p. 115.

(2) *Introduction* p. 20.

(3) Art. cit. p. 337. Cfr. anche KAULEN *Einleitung in d. heil. Schrift*[5] p. 135 che determina la data della versione al 286. FRIEDMANN *Onkelos und Akylas* pp. 1-30; MANGENOT in " Dictionnaire de la Bible „ del VIGOUROUX s. v. *Septante*; CONYBEARE in HASTINGS " Dictionary of the Bible „ s. v. *Greek*; EWALD *Gesch. d. V. Israel*[3] IV 322 sg.; WELLHAUSEN in BLEEK *Einleitung in d. A. Test.*[5] pp. 529 sg.; TISCHENDORF *Vetus Test. graece*[7]. *Prolegomena* p. 1-21.

(4) *Recherches* p. XII.

Con qualche restrizione queste parole sono vere anche oggi; ma ciò non può mutare il giudizio complessivo sul carattere dell'opera: il Lumbroso stesso alla cui autorità si fa appello giudica il racconto una leggenda di data assai tarda e propende a spiegare ben diversamente l'origine della versione.

Gli studi sull'Egitto tolemaico han dimostrato che l'autore nel descrivere l'ambiente, la vita di corte dei Tolemei, le cariche, gli uffici, gli usi e i costumi è esatto perchè descrive ciò che cade sotto i suoi occhi. Ma non hanno arrecato alcuna conferma allo schema del racconto che Demetrio di Falero vivendo presso Filadelfo parecchi anni dopo l'avvento di questi al trono ed essendo a capo della biblioteca gli suggerisse la versione, che venisse mandata solenne ambasceria ad Eleazaro in Gerusalemme e questi inviasse LXXII interpreti in Alessandria, i quali dopo aver dato per sette giorni al re lezioni sull'arte di regnare, destando lo stupore dei filosofi e letterati ellenici, compissero la traduzione, fungendo loro da segretario Demetrio. Qui sta propriamente l'invenzione del romanzo di Aristea. Che Demetrio abbia mai occupato la carica di bibliotecario non par vero: sotto Filadelfo si ricorda Zenodoto (1), di lui si tace. Ma secondo una notizia assai attendibile di Ermippo Callimachio (2) Demetrio non godette il favore di Filadelfo, il quale, morto il padre (283), l'allontanò dalla corte relegandolo nell'interno dell'Egitto, dove poco dopo morì. La causa sarebbe stata il consiglio dato da Demetrio a Sotere di lasciare il trono non a Filadelfo ma ai figli di Euridice, o secondo altri l'aver dissuaso Sotere dal cedere le cure del regno al figlio col dirgli che egli si privava di ciò che ad altri cedeva. Aristea potè aver ignorato tutto ciò, e potè anche averne notizia, il che non gli avrebbe impedito di scegliere ugualmente Demetrio

---

(1) Diatzko art. *Bibliotheken* in Pauly-Wissowa Realencycl.

(2) *Fragm. hist. graec.* III 47 fr. 50 *φησὶ δ' αὐτὸν Ἕρμιππος ... συμβουλεύειν τῷ Πτολεμαίῳ πρὸς τοῖς ἄλλοις καὶ τὴν βασιλείαν τοῖς ἐξ Εὐρυδίκης περιθεῖναι παισί· τοῦ δὲ οὐ πεισθέντος ἀλλὰ παραδόντος τὸ διάδημα τῷ ἐκ Βερενίκης, μετὰ τὴν ἐκείνου τελευτὴν ἀξιωθῆναι πρὸς τούτου παραφυλάττεσθαι ἐν τῇ χώρᾳ μέχρι τι δόξει περὶ αὐτοῦ· ἐνταῦθα ἀθυμότερον διῆγε· καί πως ὑπνώττων ὑπ' ἀσπίδος τὴν χεῖρα δηχθεὶς τὸν βίον μεθῆκε.*

a promotore della versione della Legge, perchè noto come valente legislatore.

Oltre l'aver governato e dato leggi agli Ateniesi sì da esser messo accanto a Solone e a Clistene come terzo legislatore, Demetrio avera aiutato Sotere nel dettar quelle del nuovo stato fondato nella valle del Nilo (1), aveva scritto cinque libri *περὶ τῆς Ἀθήνησι νομοθεσίας*, due libri *περὶ τῶν Ἀθήνησι πολιτειῶν*, un libro *περὶ νόμων* (2), e forse altri intorno alla legislazione. Certo Demetrio non si sarebbe reso reo di tanti barbarismi quanti ne contiene la versione, pur discreta, del Pentateuco: ma chi vi avrebbe riflettuto? Per la massa dei lettori incolti e semi colti il dirla eseguita sotto la sua assistenza era una garanzia di fedeltà e di bontà. E come sonava bene in sua bocca l'elogio della Legge mosaica: *φιλοσοφωτέραν εἶναι καὶ ἀκέραιον τὴν νομοθεσίαν ταύτην ὡς ἂν οὖσαν θείαν* (§ 31). Non potendo scegliere Sotere che aveva trattato così rudemente i Giudei a patrono dell'opera, scelse Filadelfo il grande mecenate, promotore di edizioni critiche e di studi letterari, i cui rapporti con i Giudei erano stati benevoli.

Ma se per questi Aristea è, come vedemmo, in accordo con i risultati dell'investigazione storica, non così per quel che riguarda la versione. Egiziani, Persiani, Babilonesi erano popoli ben più illustri che non il minuscolo, oscuro, disperso giudeo ed avevano tante opere così interessanti per la legislazione e la storia. Si cercò forse di tradurle? Gli studiosi son concordi nel negare (3). Al più si trovarono alcuni dotti, come Manetone, Beroso, che cercarono con opere scritte in greco di far conoscere l'antica e gloriosa storia dei loro popoli meglio che non fosse narrata dagli scrittori greci. Qualche cosa di simile

---

(1) Aelian. *Var. hist.* III 17 *Δημήτριος συνὼν τῷ Πτολεμαίῳ νομοθεσίας ἦρξε.*

(2) Christs *Gesch. d. griech. Literatur* II⁵ 58.

(3) Nessun conto può farsi della testimonianza di Epifanio (in Wendland *Ep. ad Philocr. Testimonia* p. 144), di Sincello (*ib.* p. 133), del ps.-Teodoreto (*ib.* p. 152), secondo i quali Filadelfo avrebbe fatto raccogliere e tradurre i libri degli Egiziani, Caldei, Persiani, Elamiti, Babilonesi, Romani, ecc.: essi affermano ciò in rapporto con la versione dei libri mosaici, quasi giustificazione del racconto di Aristea.

ebbero anche i Giudei nel cronista Demetrio (1). Ma un lavoro di traduzione delle opere antiche scritte nelle lingue barbare, che avrebbe avuto per la coltura ellenistica e romana grandissima importanza, non fu tentato neanche sotto Filadelfo. Nelle grandi collezioni di libri di Alessandria, di Pergamo, di Antiochia si raccoglievano unicamente opere greche; se anche qualche manoscritto in altre lingue vi penetrò, dovette rimanervi abbandonato e trascurato: i sovrani non ebbero attenzioni che per la coltura greca, che cercavano d'imporre, facendo dimenticare e oscurando le antiche nazionali, il cui ricordo era un ostacolo all'ellenizzazione dei popoli sottomessi.

Mancò dunque da parte dei sovrani ellenistici anche alessandrini quell'interesse per le opere scritte in altre lingue, che sarebbe la garanzia fondamentale per ammettere il fatto narrato da Aristea.

Questi come scelse Demetrio e Filadelfo a promotori e patroni dell'opera in riguardo ai lettori gentili ai quali specialmente destinava il suo scritto, così, per rispetto ai connazionali, ad esecutori della versione pose i LXXII interpreti. Il numero pare suggerito dai settanta seniori preposti da Mosè all'osservanza delle leggi nel deserto (*Exod.* 18, 21 seg. con 24, 1 seg.); ma se li scelse sei da ciascuna delle dodici tribù che in realtà più non esistevano la ragione può con certezza indicarsi. Numerosi erano in Egitto quanto e forse più dei Giudei i discendenti dell'antico regno d'Israele, i Samaritani e divergenze a proposito del culto e della Legge non mancavano, sostenute, pare, talora da citazioni dei comuni libri mosaici (2). Già sapevamo da testimonianze antiche l'esistenza di un testo greco del Pentateuco adoperato dai Samaritani ed ora n'abbiamo frammenti (3). Aristea mira con quella sua invenzione degli

---

(1) Cf. Schürer op. cit. III[4] 472.

(2) Joseph *Antiq.* XIII 74-79. Il giudeo Andronico avrebbe argomentato davanti a Tol. Filometore la superiorità del tempio di Gerusalemme contro i Samaritani *ἀπὸ τοῦ νόμου*. L'episodio è certamente leggendario, ma significativo.

(3) P. Glaue u. A. Rahlfs *Fragmente einer griechischer Uebersetzung des samaritanischen Pentateuchs* („ Mitteilungen des Septuaginta-Unternehmens d. K. Gesell. zu Göttingen „ Heft 2. Berlin 1911).

interpreti scelti da tutte le tribù ad accreditare il testo canonico dei Giudei anche presso i Samaritani. Nel momento storico in cui scriveva, la colonia ellenizzata di Samaria era stata presa e distrutta da Giovanni Ircano, il tempio scismatico già prima annientato, il territorio annesso in parte alla Giudea: potevasi immaginare ricostituito l'antico regno di Davide e di Salomone e il pontefice giudaico poteva esser rappresentato a capo delle dodici tribù finalmente riunite.

Anche nel far ammaestrare Filadelfo dai LXXII interpreti abbiamo una contaminazione di elementi storici e fantastici. Se le loro risposte alle domande del re formano un *περὶ βασιλείας* pervaso di spirito giudaico, bisogna ricordare il consiglio dato da Demetrio di Falero a Sotere di raccogliere i libri *περὶ βασιλείας καὶ ἡγεμονίας* (1) onde servirsene di aiuto nel governo, che su questo argomento scrissero nel III secolo molti pensatori, che due opere *περὶ βασιλείας* e *περὶ βασιλέως φιλοσόφου* si attribuiscono al precettore di Filadelfo Stratone di Lampsaco (2), che nel momento in cui Aristea scriveva i Giudei erano a corte in grande autorità, tra i quali Chelcia e Anania, sicchè non era del tutto immaginario mostrare i Giudei maestri al re d'Egitto e supporre che a lui venissero mandati dal pontefice giudaico allora che gli Asmonei avevano mostrato come un principato si fondi e si sostenga.

Tuttavia essendo Aristea la fonte più antica e in certo modo unica, poichè ad esso tutti i racconti posteriori fan capo, non è da disprezzare: qualche sprazzo di luce può derivarsene ad illuminare il sorgere e le prime vicende della versione alessandrina, se invece di prendere la sua testimonianza diretta, si trae profitto di quel che in certi punti egli permette di arguire, sceverando dalle invenzioni alcune notizie positive.

Assai notevole è ch'egli afferma l'esistenza di un'imperfetta traduzione bisognosa di radicale revisione, antecedentemente al testo canonico che sarebbe stato eseguito dai LXXII. Nel

---

(1) PLUTAR. *Regum et imperat. apophthegmata* (*Moralia* II BERNARDAKIS p. 48) *Δημήτριος ὁ Φαληρεὺς Πτολεμαίῳ τῷ βασιλεῖ παρῄνει τὰ περὶ βασιλείας καὶ ἡγεμονίας βιβλία κτᾶσθαι καὶ ἀναγινώσκειν· ἃ γὰρ οἱ φίλοι τοῖς βασιλεῦσιν οὐ θαρροῦσι παραινεῖν ταῦτα ἐν τοῖς βιβλίοις γέγραπται.*

(2) BOUCHÉ-LECLERCQ op. cit. I 130 n. 2.

§ 30 egli fa scrivere da Demetrio al re: *τὰ δὲ τοῦ νόμου τῶν Ἰουδαίων βιβλία σὺν ἑτέροις ὀλίγοις τισὶν ἀπολείπει· τυγχάνει γὰρ Ἑβραϊκοῖς γράμμασι καὶ φωνῇ λεγόμενα, ἀμελέστερον δὲ καὶ οὐχ ὡς ὑπάρχει σεσήμανται καθὼς ὑπὸ τῶν εἰδότων προσαναφέρεται· προνοίας γὰρ βασιλικῆς οὐ τέτευχε· δέον δ' ἐστὶ καὶ ταῦθ' ὑπάρχειν παρὰ σοὶ διηκριβωμένα διὰ τὸ καὶ φιλοσοφωτέραν εἶναι καὶ ἀκέραιον τὴν νομοθεσίαν ταύτην ὡς ἂν οὖσαν θείαν.* Da escludere è l'interpretazione proposta alla frase *ἀμελέστερον δὲ καὶ οὐχ ὡς ὑπάρχει σεσήμανται* dal Diels (1) " nicht der wirklichen Aussprache gemäss (also ohne Vokale) „. Che cosa infatti interessasse questo particolare in un tempo in cui tutti i manoscritti biblici ed in genere ebraici ed aramaici erano senza vocali non s'intende. E l'opera che Demetrio proponeva al re di compiere consisteva forse nello stabilire un testo vocalizzato che fissasse la pronunzia? Migliore, pur lasciando una certa indeterminatezza alla frase, è la versione del Wendland (2) " recht ungenau und mit Abweichungen vom ursprünglichen Texte geschrieben „, e più precisa quella dell'Andrews (3) " hand been carelessly interpreted and do not represent the original text „. Demetrio non si preoccupa del testo ebraico, nè vuol dire che i manoscritti posseduti in Egitto erano trasandati: in tal caso l'unica richiesta da fare al pontefice era d'inviare un manoscritto ebraico corretto. Egli invece suggerisce e il re chiede che vengan mandati degl'interpreti *ἄνδρας ἐμπείρους τῶν κατὰ τὸν νόμον τῶν ἑαυτῶν ἀφ' ἑκάστης φυλῆς ἕξ ὅπως τὸ σύμφωνον ἐκ τῶν πλειόνων ἐξετάσαντες καὶ λαβόντες τὸ κατὰ τὴν ἑρμηνείαν ἀκριβὲς ἀξίως καὶ τῶν πραγμάτων καὶ τῆς σῆς προαιρέσεως θῶμεν εὐσήμως* (§ 32 e 39). Ciò che si cerca è il *τὸ σύμφωνον*, il *τὸ κατὰ τὴν ἑρμηνείαν ἀκριβές*, quello che mancava ai testi che correvano comunemente in Egitto al dir di quanti se ne intendevano, che cioè avevano una qualche conoscenza del testo originale. La frase dunque *ἀμελέστερον δὲ καὶ οὐχ ὡς ὑπάρχει σεσήμανται* è da intendere di una traduzione anteriore a quella

(1) Kautzsch *Apokryphen* II p. 8 n. 2.

(2) *Ib.* pp. 7-8.

(3) Charles *Apocrypha* II 98. Non mi fu possibile vedere la versione del Thackeray.

eseguita per iniziativa di Demetrio e di Filadelfo e che viene accusata di essere " troppo trascurata e infedele all' originale „ (1). L'esistenza di questa traduzione è anche affermata dall'autore quando immagina e racconta dello storico Teopompo colto da una specie di pazzia durante trenta giorni per aver tentato di narrare qualche cosa dei fatti biblici (§ 314), e del poeta tragico Teodecte divenuto temporaneamente cieco per aver provato a farne argomento di tragedia (§ 315) (2). E in questo senso il pseudo-Aristobulo (3) che segue in molte cose Aristea parla espressamente d'una traduzione greca anteriore a quella fatta eseguire dal Filadelfo.

In queste affermazioni non tutto è inventato: accanto all'elemento fittizio si trova un elemento reale. Fittizio è il termine assegnato a questa versione più antica, l'epoca anteriore al Filadelfo, e fittizia la data della versione canonica; reale invece è il ricordo d'una traduzione accusata di esser infedele ed inesatta e d'una posteriore recensione di essa che ebbe valore ufficiale tra i Giudei. L'autore che scriveva per nobilitare quest'ultima la fece molto antica e la mise sotto il patrocinio di Filadelfo e di Demetrio, sicchè la primitiva dovette rimandare anche più indietro, il che gli permetteva di spacciare gli aneddoti intorno a Teopompo e a Teodecte, come permette al pseudo-Aristobulo di far derivare dai libri mosaici la filosofia platonica e tutta la sapienza greca. In realtà quella traduzione prima di cui si tacciono e forse s'ignoravano gli autori doveva risalire al tempo in cui i Giudei d'Egitto si trovarono sotto la dominazione greca in modo stabile e l'uso del

---

(1) Già il Frankel *Vorstudien zu d. Septuaginta* p. 24 aveva in parte veduto giusto su questo punto.

(2) § 314 *καὶ γὰρ ἔφησεν ἀκηκοέναι Θεοπόμπου, διότι μέλλων τινὰ τῶν προηρμηνευμένων ἐπισφαλέστερον ἐκ τοῦ νόμου προσιστορεῖν ταραχὴν λάβοι τῆς διανοίας πλεῖον ἡμερῶν τριάκοντα.*

(3) Euseb. *Praep. evang.* IX 6, 6 *Ἀριστόβουλος δὲ ἐν τῷ πρώτῳ τῶν πρὸς τόν Φιλομήτορα κατὰ λέξιν γράφει· κατηκολούθηκε δὲ ὁ Πλάτων τῇ καθ' ἡμᾶς νομοθεσίᾳ καὶ φανερός ἐστι περιειργασμένος ἕκαστα τῶν ἐν αὐτῇ λεγομένων· διηρμήνευται δὲ πρὸ Δημητρίου ὑφ' ἑτέρων, πρὸ τῆς Ἀλεξάνδρου καὶ Περσῶν ἐπικρατήσεως, τά τε κατὰ τὴν ἐξ Αἰγύπτου ἐξαγωγὴν τῶν Ἑβραίων τῶν ἡμετέρων πολιτῶν καὶ ἡ τῶν γεγονότων ἁπάντων αὐτοῖς ἐπιφάνεια καὶ κράτησις τῆς χώρας καὶ τῆς ὅλης νομοθεσίας ἐπεξήγησις.*

greco divenne tra essi comune, non certo mentre visse la generazione che aveva veduto la conquista di Alessandro e gl'inizi del regno dei Lagidi, generazione che parlava il dialetto di Palestina, o l'aramaico, o la lingua del popolo egiziano in mezzo al quale viveva. Ma quella nata in Egitto e specialmente in Alessandria sotto il dominio greco e l'influsso dell'Ellenismo sfoggiante tutto il suo splendore, generazione che già aspirava ad occupare nella nuova patria un grado superiore a quello degli Egiziani e ad avvicinarsi ai dominatori se non a confondersi con essi, dovette sentire ben presto l'utilità e la necessità d'una versione. I libri della Legge eran divenuti grazie alla riforma di Esdra il fulcro della vita giudaica; avevan cessato di essere il patrimonio misterioso esclusivo dei sacerdoti per divenire il manuale su cui tutti dovevano conformare la loro vita privata e pubblica. Quel che i poemi di Omero erano per l'educazione dei Greci furono per i Giudei dopo Esdra i libri mosaici. Quindi il sorgere e il moltiplicarsi delle sinagoghe, in cui la conoscenza e lo studio ne era a tutti reso accessibile. Prigionieri, emigranti, soldati che venivano dalla madre patria ad ingrossare la colonia di Egitto vi portavano la venerazione per questi libri, la cui importanza cresceva con la lontananza da Gerusalemme, unico centro legittimo del culto. E poichè usi ed abusi in contrasto con le disposizioni della Legge e una certa tendenza a culti pagani ed atti religiosi proibiti fuori di Gerusalemme si erano introdotti nei più antichi coloni giudaici per il loro contatto diuturno con Egiziani e Persiani e Babilonesi e Samaritani, e le seduzioni della coltura greca eran tante, gli ultimi venuti dalla Giudea in cui vigeva la forma religiosa più rigida ed esclusivista dovettero sentire il bisogno di far meglio conoscere le disposizioni della Legge rendendole accessibili in quella lingua ch'era allora dominatrice. Se anche nell'uso delle sinagoghe che sorsero ben presto numerose sul suolo d'Egitto si adoperò per qualche tempo il testo ebraico interpretandolo oralmente, questo uso divenne sempre più difficile, poichè in Palestina le scuole rabbiniche ne perpetuarono la conoscenza, ma in Egitto e in Alessandria gli studi avevano per base il greco e la conoscenza dell'ebraico divenne sempre più rara sì da costituire il privilegio di qualche dotto.

Oltre dei vantaggi religiosi che sono in genere fatti valere

per spiegare l'origine della versione, devesi tener conto dell'amore all'istruzione svoltosi nei Giudei alessandrini a contatto col mondo ellenico nel maggior centro della coltura antica, dell'aspirazione loro a gareggiare con i Greci e gli altri popoli per antichità e sapienza, aspirazione che i libri della Legge favorivano. Di qui la spinta a divulgare tra connazionali ed estranei quello che era per essi il codice di vita e la somma di tutta la sapienza, fondamento e giustificazione dei costumi così singolari che li distinguevano dagli altri popoli ed attiravano su di essi l'odio delle plebi, e l'attenzione e a volte l'ammirazione, a volte il disprezzo degli scrittori. Già sotto Sotere e Filadelfo, Manetone (1) aveva creduto opportuno di narrare in senso egiziano la loro origine, ed Ecateo di Abdera (2), il vero e non il posteriore falsario giudaico che si copre col suo nome, dedicava ad essi e a Mosè un capitolo della sua storia, e sapeva riferire una frase della Legge forse per averne attinta notizia da qualche giudeo. Qual migliore risposta alle leggende disonoranti che correvano in Egitto e che gli scrittori greci tendevano ad accettare intorno alla loro origine, che tradurre in greco i libri della Genesi e dell'Esodo, dove antichissima e nobilissima era tale origine dimostrata, e dove i rapporti con gli antichi Egiziani erano esposti in luce così favorevole agli Ebrei?

Vi erano dunque già al tempo di Filadelfo molte ragioni che inducevano a una volgarizzazione dei libri mosaici, e qualcuno che si sentiva in grado di farla dovette provarcisi ed altri seguirlo. Per via d'induzione noi siamo condotti a indicare il regno del Filadelfo come termine a partire dal quale le versioni greche della Scrittura incominciano e a correggere così il dato di Aristea il quale non ha fatto che trasportare la recensione canonica nel tempo in cui si compirono i primi tentativi di traduzione. Potè da principio trattarsi di versioni parziali, e forse più che di esatte e letterali versioni di rifacimenti greci di

---

(1) *Fragm. hist. graec.* II 566-680 fragm. 42, 50, 52 da Joseph *c. Apion.* I §§ 73-105 e 223-287.

(2) *Ibid.* II 391 fragm. 13 da Diod. XL 3 *προσγέγραπται δὲ καὶ τοῖς νόμοις ἐπὶ τελευτῆς ὅτι Μωσῆς ἀκούσας τοῦ θεοῦ τάδε λέγει τοῖς Ἰουδαίοις,* ricordo dell'ultimo v. del *Levit.* Cf. Reinach *Textes d'auteurs grecs et romains relatifs au judaïsme* p. 18 n. 2.

parti o di libri separati del Pentateuco, che altri si studiava di correggere e di completare (1). All'iniziativa e all'uso privato succedettero poi l'opera della comunità e l'uso pubblico, l'utilità della versione essendo andata crescendo quanto più diminuiva la conoscenza della lingua originale, e aumentava la prosperità e l'organizzazione della colonia giudaica in Alessandria e in Egitto. È questo il fatto veramente notevole che Aristea ci permette di determinare, e col quale parmi dovrebbesi incominciare la storia del canone della versione greca, che cioè, verso la fine del II secolo, esisteva una recensione greca della Legge che aveva valore ufficiale tra i Giudei e che vi era stato un intervento della comunità a sancire tale valore e a mettere l'integrità del testo sotto la sua tutela.

Nei §§ 310-311 Aristea scrive: *καθὼς δὲ ἀνεγνώσθη τὰ τεύχη στάντες οἱ ἱερεῖς καὶ τῶν ἑρμηνέων οἱ πρεσβύτεροι καὶ τῶν ἀπὸ τοῦ πολιτεύματος οἵ τε ἡγούμενοι τοῦ πλήθους εἶπον· ἐπεὶ καλῶς καὶ ὁσίως διηρμήνευται καὶ κατὰ πᾶν ἠκριβωμένως, καλῶς ἔχον ἐστίν, ἵνα διαμένῃ ταῦθ' οὕτως ἔχοντα καὶ μὴ γένηται μηδεμία διασκευή· πάντων δ' ἐπιφωνησάντων τοῖς εἰρημένοις ἐκέλευσαν διαράσασθαι, καθὼς ἔθος αὐτοῖς ἐστιν, εἴ τις διασκευάσει προστιθεὶς ἢ μεταφέρων τι τὸ σύνολον τῶν γεγραμμένων ἢ ποιούμενος ἀφαίρεσιν, καλῶς τοῦτο πράσσοντες ἵνα διὰ παντὸς ἀένναα μένοντα φυλάσσηται.* L'elemento fittizio sta qui solo nei supposti antecedenti: traduzione eseguita dai LXXII, assistenza di Demetrio, ammirazione e approvazione del Filadelfo: reale è invece l'intervento della comunità giudaica di Alessandria a riconoscere il nuovo testo. Questo riconoscimento non fu dato alla versione come correva tra le mani dei privati, che non ispirava piena fiducia ed era accusata di essere “ troppo trascurata e infedele all'originale „, e che oltre le mende primitive altre ne doveva aver contratte per trascuratezza di copisti, o per opera di avversari, o per smania di correzione e ampliamento dai Giudei stessi, per tutte quelle cause insomma che nei secoli han reso necessarie le rinnovantisi recensioni più o meno critiche della Scrittura.

(1) All'iniziativa privata attribuisce il sorgere delle versioni greche anche il Mezzacasa *Il libro dei Proverbi di Salomone: studio critico sulle aggiunte greco-alessandrine* 1913 p. 56.

È tuttavia da credere, e le parole già citate di Aristea lo suggeriscono, che come sempre i posteriori interpreti profittano dell'opera degli antecessori, così quelli incaricati di preparare il testo che la comunità potesse adottare con piena fiducia, piuttosto che procedere a una traduzione del tutto nuova abbiano messo a base del loro lavoro quella già esistente completandola, emendandola, correggendola sull'ebraico in modo da garantirne l'equivalenza all'originale. Ciò spiega da un lato le ineguaglianze stilistiche grammaticali e lessicali che si riscontrano nel Pentateuco e dall'altro come Aristea abbia potuto rimandare al tempo del Filadelfo la nuova recensione per essere questa quanto al fondo identica con la versione più antica che a quel tempo rimontava, rimandando alle origini la canonizzazione che si fece qualche secolo dopo. Così nella Chiesa cristiana del II secolo e di poi si attribuirono agli apostoli dichiarazioni sul valore dei singoli libri e canoni che dovevano giustificare idee e pratiche invalse con l'uso.

Non è improbabile che il testo ebraico per la revisione fosse fatto venire espressamente da Gerusalemme e che di là si chiamasse anche qualche dotto rabbino in aiuto delle scarse cognizioni di quella lingua che si possedevano in Alessandria e ciò potrebbe aver dato lo spunto ad Aristea nella sua invenzione, poichè un giudeo di Palestina traduce l'Ecclesiastico per quelli di Egitto e in Gerusalemme vive Lisimaco il traduttore del libro di Ester (11, 1) e una certa sollecitudine a dirigere la vita religiosa della diaspora manifesta la lettera premessa al II dei Maccabei e libri e documenti vi si offrono a quei di Egitto invitandoli a prenderne copia (2, 15). Quanto al tempo tutto induce a credere che la recensione venisse compita nella seconda metà del II secolo a. C. dopo le lotte maccabee che tanta efficacia ebbero nel ridestare le assopite energie della nazione in Palestina e fuori, e quando i Giudei di Egitto godevano un periodo di grande prosperità. La circostanza che Aristea tra gli altri scopi del suo romanzo si propone appunto di accrescere l'autorità della versione circondandone le origini di un'aureola di grande antichità e di così mirabili episodi e di tante garanzie di esattezza prova indirettamente che tale revisione non era molto più antica di lui. Se fu fatta alcuni anni dopo il 130 in cui il nipote del Siracide a un di presso com-

pone il prologo alla versione dell'Ecclesiastico, si potrebbe spiegare la divergenza che vi è tra lui e Aristea nel giudicare il valore della traduzione della Legge e la sua corrispondenza al testo originale (1).

Il racconto di Aristea così interpretato e completato per induzione permette di ricostruire il naturale processo con cui dovremmo immaginare il sorgere e l'imporsi della traduzione alessandrina nell'uso universale della diaspora.

Sulla sua scorta si possono affermare i seguenti punti:

I. verso la fine del II secolo a. C. esisteva in Alessandria dei libri mosaici una versione greca autorizzata con valore canonico e legale per i Giudei di Egitto, la cui integrità era posta sotto la sanzione di pene religiose e civili, che importavano per chi tentasse corromperla o modificarla la scomunica cioè l'esclusione dal *πολίτευμα* giudaico, organismo religioso e politico ad un tempo;

II. anteriormente a questa edizione canonica esisteva una traduzione sorta per iniziativa privata, che risaliva al III secolo e approssimativamente al regno del Filadelfo;

III. l'edizione canonica sorse per una revisione fatta sul testo ebraico, della traduzione preesistente, nella seconda metà del II secolo, forse tra il 130 e il 110 a. C.

Quando noi parliamo di testo dei LXX del Pentateuco dobbiamo intendere quella recensione del testo greco che era di uso comune e riconosciuta come canonica dalla comunità giudaica di Alessandria verso la fine del II secolo e che solo per il fondo risale al III secolo ma che a rigore ci rappresenta una revisione più o meno sapiente fatta sul testo ebraico nella seconda metà del II secolo.

Un risultato negativo dello studio di Aristea è non solo

---

(1) *Prol. οὐ γὰρ ἰσοδυναμεῖ αὐτὰ ἐν ἑαυτοῖς ἑβραϊστί λεγόμενα καὶ ὅταν ματαχθῇ εἰς ἑτέραν γλῶσσαν· οὐ μόνον δὲ ταῦτα ἀλλὰ καὶ αὐτὸς ὁ νόμος καὶ αἱ προφητεῖαι καὶ τὰ λοιπὰ τῶν βιβλίων οὐ μικρὰν ἔχει τὴν διαφορὰν ἐν ἑαυτοῖς λεγόμενα.* I contatti verbali tra il prologo e la lettera a Filocrate rilevati dal Wendland (*ep. ad Philocr.* p. XXVII) sono forse troppo scarsi per dimostrare che Aristea l'abbia conosciuto, ma dal prologo risulta che verso il 130 non si esaltava ancora come fa Aristea la perfetta corrispondenza della versione all'originale.

che la traduzione degli altri libri del Vecchio Testamento non veniva attribuita ai LXXII interpreti, onde per essi è anche meno proprio parlare di testo dei LXX, ma inoltre che questi libri eran ritenuti come secondari nè il loro testo era garantito dalla tutela dell'autorità, tutela che del resto non ha impedito anche per i libri di Mosè che un'infinità di variazioni s'introducesse col tempo nei codici.

A qual punto la venerazione per i libri mosaici fosse giunta anche presso i Giudei della diaspora è evidente dal modo in cui Aristea ne parla. Essi sono la *γραφή* per eccellenza e con questo nome vengono semplicemente indicati (§§ 168 e 155), non altro contengono che *λόγια θεοῦ* (§§ 177 e 155): la Legge è proclamata per bocca di Demetrio di Falero *φιλοσοφωτέρα, ἀκέραιος, ἁγνή, σεμνή, θεία* (§§ 31 e 313), niente vi è in essa di mitico e d'immaginario o di men sapientemente detto (§ 168).

Ma critiche di avversari e dubbi di credenti avevan già intaccata questa così sicura asseveranza ed Aristea per il primo sente il bisogno di ricorrere al metodo allegorico con cui già i Greci avevano cercato di giustificare Omero ed Esiodo e tutta la mitologia. Ed è veramente singolare ch'egli attribuisca al pontefice di Gerusalemme questo sistema di esplicazioni allegoriche che i Giudei alessandrini avevano appreso dai Greci quasi a dargli un'approvazione e un'origine legittima. Ma di ciò e della scuola giudeo-alessandrina, il cui sorgere Aristea ci lascia intravvedere, sarà altrove discorso.

Sull'epoca dell'introduzione della " Lira „ e della Magistratura Podestarile in Siena.

Nota della Dott.ª DINA BIZZARRI

L'introduzione dell'Estimo segnò nell'ordinamento finanziario dei Comuni un notevole progresso, poichè per esso alla antica forma di tassazione diretta *per massaritiam*, gravante in ugual misura il contribuente ricco ed il povero, si sostituì la imposta personale sul reddito, che più equamente distribuiva i pubblici pesi.

Tale innovazione appare assai per tempo nei Comuni, forse in rapporto al primo affermarsi del Popolo (1). La più antica notizia di Estimo è quella di Pisa del 1162 (2), ma sul finire del secolo XII e per tutto il XIII l'istituzione nasce e fiorisce negli altri Comuni, subendo diverse vicende e trasformazioni (3).

A Siena l'Estimo fu detto *Libra* o *Lira* (4); la stima dei beni facevasi su denunzia giurata dell'allibrato, e tanta era la

(1) L. Zdekauer, *Il Costituto del Comune di Siena dell'anno 1262, Dissertazione,* Milano, Hoepli, 1897, p. ciii; G. Salvemini, Recensione del Costituto del 1262 in " Archivio Storico Italiano „, Serie V, vol. XXI, p. 372; e *Magnati e Popolani in Firenze dal 1280 al 1295* in " Pubblicazioni del R. Istituto di Studi Superiori in Firenze „, 1899, p. 50 e sgg.

(2) Bonaini, *Statuti inediti della città di Pisa, Breve dei Consoli del 1162,* Firenze, 1864, I, p. 5.

(3) G. Ricca-Salerno, *Storia delle dottrine finanziarie in Italia,* 2ª ediz., Palermo, 1896, p. 21 e sgg.; G. Salvemini, *Magnati e Popolani,* l. c.

(4) Tommasi, *Historia di Siena,* Venezia, 1625, vol. I, parte III, p. 179; L. Banchi, *La Lira e la Tavola delle Possessioni,* in " Archivio Storico Italiano, Serie III, vol. VII, 1868; e *Ordinamenti Economici dei Comuni Toscani nel Medio Evo e segnatamente del Comune di Siena,* in " Atti Accademia Fisiocritici „, Serie III, vol. II, Siena, 1879.

importanza dell'istituzione e sì severe le sanzioni ai trasgressori, che chi trascurava di iscrivere il suo nome nei libri dell'Estimo o di denunciare interamente il suo avere, perdeva per ciò ogni diritto di cittadinanza (1), a quel modo che chi desiderava acquistare la cittadinanza senese doveva giurare di sottoporsi, oltre ai consueti obblighi, all'allibramento (2).

Limitandoci a cercare di determinare l'epoca in cui la Libra fu introdotta in Siena — poichè della sua prima istituzione non rimangono documenti — troviamo che i cronisti e gli storici fissano come data il 1198, anno in cui si sarebbe fatta la prima Lira, le cui gravezze si sarebbero cominciate a pagare col 1202 (3). La seconda Lira fu fatta nel 1225, sotto il Podestà Pietro Monaldi da Orvieto (4), e da allora appunto si fecero dipendere i privilegi della cittadinanza dal giuramento di farsi allibrare. Sulla fede di tali cronisti accolse la data del 1198 il Banchi (5), e da lui la ripeterono il Pertile (6), il Rondoni (7), il Mengozzi (8), il Salvemini (9), e il Ricca-Salerno (10). Senonchè un primo dubbio sull'esattezza di tale attribuzione si trova già nel Tommasi (11), il quale, riferendosi alla Lira del 1202, così si

---

(1) *Il Costituto del Comune di Siena volgarizzato nel 1309-10*, Siena, Lazzeri, 1903, Distinzione I, Rubrica 347 (del 1281).

(2) *Costituto 1262*, D. IV, R. 55 (del 1225).

(3) Agnolo di Tura del Grasso, *Croniche*, cit. da Banchi, *La Lira*, etc.; Andrea Dei, nella *Cronaca* detta di Agnolo di Tura, edita dal Muratori in *Rerum Italicarum Scriptores*, t. XV, scrive che la prima Lira si fece nel 1202, e non accenna al 1198; O. Malavolti, *Historia de' fatti e guerre de' Sanesi*, Venezia, 1599, c. 40t.

(4) Agnolo di Tura del Grasso, op. cit.; Andrea Dei, op. cit.; Banchi, *Ordinamenti economici* cit.

(5) Banchi, *Opere citate* e *Il Breve degli Officiali del Comune di Siena*, in " Archivio Storico Italiano ", Serie III, Tomo III, p. 88 in nota.

(6) Pertile, *Storia del Diritto Italiano*, 2a ediz., Torino, 1897, II[1], p. 460, n. 163.

(7) Rondoni, *Sena Vetus* in " Rivista Storica Italiana ", vol. IX, 1892 pag. 222.

(8) N. Mengozzi, *Il Monte dei Paschi di Siena, Note storiche*, vol. I, 1891, cap. II, p. 48.

(9) Salvemini, op. cit., loc. cit.

(10) Ricca-Salerno, op. cit., loc. cit.

(11) Tommasi, op. cit., p. 179-180.

esprime: “ Io non mi persuado che questa fusse la prima Lira “ fatta nella città, se bene i nostri cronisti unitamente l'affer- “ mano... È ben possibile che questa fusse eseguita con ordine “ più exquisito, onde a comparazione dell'altre più rozzamente “ fatte, se ne sia tenuto più conto... „. Opinione questa ripresa forse dal Ricca-Salerno, quando scrive: “ A Siena (l'estimo) fu “ introdotto *o più largamente eseguito* nel 1198, e poi rinnovato “ nel 1202 „ (1).

In tale incertezza, qualche luce potrebbe venire dall'esame dei documenti pervenutici, ove si accenni, sia pure indirettamente, alla Lira. Ma il più antico esempio di allibramento, conservatoci da un frammento di codice redatto poco dopo la metà del secolo XIII, risale appena al 1219 (2); nè sono di maggior antichità le promesse di allibramento da parte di un intero Comune, contenute in molti atti di sottomissione di Castelli e Comuni a Siena. Senonchè uno tra questi ultimi atti richiama la nostra attenzione: esso — contenuto nel foglio 20[t] del Caleffo Vecchio dell'Archivio di Stato di Siena in una copia dell'inizio del XIII secolo, e riferito pure nell'Archivio Riformazioni — è mancante di data. Ora, poichè in quest'atto è contenuto un ampio accenno all'allibramento in Siena — come vedremo in seguito — non è senza importanza il cercare di determinarla con esattezza, tanto più che tre diverse opinioni fissano per questo istrumento tre anni diversi.

(1) Ricca-Salerno, op. cit., loc. cit.

(2) Il documento, del 23 gennaio 1219, è edito dal Banchi, in *Ordin. Econ.* p. 56, nota: contiene la dichiarazione di Ranerius de Urbeveteri di allibrarsi per la somma di lire 100 nell'allibramento del Comune di Siena, e la promessa fatta a Falcone di Rustichino, camarlengo del Comune, di pagare il dazio proporzionatamente alla sua libra, finchè non avrà fatto acquisto in Siena di un podere o di una casa, per il valore di L. 50. Il Banchi dichiara di non conoscere simili documenti di pari o maggiore antichità. Anche in uno strumento di sette giorni posteriore trovo esempio di simile allibramento; il 30 gennaio Palmiero di Cantarello da Orgia si allibra nell'allibramento del Comune di Siena, alle medesime condizioni. L'atto è rogato dallo stesso notaio Apulliese che rogò l'atto precedente. In Siena, Arch. Riformazioni. Cfr. A. Lisini, *Inventario delle Pergamene conservate nel Diplomatico dell'Archivio di Stato di Siena dal 736 al 1250*, parte I, Siena, Lazzeri, 1908, p. 163. I registri dei cittadini allibrati, conservati nell'Archivio di Stato di Siena, vanno dal 1219 al 1545.

Il documento, dicemmo, è uno di quelli che ci conservano il ricordo delle sottomissioni a cui i Signori del Contado di Siena e i piccoli Comuni fatalmente soggiacevano, invano cozzanti contro la potenza crescente del giovane Comune che avea per sè l'avvenire, e che in questa lotta sistematica contro la feudalità annidata nelle campagne, e nella conquista del Contado metteva tutte le sue energie, conscio che la vittoria era necessaria alla sua prosperità, anzi alla sua stessa esistenza. Il castello di Asciano, proprietà della potente famiglia dei Conti Scialenghi, il 15 settembre del 1168 era stato ceduto a Siena con donazione da Ildibrandino Cacciaguerra, con promessa di non mai rincastellarlo (1); ma grave doveva tornare la sottomissione alla superba casata, se con infrazione dei patti giurati gli Scialenghi nel 1174 si sottopongono ai Fiorentini (2), in lotta con Siena; e se di nuovo nel 1198 Siena è costretta a far loro giurare altra sottomissione (3) in cui i Conti dichiarano di rendersi cittadini Senesi; sottomissione giurata anche dagli uomini di Asciano (4).

Il documento non datato, di cui ci occupiamo, contiene promesse di alleanza e di aiuti in guerra, di restituzione di pri-

---

(1) *Archivio di Stato di Siena*, Caleffo Vecchio, c. 7t, 15 settembre 1168. Cfr. MALAVOLTI, op. cit., c. 32; TOMMASI, op. cit., p. 173; R. DAVIDSOHN, *Geschichte von Florenz*, Berlino, 1896, I, p. 504 e 542; edito da SCHNEIDER, *Reg. Sen.*, n. 239.

(2) DAVIDSOHN, op. cit., p. 542; P. VILLARI, *I primi due secoli della storia di Firenze*, Firenze, 1898, I, p. 127.

(3) *Archivio di Stato di Siena*, Caleffo Vecchio, c. 37. Edito dal MURATORI, in *Antiquitates Italicae*, IV, 583-585, da una copia del Caleffo dell'Assunta, f. 102, e dal BANCHI, nel Commento al *Memoriale delle offese fatte al Comune di Siena*, in " Arch. St. It. „, Serie III, vol. XXII, 1875, p. 209. Cfr. MALAVOLTI, op. cit., c. 39; TOMMASI, op. cit., loc. cit.

(4) *Archivio di Stato di Siena*, Caleffo Vecchio, c. 37t. Cfr. MALAVOLTI, op. cit., loc. cit.; TOMMASI, op. cit., loc. cit.; edito da SCHNEIDER, *Regestum Senense* in *Regesta Chartarum Italiae*, Pubblicaz. Istituto Storico Prussiano e Italiano, Roma, 1911, n. 390. Questo documento è da attribuirsi al 1198 (stile comune), poichè in esso sono ricordati i medesimi consoli che compaiono nel giuramento precedente, e inoltre per la connessione storica con esso. Cfr. SCHNEIDER, *Reg. Sen.*, loc. cit., nota; RONDONI, op. cit., p. 207; DAVIDSOHN, op. cit., I, p. 619, nota 3, ove lo attribuisce al principio del 1198. Lo SCHNEIDER lo pone nel febbraio.

gionieri e di armi, condono di offese ai Senesi da parte dei conti e degli uomini di Asciano: perchè meglio ne risulti il tenore, riporto il documento, quale fu pubblicato dallo Schneider: " Nos comites Cacciacomes maior, Cacciacomes minor, Bernar-" dinus, Ildibrandinus et Renaldus, Cacciaguerra, Tancredus, " Rainerius et nos homines de Sciano iuramus, quod defendemus " Senenses et adiuvabimus in omnibus guerris; excipimus im-" peratorem, C(hristianum) Mag(untinum) archiepiscopum, co-" mitem Mach(arium) et Francum eius filium et Mach(arium) " iuniorem, postquam ipse iuraverit Senensibus, et Manentem, " postquam finem fecerit cum Senensibus. Nos comites excipimus " Aretinum ep. et prepositum, ita ut, si ipsi facerent guerram Se-" nensibus pro iure Senensium, teneamur adiuvare Sen.; si Se-" nenses facerent guerram illis, non teneamur; item Hugonem " de Valcortese. Omnia faciemus iurare omnes milites de terra " nostra et mille pedites, qui non sint de Sciano, ad Kal. Maias, " nisi remanserit parabola consulum et consiliariorum Sen.; " item omnes homines de Sciano, etatis XXIII annorum ad LX. " De omni offensa, quam Senenses vel eorum adiutores, Mon-" tepulc(ianenses), Montech(iellenses), homines de Serris vel " Montecercone nobis vel adiutoribus fecerunt, eis nullum malum " meritum reddemus. Ad kal. iun. restituemus homines filiorum " comitis Hubertini, filiorum Barote, filiorum et nepotum Spa-" dalonghe, filiorum et nepotum Rudulphini, Volanterii et filii " Lignai, qui sunt castro Sciani et aliis locis et castris vestris, " postquam hec guerra fuit incepta: permittemus eos rehedificare " Rencinim, Montekellum, Campilliam, Campolopicini, et ex novo " in eorum terra castrum hedificare; si Senenses voluerint; ho-" mines qui fuerunt de Montemartino, Montebernardo, Monte-" franco, illuc redire poterunt ad habitandum, et si noluerint, " Ildibrandino Josep suam consuetudinem non contrariabimus. " Reddemus ad kal. iun. filiis Barote Sanctum Geminianum, " Montelcetum, Farnetam et alia que tenebant ante guerram.

" Nos homines de Sciano ad octavam pasche restituemus " elmos, scutos, gambieras et giubbectas Sen., quas habemus, " consulibus Sen. et consiliariis; ad kal. maias destruemus " C brachia murorum castri de Sciano ad dictum Guidonis Maizi " et Bernardini Ildebrandini et non rehedificabimus. Annuatim " in festo S. Marie de aug. dabimus XXIIII cereos — XII mi-

" litum, XII peditum de Sciano — maiori eccl. Sen. Ad kal. iun.
" dabimus comuni Sen. unam plateam in uno castro de Sciano
" et unam in alio et duas in burgis: a pascha in antea non
" faciemus publicum mercatum in castro vel burgis de Sciano
" vel curte diebus iovis, veneris, sabbati; et quando Senenses
" allibrabunt suum podere pro datio Comunis, nostrum comune
" allibrabimus et persolvemus datium consulibus vel potestati
" Sen. Omnes dicti non tollemus Senensibus pedagium, cura-
" turam, plateaticum et tenebimus pacem cum filiis comitis
" Hubertini, filiis Barote, filiis et nepotibus Rudulphini, Grifolo
" de Rencini, Volanterio; dabimus I cereum pro Monte Sancte
" Marie, I pro Kisura, I pro Rapolano, I pro Petroio, I pro
" Asinalonga, I pro Montegisi annuatim in festo S. Marie de
" aug. maiori eccl. Sen.; et si offenderimus in aliquo, non tamen
" studiose, emendabimus infra XI dies post inquisitionem. Si
" huic securitati comuni concordia nostra et Sen. consulum ad-
" ditum fuerit, additum teneamur. Nos comites dabimus D. lib.
" den. ad festum S. Michaelis de sept. proximum in terris,
" vineis, possessionibus in districtu Sen. ad dictum consulum
" et consiliariorum Sen.; ad kal. mad. restituemus allodia, foeda,
" pignora, homines, possessiones filiis et nepotibus Rudulphini,
" sicut habebant ad I mensem ante guerram. Omnia observa-
" bimus ad intellectum consulum et consiliariorum Sen. „.

Come dicemmo, gli autori che di questo documento si valsero non sono concordi nello stabilire l'anno in cui siffatto giuramento sarebbe stato prestato; infatti il Malavolti e il Tommasi, narrando della sottomissione degli Scialenghi del 1197, si fondano certamente anche su tale atto, attribuendolo così implicitamente al 1197 (1). E il Lisini, nel suo Inventario delle Pergamene dell'Archivio Senese, nel darne un riassunto, lo attribuisce — senza assoluta certezza — all'anno 1197 (2). Per il

(1) Malavolti, op. cit., c. 39; Tommasi, op. cit., p. 173. Che questi storici si sieno valsi dell'atto di cui parliamo (Cal. Vecchio, c. 20[t]) oltre che del giuramento dei Cacciaconti (Cal. V. c. 37) e di quello degli uomini di Asciano (c. 37[t] C. V.) risulta dal fatto che essi citano alcuni obblighi della sottomissione di quei di Asciano che non compaiono negli atti suddetti, ma soltanto nel documento in questione.

(2) Lisini, op. cit., p. 117. Secondo lo stile Senese, seguìto dal Tommasi, Malavolti e Lisini, l'anno è il 1197; secondo lo stile comune, il 1198.

Davidsohn invece siffatto giuramento sarebbe stato prestato dai Conti e dagli uomini di Asciano dopo la vittoria riportata dai Fiorentini contro i Senesi sotto le mura di Asciano, il 7 luglio 1174, e prima della Pasqua (13 Aprile) del 1175 (1). Secondo il Davidsohn infatti, i Conti, perduta nel 1168 la signoria di Asciano (2), desiderosi di riconquistarla e di rompere il giogo del Comune di Siena, si allearono con Firenze (3), pronta sempre a combattere i vicini nemici. E la vittoria infatti arrise ai Fiorentini e i Senesi ebbero a lamentare perdite di uomini e d'armi (le quali furono allogate nel castello di Asciano) (4), e gran numero di prigioni; senonchè i frutti della vittoria giovarono alla sola Firenze, poichè questa, che della causa dei Conti si era servita come pretesto per portar guerra a Siena, abbandonò i Conti nelle mani dei nemici. I Conti Scialenghi, abbandonati dagli alleati, impossibilitati a difendersi anche a cagione della posizione geografica, furono costretti a sottomettersi nuovamente al Comune di Siena (5). Ora, siccome nel trattato di pace che fu concordato tra Siena e Firenze il 22 Marzo 1176 (6) Siena dichiara di eccettuare dalle guerre ch'essa farà alleata con Firenze, anche gli Scialenghi, il Davidsohn ne deduce che già in quest'epoca i Conti avessero giurata la loro nuova sottomissione a Siena (7), stabilendo ancora ch'essa fosse stata stipulata prima della Pasqua del 1175 essendo fissato nel documento senza data come termine per la restituzione delle armi ai Senesi l'ottava di Pasqua, e di questa consegna — che pure interessava anche Firenze — non trovandosi menzione nella pace del 22 Marzo 1176 (8).

---

(1) Davidsohn, op. cit., p. 543, nota 1; p. 545 e nota 1.

(2) Ibid., p. 504 e 542.

(3) Ibid., p. 542; Villari, op. cit., loc. cit.

(4) Sanzanone, *Gesta Florentinorum*; Davidsohn, op. cit., p. 543, nota 1.

(5) Davidsohn, op. cit., p. 542-545.

(6) *Archivio di Stato di Siena*, Caleffo Vecchio, c. 9t; edito da Schneider, *Reg. Sen.*, n. 271. Cfr. O. Hartwig, *Quellen und Forschungen*, II, 65, 67; Davidsohn, op. cit., p. 545-548; Villari, op. cit., loc. cit., p. 127 e note 2 e 3.

(7) Il Malavolti invece vi vedeva una prova che gli Scialenghi fossero stati in pace e alleanza coi Senesi dal 1168 al 1197: ma a ciò contrasta la battaglia di Asciano.

(8) Davidsohn, op. cit., p. 545, nota 1.

Senonchè lo Schneider, pubblicando il documento in questione nel suo *Regestum Senense* (1), ne fissa come data il 1168, senza comprovare siffatta attribuzione, ma dichiarandolo *all'incirca contemporaneo* al giuramento di Aldobrandino Cacciaguerra che è del 15 Settembre 1168 (2).

A stabilire quale di siffatte attribuzioni appaia la più probabile può fornire dei dati il contenuto stesso del documento.

Troviamo infatti che i Conti e gli uomini di Asciano, promettendo ai Senesi aiuto e alleanza in tutte le guerre, fanno eccezione — clausola frequentissima nei documenti del tempo — per l'imperatore, l'arcivescovo ed il conte: " excipimus im-" peratorem, Christianum Maguntinum archiepiscopum, comitem " Macharium et Francum eius filium, et Macharium iuniorem... „.

Abbiamo qui dati bastanti per rifiutare l'attribuzione del giuramento al 1197 (o 1198, stile comune). Infatti l'arcivescovo Cristiano, successor di Rinaldo di Colonia, legato imperiale già dal 1167, morì il 25 agosto 1183 a Tusculano (3). E il nome di Macario, il quale è menzionato nei documenti come Conte

---

(1) F. Schneider, *Regestum Senense*, n. 240. Lo Schneider segue, nella datazione, lo stile comune.

(2) Schneider, op. cit., n. 240, nota 1. A questo documento lo Schneider rimanda, per quanto concerne i diritti dei Conti su Asciano e le Castella degli Scialenghi, in *Die Reichsverwaltung in Toscana von der Gründung des Langobardenreiches bis zum Ausgang der Staufer*, Band I, *Die Grundlagen*, in " Bibliothek des Kgl. Preussischen Historischen Instituts in Rom „, Band XI, 1914, p. 276, nota 2.

(3) Gams, *Series Episcoporum Ecclesiae Catholicae*, Ratisbona, 1873, a voce Mainz, p. 289; Ficker, *Forschungen zur Reichs und Rechtsgeschichte Italiens*, Innsbruck, 1868, vol. II, p. 139-142, § 278-279; Davidsohn, op. cit., I, p. 572. Nè si può dare all'abbreviazione " C. Mag. Archiepiscopum „ con cui nel documento è espresso il nome dell'arcivescovo, altro significato, dal momento che tale dizione ricompare in altri atti, in cui non è dubbio trattarsi dell'Arcivescovo Cristiano. Così, ad es., nel trattato di pace tra Siena e Firenze del 22 marzo 1176, di cui parlammo, e nel quale è rammentato anche il conte Macario. Così pure nella donazione che il conte Ugolino Scolari fa al Comune di Siena di parte delle sue miniere (Cal. Vecchio, c. 19); donazione da datarsi col 1178 per il nome dei Consoli (cfr. Schneider, *Reg. Sen.*, n. 287, nota), mentre il Tommasi l'aveva creduta di molto anteriore. E nel giuramento dei conti Ardengheschi al Comune di Siena, e dei Consoli ai Conti, del 6 ott. 1179. Cfr. Tommasi, op. cit., p. 157; Zdekauer' op. cit., p. xiii; Banchi, Commento a Memoriale cit.

di Siena fin dal 1167 e poco dopo col figlio Franco e con Macario iuniore, mentre non più lo è nel 1197 (1), induce alla medesima conclusione.

Anche gli accenni a una guerra in cui quei di Asciano avrebbero fatto prede e prigioni, mal possono conciliarsi con la data del 1197, poichè, secondo gli storici, per questa sottomissione non vi fu guerra, ma si venne subito ad accordo. Queste ragioni che l'esame del documento suggerisce vengono avvalorate dal fatto che non potrebbe la sottomissione in esso contenuta attribuirsi al 1197, dal momento che della sottomissione di Asciano in quest'anno abbiamo l'istrumento, contenente promesse e patti diversi da quelli contenuti nel documento non datato. Non solo, ma dal documento del 1197 ci viene ancora una prova che altra sottomissione era stata precedentemente stipulata dagli uomini di Asciano, perchè in esso, dopo l'elenco degli obblighi a cui quei di Asciano si sottopongono, è detto: " *Observabimus capitula quae continentur in brevi prime pacis, ab* " *illo inferius:* " *et ab hodie usque ad proximas kal. iun. resti-* " *tuemus* „ *etc. preter quod dictum est de allibramento* „, dove il richiamo al nostro atto è palese (2).

Resta allora a decidere — rifiutata la data del 1197 — se il giuramento fu prestato nel 1168 dopo la donazione di Asciano fatta da Ildibrandino, come vuole lo Schneider, ovvero dopo la battaglia di Asciano, e prima della Pasqua del 1175, come pensò il Davidsohn. Non abbiamo qui dati di fatto che ci inducano a negare subito l'una o l'altra attribuzione, ma alcune considerazioni possono indurci ad accettare con maggior probabilità di esattezza l'opinione del Davidsohn. Infatti mentre la donazione del 1168 ci appare fatta dal Conte Ildibrandino di sua spontanea volontà, costrettovi certo dalla potenza cre-

---

(1) Ficker, op. cit., II, p. 228-230, § 311-312; Davidsohn, op. cit., pagine 499-543. Cfr. Muratori, *Ant. Ital.*, IV, 576, da cui il Ficker trasse il suo elenco dei Conti. Nel 5 aprile 1205, per decidere una controversia sul possesso di Montepulciano il podestà di Siena interroga molti testimoni i quali enumerano i Conti di Siena che essi videro signoreggiare anche su Montepulciano, risalendo a circa cinquanta anni prima. Ed essi ricordano tra i primi Conti " Macharius, nuntius imperatoris Frederigi „.

(2) Schneider, *Reg. Sen.*, n. 390, nota, rimanda appunto al giuramento non datato, che egli attribuisce al 1168.

scente di Siena, ma non in seguito a fatti guerreschi (1), il documento non datato ci appare invece come un accordo seguìto dopo aspra battaglia (2). Anche il nome di breve di pace datogli nel 1197 ne è una conferma. Ma una prova più sicura ci è data dalla menzione in esso fatta di restituzione di elmi, scudi, gambali, ecc. al Comune di Siena: infatti, come dicemmo, il Sanzanome scrive che i Fiorentini nel 1174 tornarono dopo la vittoria al castello di Asciano " spoliis repleto „; tale bottino guerresco ben si potrebbe identificare con le armi della cui consegna ora si tratta (3). Inoltre nel documento non datato è posto come termine per la restituzione delle armi l'ottava di Pasqua, e altrove si rammentano le calende di maggio e di giugno. Se il giuramento fosse stato prestato nel settembre del 1168 si dovrebbe accennare all' anno venturo, mentre se lo fu negli inizi del 1175 le date concordano. Ma un indizio più forte è dato dalla menzione del figlio del conte Macario, Franco, e di Macario iuniore. Infatti essi vengono rammentati nei documenti appena a partire dal 1172 (4) onde a noi sembrà che l'atto ove essi son menzionati, più probabilmente debba attribuirsi col Davidsohn agli inizi del 1175, che non alla fine del 1168, con lo Schneider.

Stabilito che il giuramento in questione non può essere stato prestato nel 1198, ma non più tardi del 1175 (5), assume particolare importanza la promessa in esso contenuta degli uomini di Asciano di allibrarsi e di pagare il dazio al Comune di Siena: " et quando Senenses allibrabunt suum podere pro " datio comunis, nostrum comune allibrabimus, et persolvemus

---

(1) Dice infatti il documento del 1168: " Placuit mihi..... titulo dona" tionis inter vivos... consensu Guille comitisse iugalis... „.

(2) Vedi la menzione di alleati dell'una e dell'altra parte, il condono delle offese fatte, l'accenno a restituire le cose come erano avanti la guerra.

(3) Davidsohn, op. cit., f. 543, nota 1 e 545, nota 1.

(4) Ficker, op. cit., loc. cit.; Davidsohn, op. cit., I, p. 523 e 536.

(5) Da questa anticipazione ne viene che già allora furono dagli Scialenghi sottomessi a Siena, oltre Asciano, Monte S. Maria, Rapolano, Chiusure, Petroio, Asinalonga, etc., e non nel 1197 come affermarono Malavolti e Tommasi. Cfr. Caggese, *La Repubblica di Siena e il suo Contado*, in " Bullettino Senese „, anno XIII, fasc. I, 1906, p. 13, che accetta la data del 1197.

" datium consulibus vel potestati Sen. „ (1), promessa che fu trascurata dagli autori che del documento si valsero, e dalla quale risulta una anticipazione abbastanza notevole dell'epoca comunemente fissata per la introduzione della Libra in Siena (2). Questa anticipazione — per la quale Siena verrebbe a porsi tra i Comuni non solo della Toscana ma dell'Italia che più precocemente vantino tale sistema di imposte (3) — concorderebbe con quanto aveva intuito il Tommasi (4). Egli basava la sua supposizione su una prova fornitagli dalle Rubriche 36 e 37 della V Distinzione del Constituto Senese del 1262 (5), nelle quali, egli scrive: " la legge che pone nuovo modo di andare " all'offerta che con religiosa magnificenza si fa ogni anno da " ciascun cittadino la vigilia di S. Maria d'Agosto, è fatta nel 1200, " e presuppone la Lira, mentre comanda che ciascuno vada non " con quelli della contrada nella quale è allibrato, ma con quei " di quella ove egli abita „. Questa osservazione avrebbe molta importanza; senonchè lo Zdekauer dubitò che le disposizioni relative alla Festa della Madonna di Agosto, contenute nelle suddette rubriche e attribuite al 1200, appartengano ai primi

---

(1) Così scrive il MALAVOLTI, op. cit., c. 39: " Gli uomini di Asciano " si sottomessero con l'obbligo di allirare i loro beni, e pagarne le preste " a Consoli o Rettori della Città di Siena ogni volta che si facesse la Lira " e si pagassero le preste dai Senesi „. E il TOMMASI, op. cit., p. 173: " Promessero di allirare i loro beni, e pagare le prestanze sempre che si facesse " la Lira sopra a' Senesi e che essi pagassero preste „.

(2) La forma della promessa — fatta col tempo futuro e col *quando* — è pressochè identica a quella che incontrasi in documenti posteriori, allorchè l'istituzione della *Libra* era ormai consolidata. Cfr. Documento del 23 gennaio 1219 in BANCHI, *Ord. Economici* cit. Cfr. Atto del 15 ott. 1227 (*Reg. Sen.*, n. 740), in cui gli uomini di Mensano di Casole promettono, fra l'altro, di allibrarsi al Comune di Siena, con queste parole: " Ad inquisitionem Potestatis Sen. allibrabimus quisque nostrum bona sua, quotiens Sen. universitas se allibraverit. Solvemus datium sive libram de " omnibus allibramentis nostris eo tempore, quando datium colligetur per " civitatem „.

(3) RICCA-SALERNO, op. cit., loc. cit.; SALVEMINI, op. cit., loc. cit.

(4) TOMMASI, op. cit., p. 179-180.

(5) ZDEKAUER, *Il frammento degli ultimi due libri del più antico Costituto Senese*, in " Bull. Sen. „, I, p. 134.

anni del secolo, e dopo aver dimostrato che la copia contenente le due rubriche con la data del 1200 Sett. indit. XIV, è una relazione posteriore al 1288 e probabilmente del 1300, scrive: " Gli accenni alla Lira, contenuti nelle R. 36-37 rendono invece " probabile che la redazione primitiva appartenga al terzo de- " cennio del secolo, e probabilmente all'anno 1225, in cui muta " appunto la indizione XIV nel mese di settembre „ (1). Qualora invece potesse ritenersi provata l'esistenza dell'allibramento prima del 1175, si potrebbe forse ritenere che la redazione primitiva appartenga veramente ai primi del secolo, e vedere anzi in esse una riprova dell'antichità della Libra.

Un altro vago indizio — sebbene molto incerto — che assai per tempo si ricorresse in Siena alla stima dei beni, si potrebbe vedere nel Malavolti (2) dove scrive: " ...nel medesimo " tempo (1201), i Senesi pubblicarono una stima che havevan " fatta *molto tempo prima*, dei beni di ciascun cittadino „.

Un'ultima osservazione che per quanto concerne la Libra, può farsi sul documento in questione, riguarda la parola "*podere*„ con cui sono indicati i beni dei Senesi, parola che potrebbe avere il significato di possedimento in genere, ma anche quello di bene immobile (3); ora è noto che nel Breve della Libra del 1226 (4) l'obbligo di denunzia comprende tutti i beni, mobili ed immobili: occorrerebbe perciò stabilire se agli inizi della istituzione anche i beni mobili venivano allibrati, o se la denuncia limitavasi ai beni immobili.

Ma assai più notevole è l'accenno che il giuramento contiene alla istituzione della magistratura potestarile: " persol- " vemus datium consulibus vel potestati Senensi „. Sebbene anche per Siena, come per molte altre città, non si possa fissare in un anno determinato lo stabilirsi del Podestà, poichè per lungo tempo la magistratura consolare si alterna alla potestarile, pure riesce interessante ogni documento che permetta di

(1) Zdekauer, op. cit., *Dissertazione*, f. xxxii.

(2) Malavolti, op. cit., c. 40^t.

(3) Ducange, *Glossarium mediae et infimae latinitatis*, tomo VI, 1886, a voce *Podere*. Cfr. *Statuta Cadubrii*, libro II, cap. 26.

(4) *Breve dei cittadini che dovevano essere allirati* (1226), in Banchi, *Il Breve degli Officiali* cit.

determinare, sia pure approssimativamente, l'epoca in cui la nuova forma di governo fece le sue prime prove.

Ora è noto che i cronisti e gli storici ritennero che Siena eleggesse il primo Podestà nel 1199, nella persona di Orlando Malapresa da Lucca (1), e, sebbene il Rondoni notasse che già nella sottomissione di Asciano del 1198 è ricordata la magistratura podestarile insieme ai consoli (2), quella data venne anche recentemente accolta per fissare lo stabilirsi del Podestà in Siena (3). Più giustamente altri autori fanno risalire gli inizi della istituzione al 1151, basandosi su tre documenti del 1151 ove compare *Scudacollus dominus civitatis*, e specialmente su quello contenente una cessione fatta dal conte Paltonerio *tibi* " *Scudacollo domino civitatis tuisque successoribus, qui pro tem-* " *pore fuerint, sive sit dominus sive consules vel alii rectores* (4). Che si tratti di un Podestà intendono il Pertile (5), il Ficker (6), il Davidsohn (7), il Patetta (8), lo Schneider (9), e Siena sarebbe quindi con Bologna e Ferrara tra le prime città che videro la nuova forma di governo. Al Rondoni invece il documento sembra l'espressione del carattere del governo consolare " che cerca di

---

(1) ANDREA DEI, op. cit., loc. cit.; MALAVOLTI, op. cit., c. 40.

(2) RONDONI, op. cit, p. 207. Nella sottomissione è detto: "... postquam " a consulibus, potestate, rectore Sen. comunis inquisiti fuerimus... ad dictum " consulum, potestatis, rectoris... ".

(3) LISINI, *Indice sommario delle serie dei documenti esistenti nell'Arch. di Siena*, Siena, Lazzeri, 1900, p. 41; FRANCHINI, *Saggio di ricerche su l'istituto del Podestà nei Comuni medievali*, Bologna, 1912, Appendice, p. 333 e nota 5.

(4) *Arch. di Stato di Siena*, Documento del maggio 1151 (Riformagioni). Documento del luglio 1151, Caleffo Vecchio, c. 20. Altro del luglio 1151. Cal. Vecchio, c. 21, edito dal FICKER, *Urkunden* cit., p. 163, n. 120. Cfr. *Reg. Sen.*, n. 199-200-201.

(5) PERTILE, op. cit., II^{1}, p. 81 e nota 1: " il nuovo magistrato non ha " per anco un nome proprio accettato da tutti... ".

(6) FICKER, op. cit., III, p. 433.

(7) DAVIDSOHN, op. cit., I, p. 447.

(8) F. PATETTA, *Studi storici e note sopra alcune iscrizioni medievali*, Modena, 1907, p. 149 e nota 1, e p. 153.

(9) SCHNEIDER, *Reg. Sen.*, p. XX, nota 3: " Scudacollus, ein der ersten " Podestà — er führt aber nicht diesen Titel, sondern heisst *dominus ci-* " *vitatis* ".

equilibrarsi e di svolgersi fra le tante difficoltà e contrasti „ (1). E il dominio di Scudacollo interpreta come una modificazione del governo consolare anche il Franchini (2); ma la frase *sive sit dominus sive consules* non pare possa conciliarsi con questa ipotesi. Appunte per questa contrapposizione tra il tipo di governo affidato eccezionalmente al *dominus*, e quello normale dei *consules*, il Solmi, nella recensione al lavoro del Franchini, nell' " Archivio Storico Ital. „ del gennaio 1913, p. 122 e segg., esclude possa trattarsi di un capo della gerarchia sonsolare; ma d'altra parte afferma che *dominus* è titolo singolare di poche città, nè prepara affatto il nome del podestà. Egli suppone che nel caso di Scudacollo si tratti di un magistrato imperiale. Ad ogni modo l'atto di cui ci occupammo è il più antico nel quale appaia il Podestà, designato non già con perifrasi, ma col titolo esplicito di *potestas*. È il primo accenno indubbio alla forma nuova di governo che dovrà sostituire la forma consolare, dimostratasi insufficiente, ma di cui è ancor lungi la scomparsa definitiva. Infatti la magistratura potestarile è nei suoi primordi avvolta nella indeterminatezza, e si presenta sotto forma di esperimenti, di tentativi, fatti forse in momenti gravi ed eccezionali per la cosa pubblica, affine di pervenire ad una forma di governo migliore del consolato ormai entrato nella fase di decadenza. Ond'è che nei suoi inizî la nuova magistratura si avvicenda con l'antica, talora per alcuni decennî; non solo, ma talvolta le due forme si contemperano, sussistendo il Podestà accanto ai Consoli. Tali vicende subì anche in Siena l'istituto potestarile, e infatti, dopo la menzione di Scudacollo *dominus civitatis* e il titolo di *potestas* del nostro documento, a lungo troviamo ancora la magistratura consolare semplice o modificata dalla presenza di un *rector*, vero capo console (3), finchè

---

(1) Rondoni, op. cit., p. 205: " Talora uno di essi (i consoli) sembra il " principale, e talvolta la città, forse in circostanze gravi e difficili, è go- " vernata da un dittatore „. Cfr. la nota del Benvoglienti alla cronaca di Andrea Dei cit., p. 14, n. 1: " Scudacollo si intitolava signore e dittatore di Siena „.

(2) Franchini, op. cit., p. 86 e Appendice, p. 333.

(3) Così nel giuramento dei Cacciaconti del 1198 si incontra l'espressione *consules vel rector eorum*, dimostrante che tale *rector* è uno dei

nel 1199 comparirà il Podestà notato nominativamente, e col 1211 l'istituzione diverrà costante.

In questo periodo di avvicendamento delle due magistrature le formule di obbligazione nei documenti privati e pubblici si riferiscono per lo più — nota il Franchini (1) — all'una e all'altra insieme; quasi sempre si nomina in primo luogo il consolato e poi la podesteria, ovvero si ricorda soltanto il potere consolare, il che sta ad indicare che la potestaria si ritiene come ufficio transitorio. Così è nel documento senese surriferito, nel quale poco dopo l'espressione " consules vel potestas „ si trovano menzionati soltanto i consoli. Ma se pure queste prime apparizioni del vocabolo " potestas „ dimostrano semplicemente che la potesteria era riconosciuta soltanto come forma eventuale di governo, e non ancora come stabile (2), sono pur sempre di grande importanza, perchè collocano Siena tra quelle città che prime tentarono la nuova forma.

Del resto, ove si ritenesse che solo con Orlando Malapresa da Lucca sia esordita la nuova magistratura nel 1199, sembrerebbe strano che il nascente comune ricorresse a persona forestiera. Più probabilmente avrà, con geloso orgoglio, preferito chiamare alla nuova carica un cittadino, e soltanto più tardi, dimostratosi insufficiente anche il nuovo tentativo a dar quiete al Comune, anzi fomite di nuove discordie, avrà ricorso a un forestiero che alle ire di parte fosse estraneo; ed infatti solamente nelle città in cui tardi compare la forma podestarile si ha subito l'elezione di podestà forestieri.

Ed è naturale — poichè all'istituzione podestarile si addivenne quasi insensibilmente — che, quasi non accorgendosi gli uomini stessi del tempo della importanza della novità, sovente

---

membri del consolato rivestito di un primato. Talvolta invece il titolo di *rectores* è attribuito ai consoli e si ha sinonimia tra i due vocaboli; tal altra, come nel documento surriferito del luglio 1151 con la frase *consules vel alii rectores* si intendono i capi del Comune, quali essi possano essere. Che con la denominazione di *rectores* si vogliano indicare nei documenti del XII secolo i consoli o in genere i capi di un Comune, dimostrò il prof. Patetta, mio illustre Maestro, negli *Studi Storici* citati, § 34, p. 153.

(1) Franchini, op. cit., p. 124, nota 1.

(2) Ibid., p. 135.

neppure pensassero i cronisti a tramandare l'anno preciso della instaurazione della nuova forma (1); il che è accaduto per Siena.

Concludendo, dal documento esaminato scaturisce un dato per stabilire con maggiore certezza che già prima del 1175 erasi avuta in Siena la magistratura potestarile.

Del resto Siena, che vide così precocemente gli albori della istituzione del Podestà, aveva avuto prestissimo anche la forma di governo consolare, chè se nel 1125 si incomincia a far menzione dei consoli in Siena, e nominativamente di " Macon consul „ (2), probabilmente essi sono più antichi (3).

Nè, fissando in tale epoca l'instaurazione della forma potestarile in Siena si verrebbe a rompere quel rapporto di contemporaneità che altri notò (4) tra l'apparire della istituzione della Libra e l'avvento del Potestà. Infatti entrambe le nuove istituzioni compaiono in Siena nell'atto che noi esaminammo, certo non ancora nettamente delineate, ma già affacciantisi all'orizzonte politico-giuridico del giovane Comune.

---

(1) Franchini, op. cit., p. 124, nota.

(2) Pasqui, *Documenti per la Storia di Arezzo*, in " Pubblicazioni della Deputazione di Storia Patria per la Toscana „, tomo XI, n. 389, p. 554; Schneider, *Reg. Sen.*; Elenco dei Consoli e Podestà.

(3) Rondoni, op. cit., p. 205; Schneider, op. cit., p. xix, nota 1.

(4) Banchi, *Il Breve degli Officiali* cit., p. 88, nota e *Ordin. Econom.* cit., p. 17; Rondoni, op. cit., p. 227.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. L. Disp. **9ª, 1914-1915**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 7 Marzo 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Naccari, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Fusari e Segre, Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Salvadori e Somigliana.

Letto ed approvato il verbale della precedente adunanza, il Presidente dà il triste annunzio della morte, avvenuta in Roma il 21 febbraio scorso, del Socio corrispondente Struever. Apparteneva all'Accademia fin dal 30 novembre 1873.

Il Socio Guareschi offre in omaggio il 1° vol. della *Nuova Enciclopedia di Chimica scientifica, tecnologica e industriale*, da lui diretta (volume che comprende la parte teorica della Chimica generale e della Chimica fisica); e ne discorre. — Presenta inoltre, a nome dell'Autore e dei traduttori (sig.ri D.ri M. e C. Giua), l'edizione italiana della *Storia della Chimica* del nostro Socio corrispondente E. v. Meyer, mettendo in luce i notevoli pregi di quest'opera.

Il Socio Segre presenta in dono, per incarico del Prof. G. Boccardi, una Memoria di lui su *La variazione delle latitudini e le osservazioni di Pino Torinese.*

Per la stampa negli *Atti* sono presentate le seguenti Note.

Dal Socio Guareschi: G. Charrier, *Sul cosidetto benzolazo-antranol e sul suo etere metilico.*

Dal Socio Parona: G. Lincio, *Figure di corrosione e solidi di soluzione del quarzo ottenuti con acqua ad alta temperatura.*

Dal Socio Guidi: G. Colonnetti, *Sul secondo principio di reciprocità*; C. L. Ricci, *Le deformazioni delle molle ad elica.*

Dal Socio Peano: T. Boggio, *Sul problema delle vene confluenti* (*); M. Bottasso, *Sopra un nuovo problema dei valori al contorno per un cerchio*; C. Burali-Forti, *Nuove applicazioni degli operatori.*

Dal Socio Segre: C. Rosati, *Sugli integrali abeliani riducibili.*

Il Socio Fusari, anche a nome del Collega Foà, legge la Relazione sulla Memoria del Dott. M. Pitzorno: *Nuove ricerche sulla struttura dei gangli del simpatico dei vertebrati inferiori.* Con votazione unanime si accolgono le conclusioni della Relazione, favorevoli alla stampa della Memoria.

Pure con unanimità di voti si delibera la pubblicazione fra le *Memorie* di un nuovo lavoro del Socio Camerano, che questi presenta, col titolo *Revisione dei Gordii.*

Infine il Socio Mattirolo offre, ancora per i volumi accademici, una Memoria di B. Peyronel: *Primo elenco di Funghi di Val San Martino o Valle della Germanasca.* Vengono incaricati di riferire intorno ad essa i Soci Parona e Mattirolo.

(*) Questa Nota uscirà in una prossima dispensa.

LETTURE

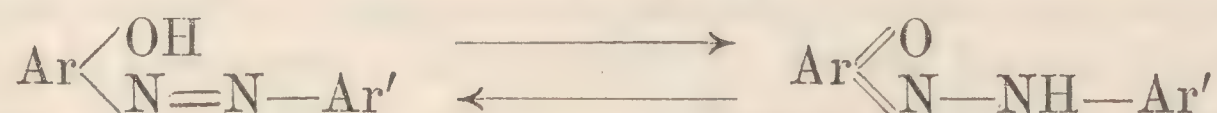
Sul cosidetto benzolazoantranol e sul suo etere metilico.

Nota di G. CHARRIER.

È noto, che, mentre gli eteri degli ossiazocomposti vennero considerati, sin da quando se ne conobbero i primi termini, come O-eteri, cioè derivanti dalla forma enolica, ai corrispondenti ossiazocomposti cheto-enol-desmotropi venne assegnata da alcuni la forma enolica di veri ossiazocomposti, da altri la forma chetonica di chinonidrazoni.

Le proprietà degli N-eteri, ottenuti per azione delle as-alchilarilidrazine sui chinoni corrispondenti, eteri che vanno indubbiamente considerati come derivati dalla forma chetonica e d'altra parte nuove ricerche più recenti in questo campo generalizzarono sempre più la tendenza di ammettere come forma degli ossiazocomposti liberi la enolica, benchè essa possa dare facilmente luogo, in modo analogo ai molti altri tautomeri noti, alla forma chetonica per spostamento di un atomo di idrogeno e trasposizione di un doppio legame.

Trattandosi di un caso di isomeria, in cui si può ammettere uno stato di equilibrio tra le due forme enolica e chetonica, stato di equilibrio che può venir spostato con grandissima velocità a seconda delle condizioni da una concentrazione praticamente nulla (teoricamente piccolissima da sfuggire ai nostri mezzi di indagine) della forma chetonica alla forma chetonica pura (con concentrazione estremamente piccola della forma enolica, quando si ottengono in alcune reazioni derivati della chetoforma)

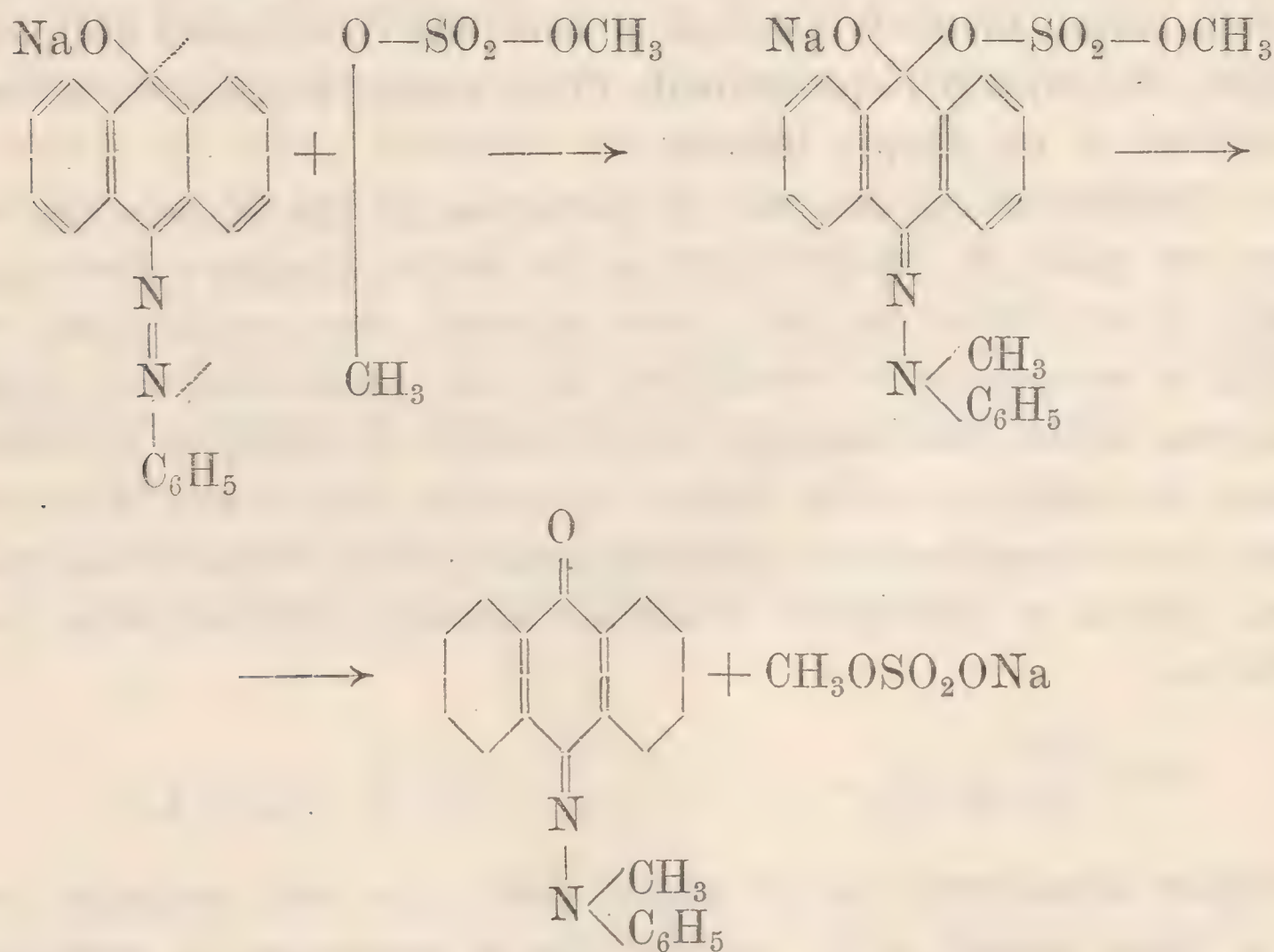
$$Ar\begin{cases}OH\\N{=}N{-}Ar'\end{cases} \rightleftarrows Ar\begin{cases}O\\N{-}NH{-}Ar'\end{cases}$$

è logico ammettere che in questo caso e in casi analoghi non ci si possa basare sulle reazioni che si osservano sul composto di partenza (cheto-enol-desmotropo) per decidere sulla sua co-

stituzione: dunque l'alchilazione non può in modo assoluto esser un mezzo per stabilire la costituzione di un ossiazocomposto.

Ma d'altra parte per quanto riguarda gli ossiazocomposti si ammette ora generalmente che la forma libera di essi e la sola stabile (che è pure quella dell'ossiazocomposto eterificato) sia quella enolica, fatto questo che dimostra in questa classe di sostanze la stabilità maggiore dell'aggruppamento aromatico in confronto di quello chinonico, cosicchè è naturale ammettere che la forma enolica dia luogo per sostituzione diretta dell'idrogeno o del metallo, se si considera il sale dell'ossiazocomposto, coll'alchile all'etere, ed è lecito concluderne, che dalla formazione di un O-etere si possono avere buone ragioni per attribuire la forma enolica all'ossiazocomposto sottoposto all'eterificazione, dalla formazione invece di un N-etere si può sospettare nel composto eterificato la forma chetonica, cioè che si tratti di un chinonidrazone.

Se si dovesse ammettere come pretendono Meyer e Zahn [1] per il cosidetto benzolazoantranol che l'alchilazione debba avvenire, invece che per sostituzione diretta, per preventiva addizione e conseguente eliminazione di gruppi secondo lo schema da essi proposto

NaO (antracene) N=N—C_6H_5 + $O—SO_2—OCH_3$ / CH_3 ⟶ NaO, $O—SO_2—OCH_3$ (antracene) =N—N<CH_3, C_6H_5 ⟶

⟶ O= (antracene) =N—N<CH_3, C_6H_5 + CH_3OSO_2ONa

[1] A. *396*, 157 (1913).

poichè sarebbe logico ammettere analogia di reazione nella eterificazione di questo supposto ossiazoderivato e degli altri ossiazocomposti, si dovrebbero con analogo meccanismo ottenere da essi N-eteri anzichè O-eteri.

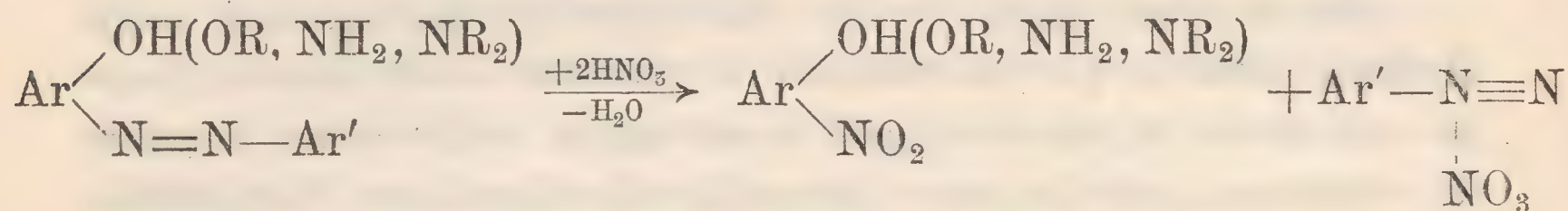
Gli N-eteri della forma chetonica si distinguono dagli O-eteri, oltrechè per le reazioni di scissione a cui dànno luogo (di cui finora la più usata per chiarirne la costituzione è quella di riduzione), per la minor intensità di colorazione che possiedono e per il fatto che vengono facilmente idrolizzati dagli acidi diluiti in as-alchil-arilidrazine e chinoni corrispondenti, mentre gli O-eteri si saponificano più o meno facilmente ricostituendo l'ossiazocomposto da cui derivano ([1]). Inoltre gli O-eteri sono dotati di proprietà basiche notevoli che mancano agli N-eteri: i sali che essi dànno cogli acidi monobasici contenenti due molecole di acido sono molto importanti per le reazioni di scissione a cui dànno luogo. I cloridrati si scindono per azione del calore in cloruro alchilico e ossiazocomposto, i nitrati invece nel nitrato di diazonio e nel nitrofenol corrispondenti, dando luogo alla diazoscissione tipica per cui l'azogruppo viene spostato dal nitrogruppo.

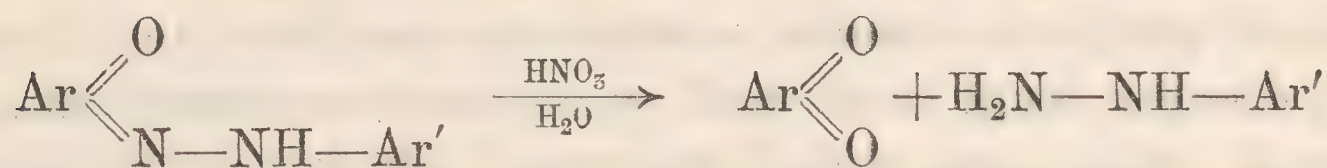
Ora la diazoscissione diventa per il materiale sperimentale che si va raccogliendo una proprietà sempre più generale degli azocomposti (ossi- e amino-azo-composti sia liberi che eterificati), mentre manca, almeno per ora nei pochi casi considerati, agli idrazoni dei chinoni: valendoci di essa possiamo, come vedremo, decidere sulla presenza o assenza dell'azogruppo in un composto (o sulla tendenza di esso a reagire coll'azogruppo, essendo la diazoscissione dei nitrati una reazione tipica degli azocomposti), in una parola possiamo giudicare con molta probabilità esaminando un cheto-enoldesmotropo di questo gruppo

---

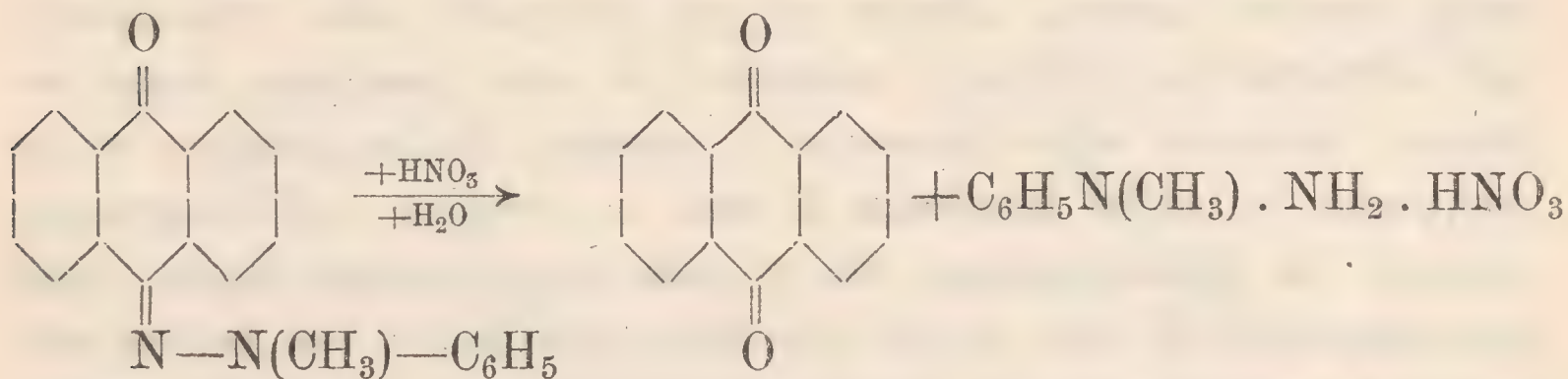
([1]) Gli N-eteri fondono generalmente a temperatura più elevata di quella degli ossiazocomposti (della cui forma chetonica sono i derivati), mentre gli O-eteri fondono a temperatura più bassa: l'introduzione dell'alchile all'azoto e la trasposizione nella chetoforma elevano dunque il punto di fusione del corpo risultante, mentre l'introduzione dell'alchile all'ossigeno ha per effetto di abbassare notevolmente il punto di fusione. La solubilità in alcuni solventi (alcool, etere) è maggiore per gli O-eteri, minore per gli ossiazocomposti (forma enolica), ancora minore per gli N-eteri (derivanti dalla chetoforma).

se ad esso spetti la forma enolica (di ossiazocomposto) o la forma chetonica (di chinonidrazone). La diazoscissione degli azocorpi avviene infatti per l'azione dell'acido nitrico colla formazione intermedia dei nitrati secondo lo schema generale:

$$Ar\begin{cases} OH(OR, NH_2, NR_2) \\ N{=}N{-}Ar' \end{cases} \xrightarrow[-H_2O]{+2HNO_3} Ar\begin{cases} OH(OR, NH_2, NR_2) \\ NO_2 \end{cases} + Ar'{-}\underset{\displaystyle NO_3}{\underset{|}{N}}{\equiv}N$$

mentre pare che i chinonidrazoni, dai pochi casi esaminati, si scindano invece con gran facilità per l'azione dell'acido nitrico in chinoni e arilidrazine corrispondenti secondo lo schema:

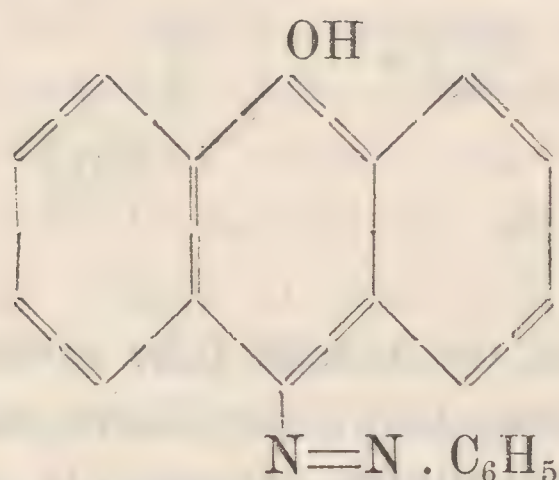
$$Ar\begin{cases} {=}O \\ {=}N{-}NH{-}Ar' \end{cases} \xrightarrow[H_2O]{HNO_3} Ar\begin{cases} {=}O \\ {=}O \end{cases} + H_2N{-}NH{-}Ar'$$

Avverrebbe perciò in questo caso in presenza dell'acido nitrico una rapida primaria idrolisi, i cui prodotti potrebbero poi ulteriormente reagire coll'acido nitrico presente.

L'azione dell'acido nitrico in soluzione eterea sull'etere metilico del cosidetto fenilazoantranol non porta ad alcun sale di diazonio, ma avviene una semplice idrolisi in antrachinone e fenilmetilidrazina secondo lo schema:

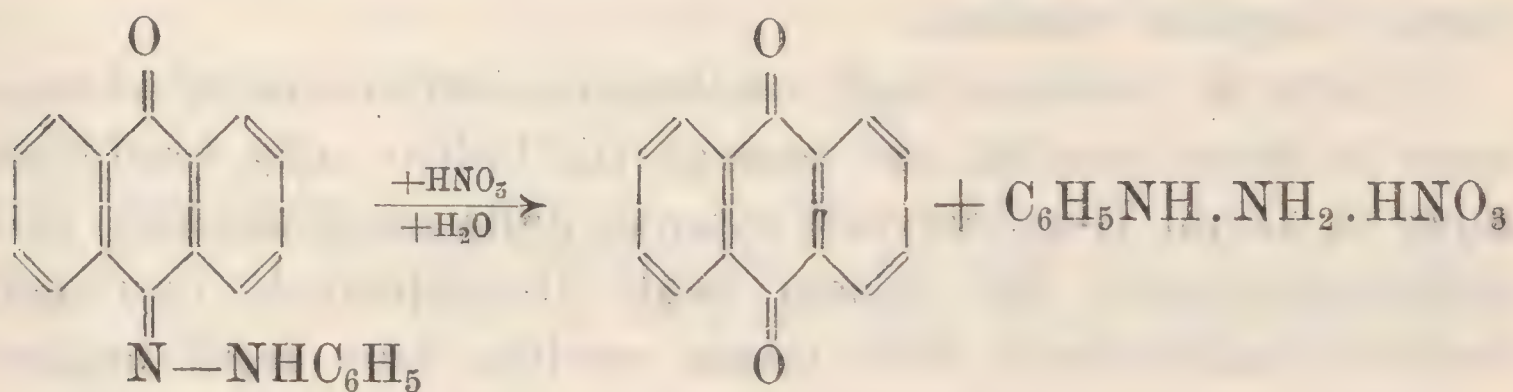
$$C_{14}H_8(=O)(=N{-}N(CH_3){-}C_6H_5) \xrightarrow[+H_2O]{+HNO_3} C_{14}H_8(=O)(=O) + C_6H_5N(CH_3) . NH_2 . HNO_3$$

L'etere metilico del cosidetto fenilazoantranol, il quale composto si può ottenere tanto per azione del cloruro di fenildiazonio sul sale sodico dell'antranol come per azione della fenilidrazina sul dibromoantrone o anche sul monobromoantrone, venne ottenuto da Meyer e Zahn (1) sia per metilazione del

(1) Loco citato.

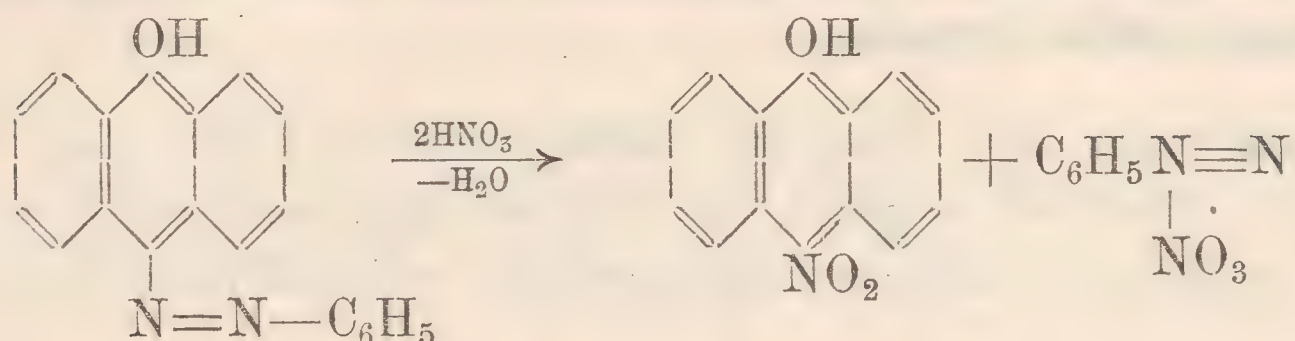
supposto ossiazocomposto, sia per azione della as-metilfenilidrazina sul dibromoantrone, ed essi dimostrarono in modo indubbio che esso è un N-metiletere. D'altra parte essi ritengono invece, che il fenilazoantranol (o benzolazoantranol), da cui questo etere deriva, contrariamente a quanto opinano Kaufler e Suchannek [1], i quali per i primi prepararono questo composto, rappresenti la forma enolica, cioè sia un vero ossiazocomposto della formola

OH
(formula di struttura antracenica)
$N{=}N . C_6H_5$

e spiegano la formazione da esso dell'N-metiletere col meccanismo di addizione, non di sostituzione diretta dell'idrogeno (o del metallo del sale corrispondente) col metile, che ebbi già occasione di spiegare più sopra.

Il cosidetto benzolazoantranol, benchè fornisca un O-benzoilderivato (cioè corrispondente alla forma enolica) diverso da quello ottenuto per azione dell' as-benzoilfenilidrazina sul dibromoantrone (N-benzoilderivato corrispondente alla chetoforma), reagisce coll'acido nitrico sciolto in etere istantaneamente dando antrachinone e fenilidrazina, cioè prodotti di decomposizione analoghi a quelli del suo etere metilico (N-etere) secondo lo schema:

$$\text{O}{=}\text{C}_{14}\text{H}_8{=}\text{N}{-}\text{NHC}_6\text{H}_5 \xrightarrow[+H_2O]{+HNO_3} \text{O}{=}\text{C}_{14}\text{H}_8{=}\text{O} + C_6H_5NH.NH_2.HNO_3$$

(1) B. *40*. 518 (1907).

La fenilidrazina così ottenuta viene poi ossidata in parte dall'acido nitrico in presenza dell'antrachinone in nitrato di fenildiazonio. Se il fenilazoantranol fosse un azoderivato invece che un fenilidrazone dell'antrachinone, la reazione con formazione di nitrato di fenildiazonio avrebbe dovuto essere accompagnata da formazione di nitroantranol secondo lo schema:

$$\underset{N=N-C_6H_5}{\overset{OH}{C_{14}H_8}} \xrightarrow[-H_2O]{2HNO_3} \underset{NO_2}{\overset{OH}{C_{14}H_8}} + \underset{NO_3}{C_6H_5N\equiv N}$$

La diazoscissione dei nitrati (che presuppone proprietà basiche nei chetoenoldesmotropi, che finora nel campo degli ossiazocomposti vennero soltanto riscontrate nella forma enolica, tali da render possibile l'esistenza in un primo tempo dei nitrati) non è certo una reazione che possa sfuggire all'obbiezione di una trasformazione tautomera (trasposizione intramolecolare con spostamento di un atomo di idrogeno e di un doppio legame) e come tale non può permetterci in modo assoluto di trarre conseguenze sulla costituzione del composto esaminato, ma d'altra parte risulta sperimentalmente dai numerosi casi esaminati in modo certo che tutti i cosidetti azocomposti, cioè gli ossi- e gli amino- azocomposti, che contengono o reagiscono come se contenessero realmente l'azogruppo, azocomposti la cui attività di reazione, per quanto riguarda il nucleo aromatico che contengono, è fortemente aumentata dalla presenza dei gruppi OH, OR, NH_2, NR_2, ecc., non un sol caso eccettuato, presentano questa elegante reazione.

È nota la tendenza degli ossiazocomposti aromatici ad assumere la forma enolica, che emerge tra l'altro nella trasformazione di alcuni N-acilderivati ottenuti dalla condensazione delle as-acilarilidrazine coi chinoni negli O-acilderivati corrispondenti [1] (acilderivati della forma enolica, cioè degli ossiazo-

---

[1] Prodotti di condensazione dell'1-2-naftochinone e del fenantrenchinone colle as-acilarilidrazine; vedi Auwers, A. *378*, 211 (1911).

composti) e si deve ammettere ora che dai fatti sperimentali assodati la costituzione degli ossiazocomposti liberi sia la stessa degli eteri (forma enolica), dimodochè costituirebbe una notevole eccezione il fatto che un ossiazocomposto (fenilazoantranol: forma enolica) possedesse una costituzione diversa da quella dell'etere metilico ottenuto direttamente da esso (N-metiletere: etere metilico della forma chetonica), ma pur limitandoci al caso del cosidetto fenilazoantranol (antrachinonfenilidrazone) è più semplice ammettere che questo composto, ottenuto tanto dalla fenilidrazina e dibromantrone, che per azione del cloruro di fenildiazonio sull'antranolato sodico, sia un chinonidrazone: perciò parla, oltre tutto, la facilità con cui viene scisso (idrolizzato) dalla soluzione eterea di acido nitrico analogamente al suo etere metilico, che è indubbiamente un N-metilderivato, in antrachinone e fenilidrazina. Questa reazione d'altronde avviene già, sebbene molto più lentamente, cogli acidi diluiti (abbastanza rapidamente coll'N-metiletere) ed è generale per tutti gli idrazoni che sono idrolizzati dagli acidi nell'idrazina e nel composto carbonilico corrispondenti, mentre non fu mai notata assolutamente cogli ossiazocomposti.

D'altra parte la copulazione del sale di diazonio coll'antranolato sodico è preceduta dalla formazione d'un prodotto intermedio labile in fiocchi gialli, come osservarono per primi Kaufler e Suchannek [1] che è probabilmente il sale di diazonio dell'antranol, ed è analogo ai casi osservati da Ponzio e da Dimroth [2] ammettere che questo composto intermedio si trasformi piuttosto in un idrazone che non in un azocomposto [3].

La soluzione di questo idrazone nell'idrato sodico alcoo-

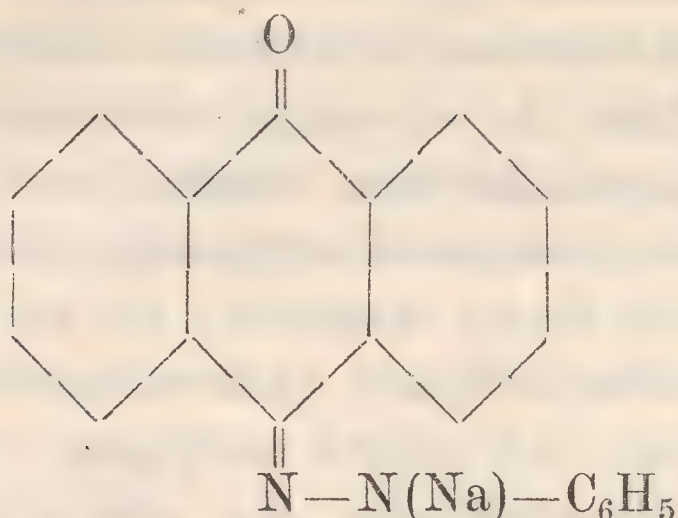
---

(1) Loco citato.

(2) G. *38*, I, 509, 526 (1908); G. *39*, I, 555, 635, 661; II, 535 (1909); G. *42*, I, 525; II, 55 (1912); G. *44*, I, 269 (1914); B. *40*, 2404, 4460 (1907); *41*, 4012 (1908).

(3) Non avverrebbe insomma in questo caso una vera copulazione con formazione di un ossiazocomposto, ma invece si produrrebbe in un primo tempo un sale di diazonio che per trasposizione intramolecolare darebbe luogo all'idrazone.

lico conterrà il sale sodico dell'antrachinonfenilidrazone della struttura

O

$N-N(Na)-C_6H_5$

contenente cioè l'atomo del metallo alcalino unito all'azoto, come Auwers (1) ammette per il sale sodico del cosidetto benzolazoacetil-acetone $CH_3CO-C[=N-N(Na)C_6H_5]-COCH_3$; questo sale sodico dell'antrachinonfenilidrazone, reagendo col solfato di metile, darà luogo all'N-etere, col cloruro di benzoile forse pure all'N-acilderivato, che nelle condizioni speciali in cui avviene la benzoilazione potrà forse trasformarsi nell'O-acilderivato. Benchè Meyer e Zahn abbiano tentato invano di stabilire, con un procedimento analogo a quello che permise a Willstätter e Veraguth (2) di trasformare l' N-benzoilderivato del chinonfenilidrazone nell'O-benzoilderivato del tautomero ossiazobenzol, la possibilità di trasformazione dell'N-benzoilderivato in O-derivato, non si può *a priori* escludere che tale trasformazione non possa avvenire per altra via.

L'O-benzoilderivato del fenilazoantranol è, come fanno notare Meyer e Zahn, di color rosso cupo con riflessi metallici: *il suo colore è più intenso che quello del presupposto ossiazocomposto* (3). Ora è noto che la sostituzione dell'idrogeno ossidrilico negli ossiazocomposti col benzoile ha per effetto di diminuire notevolmente la colorazione di questi, tanto che gli O-benzoilderivati sono talora soltanto gialli o di color giallo-arancio, mentre i corrispondenti ossiazocomposti sono intensamente colorati in rosso o in rosso-granato. Il fatto che la presenza del gruppo benzoile legato all'ossigeno è causa di un aumento notevole nell'intensità della colorazione si spiega sol-

---

(1) A. *378*, 251 (1911). (2) B. *40*, 1432 (1907). (3) A. *396*, 161 (1913).

tanto coll'ammettere nella benzoilazione il passaggio dalla chetoforma all'azoforma, e conferma dunque che mentre la forma azoica spetta al benzoilderivato, il composto di partenza (antrachinonfenilidrazone) va considerato come un chinonidrazone.

L'assenza di proprietà basiche spiccate nell'antrachinonfenilidrazone e nel suo etere metilico, la facilità colla quale questi composti anche alla temperatura ordinaria forniscono antrachinone, il fatto che alcune reazioni cosidette enoliche, per es. quella coll'acqua di bromo (colla quale si forma, per ossidazione della fenilidrazina prodottasi in un primo tempo, bromuro (o perbromuro) di fenildiazonio e dibromantrone), sono date dalle arilidrazine e probabilmente anche dagli idrazoni e perciò in questo caso esse non possono venir attribuite alla presenza dell'aggruppamento enolico, la mancanza assoluta della reazione di diazoscissione caratteristica degli azocomposti (reazione, che non ha il carattere di un'ossidazione, ma bensì di reazione in cui un gruppo (NO_2) ne sposta un altro (azogruppo) [verdrängungsreaktion]), tutte queste ragioni mi fanno considerare il composto ottenuto per azione della fenilidrazina sui derivati dell'antrachinone, e dei sali di diazonio sull'antranol, come il fenilidrazone dell'antrachinone, cioè la forma chetonica dei due desmotropi possibili, ascrivendo all'O-benzoilderivato soltanto la forma enolica azoica.

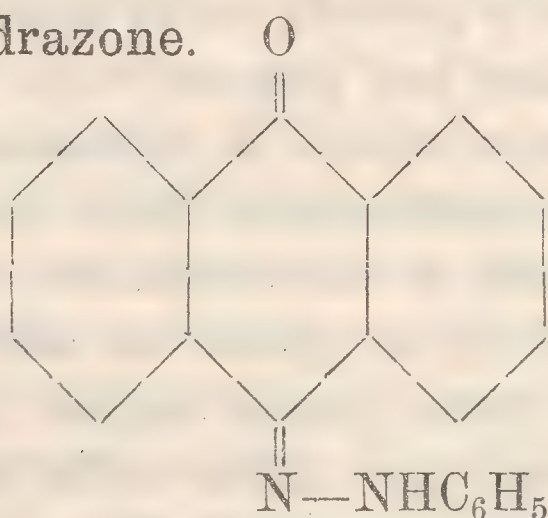
Benchè al Meyer spetti il merito grande di avere nella serie antracenica dimostrata l'esistenza in alcuni casi molto interessanti di entrambi i cheto-enoldesmotropi riducendo al caso di semplice isomeria [1] la tautomeria di parecchi derivati antracenici, mi permetto di dissentire da lui per quanto riguarda il caso del cosidetto benzolazoantranol in particolare e in generale il campo degli ossiazocomposti, poichè, se è vero che gli ossiazocomposti liberi, per cui viene ora generalmente ammessa la forma enolica, possono per la mobilità dell'atomo di idrogeno essere considerati in sommo grado come un gruppo di sostanze

---

[1] È noto che quando si riescono ad isolare le due forme di un composto tantomero, il caso va allora compreso nel campo dell'isomeria di struttura, ma di un'isomeria caratterizzata dalla straordinaria facilità colla quale i due isomeri scambievolmente possono venir trasformati l'uno nell'altro [Meyer und Jacobson, *Lehrbuch der organischen Chemie*, I, 120 (1907)].

tautomere, e gli eteri per la minor mobilità dell'alchile rispetto all'atomo di idrogeno debbono più tenacemente conservare l'azo-forma (forma enolica), si deve con tutta probabilità ammettere per entrambe queste serie di corpi la stessa struttura, per cui l'alchilazione nel campo degli ossiazocomposti, se non può fornire in modo assoluto, da quanto è stato detto prima, la chiave della costituzione di queste sostanze, deve però venir tenuta in gran conto, presentando gli ossiazocomposti e i loro eteri in tutti i casi numerosi esaminati finora senza eccezione quella caratteristica reazione degli azocorpi che è la diazoscissione.

Antrachinonfenilidrazone.

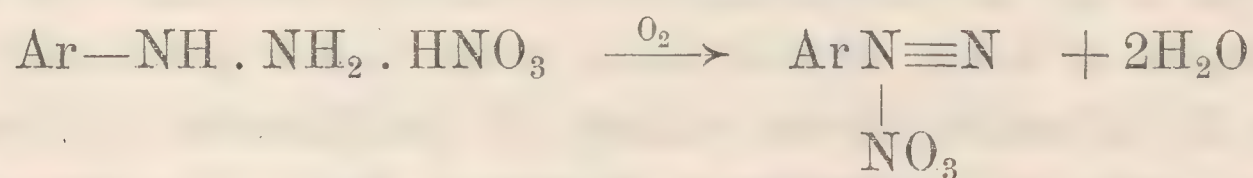
O
||
(formula di struttura dell'antrachinone)
||
$N—NHC_6H_5$

Preparai questo composto con ottimo rendimento col metodo di Kaufler e Suchannek [1] facendo agire il cloruro di fenildiazonio sul sale potassico dell'antranol. Cristallizzato da una miscela di cloroformio e alcool si presentava in aghetti di color rosso, fusibili a 182-183°.

Per azione dell'acido nitrico (D = 1,48) sciolto in etere, l'antrachinonfenilidrazone si decompone sempre in antrachinone e fenilidrazina: a seconda però delle condizioni in cui si opera, quest'ultima viene più o meno completamente ossidata in nitrato di fenildiazonio. In soluzione eterea e con buon raffreddamento in miscuglio frigorifero operando con piccole quantità di fenilidrazone (1 gr., ad esempio) si riesce a sottrarre quasi completamente l'idrazina dall'ossidazione dell'acido nitrico, tanto che si forma una quantità così piccola di sale di diazonio che si ottiene soltanto colorazione e non precipitato colla soluzione di β-naftol alcalina.

---

[1] B. *40*, 518 (1907).

Se si trattano con acido nitrico quantità più grandi di composto e non si ha estrema cura nel mantenere la temperatura al disotto di — 10°, allora le quantità di nitrato di fenildiazonio prodottesi vanno aumentando. Sciogliendo poi l'antrachinonfenilidrazone in cloroformio e facendo agire sulla soluzione cloroformica l'acido nitrico 1,48 sciolto in etere (soluzione a circa il 50 % di HNO_3), allora la quantità di nitrato di fenildiazonio che si forma è circa la metà di quella corrispondente alla quantità teorica di fenilidrazina che dovrebbe prodursi per idrolisi. In tutti i casi si forma poi una base estremamente autoossidabile che riduce il liquido di Fehling svolgendo azoto e il cui cloridrato è solubilissimo nell'acido cloridrico concentrato. La soluzione cloridrica si colora in breve in rosso-violetto intenso. Non potei per ora caratterizzare tale base, data la sua instabilità (¹). Che realmente il nitrato di fenilidrazina possa venir ossidato a nitrato di fenildiazonio in determinate condizioni in presenza di antrachinone è risultato da prove sperimentali eseguite, dalle quali posso arguire che in presenza di quantità sufficienti di antrachinone (pare che senza di esso la reazione non avvenga) è possibile passare dai nitrati delle arilidrazine ai nitrati di arildiazonio secondo lo schema:

$$Ar-NH.NH_2.HNO_3 \xrightarrow{O_2} Ar\underset{\displaystyle NO_3}{\underset{|}{N}}{\equiv}N + 2H_2O$$

I. Gr. 1 di antrachinonfenilidrazone sospesi in 10 cc. di etere vennero trattati dopo accurato raffreddamento in miscuglio frigorifero con 20 cc. di soluzione eterea di acido nitrico 1,48 al 50 % raffreddando energicamente. Dopo pochi minuti avviene istantaneamente la reazione che è accompagnata da sviluppo di pochissimo gas. Si diluisce fortemente con etere ben raffreddato, si agita bene e si filtra: la porzione insolubile è costituita esclusivamente da antrachinone (gr. 0,6) che cristallizzato dall'acido acetico fonde già a 282-283°.

(¹) Si notò pure la presenza della diazobenzolimide, riconoscibile facilmente all'odore. Questa si produsse molto probabilmente per la seguente reazione:

$$C_6H_5N_2NO_3 + C_6H_5NH.NH_2.HNO_3 = C_6H_5N_3 + C_6H_5NH_2.HNO_3 + HNO_3.$$

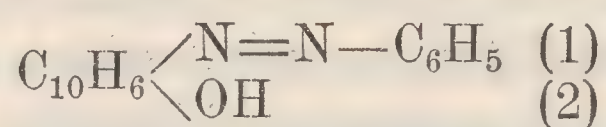
Trattando con acqua il precipitato insolubile in etere, si ottiene una soluzione che con soluzione alcalina di β-naftol dà appena colorazione rossa (traccie piccolissime di nitrato di fenildiazonio). Il filtrato etereo contiene, assieme a piccole quantità di antrachinone, i nitrati di fenilidrazina in piccola quantità e di una base instabile che si colora intensamente all'aria, che riduce il liquido di Fehling svolgendo azoto, base che non si potè purificare appunto per la sua instabilità.

II. 2 gr. di antrachinonfenilidrazone sospeso in 20 cc. di etere vennero trattati raffreddando energicamente in miscuglio con 40 cc. di soluzione eterea di acido nitrico al 50 %: si ottennero nella porzione insolubile in etere soltanto traccie di nitrato di fenildiazonio e gr. 1,1 di antrachinone (teoria gr. 1,4): il liquido etereo acido venne trattato con acqua, e l'estratto acquoso neutralizzato con idrato sodico al 30 % venne esaurito con etere: l'estratto etereo lasciò alla distillazione un residuo che accanto alla fenilidrazina (caratterizzata preparandone il derivato dell'aldeide benzoica P. F. 155-156°), conteneva una base energica che non reagiva coll'aldeide benzoica e che per le sue proprietà si dimostrava identica a quella isolata nella prova precedente.

III. 4 gr. di antrachinonfenilidrazone trattato con soluzione eterea di acido nitrico come nelle prove precedenti diedero gr. 2,3 di antrachinone, nitrato di fenildiazonio in quantità più forte proporzionalmente e la stessa base riscontrata nei saggi precedenti accanto a un po' di fenilidrazina.

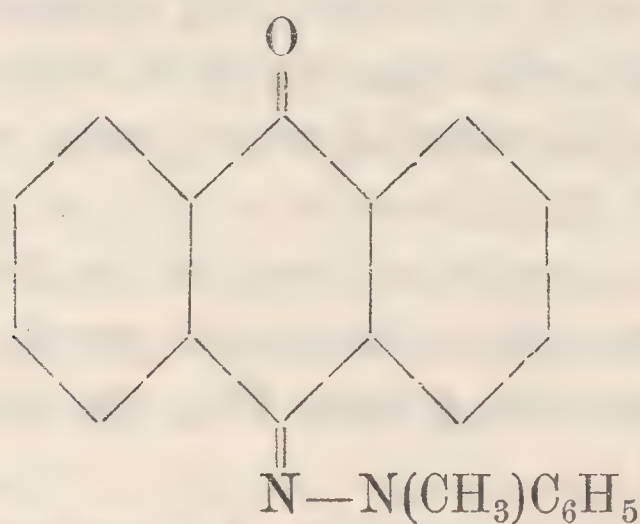
IV. 5 gr. di antrachinonfenilidrazone si sciolgono in 120 cc. di cloroformio e la soluzione ben raffreddata si tratta con 60 cc. di etere contenenti il 50 % di HNO_3 ($O = 1,48$): incomincia subito la cristallizzazione dell'antrachinone (gr. 3,2 teoria gr. 3,5) che è completa dopo pochi minuti e si sviluppano soltanto piccole quantità di gas. Si diluisce fortemente con etere, si agita e si filtra. Sul filtro, assieme all'antrachinone, si riscontra una quantità abbondante di nitrato di fenildiazonio, poichè infatti da esso copulato con soluzione alcalina di β-naftol si ottengono gr. 2,1 di fenilazoβnaftol. Il filtrato etereo contiene soltanto piccole quantità di fenilidrazina e dell'altra base già riscontrata nei saggi precedenti e tenui quantità di antrachinone.

V. Gr. 1,81 di fenilidrazina e gr. 3,49 di antrachinone sciolti in 120 cc. di cloroformio vennero trattati con 60 cc. di soluzione eterea di acido nitrico (1,48) al 50 % e si lasciò la prova in acqua tiepida per circa mezz'ora: si svolsero piccole quantità di gas, e diluendo con etere si ottenne un precipitato che, raccolto, venne trattato con acqua: la soluzione acquosa diede un precipitato rosso con soluzione alcalina di β-naftol, che cristallizzato dall'alcool, fornì aghi di color rosso-vivo, fusibili a 132-133°, era cioè costituito da fenilazoβnaftol,

$$C_{10}H_6\langle\begin{matrix} N{=}N{-}C_6H_5 & (1) \\ OH & (2) \end{matrix}$$

Nelle stesse condizioni, ma senza la presenza dell'antrachinone, non si ottennero nemmeno traccie di nitrato di fenildiazonio.

Etere metilico dell'antrachinonfenilidrazone.

O

$N{-}N(CH_3)C_6H_5$

L'etere metilico si ottiene per azione del solfato di metile sulla soluzione dell'antrachinonfenilidrazone in soda caustica al 30 % ottenuta aggiungendo pochi cc. di alcool etilico. Cristallizzato dall'alcool metilico e poi dall'alcool assoluto, è costituito da cristalli prismatici lucenti di color rosso vivo, fusibili a 147-148° secondo i dati di Meyer e Zahn [1].

Se si tratta una soluzione eterea dell'etere metilico con soluzione eterea di acido nitrico 1,48 al 50 % in eccesso e si lascia a sè per poco tempo a temperatura ordinaria, si separa una sostanza cristallizzata in lunghi aghi, che raccolta e ricristallizzata dall'acido acetico glaciale si caratterizza per antra-

---

(1) A. *396*, 164, 165 (1913).

chinone per le reazioni a cui dà luogo (riduzione con polvere di zinco e idrato sodico) e per il punto di fusione 284-285°.

Una prova eseguita con una miscela della sostanza e di antrachinone puro fonde a 283-284°.

Il liquido filtrato contenente un forte eccesso di acido nitrico viene trattato con acqua, la quale scioglie l'acido nitrico in eccesso e le sostanze basiche presenti nella soluzione eterea: infatti neutralizzando la soluzione acquosa acida con idrato sodico al 30 °/₀ ed estraendo con etere, dopo distillazione del solvente, si ottiene una miscela di basi, da cui si riesce a separare della metilfenilidrazina asimmetrica che viene caratterizzata preparandone il composto coll'aldeide benzoica $C_6H_5CH=N—N(CH_3)C_6H_5$, fusibile secondo i dati che si trovano nella letteratura a 102-103°.

Colla metilfenilidrazina asimmetrica si forma in piccola quantità una base autoossidabile, il cui cloridrato è solubilissimo anche in acido cloridrico concentrato, che è probabilmente analoga a quella ottenuta dall'antrachinonfenilidrazone.

Nell'azione della soluzione eterea di acido nitrico sull'etere metilico dell'antrachinonfenilidrazone non si forma neppure traccia di nitrato di fenildiazonio, e ciò si comprende agevolmente, poichè non è possibile l'ossidazione del nitrato di metilfenilidrazina in nitrato di fenildiazonio: perciò occorrerebbe una primaria eliminazione del gruppo CH_3 che aderisce invece fortemente all'azoto.

Se si tratta l'etere metilico dell'antrachinonfenilidrazone con acido nitrico sciolto in etere in eccesso, ma si ha cura di raffreddare fortemente, si nota dopo pochi minuti separazione di una sostanza cristallina di color giallo-rosso: il liquido etereo si decolora gradatamente senza che avvenga sviluppo di gas e si passa da un color rosso-vivo intenso a un colore giallo-rossastro pallido. Non si forma neppure in questo caso nitrato di fenildiazonio.

La sostanza cristallina separatasi, pressochè insolubile in alcool e in etere freddi, si tratta con cloroformio che la scioglie abbondantemente a caldo: la soluzione, per aggiunta di alcool, lascia cristallizzare un composto in fogliette di color rosso-arancio con riflesso dorato, fusibili a 240-241° con decomposi-

zione, che costituiscono probabilmente un mononitroderivato dell'etere metilico.

Gr. 0,1176 di sostanza fornirono cc. 12 di azoto ($H_0=729,411$ $t = 13°$), ossia gr. 0,013678.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{21}H_{15}N_3O_3$
Azoto	11,63	11,76

Solubile nel cloroformio, si scioglie pochissimo nell'alcool bollente; è discretamente solubile specialmente a caldo in acido acetico e benzolo, pressochè insolubile in ligroina. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rosso-bruna e pare che per diluizione della soluzione riprecipiti inalterato. È insolubile negli idrati alcalini anche in presenza di alcool etilico o di acetone, il che conferma che si tratti di un derivato dell'etere e non dell'antrachinonfenilidrazone, il quale, come è noto, è solubile facilmente nelle soluzioni degli idrati alcalini alcooliche o acetoniche con intensa colorazione bleu-violetta.

La sostanza fusibile a 240-241°, scaldata lungamente all'ebollizione con acido cloridrico concentrato e un po' di alcool, viene idrolizzata completamente in antrachinone fusibile, dopo cristallizzazione dall'acido acetico, a 283-285° e in una sostanza basica che si ottiene filtrando il liquido acido bollente dall'antrachinone e trattando il filtrato con ammoniaca. La base, così liberata dal cloridrato, cristallizza in aghi gialli ben sviluppati: raccolta e ricristallizzata dall'alcool, forma aghi prismatici lucenti e trasparenti di color giallo, fusibili a 142°, i quali però diventano dopo poche ore opachi in seguito probabilmente ad un cambiamento di forma che subiscono e che si manifesta anche nell'oscurità e in contatto delle acque madri alcooliche, da cui i cristalli provengono.

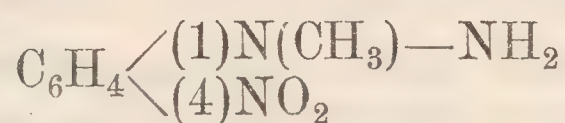
La base riduce a freddo il liquido di Fehling e il nitrato di argento ammoniacale, ha il comportamento di un'idrazina e specialmente di una nitrofenilidrazina: si tratta probabilmente di una nitrofenilmetilidrazina asimmetrica $NO_2-C_6H_4-N(CH_3)-NH_2$, come è provato anche dall'analisi.

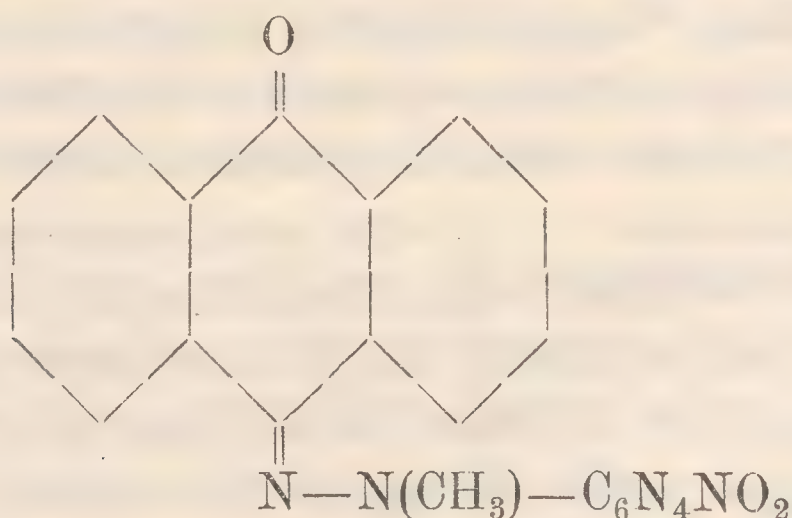
Gr. 0,1131 di sostanza diedero cc. 25,1 di azoto ($H_0=732,748$ $t = 16°$), ossia gr. 0,028387.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_7H_9N_3O_2$
Azoto	25,09	25,14

Data la piccola quantità di sostanza, non ho potuto determinare la posizione del nitrogruppo, che si sarebbe potuta stabilire facilmente per riduzione; dal derivato della fenilendiamina ottenuto sarebbe immediatamente risultata la costituzione della nitrofenilmetilidrazina non ancora nota e che, dato il punto di fusione relativamente elevato, può, credo senza errare, venir considerata come la p-nitrofenilmetilidrazina asimmetrica

$$C_6H_4 \left< \begin{matrix} (1)N(CH_3)-NH_2 \\ (4)NO_2 \end{matrix} \right.$$

L'idrolisi del nitroderivato dell'etere metilico dell'antrachinonfenilidrazone in antrachinone e nitrofenilmetilidrazina dimostra in esso indubbiamente la presenza del nitrogruppo nel nucleo benzenico e non nell'antracenico, per cui possiamo al nitroderivato fusibile a 240-241° attribuire la costituzione

O
‖
(anthracene ring skeleton)
‖
$N-N(CH_3)-C_6N_4NO_2$

La formazione di questo composto contenente il gruppo NO_2 nel nucleo aromatico per azione dell'acido nitrico sull'etere metilico dell'antrachinonfenilidrazone è una nuova prova della maggior resistenza che in generale gli aggruppamenti chinonici presentano all'azione dell'acido nitrico rispetto al nucleo aromatico.

Torino, Istituto Chimico della R. Università.
Marzo 1915.

Figure di corrosione e solidi di soluzione del quarzo ottenuti con acqua ad alta temperatura.

Nota dell'Ing. Dott. GABRIELE LINCIO
Libero Docente di Mineralogia alla R. Università di Torino

SOMMARIO: Condizioni, materiale e risultati dell'esperienza. — Studio delle figure di corrosione e dei solidi di soluzione. — Osservazioni comparative e conclusione.

Per le prove di funzionamento e di resistenza d'un apparecchio nuovo del tipo G. Spezia intrapresi il 25 marzo 1914, nel laboratorio del signor Prof. V. Goldschmidt (Heidelberg), un'esperienza intorno alla solubilità del quarzo in acqua pura ad alta temperatura. Tale esperienza durò 24 giorni, e, provando l'ottimo funzionamento dell'apparecchio, mi diede anche interessanti risultati, che meritano di venir riferiti.

Mi faccio qui un dovere di render vivissime grazie al signor Prof. V. Goldschmidt, che tanto gentilmente si prestò con la nota sua liberalità a tale mia intrapresa. Per quanto riguarda la descrizione dell'autoclave ed i criteri seguiti nello studio dei solidi di soluzione, ecc., rinvio il lettore ad un mio precedente lavoro: *Auflösungs- und Wachstumskörper des Quarzes aus unter Druck erhitzter wässeriger Natriumtetraborat-Lösung* (1).

Condizioni d'esperienza. — Come già dissi, la durata dell'esperienza fu di 24 giorni.

La temperatura nell'autoclave per l'ambiente superiore riscaldato raggiunse i 330° ± 15° C. e per l'inferiore raffreddato i 150° ± 10° C.

(1) GABRIEL LINCIO, *Beiträge zur Krystallographie und Mineralogie, herausgegeben von V. Goldschmidt*, Band I, Heft 3, 1914. Editore C. Winter, Heidelberg.

La pressione oscillò intorno a 150 atmosfere.

Per **materiale d'esperienza** vennero usati alcune sfere e cristalli naturali di quarzo incoloro e limpidissimo. Tale materiale venne disposto nel cilindro interno dell'autoclave sopra un sostegno di filo d'argento pescante interamente in acqua distillata. Le sfere venivano a trovarsi l'una sopra l'altra, tutte orientate con l'asse *c* verticale, sui vari ripiani del sostegno, formati da triangoletti di filo d'argento; mentre i cristalli, pure orientati nello stesso modo, erano fissati alle sbarrette verticali del sostegno.

Il quarzo venne scelto possibilmente omogeneo, cioè libero da geminazioni o da aggregazioni e venne anche esaminato per via ottica. Con tutto ciò io posi in alto l'una sotto l'altra tre sfere di quarzo levogiro ed in basso due sfere destrogire, affinchè, in caso che l'una o l'altra sfera dopo l'esperienza mostrasse fessure o anomalie, potesse venir studiata e controllata con l'aiuto delle altre sfere normali. I cristalli di quarzo originali presentavano una distribuzione molto regolare delle grandi facce *r* e delle piccole ρ dei romboedri, delle facce *s* ed uno sviluppo delle facce del prisma *b* con forte striatura trasversale. Essendo essi poi alcuni molto lunghi ed altri corti, così vennero durante l'esperienza, al pari delle sfere, a trovarsi in livelli di più alta o di più bassa temperatura.

Risultati dell'esperienza. — Dopo aver tenuto l'apparecchio per 24 giorni alla temperatura indicata, lo raffreddai celeremente ed, apertolo, trovai che delle cinque sfere di quarzo la prima, al livello superiore, era stata corrosa in modo ben marcato, la seconda un po' meno e la terza in modo ancora visibile, mentre le due dei livelli inferiori non presentavano quasi traccia di corrosione. Inoltre la prima sfera svelò plaghe di irregolare associazione e solo la seconda e la terza si mostrarono ben individuate. Così pure i cristalli naturali di quarzo erano stati corrosi e cioè i più lunghi in modo più evidente, perchè s'erano trovati con le loro facce terminali a livelli di maggior calore, mentre i più corti non mostravano quasi nessuna traccia dell'azione corrosiva dell'acqua.

I solidi di soluzione, dato il loro stadio iniziale di corrosione, si presentano intaccati solo lievemente o, per dirlo in

modo un po' triviale, ma espressivo, appaiono come lambiti a mo' di cristalli di sale o di zucchero, hanno perso ben poco della loro trasparenza iniziale e, per quanto essi mostrino alla loro superficie plaghe rilucenti ed altre appannate, tali plaghe si differenziano di poco tra loro.

Io ho cercato di disegnare con tutta fedeltà possibile il più regolare dei tre solidi di soluzione levogiri ottenuti. Le figure 1 e 2 della nostra tavola rappresentano un tale disegno eseguito in proiezione verticale sulla faccia della base teorica e su una faccia del prisma b_{I}.

L'abito originale dei cristalli corrosi vien riprodotto nella stessa tavola dalla figura 3. In essa le facce r, ρ, b ed s d'un cristallo levogiro figurano sviluppate nel piano del disegno mantenendo il valore dei loro angoli piani e le figure concave di corrosione vi vennero segnate coi loro contorni superficiali in giusta orientazione. Le relative dimensioni delle figure di corrosione sono date dai tre fotogrammi riprodotti dalle figure 5, 6 e 7 della stessa tavola, che hanno un ingrandimento lineare di 86 volte.

La figura 5 riproduce la forma e la posizione delle figure di corrosione sulla faccia r. Detta faccia mostra alla striscia orizzontale nera lo spigolo $r\,b$. Le figure di corrosione sono sulla faccia r più grandi e non così fitte come sulla faccia ρ.

La figura 6 riproduce appunto la faccia ρ con le sue figure di corrosione e volge alla striscia nera, all'angolo destro in alto, lo spigolo $\rho\,r$. Finalmente la figura 7 ci mostra le piccole e scarse figure di corrosione sulla faccia $+b$. Esse sono caratteristiche per la loro forma a navetta, come quella delle macchine da cucire. In alto al confine con la striscia nera orizzontale, nella quale si discernono ancora le figure triangolari, si trova lo spigolo $b\,r$. Sui cristalli, dopo l'esperienza, le facce s apparivano solo appannate. Le pareti delle figure concave di corrosione sulle facce r e ρ sono curve e tondeggianti.

Per le facce r (vedi tavola fig. 3 e la proiezione stereografica fig. 4) dette pareti cadono nelle zone del tipo $r_{\mathrm{I}}\,b_{\mathrm{I}}\,\bar{\rho}_{\mathrm{III}}$, $r_{\mathrm{I}}\,\rho_{\mathrm{I}}$ ed $r_{\mathrm{I}}\,\rho_{\mathrm{II}}$.

Per le facce ρ le une s'accostano alla zona del tipo $\rho_{\mathrm{I}}\,b_{\mathrm{VI}}\,\bar{r}_{\mathrm{II}}$ cioè la base dei triangoletti rovesciati presenta una leggera inclinazione a sinistra, visibile in fig. 6 ed un po' esagerata nello

schizzo fig. 3, mentre le altre coincidono con le zone del tipo $\rho_I\, r_{III}$ e $\rho_I\, r_I$.

Le figure concave di corrosione della faccia di prisma b, p. es. b_I, volgono la parte inclinata ed appuntita verso il canto e lo spigolo dove si trovano le facce s e le facce trapezoedriche. Essendo su detta faccia le pareti delle figure di corrosione, al par di queste, molto piccole, non potei mediante misure stabilire con quali zone esse coincidano; però pare evidente che esse in una direzione tendano alla zona del tipo $\rho_I\, s_{II}\, y\, b_I$ e nelle altre direzioni coincidano con le zone del tipo $r_I\, b_I\, \bar{\rho}_{III}$ e $b_{VI}\, a_{II}\, b_I$.

Il fondo delle figure triangolari è parallelo alle facce r e ρ, su cui esse si presentano.

La posizione delle forme r e ρ sul **solido di soluzione** venne stabilita mediante l'identificazione delle figure concave di corrosione, le quali si presentano su di esso allo stesso modo che sui cristalli corrosi contemporaneamente.

Non ritenni opportuno, per ragioni di semplicità e di chiarezza, di apporre i contorni delle figure di corrosione anche ai disegni del solido di soluzione figg. 1 e 2 della tavola, perchè esse risaltano più caratteristicamente in fig. 3.

Le plaghe meno rilucenti, appannate, del solido di soluzione vennero nelle figg. 1 e 2 rese evidenti con punteggiamento. La apparenza appannata, opaca, della superficie del solido di soluzione viene causata dalla presenza di fini e fitte figure convesse di corrosione.

L'effigie del solido di soluzione viene così caratterizzata dai seguenti principali elementi:

a) Dagli spigoli e dai vertici di soluzione.

b) Dalle plaghe rilucenti.

c) Dalle plaghe opache o semi-opache.

Veniamo ora con l'aiuto delle figure della tavola a trattare di questi elementi superficiali del solido di soluzione.

a) Gli spigoli ed i vertici di soluzione. — Anzitutto vanno considerati gli spigoli ed i vertici della plaga esagonale, che si stende attorno ai poli nord e sud. Gli spigoli seguono la direzione delle zone del tipo $r_I\, \rho_{II}$ e $r_I\, \rho_I$. I vertici segnano la posizione delle facce r e ρ. Poi vengono gli spigoli che seguono la direzione della zona del tipo $r_I\, b_I\, \bar{\rho}_{III}$. Questi ultimi, data la fase ancor iniziale del corpo di soluzione, non mostrano un'ac-

certabile deviazione dalla zona indicata. Esperienze di maggior durata permetteranno di constatare, se con una corrosione più profonda si produrrà una tale deviazione. Qui faccio soltanto notare che nella mia esperienza con soluzione acquosa di tetraborato sodico ottenni su sfere di quarzo spigoli che mostravano una marcata deviazione dalla detta zona del tipo $r_{I}\ b_{I}\ \bar{\rho}_{III}$.

Agli spigoli di soluzione aggrego pure i contorni dei sei spazi scudiformi, che si stendono largamente attorno alla posizione delle facce ρ. Tali contorni, segnati in figg. 1 e 2 a punto e tratto, appaiono sul solido di soluzione come appena segnati e finamente dentellati. La loro forma ed importanza non potrà venir stabilita più esattamente che in fasi di corrosione più avanzata.

Sul solido di soluzione le figure concave di corrosione giacciono direttamente attorno alla posizione delle facce r e ρ, cioè ai vertici della plaga esagonale, sparpagliate invece a mo' di alone attorno alla posizione della faccia b. Presso le facce $+ b$, quelle che si trovano sotto r del cristallo orientato, si scorge a sinistra un prolungamento dell'alone diagonalmente verso l'alto, pel fatto che il cristallo di quarzo, che ci diede il solido di soluzione, è levogiro.

Tali tipiche figure concave di corrosione vanno considerate quali precessorii di corrosione, esse scompaiono man mano che il solido di soluzione s'avvia verso il suo sviluppo finale. In tale stadio esso vien denominato solido finale di soluzione.

b) Le plaghe rilucenti. — Qui appartengono i sei spazi scudiformi, che si stendono attorno alle facce ρ. Essi sono relativamente lucidi e presentano solo poche e minutissime figure convesse di corrosione.

Anche nella diretta prossimità degli spigoli principali di soluzione, il solido è ben rilucente.

Poi, come si vede in fig. 2, vi sono ancora i tre spazii che si stendono sull'equatore verso il basso e verso l'alto e si trovano alla sinistra della zona del tipo $r_{I}\ b_{I}\ \bar{\rho}_{III}$ avendo come punto centrale la posizione del prisma teorico a_{l}. In tali spazii i due canti, che si trovano sull'equatore l'un l'altro diametralmente opposti, coincidono con la posizione delle facce del tipo $b_{I}\ b_{VI}$. I tre spazii sono delimitati dai contorni degli spazii scudiformi del tipo ρ_{I} e $\bar{\rho}_{III}$ e dai lati più lunghi dei due vicini spazi trian-

golari opposti punteggiati, confinanti con la posizione delle facce del tipo r_I e $\bar{r}_{II}$. Nel mezzo di detti spazii, che rammentano la forma di parallelogramma, si scorgono finissime prominenze lineari parallele tra loro ed aventi la direzione nord-sud ed altre, che si incrociano con le prime, aventi la direzione est-ovest. Le due direzioni coincidono così con le zone principali del tipo s_{lI} s_{rII} e b_l a_{lI} b_{VI}. Il significato dei segni s_{lI} e s_{rII} è ovvio: s_{lI} e s_{rII} sono le facce s a sinistra di r_I e rispettivamente a destra di r_{II}, ciò che è indicato dalla proiezione fig. 4.

c) Le plaghe opache o semi-opache. — Questi spazii portano figure convesse di corrosione.

Semi-opachi sono i due spazii a mo' di stella a tre raggi, delimitati in parte dall'esagono delle regioni polari e dai contorni degli spazii scudiformi del tipo ρ_I, ρ_{II} e ρ_{III}. Vi si scorgono minutissime e fitte figure convesse appuntite.

Opachi sono i sei spazii triangolari punteggiati in figg. 1 e 2. Il loro lato più lungo s'accosta alla zona del tipo b_I y_I s_{lI} ρ_I, gli altri due coincidono più o meno con le zone principali del tipo ρ_I r_I e r_I b_I. Opachi sono pure i tre spazii fusiformi inclinati, che s'accostano con le loro punte alle posizioni delle facce del tipo r_I e $\bar{r}_{III}$ ed hanno per punto centrale la posizione delle facce a_r. Nelle figure 1 e 2 appaiono essi pure punteggiati e si trovano subito a destra della zona del tipo r_I b_I $\bar{\rho}_{III}$. Detti spazii portano figure convesse di corrosione, le quali attorno alla posizione di a_r diventano fusiformi od ellittiche, con l'asse più lungo in direzione della zona del tipo b_I a_{rI} b_{II}. Queste figure ricordano le figure ellittiche di prerosione naturale del quarzo di Carrara. Le figure convesse ellittiche giacenti attorno ad a_r sono più fitte ed elevate delle prominenze lineari incrociate attorno alla posizione di a_l. Questo fatto ci svela una differente resistenza all'azione della corrosione dell'acqua nelle direzioni a_r ed a_l, ciò che è stato osservato pure in natura, p. es. sul quarzo di Carrara.

b e *c)* La distinzione fra plaghe rilucenti ed opache è qui stata messa particolarmente in evidenza, perchè il fatto che una faccia o superficie è liscia, rilucente e porta figure concave di corrosione, mentre un'altra è rugosa opaca e porta figure convesse di corrosione, nel primo caso significa che le faccette delle figure concave di corrosione hanno una velocità di soluzione

maggiore di quella della faccia o superficie del cristallo che le porta, così che l'azione principale del liquido corrodente si riduce ad alcuni punti e la superficie originale in varie posizioni si presenta ancor quasi non intaccata; nel secondo caso invece attesta che la superficie che porta figure convesse di corrosione possiede una maggior velocità di soluzione che non le altre superficii portanti figure concave ed in causa di ciò la superficie vien sciolta più uniformemente nella sua estensione e diventa rugosa ed opaca.

Mi sia ora permesso di riportare alcune **misure di spessore del solido di soluzione**, di quello cioè fra i tre ottenuti che si presenta in dimensioni maggiori e privo di anomalie. È cosa per sè comprensibile che i dati di misura qui riferiti non possano per ora venir usati per disquisizioni fondamentali. A tale scopo sarebbero necessarie misure su una serie di solidi di soluzione.

La sfera originale di quarzo presentava un diametro di cm. $1,826 \pm 0,006$.

Le misure per alcuni diametri più importanti del solido di soluzione sono le seguenti:

	$b : \bar{b}$	$a : \bar{a}$	$c : \bar{c}$	$r : \bar{r}$	$\rho : \bar{\rho}$	$x : \bar{x}$
cm.	$1,825 \pm 0,005$	$1,810 \pm 0,007$	$1,789 \pm 0,001$	$1,816 \pm 0,004$	$1,816 \pm 0,006$	$1,811 \pm 0,009$
Ridotto:	10,00	9,92	9,80	9,95		9,92

La posizione del punto x corrisponde all'incirca a quella della faccia $(11\bar{2}2)$. Esso si trova sul solido di soluzione nel mezzo dello spigolo del tipo $r_I \; \rho_I$.

Osservazioni comparative.

Dopo d'aver esposti i risultati ottenuti con la nostra esperienza, passiamo brevemente in rassegna quanto si conosceva precedentemente e, stabilendo alcuni confronti tra i fenomeni

naturali ed i risultati artificiali, cerchiamo di porre in evidenza l'importanza dell'azione dell'acqua quale mezzo naturale di corrosione e di rigenerazione del quarzo.

Già G. Spezia (1) nell'anno 1895 fece un'esperienza della durata di 15 giorni intorno all'azione dell'acqua sul quarzo ad una temperatura dai 230°-240° C. e ad una pressione corrispondente alla tensione massimale del vapor d'acqua. A tale scopo egli impiegò una lastrina di cristallo di rocca, tagliata parallelamente all'asse principale e ben levigata. Dopo l'esperienza trovò, e riprodusse fotograficamente, figure concave di corrosione simili a quelle da noi osservate sulle facce del prisma *b*. Di tali figure di corrosione alcune sono ancora nettamente triangolari, altre hanno assunta la forma tipica a navetta. Spezia non determinò se il quarzo fosse levogiro o destrogiro, egli scrisse solo che " la superficie della lastra rappresentata è parallela all'asse principale e la maggior lunghezza delle singole figure di corrosione è normale ad esso „. Così pure l'autore non indica l'ingrandimento della fotografia delle figure di corrosione.

In altro lavoro lo Spezia (2) parla di un cristallo di quarzo, tenuto nell'acqua per 15 giorni alla temperatura da 320°-340°, il quale ad esperienza finita mostrava sulle facce dei romboedri figure di corrosione in forma di incavi triangolari. Questi incavi triangolari sono ben visibili (con 1-$1^1/_2$ mm. di lato) in una figura fotografica con ingrandimento di circa 7 diametri.

Dal che si può per confronto conchiudere, che nell'esperienza, da noi eseguita tra i limiti di 150°-330° C., i cristalli che mostrano le figure di corrosione, si sieno trovati in livello di temperatura molto al di sotto di 340° C. Le nostre figure 5, 6 e 7 della tavola hanno infatti un ingrandimento di 86 volte.

Dato il differente spessore del metallo dell'autoclave, da noi usato nella nostra esperienza, data cioè una differente sezione nei diversi livelli di calore, non si può fare un calcolo attendibile del calore interno, discendente da 330° a 150° C., per le diverse altezze.

---

(1) G. Spezia, *La pressione nell'azione dell'acqua sul quarzo*, " Atti R. Accademia Sc. Torino „, vol. XXXI, 1895-1896.

(2) G. Spezia, *Esperienze sul quarzo*, " Atti R. Acc. Sc. Torino „, volume XXXIII, 1897-1898.

Per la forma dell'autoclave vedi la figura nel testo del lavoro citato a piè di pag. 1 della presente pubblicazione.

Nel suddetto esperimento Spezia trovò che la solubilità del quarzo nell'acqua è molto maggiore in direzione dell'asse c, che non nella direzione normale ad esso.

Così noi abbiamo le prove dell'azione esercitata dall'acqua pura sul quarzo a temperature di 235° e di 330° C. per la durata di 15 giorni, ciò che venne controllato dalla nostra esperienza in autoclave. In tale apparecchio, che aveva come limiti di azione 150° e 330° C. si manifestò in 24 giorni l'azione dell'acqua sul quarzo in livelli di probabile temperatura tra i 200° ed i 300° C. Al disotto dei 200° l'azione dell'acqua sul quarzo per l'indicata durata di esperienza dovrebbe essere quasi nulla.

Nelle sopraindicate esperienze il tempo fu troppo breve per dar risultati sintetici, di rigenerazione del quarzo.

Anche J. Königsberger e W. J. Müller (1) intrapresero nell'anno 1906 un'esperienza intorno all'azione dell'acqua sul quarzo ad alta temperatura.

Cristalli di quarzo vennero riscaldati per 24 ore in 40 cmc. d'acqua pura alla temperatura di 350° C. Dopo l'esperienza venne notata una debole corrosione sulle facce dei romboedri r e ρ. Parallelamente a tali facce erano stati sciolti strati di minimo spessore, cioè di circa $\frac{1}{20}$ di mm. Sulle facce di prisma non si scorgeva traccia di corrosione.

Gli Autori conchiudono, che il quarzo in acqua pura anche ad alte temperature è solubile solo in quantità molto piccole.

Con altre esperienze detti Autori provarono che il quarzo, in presenza di soluzioni di carbonati e cloruri alcalini e di acido libero, rappresenta fino a 420° la forma stabile dell'acido silicico.

Nel caso nostro noi possiamo ritenere che, scaldando il quarzo a temperatura di 330°-340° C. in acqua pura, si formi silice colloidale. Una parte di essa rimane in soluzione. Riscaldando la silice colloidale per lungo tempo, per più settimane, essa passa a forme più stabili, si trasforma in anidride, quarzo e tridimite.

(1) J. Königsberger und W. J. Müller, *Versuche über die Bildung von Quarz und Silikaten*, " Centralblatt f. Min. ", 1906, pagg. 339-353.

Si viene così ad avere una disidratazione di soluzioni colloidali. Che tale processo venga facilitato da agenti mineralizzatori è cosa nota: essi avviano la formazione di prodotti stabili cristallini. Con ciò noi vediamo che nelle dette circostanze la rigenerazione del quarzo in acqua pura è possibile.

Ma, secondo Königsberger-Müller, il quarzo dovrebbe formarsi nella massima parte per raffreddamento, in seguito a spostamento dell'equilibrio stabile di reazione. Tale spostamento viene determinato dal fatto che l'acido silicico perde fortemente di acidità col calar della temperatura. Ciò vale p. es. per l'equilibrio fra acido silicico, idrato alcalino ed un acido debole (acido carbonico, acido borico, ecc.). Ad alta temperatura, pel fatto che l'acidità dell'acido silicico col crescere della temperatura cresce più rapidamente che quella degli altri acidi deboli presenti, si formerebbe in parte un silicato alcalino solubile in acqua ed anche p. es. acido carbonico libero: abbassandosi la temperatura verrebbe invece eliminata silice e precipitata nella sua forma stabile di quarzo.

Da quanto suesposto noi possiamo ritenere che nella nostra esperienza (1911), basata sulla solubilità e ricostituibilità del quarzo in soluzione acquosa di tetraborato sodico ad alta temperatura (l. c. pag. 1 della presente pubblicazione), si tratti con probabilità pure di spostamento d'equilibrio tra acido silicico, idrato alcalino ed acido borico.

Dopo aver così esaminato i risultati ottenuti nel campo sperimentale, ci pare molto naturale la domanda:

“ **Non si riscontrano in natura indizi di corrosione e di rigenerazione del quarzo per azione dell'acqua?** „

Giacchè noi con l'esperienza non abbiamo ottenuto se non risultati di corrosione del quarzo, così noi, stabilendo dei confronti tra questi ed i fenomeni naturali, non possiamo accertare direttamente fuorchè indizi di corrosione.

Io ho esaminato attentamente il materiale di quarzo, che ebbi a disposizione, e trovai parecchi casi naturali in cui tali indizi appaiono evidenti. Alcuni cristalli limpidi ed incolori di **quarzo di Lincoln-County** (North Carolina) mostrano le figure di corrosione disegnate nella tavola. Essi presentano le forme *r* grande, ρ piccola, *b*, *s* e trapezoedri, e poi qua e là inclusi di limonite. La loro superficie appare corrosa e modificata da facce

di prerosione. Le figure di corrosione hanno, come già dicemmo, la stessa forma di quelle da noi ottenute sperimentando coll'acqua sovrariscaldata sul quarzo, ma la loro grandezza è tale che esse si distinguono nettamente già ad occhio nudo.

Simili fenomeni di corrosione si riscontrano sui **quarzi incolori del Brasile**, noti per il loro largo impiego in ottica ed in gioielleria. Di tali quarzi tratta I. MARTINI [1] in una dettagliata pubblicazione ed il lettore voglia là osservar le figg. 2 e 3 della tavola IX. Martini trovò che su questi quarzi sovente compaiono i trapezoedri negativi da soli senza i positivi, cioè i trapezoedri che si trovano a contatto ed al disotto di ρ a destra ed a sinistra. L'abito dei quarzi brasiliani, i quali in generale sono superficialmente un po' appannati, è a piramide acuta. Con r, che ha uno sviluppo maggiore di ρ, confina $+ b$, il quale è abbastanza piano e poco striato. Con ρ e coi vicini r confina, invece di $- b$, uno pseudoromboedro acuto, che dà all'intero cristallo la forma piramidale acuta. Inoltre si hanno le forme s ed i trapezoedri negativi. Sui detti pseudoromboedri acuti Martini riscontrò le strane figure concave di corrosione, aventi la forma di virgola capovolta e rovesciata, il cui massimo allungamento va all'incirca parallelo all'asse della zona r, s, trapez. negativi, $- b$. La punta di dette figure volge, sul cristallo orientato, verso l'alto a destra od a sinistra, a seconda che il cristallo è destrogiro o levogiro. Riguardo alla formazione di dette figure Martini non accetta l'asserto troppo generalizzato di Molengraaff, secondo cui le figure naturali di corrosione del quarzo sono dovute all'azione dei carbonati alcalini sciolti nelle acque circolanti.

Io ho studiato attentamente due cristalli di quarzo brasiliano, appartenenti alla mia collezione, i quali mediante le figure di Martini vengono riconosciuti l'uno come destrogiro e l'altro come levogiro. Anzitutto dalla parte non terminata dei cristalli tagliai e levigai una lamina perpendicolarmente a c, che, esaminata a luce polarizzata, provò come esatta la determinazione secondo i caratteri superficiali. Ma come sul prisma dei cristalli

---

[1] I. MARTINI, *Beiträge zur Kenntnis des Quarzes*, " Neues Jhrbch. f. Min. etc. ", 1905, II Bd., Taf. IX, pag. 43.

si scorgono qua e là plaghe di quarzo con suture frastagliate, così pure all'esame ottico si vedono ai bordi della lamina plaghe di differente carattere. Nel cristallo levogiro si scorge inoltre una formazione zonare a cappa, rivelata dalla presenza delle sole tre facce interne r, le quali sono leggermente opalescenti. Le facce ρ, che si presentano allo esterno, sarebbero con ciò una differenziazione più recente, perchè il cristallo nell'interno, cioè in stadio più iniziale, non è terminato che dalle facce r. A seconda dell'inclinazione e della pianezza dei pseudo romboedri acuti, la posizione dei quali in realtà oscilla sempre in causa delle più o meno larghe faccette elementari a gradinata, le figure di Martini hanno una forma suscettibile di variazione: da quelle dai contorni nettamente triangolari fino a quelle dai contorni tipici a virgola. Su un terzo cristallo brasiliano levogiro, appartenente alla collezione del Prof. V. Goldschmidt-Heidelberg, che, al pari dei due cristalli ora descritti, mostra l'abito tipico dei cristalli brasiliani, notai in più uno sviluppo speciale. Gli spigoli tra r e ρ, tra r ed i due finitimi pseudoromboedri acuti sono arrotondati. Si tratta d'un arrotondamento degli spigoli dal polo all'equatore a destra di r_{I} (vedi tav. fig. 4), cioè tra r_{I} ρ_{II}, tra r_{I} e lo pseudo-romboedro acuto al posto $-b_{II}$ ed infine tra b_{I} e lo stesso pseudo-romboedro. In tale ultimo caso l'arrotondamento sostituisce ed avvicina a_{rI}. A sinistra di r_{I} si nota pure un arrotondamento tra r_{I} ρ_{I} e tra r_{I} e lo pseudo-romboedro acuto al posto di $-b_{VI}$. Tali arrotondamenti zonari ci fanno ritenere come cosa probabile, che per rigenerazione su tale quarzo si possano sviluppare insieme le due forme $\pm$ trapezoedriche levogire, che vennero precedentemente osservate come separate.

Un caso simile si ha pure pel quarzo formatosi per via sintetica in soluzione acquosa sovrariscaldata di tetraborato sodico (vedi G. Lincio, l. c., pag. 95, indicato a piè di pag. 1 della pres. pubbl.).

Gli arrotondamenti sopra descritti vanno con probabilità ritenuti quali facce di prerosione.

Pel fatto che sul cristallo di quarzo levogiro della collezione del Prof. Goldschmidt gli arrotondamenti degli spigoli situati a destra della zona del tipo r_{I} b_{I} $\bar{\rho}_{III}$ si mostrano tutti opachi e ruvidi, mentre quelli situati a sinistra di detta zona,

cioè quelli tra r_I e ρ_I sono rilucenti e solo un po' lambiti e quelli tra ρ_I e b_I sono solo un po' opachi ed ondeggianti, si potrebbe trovare una certa affinità tra questi fenomeni naturali ed i risultati sperimentali ottenuti coi solidi di soluzione del quarzo in acqua pura sovrariscaldata. Noi abbiamo veduto appunto che su un solido di soluzione levogiro (Tav. fig. 2) si va estendendo dalle vicinanze di r_I, passando per a_{rI} come centro e giungendo fino presso a $\overline{r}_{III}$, uno spazio fusiforme (punteggiato), che si mostra coperto di figure convesse di corrosione, mentre lo spazio a sinistra della zona del tipo $r_I\ b_I\ \overline{\rho}_{III}$, il quale si stende da r_I per la posizione teorica di a_{II} fino a $\overline{r}_{II}$, nella parte di mezzo è rilucente (non punteggiato) e solo nei sottospazi triangolari è opaco (punteggiato). Come già dicemmo, le superfici opache, portanti figure convesse di corrosione, ci rivelano una velocità di soluzione maggiore di quelle che ne son prive (rilucenti) e perciò sul cristallo levogiro di quarzo ora studiato lo smussamento od arrotondamento degli spigoli si ha a destra di b_I sulla posizione di a_{rI}, mentre un tale manca a sinistra di b_I sulla posizione di a_{II}.

Per un altro motivo io propenderei a ritenere i suddetti arrotondamenti degli spigoli del quarzo brasiliano quali facce di prerosione. Sui primi due cristalli di quarzo brasiliano, qui descritti, le figure concave triangolari di corrosione su r e ρ non sono visibili che con una lente di 10 ingrandimenti ed anzi le figure su b richiedono un maggior ingrandimento per venir riconosciute: su detti cristalli gli spigoli polari e prismatici non presentano arrotondamenti di sorta. Sul terzo cristallo le figure concave di corrosione sono molto grandi e ben distinguibili ad occhio nudo, anzi quelle prismatiche, a forma di navetta, sono così profonde e stipate che non lasciano più scorgere che la parte quadrata più profonda di destra, mentre la loro punta, meno profonda, viene a sinistra tagliata dalla figura vicina: orbene su detto cristallo si riscontrano i marcati arrotondamenti agli spigoli polari e prismatici, a cui accennammo. Con ciò le figure concave di corrosione sui due primi cristalli ci indicano uno stadio iniziale di corrosione. Il crescere delle dimensioni delle figure stesse con un contemporaneo attacco agli spigoli polari e prismatici, ci dimostrano come il terzo cristallo sia giunto ad uno stadio molto più avanzato di corrosione. La cor-

rosione deve essere stata esercitata molto probabilmente da acque calde.

I quarzi brasiliani del sopraddetto abito meriterebbero di venir studiati più profondamente. Al goniometro, data la mole (10-17 cm. di lunghezza) dei tre cristalli, non potei far nulla. Poi intorno alle condizioni geologiche e paragenetiche di tali quarzi non mi consta che esista notizia di sorta. Finalmente, data la tendenza alla formazione zonare a cappa e data la presenza di plaghe cristallograficamente inomogenee, è molto probabile che i quarzi brasiliani rappresentino individui a struttura complicata.

Simili figure concave di corrosione di forma triangolare mostra su r e ρ un cristallo di **quarzo di Dazio Grande (Ticino)**. I prismi però si presentano troppo mal delimitati e fittamente bucherellati da non permettere di stabilire se vi siano figure di corrosione tipiche. Possedendo abbondante materiale di detta località, sarebbe cosa interessante di esaminarlo a tale riguardo.

Un bell'esempio di corrosione naturale del tutto simile a quella prodotta artificialmente dall'azione dell'acqua, ci offrono i cristalli di **quarzo di Carrara** e cioè, anche qui, quelli che presentano già ben sviluppate le note facce di prerosione.

Così p. es. i cristalli levogiri (presso i quali le facce di prerosione si trovano a destra di r_l allo spigolo $r_I\, r_{Il}$ e presso le posizioni di s_{rI}, a_{ri}) mostrano molto bene su r, ρ e b le figure concave di corrosione riprodotte sulla tavola a fig. 3. La determinazione delle figure di corrosione su b vien sovente resa difficile dal fatto che i quarzi di Carrara presentano quasi sempre geminazioni od associazioni svariate od irregolari.

Degne di nota speciale pel quarzo di Carrara sono le figure convesse di corrosione a base rombica, le così dette figure convesse ellittiche, che si presentano sulla faccia a, delle quali trattammo esponendo i risultati della nostra esperienza. Vedi pag. 8.

Essendosi già G. A. F. Molengraaff [1] occupato minuziosamente dello studio morfologico delle figure naturali di corro-

---

[1] G. A. F. Molengraaff, *Studien am Quarz I e II*, " Zeitschft f. Kryst. ", Bd. XIV, pagg. 173-201, e XVII, pagg. 137-176, anni 1888-1889.

sione del quarzo in generale ed anche di quello di Carrara, rimando il lettore, desideroso d'entrare nei dettagli, ai risultati di tale studio. Qui farò invece alcune osservazioni e stabilirò alcuni confronti, atti a mettere in evidenza fatti che parlano per la probabile azione dell'acqua sul quarzo di Carrara. Anzitutto, come risulta dalla mia esperienza, solo i più lunghi tra i cristalli da me corrosi nell'acqua durante i 24 giorni, quelli cioè che arrivavano con le loro facce terminali più davvicino al livello superiore di riscaldamento massimo (330°), mostrano distinte figure di corrosione, gli altri invece che giungevano al livello inferiore di forse 200°, tutt'al più 250°, non ne mostrano che indistinte ed embrionali. Quindi si può facilmente comprendere come Molengraaff, il quale sperimentò sul quarzo con acqua pura o contenente acido carbonico per la durata di sole 10 ore entro canne di ferro che a temperatura sopra i 100° per cattiva chiusura perdevano alla fine tutto il vapor d'acqua, non abbia ottenuto corrosione di sorta. Così che, per quanto detto autore abbia avuto presente al pari di Des Cloizeaux e di Bombicci la possibilità d'un'azione diretta dell'acqua calda sul quarzo in natura, egli, basandosi sul risultato della sua esperienza, finisce coll'ascrivere la corrosione del quarzo in natura alla probabile azione di acque circolanti nel terreno e contenenti in soluzione carbonati alcalini.

Riguardo poi alle figure triangolari di corrosione sulla faccia del romboedro negativo ρ l'autore trova che la base dei triangoli rovesciati, che delimitano dette figure, non va parallela allo spigolo *b* ρ, ma si inclina a sinistra in basso per un cristallo levogiro ed a destra in basso per un destrogiro. Tale inclinazione sullo spigolo *b* ρ venne trovata per cristalli di quarzo del Rauris di 12°, mentre per cristalli di Carrara non giungeva che a 3°. Ciò potrebbe forse provare la differente natura chimica delle soluzioni che nei due casi hanno agito sul quarzo. Osservando le figure di corrosione ottenute coll'acqua nella nostra esperienza, le quali rappresentano una fase iniziale della corrosione, noi troviamo che in esse pure la base si inclina molto leggermente sullo spigolo *b* ρ. Essendo il cristallo levogiro, la inclinazione va verso sinistra al basso (vedi la tavola a fig. 3). In riguardo delle figure di corrosione naturale Molengraaff trova, come già noi riscontrammo nella nostra esperienza, che *r* e ρ

vengono differentemente corrosi: ρ è corroso più fortemente che *r* ed è coperto di maggior numero di figure, le quali sono anche più piccole che su *r* (vedi Tav. figg. 5 e 6). Quanto alle figure di corrosione del prisma *b*, l'autore, anche per la difficoltà di determinare i romboedri *r* e ρ, incorse in alcuni errori. Nella pubblicazione II egli corresse le osservazioni fatte sul cristallo di quarzo di Palombaia, disegnato a tav. III fig. 3 della pubblicazione I.

In detta fig. 3 in luogo di (*r*) va posto (*R*), ciò che risultò dalla osservazione ottica, fatta su una lamina tagliata dal cristallo, secondo la quale esso si mostrò destrogiro. La forma e l'orientazione delle figure di corrosione su *b* s'accorda così con le nostre perfettamente. L'autore segna con + la faccia *b* sotto *r*, con — quella sotto ρ e segna con + gli spigoli polari e prismatici presso i quali non si trovano le facce *s* e le trapezoedriche, con — invece gli spigoli presso i quali si incontrano dette facce. Così l'autore conchiude che, in caso di corrosione naturale, tanto per cristalli levogiri che destrogiri sulle facce *b* la parte appuntita delle figure di corrosione si svolge verso gli spigoli prismatici negativi, la parte ottusa verso i positivi: ciò che trovammo anche nella nostra esperienza. Accettando la forma e l'orientazione della figura di corrosione del prisma *b*, indicate dalla fig. 3, tav. III del lavoro I, vanno pure in detta tavola corrette le figure 10 e 11, che mostrano cristalli di quarzo di Carrara corrosi in natura. La simmetria del quarzo vuole che le figure di corrosione su ± *b* dello stesso cristallo abbiano a coincidere tra loro mediante giro di 180° in *b*, e che su cristalli levogiri e destrogiri le figure sieno enantiomorfe.

In generale però va tenuto conto del fatto, che dalla presenza di figure concave triangolari di corrosione sulle facce *r* e ρ del quarzo non si può senz'altro inferire che si tratti di azione corrosiva dell'acqua. Per poter con una certa probabilità stabilire una tale azione si deve constatare la presenza di figure concave delimitate su *r* da triangoli a due lati eguali, su ρ da triangoli con la base molto leggermente inclinata sullo spigolo *b* ρ, e su *b* dal contorno a navetta di tipica orientazione.

Cito qui appunto alcuni casi, dove le figure concave triangolari su *r* e ρ non sono dovute all'azione dell'acqua.

Nella mia esperienza intorno ai solidi di soluzione e d'ac-

crescimento del quarzo in soluzione acquosa di tetraborato sodico ottenni su r e ρ tali figure concave di corrosione ed anche simili figure convesse triangolari d'accrescimento su ρ, inverse, girate di 180° su ρ, rispetto alle prime (vedi G. Lincio, l. c., taf. 8, figg. 5, 6, 7, indicato a pag. 1 della presente pubblicazione). Con ciò le figure deltoidiche in generale, in caso di corrosione, mostrano su r e su ρ la base in alto dalla parte del polo, parallela allo spigolo r $(+ b)$ o rispettivamente leggermente inclinata sullo spigolo ρ $(- b)$ ed il loro vertice volge in basso all'equatore, mentre, in caso d'accrescimento, la base si trova dalla parte dell'equatore ed il vertice volge al polo.

Per esempio, i **quarzi di Brusson (Piemonte)**, che hanno un abito trigonale, mostrano bellissime figure convesse d'accrescimento su r e ρ. Il loro contorno ha la forma di triangolo sferico. La direzione media dei lati del triangolo corrisponde agli assi delle zone r ρ; r $(+ b)$; ρ r e ρ $(- b)$. Su tali cristalli naturalmente non va cercata traccia di figure concave di corrosione.

Finalmente pel caso, in cui le figure deltoidiche su r e ρ vennero ottenute per **corrosione del quarzo** a 600° **con bisolfato potassico** mediante aggiunta d'un po' di **fluoruro potassico** non credo di dover citare che la letteratura: G. Friedel, *Sur les figures de corrosion du quartz à haute température*, " Bull. Soc. franç. de Min. ", T. 25, 1902, pag. 112.

Sul prisma b le figure concave di corrosione si mostrarono quadrangolari e simmetriche rispetto all'asse c ed agli spigoli b (r, ρ). Friedel volle vedere in tali figure di corrosione una prova della simmetria senaria del quarzo a 600°, ciò che venne confutato da O. Mügge, *Ueber die Zustandsänderung des Quarzes bei 570°*, " Neues Jhrbch f. Min. ", 1907, Festband 1807-1907, pag. 181.

Conclusione. — Giunti al termine delle nostre osservazioni, faccio qui rilevare l'importanza e la diffusa azione dell'acqua calda sul quarzo in natura. Il numero dei casi, nei quali una tale azione appare molto probabile, verrà certamente ad accrescersi studiando anche i quarzi delle moltissime località che non potei prendere in esame. Inoltre, se per i giacimenti recenti ed antichi del quarzo noi terremo debito conto delle

condizioni chimico-geologiche e paragenetiche e stabiliremo dei confronti tra i fenomeni naturali di corrosione con quelli ottenuti artificialmente, noi non saremo solamente in grado di poter stabilire la pristina presenza di acque calde nel giacimento, ma anche di riconoscerne l'azione tanto sul quarzo quanto eventualmente sui minerali e sulle rocce concomitanti.

Le acque le denomino qui in modo generale “ calde „. Nel laboratorio noi dobbiamo sperimentare coll'acqua ad alta temperatura per poter abbreviare il tempo d'esperienza ed ottenere risultati tangibili: in natura invece si possono, fino ad un dato punto, produrre gli stessi effetti a temperature più basse, ma con durata d'azione molto più lunga.

Varzo (Ossola), 20 febbraio 1915

Sul secondo principio di reciprocità.

Nota di GUSTAVO COLONNETTI

(Da una lettera al Prof. C. Guidi).

. . . .

A proposito del *secondo principio di reciprocità* (1) ho avuto in questi giorni occasione di stabilire nel modo più generale l'esistenza di una reciprocità fra il sistema delle tensioni interne prodotte in un corpo elastico da una qualunque sollecitazione esterna ed il sistema degli spostamenti in esso determinati da una qualsiasi distorsione. La mia nuova dimostrazione, che mi propongo di pubblicare quanto prima, mettendola in relazione con alcune proprietà caratteristiche delle distorsioni di Volterra, ha il vantaggio di potersi, per uso didattico, facilmente

(1) Cfr. G. Colonnetti, *Apparecchio pel tracciamento delle linee di influenza della trave continua,* “ Giorn. del Genio Civile „, 1914.

ridurre in forma assai piana ed intuitiva, non dissimile da quella con cui W. Ritter compendiò, nella sua Statica (1), la classica dimostrazione del Betti; ed ecco brevemente in qual modo.

Consideriamo un corpo elastico connesso (in generale anzi più volte connesso) in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze esterne

$$P_1, P_2, \ldots P_n.$$

Tracciata attraverso ad esso una sezione qualunque, indichiamo con

$$S_1, S_2, \ldots S_6$$

le sei caratteristiche, rispetto ad una terna arbitraria di assi coordinati, del sistema di tensioni interne relative a quella sezione.

Immaginiamo nel solido, tagliato secondo quella sezione, operata una distorsione di caratteristiche (2)

$$s_1', s_2', \ldots s_6'.$$

Durante questo cambiamento di configurazione le sei caratteristiche del sistema di tensioni interne relative al taglio subiranno, in generale, certe variazioni che noi indicheremo rispettivamente con

$$\delta S_1, \delta S_2, \ldots \delta S_6$$

senza escludere che esse possano in qualche caso particolare essere tutte nulle (come avverrà certamente ogniqualvolta il sistema, dopo il taglio, ha cessato di essere connesso).

Se si indicano con

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$$

---

(1) Cfr. W. Ritter, *Anwendungen der graphischen Statik,* Dritter Teil, Zürich, 1900, pagg. 258 e 259.

(2) Cfr. V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes,* " Ann. Éc. Norm. ", 3, t. XXIV.

gli spostamenti che i punti di applicazione delle forze esterne hanno subìto, al deformarsi del corpo per effetto di dette forze, nelle direzioni delle forze stesse, e con

$$\eta_1', \eta_2', \ldots \eta_n'$$

gli spostamenti degli stessi punti, misurati nelle stesse direzioni, dovuti alla distorsione, l'energia elastica del sistema così doppiamente deformato può evidentemente calcolarsi come somma del lavoro di deformazione iniziale

$$\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=n} P_h \eta_h$$

e del lavoro eseguito durante la distorsione

$$\sum_{h=1}^{h=n} P_h \eta_h' + \sum_{k=1}^{k=6}\left(S_k + \frac{1}{2}\delta S_k\right) s_k'.$$

Ma, se si immagina, sul sistema preso nel suo stato naturale, operata dapprima la distorsione, ed applicate poi, gradualmente, le forze esterne (impedendo, s'intende, ogni ulteriore movimento relativo delle due faccie del taglio), quella medesima energia elastica risulta espressa più semplicemente dalla somma

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=6} \delta S_k \,.\, s_k' + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=n} P_h \eta_h .$$

Eguagliando i due risultati si ricava pertanto la relazione caratteristica

$$\sum_{h=1}^{h=n} P_h \eta_h' + \sum_{k=1}^{k=6} S_k s_k' = 0$$

la quale esprime il teorema: “ La somma dei prodotti delle sei “ caratteristiche del sistema di tensioni interne che in un corpo

" elastico in equilibrio si sviluppano in corrispondenza di una
" data sezione, per le corrispondenti caratteristiche di una
" distorsione, è eguale e contraria al lavoro che le forze esterne
" applicate al corpo stesso eseguirebbero nel cambiamento di
" configurazione a cui quella distorsione darebbe origine ".

Se si introduce il concetto di distorsione unitaria negativa, chiamando così ogni distorsione le cui caratteristiche siano tutte nulle eccezion fatta soltanto per una a cui si attribuisce il valore fisso — 1, si può enunciare il teorema sotto la forma:
" Ciascuna delle sei caratteristiche del sistema di tensioni in-
" terne che in un corpo elastico in equilibrio si sviluppano in
" corrispondenza di una data sezione, è misurata dal lavoro
" che le forze esterne applicate al corpo eseguirebbero qualora
" su questo si operasse la corrispondente distorsione unitaria
" negativa " (1).

. . . .

Pisa, 21 febbraio 1915.

---

(1) Cfr. G. Colonnetti, *Sul principio di reciprocità*, " Rend. R. Accademia dei Lincei ", serie 5ª, t. XXI; *Introduzione teorica ad un corso di statica dei corpi elastici* lez. litogr., Genova, 1912; *Sul principio di reciprocità*, " Giorn. del Genio Civile ", 1913.

Le deformazioni delle molle ad elica.

Nota del Dott. Ing. CARLO LUIGI RICCI.

I.

Le molle ad elica cilindrica nelle applicazioni sono per lo più sollecitate da una forza diretta secondo l'asse dell'elica ed agente su di una estremità, mentre l'altra è tenuta fissa; e di solito a questa unica sollecitazione si limita lo studio sia delle deformazioni, sia della resistenza della molla. Non mancano però dei casi in cui la molla ad elica si trova soggetta a forze agenti normalmente all'asse dell'elica, od anche comunque dirette; si possono ricordare le molle applicate nei regolatori volani nelle quali la forza centrifuga genera una sollecitazione ripartita sulla molla, avente componenti normali all'asse (1). Un altro caso citerò, che ebbi occasione di constatare sperimentalmente, e che mi indusse a studiare la questione che forma l'argomento di questa nota.

Nello studio dell'apparecchio equilibratore per masse rotanti (2), e precisamente in alcune esperienze eseguite sul modello del detto apparecchio che si trova nel Laboratorio di meccanica applicata alle macchine del R. Politecnico di Torino, delle quali dirò in un mio prossimo lavoro, mi è occorso di considerare una molla ad elica colle estremità impegnate in due manicotti rigidi, dei quali uno A fisso, e l'altro B mobile parallelamente ad un piano parallelo all'asse dell'elica. Mi si presentò l'opportunità di valutare la reazione sviluppata dalla molla per una rotazione di B intorno ad un punto S dell'asse dell'elica,

(1) Cfr. Tolle, *Die Regelung der Kraftmaschinen*, 1909, cap. VI, p. 393.
(2) V. Stodola, *Die Dampfturbinen*, 1910, cap. V, n° 86, pp. 278-283.

reazione che l'esperienza diretta rivelava non trascurabile per valutare esattamente il comportamento elastico dell' apparecchio.

Questa reazione noi potremo considerare come secondaria, rispetto a quella principale sviluppata dalla molla per una traslazione di B secondo l'asse dell'elica. È noto che per valutare la reazione principale della molla si ammette comunemente di poter trascurare l'inclinazione α dell'elica, asse geometrico della verga, considerando le spire come appiattite in cerchi, e quindi sostituendo le sezioni normali della verga colle sezioni assiali, salvo a correggere poi i risultati ottenuti, dividendo per $\cos \alpha$ le grandezze proporzionali alla lunghezza della spira inizialmente valutata uguale $2\pi R$, essendo R il raggio del cilindro medio. Inoltre si considera la verga come un solido a grande curvatura, riguardando i suoi elementi come prismatici.

Quindi, anche per valutare la reazione secondaria faremo qui le stesse ipotesi semplificative, che ci condurranno ad una approssimazione dello stesso ordine, assai soddisfacente, dati i piccoli valori che di solito presenta l'inclinazione α.

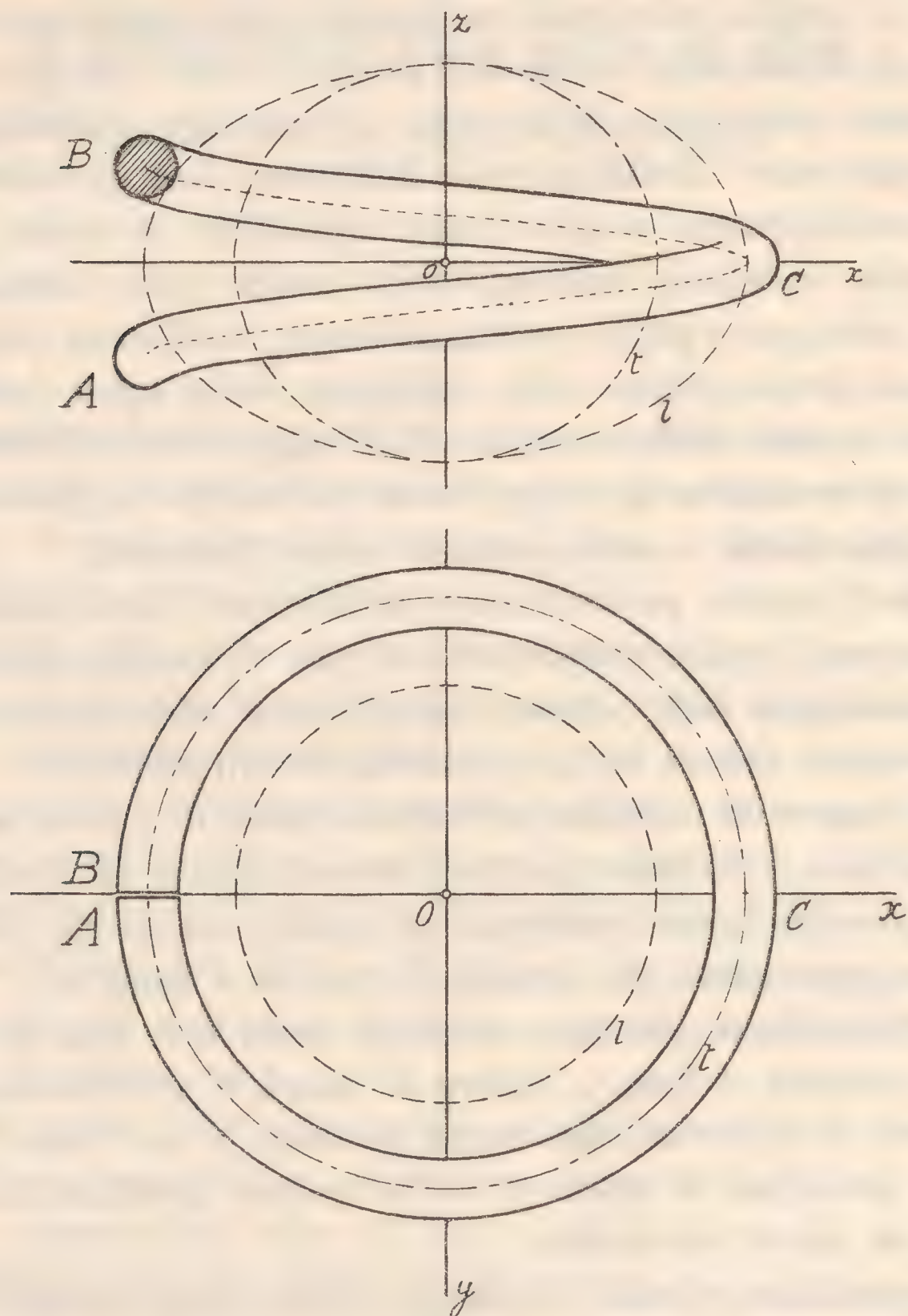
Mi riservo di indicare nell'ultima parte di questa nota come si possa fare il calcolo rigoroso, tenendo conto dell'inclinazione, per riconoscere come l'influenza di questa sia molto piccola, essendo rappresentata da termini in $\text{sen}^2 \alpha$ e $\text{tang}^2 \alpha$.

Consideriamo per ora un'unica spira con una sua sezione assiale estrema A fissa e l'altra B libera e sollecitata da forze. Riferiamo la spira ad una terna di essi; z sia l'asse dell'elica, l'asse x passi per il centro C della sezione mediana della spira, e la terna sia p. es. destra.

Supponiamo poi che la sezione della verga abbia uno degli assi principali d'inerzia, che indicheremo con a, normale all'asse z, e sia b l'altro asse principale.

Per evidenti ragioni di simmetria, ognuna delle forze X, Y, Z, agenti secondo i tre assi, produce nella sezione B una traslazione secondo il proprio asse (u, v, w) ed i tre momenti $L M N$ intorno ai tre assi producono tre rotazioni $p\ q\ r$ intorno agli stessi assi.

Il calcolo di queste deformazioni si può eseguire ricorrendo al teorema delle derivate del lavoro; la traslazione u dovuta alla forza X sarà la derivata del lavoro di deformazione della

spira prodotto da X, rispetto alla X stessa; così la rotazione p, sarà la derivata rispetto ad L del lavoro di deformazione prodotto da L; e analogamente per le altre componenti [1].

Per esprimere il lavoro di deformazione occorre trovare le sollecitazioni provocate dalle varie forze in una sezione generica S il cui piano formi col piano xz l'angolo φ; esse sono le seguenti:

---

(1) I metodi e le notazioni che qui usiamo sono esposti nelle *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni,* del Prof. C. Guidi.

Sollecitazioni prodotte:

dalla forza X:

Sforzo normale: $\mathfrak{N} = X \operatorname{sen} \varphi$
Taglio secondo l'asse a: $\mathfrak{T}_a = X \cos \varphi$
Momento flettente intorno all'asse b: $\mathfrak{M}_b = XR \operatorname{sen} \varphi$;

dalla forza Y:

$$\mathfrak{N} = - Y \cos \varphi \qquad \mathfrak{T}_a = Y \operatorname{sen} \varphi \qquad \mathfrak{M}_b = - YR \cos \varphi ;$$

dalla forza Z:

Taglio secondo b: $\mathfrak{T}_b = Z$
Momento torcente: $\mathfrak{M}_t = - ZR$;

dal momento L:

Momento flettente intorno ad a: $\mathfrak{M}_a = L \cos \varphi$

$$\mathfrak{M}_t = L \operatorname{sen} \varphi ;$$

dal momento M:

$$\mathfrak{M}_a = M \operatorname{sen} \varphi \qquad \mathfrak{M}_t = - M \cos \varphi ;$$

dal momento N:

$$\mathfrak{M}_b = N.$$

Il citato teorema delle derivate del lavoro ci fornisce le relazioni seguenti:

Traslazione u prodotta dalla forza X:

$$u = XR \left[\frac{1}{EF} \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi + \frac{\chi_b}{GF} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi + \frac{R^2}{EJ_b} \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi \right]$$

(essendo χ_b il coefficiente del lavoro di deformazione al taglio in direzione a [1]); ossia, per i noti valori degli integrali:

$$u = X \pi R \left[\frac{1}{EF} + \frac{\chi_b}{GF} + \frac{R^2}{EJ_b} \right].$$

---

[1] V. C. Guidi, *Lezioni* cit., parte II, pag. 53 (1912).

Traslazione v prodotta dalla forza Y:
si ottiene dall'espressione precedente scambiando tra loro sen φ e cos φ, quindi risulta:

$$\frac{v}{Y} = \frac{u}{X}.$$

Traslazione w prodotta dalla forza Z:

$$w = 2\pi R\left[\frac{\chi_a}{GF} + \frac{\psi R^2}{GJ_p}\right] Z$$

(essendo ψ il coefficiente del lavoro di deformazione a torsione).

(Ove si trascuri l'effetto del taglio, questa formola coincide con quella di solito impiegata per il calcolo della reazione principale della molla).

Rotazione p prodotta dal momento L:

$$p = LR\left[\frac{1}{EJ_a}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi + \frac{\psi}{GJ_p}\int_{-\pi}^{+\pi}\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi\right]$$

$$p = L\pi R\left[\frac{1}{EJ_a} + \frac{\psi}{GJ_p}\right].$$

Rotazione q prodotta dal momento M:

Anche qui, per le ragioni viste a proposito di u e v si ha:

$$\frac{q}{M} = \frac{p}{L}.$$

Questo risultato, e l'analogo relativo ad u, v si poteva prevedere, a priori, per la simmetria, osservando come due a due si comportino ugualmente i quattro archi in cui l'anello viene diviso dai piani $x\,z$ ed $y\,z$ sotto l'azione di forze situate in questi piani.

Rotazione r prodotta dal momento N:

$$r = \frac{2\pi R}{EJ_b} N.$$

Colle suesposte espressioni delle sollecitazioni in una sezione generica, e coll'applicazione dello stesso teorema delle derivate del lavoro è facile verificare che ognuna delle componenti delle

forze esterne X..... L..... produce, nella direzione di tutte le altre, spostamenti nulli; questo risultato già avevamo preveduto, a priori, in virtù della simmetria.

Inoltre le uguaglianze dei rapporti $\frac{u}{X} = \frac{v}{Y}$ e $\frac{p}{L} = \frac{q}{M}$ dimostrano che la molla si comporta ugualmente rispetto alle forze agenti in uno qualunque piano assiale, e costituisce quindi quello che si potrebbe chiamare un sistema elastico di rotazione intorno all'asse z.

Il comportamento della molla sotto l'azione di forze giacenti in un piano assiale si può rappresentare mediante i dati della teoria dell'ellisse di elasticità [1]; lo studio dell'azione di forze normali a detto piano assiale dà luogo alla considerazione dell'ellisse di elasticità trasversale relativa a tale piano [2].

Anzitutto il rapporto $\frac{p}{L} = \frac{q}{M}$ è il peso elastico longitudinale relativo al piano assiale che indicheremo con:

$$\mathfrak{W} = \pi R \left[\frac{1}{EJ_a} + \frac{\psi}{GJ_p}\right].$$

Il baricentro elastico è la stessa origine 0 delle coordinate. Se, per fissare le idee, ci riferiamo al piano $x\,z$, potremo indicare ρ_x e ρ_z i semiassi dell'ellisse longitudinale relativa ad esso piano distesi rispettivamente sull'asse z e sull'asse x. Si hanno le note relazioni:

$$u = X\mathfrak{W}\rho_x^2 \qquad w = Z\mathfrak{W}\rho_z^2$$

dalle quali si ricava:

$$\rho_x^2 = \frac{u}{X\mathfrak{W}} = \frac{\frac{1}{EF} + \frac{\chi_b}{GF} + \frac{R^2}{EJ_b}}{\frac{1}{EJ_a} + \frac{\psi}{GJ_p}} \qquad \rho_z^2 = \frac{w}{z\mathfrak{W}} = 2\,\frac{\frac{\chi_a}{GF} + \frac{\psi R^2}{GJ_p}}{\frac{1}{EJ_a} + \frac{\psi}{GJ_p}}.$$

---

(1) Cfr. C. Guidi, *Lezioni* cit., parte II, cap. VI, pag. 289 e segg.

(2) Cfr. il mio lavoro: *L'ellisse di elasticità trasversale...* " Mem. Reale Accademia Torino ", 1911.

Nel piano xy il peso elastico longitudinale è:

$$\mathfrak{W}' = \frac{2\pi R}{EJ_b}$$

e l'ellisse longitudinale è un cerchio, di raggio ρ', dato dalla relazione:

$$X\mathfrak{W}'\rho'^2 = u$$

e quindi:

$$\rho'^2 = \frac{EJ_b}{2}\left[\frac{1}{EF} + \frac{\chi_b}{GF} + \frac{R^2}{EJ_b}\right].$$

Il peso elastico trasversale relativo ad un piano assiale è (¹):

$$\mathfrak{G} = \frac{X}{u} = \frac{1}{\pi R\left[\frac{1}{EF} + \frac{\chi_b}{GF} + \frac{R^2}{EJ_b}\right]}.$$

L'ellisse trasversale relativa allo stesso piano ha i semiassi ρ_{tx} e ρ_{tz} distesi rispettivamente sugli assi z ed x, espressi da:

$$\rho_{tx} = \rho_x \qquad \rho_{tz} = \rho'.$$

Il peso elastico trasversale relativo al piano xy è espresso da:

$$\mathfrak{G}' = \frac{Z}{w} = \frac{1}{2\pi R\left[\frac{\chi_a}{GF} + \frac{\psi R^2}{GJ_p}\right]}.$$

L'ellisse trasversale relativa a detto piano xy si riduce poi ad un cerchio di raggio:

$$\rho_t' = \rho_z.$$

Esprimiamo ora queste grandezze per le forme di sezione della verga che più comunemente si presentano, nelle applicazioni, ossia la sezione circolare e la rettangolare.

(¹) Cfr. la mia Memoria citata, cap. I, § 3, pag. 5.

Per la sezione circolare di diametro d si ha:

$$F = \pi \frac{d^2}{4}; \qquad J_a = J_b = \frac{\pi d^4}{64}; \qquad J_p = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$\chi_a = \chi_b = \frac{10}{9}; \qquad \psi = 1.$$

Fatte le sostituzioni, si ottiene, ritenendo al solito $G = \frac{2}{5} E$:

$$\mathfrak{W} = \frac{144 R}{E d^4} \qquad \mathfrak{W}' = \frac{128 R}{E d^4} \left(= \frac{9}{8} \right)$$

$$\rho_x^2 = \frac{1}{144} \left[64 R^2 + \left(15 + \frac{1}{9} \right) d^2 \right] = \rho_{tz}^2.$$

(Per lo più d è abbastanza piccolo a fronte di R, da poterne trascurare il quadrato in confronto di R^2; allora si ottiene:

$$\rho_x = \frac{2}{3} R \sim).$$

$$\rho_z^2 = \frac{10}{72} \left(8 R^2 + \frac{10}{9} d^2 \right) = \rho_t'^2.$$

(Ove si trascuri d^2 si ha:

$$\rho_z = \frac{\sqrt{10}}{3} R = 1{,}054 R \sim).$$

$$\rho'^2 = \frac{1}{128} \left[64 R^2 + \left(15 + \frac{1}{9} \right) d^2 \right] = \rho_{tz}^2.$$

Trascurando d^2:

$$\rho' = \rho_{tz} = \frac{R}{\sqrt{2}} \sim).$$

$$\mathfrak{G} = \frac{E d^4}{R \left[64 R^2 + \left(15 + \frac{1}{9} \right) d^2 \right]} \qquad \mathfrak{G}' = \frac{G d^4}{8 R \left[8 R^2 + \frac{10}{9} d^2 \right]}.$$

Per la sezione rettangolare di lati a e b paralleli agli assi omonimi si ha:

$$F = ab\,; \qquad J_a = \frac{ab^3}{12}\,; \qquad J_b = \frac{ba^3}{12}\,; \qquad J_p = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2)\,;$$

$$\chi_a = \chi_b = \frac{6}{5}\,; \qquad \psi = 1{,}2\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}\right)^2.$$

Sostituendo si ottiene:

$$\mathfrak{W} = \frac{\pi R}{E}\left[\frac{12}{ab^3} + 9\,\frac{a^2+b^2}{a^3 b^3}\right] \qquad \mathfrak{W}' = \frac{2\pi R}{E}\cdot\frac{12}{ba^3}\,.$$

$$\rho_x^2 = \rho_{tx}^2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{3R^2 + a^2}{3 + 7\,\dfrac{a^2}{b^2}}\,.$$

(Per $a = b$ e trascurabile a^2 di fronte ad R^2:

$$\rho_x = \rho_{tx} = \sqrt{\frac{2}{5}}\,R = 0{,}624\,R \sim)\,.$$

$$\rho_z^2 = \rho_t'^2 = 2\,.\,\frac{3R^2 + \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}{3 + 4\,\dfrac{a^2}{a^2+b^2}}\,.$$

($a = b$; a^2 trascurabile di fronte ad R^2:

$$\rho_z = \rho_t' = \sqrt{\frac{6}{5}}\,R = 1{,}095\,R \sim)\,.$$

$$\rho'^2 = \rho_{tz}^2 = \frac{1}{6}\,(3R^2 + a^2)\,.$$

(Trascurando a^2:

$$\rho' = \rho_{tz} = \frac{R}{\sqrt{2}} \sim)\,.$$

$$\mathfrak{G} = \frac{Ea^3b}{4\pi R\,[3R^2 + a^2]} \qquad \mathfrak{G}' = \frac{5\,G\,a^3b^3}{12\pi R\,[3R^2(a^2+b^2) + a^2b^2]}\,.$$

Studiato il comportamento elastico di una spira, veniamo a considerare una molla con n spire (n intero). Occorre perciò

comporre l'elasticità delle singole spire disposte *in serie*, e dedurre nel modo noto le ellissi di elasticità ed i pesi elastici del complesso. — Il centro O comune alle varie ellissi di elasticità si trova nell'asse dell'elica a metà dell'altezza della molla.

I pesi elastici longitudinali del complesso $\mathfrak{W}_n$ e $\mathfrak{W}'_n$ sono dati dalle relazioni:

$$\mathfrak{W}_n = n\,\mathfrak{W} \qquad \mathfrak{W}'_n = n\,\mathfrak{W}'.$$

I semiassi delle ellissi $\rho_{nz} = \rho'_{nt}$; $\rho'_n = \rho_{ntz}$; sono uguali agli omologhi relativi ad una sola spira. L'altro semiasse $\rho_{nx} = \rho_{ntx}$ si deduce facilmente dal teorema del trasporto dei raggi d'inerzia: indichiamo con h il passo dell'elica, ed abbiamo:

per n pari:

$$\rho^2_{nx} = \rho^2_x + \frac{2h^2}{n} \sum_{\nu=0}^{\nu=\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2} + \nu\right)^2 \quad \left(\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots \frac{n}{2}\right),$$

per n dispari:

$$\rho^2_{nx} = \rho^2_x + \frac{2h^2}{n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\frac{n-1}{2}} \nu^2 \qquad \left(\nu = 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}\right).$$

Il peso elastico trasversale del complesso $\mathfrak{G}_n$, relativo ad un piano assiale, si deduce facilmente dalla relazione [1]:

$$\mathfrak{W}_n\, \mathfrak{G}_n\, \rho^2_{nx} = 1.$$

Il peso elastico trasversale $\mathfrak{G}_n'$, relativo al piano xy normale all'asse, è dato dalla relazione:

$$\mathfrak{G}_n' = \frac{1}{n}\, \mathfrak{G}'.$$

Nella figura sono state segnate le ellissi di elasticità longitudinali (l, a tratti) e trasversali (t, a tratti e punti) relative

(1) Cfr. la mia Memoria citata, cap. IV, § 11 (fine), pag. 43.

ad un piano assiale, ed al piano medio normale all'asse, per una spira a sezione circolare; le ellissi relative al secondo piano si riducono a cerchi, come abbiamo visto più sopra.

II.

Vogliamo ora condurre la ricerca in modo rigoroso tenendo conto dell'obliquità α dell'elica e riferendo le sollecitazioni alla sezione normale della verga. Consideriamo una molla ad elica comunque estesa, in modo cioè che l'arco di elica suo asse geometrico abbia un'ampiezza qualsiasi. La sezione estrema A sia fissa, la B sia riunita ad un corpo rigido al quale riteniamo applicate le forze esterne.

La molla costituisce qui il vincolo elastico di cui si fa cenno nel mio lavoro: *Relazioni tra le forze e gli spostamenti per un sistema rigido soggetto a legami elastici* (" Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino ", 1911); ed a questo mi riferisco per ricordare alcune proprietà della corrispondenza tra sforzi e spostamenti. Indichiamo con X_i $(i = 1.....6)$ una delle caratteristiche delle forze nell'ordine X... L..., e con ξ_i $(i = 1.....6)$ l'omologa caratteristica (nell'ordine p... u...) dello spostamento del corpo B (riferite ad una stessa terna ortogonale).

Dalla legge di Hooke risulta la linearità della corrispondenza, che potremo porre sotto la forma [1]:

$$\xi_{i+3} = \sum_{i=1}^{6} a_{ik} X_k \qquad (i, k = 1 \dots 6) \tag{I}$$

Dal principio di reciprocità risulta che il determinante dei coefficienti a_{ik} deve essere simmetrico, ossia si deve avere:

$$a_{ik} = a_{ki}:$$

quindi tra i 36 coefficienti solo 21 sono in generale distinti.

Per determinare questi nel caso della molla sarà opportuno assumere la terna di assi di riferimento dello stesso verso dell'elica, essendo asse z quello dell'elica, e l'asse x passante per il

---

[1] Cfr. il mio lavoro ora citato (*Relazioni*, ecc.), cap. II, § 1, pagg. 11.

punto medio C dell'arco AB considerato. Consideriamo un punto generico S dell'elica, individuato dall'anomalia cilindrica φ contata dal piano xz; sarà utile considerare coll'origine in S la terna di assi $x'\,y'\,z'$ paralleli ai precedenti; inoltre la terna $a\,b\,t$, essendo a e b i due assi principali della sezione normale in S (e supporremo che a sia normale all'asse z) e t la tangente in S all'elica; queste terne siano congruenti colla prima $x\,y\,z$, ossia abbiano esse pure lo stesso verso dell'elica.

Sia α l' angolo d' inclinazione dell' elica, e poniamo per brevità:

$$S = \operatorname{sen}\alpha\,, \qquad C = \cos\alpha\,, \qquad T = \operatorname{tang}\alpha\,;$$
$$s = \operatorname{sen}\varphi\,, \qquad c = \cos\varphi.$$

È facile verificare che i coseni di direzione degli assi $a\,b\,t$ rispetto alla terna $x\,y\,z$ (e quindi rispetto a quella $x'\,y'\,z'$) sono quelli indicati nella tabella seguente:

	x	y	z
a	c	s	O
b	$-Ss$	$S.c$	C
t	Cs	$-Cc$	S

Indichiamo con $X' \ldots L' \ldots$ le caratteristiche del sistema di forze rispetto agli assi $x'\,y'\,z'$; esse sono legate alle $X \ldots L$ dalle relazioni:

$$X' = X\,; \quad Y' = Y\,; \quad Z' = Z\,; \quad L' = L - ZRs - YRT\varphi\,;$$
$$M' = M + XRT\varphi + ZRc\,; \qquad N' = N + XRs - YRc.$$

Siano poi $\mathfrak{T}_a$, $\mathfrak{T}_b$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}_a$, $\mathfrak{M}_b$, $\mathfrak{M}_t$ le caratteristiche dello stesso sistema di forze relativamente agli assi $a\,b\,t$; esse sono rispettivamente gli sforzi di taglio secondo i due assi a e b, lo sforzo normale, i momenti flettenti rispetto ai due assi a e b ed il momento torcente.

Esse si possono esprimere mediante le X'..... L'..... colle relazioni:

$$\mathfrak{T}_a = X'c + Y's\,; \qquad \mathfrak{T}_b = -X'Ss + Y'sc + Z'c\,;$$
$$\mathfrak{N} = X'Cs - Y'Cc + Z's\,; \qquad \mathfrak{M}_a = L'c + M's\,;$$
$$\mathfrak{M}_b = -L'Ss + M'sc + N'c\,; \qquad \mathfrak{M}_t = L'Cs - M'Cc - N'S.$$

Mediante le relazioni precedenti che esprimono le X'... L'..., con sostituzione, le $\mathfrak{T}_a$..... $\mathfrak{M}_a$..... si possono esprimere come funzioni lineari delle X..... L.

Per maggior chiarezza di analisi e semplicità di calcoli può esser preferibile esprimere (come già si fece nella trattazione approssimata) separatamente le sollecitazioni dovute alle singole caratteristiche delle forze X..... L.... supposte agenti da sole.

Esse sono le seguenti:

Sollecitazioni prodotte:

dalla forza X:

$$\mathfrak{T}_a = Xc \qquad \mathfrak{T}_b = -XSs \qquad \mathfrak{N} = XCs$$
$$\mathfrak{M}_a = XRT\varphi s \qquad \mathfrak{M}_b = XR\,(Cs + TS\varphi c) \qquad \mathfrak{M}_t = XRS\,(s - \varphi c)\,;$$

dalla forza Y:

$$\mathfrak{T}_a = Ys \qquad \mathfrak{T}_b = YSc \qquad \mathfrak{N} = -YCc$$
$$\mathfrak{M}_a = -YRT\varphi c \qquad \mathfrak{M}_b = YR(-Cc + TS\varphi s) \qquad \mathfrak{M}_t = -YRS(c + \varphi s)\,;$$

dalla forza Z:

$$\mathfrak{T}_a = 0 \qquad \mathfrak{T}_b = ZC \qquad \mathfrak{N} = ZS$$
$$\mathfrak{M}_a = 0 \qquad \mathfrak{M}_b = ZRS \qquad \mathfrak{M}_t = -ZRC\,;$$

dal momento L:

$$\mathfrak{T}_a = \mathfrak{T}_b = \mathfrak{N} = 0$$
$$\mathfrak{M}_a = Lc \qquad \mathfrak{M}_b = -LSs \qquad \mathfrak{M}_t = LCs\,;$$

dal momento M:

$$\mathfrak{T}_a = \mathfrak{T}_b = \mathfrak{N} = 0$$
$$\mathfrak{M}_a = Ms \qquad \mathfrak{M}_b = MSc \qquad \mathfrak{M}_t = -MCc\,;$$

dal momento N:

$$\mathfrak{T}_a = \mathfrak{T}_b = \mathfrak{N} = 0$$
$$\mathfrak{M}_a = 0 \qquad \mathfrak{M}_b = NC \qquad \mathfrak{M}_t = NS.$$

Passiamo ora a determinare i coefficienti delle (I). Consideriamo a_{ik} come lo spostamento ξ_{i+3} prodotto dalla sollecitazione esterna $X_k = 1$.

Questi spostamenti noi determiniamo, come già si indicò più sopra, col teorema delle derivate del lavoro; osservando che per la scelta fatta degli assi $a\, b\, t$, nella deformazione di un elemento di verga $d\,s$, considerato prismatico, ognuna delle $\mathfrak{T}_a \ldots \mathfrak{M}_a$ non genera lavoro per gli spostamenti prodotti dalle altre sollecitazioni; perciò il lavoro di deformazione si può esprimere come somma dei lavori prodotti dalle singole sollecitazioni.

Esprimeremo con $ds = \frac{R}{C}\, d\varphi$ la lunghezza dell'elemento di verga: dovremo poi, nelle espressioni delle derivate del lavoro, integrare rispetto a φ tra i valori $-\Phi$ e $+\Phi$ corrispondenti ai punti B ed A.

Volendo considerare il caso particolarmente notevole di n spire dovremo integrare tra $-n\pi$ e $+n\pi$.

In queste integrazioni oltre ai noti integrali di s, c, s^2, c^2, sc, si incontrano quelli esposti nel seguente prospetto, ove sono indicati gli integrali indefiniti e quelli definiti tra i limiti $-n\pi$ e $+n\pi$; essi si possono calcolare tutti facilmente integrando successivamente per parti.

$\int$ indefiniti	$\int$ definiti tra $-n\pi$ e $+n\pi$
$\int \varphi s d\varphi = -\varphi c + s$	$2n\pi$
$\int \varphi c d\varphi = \varphi s + c$	0
$\int \varphi s^2 d\varphi = \frac{\varphi^2}{4} - \frac{\varphi}{2} sc - \frac{1}{8}(c^2 - s^2)$	0
$\int \varphi c^2 d\varphi = \frac{\varphi^2}{4} + \frac{\varphi}{2} sc + \frac{1}{8}(c^2 - s^2)$	0
$\int \varphi sc d\varphi = \frac{\varphi}{2} s^2 - \frac{\varphi}{4} + \frac{1}{4} sc$	$-\frac{n\pi}{2}$
$\int \varphi^2 s^2 d\varphi = \frac{\varphi^3}{6} - \left(\frac{\varphi^2}{2} - \frac{1}{4}\right) sc + \frac{\varphi}{4}(c^2 - s^2)$	$\frac{n^3\pi^3}{3} - \frac{n\pi}{2}$
$\int \varphi^2 c^2 d\varphi = \frac{\varphi^3}{6} + \left(\frac{\varphi^2}{2} - \frac{1}{4}\right) sc + \frac{\varphi}{4}(c^2 - s^2)$	$\frac{n^3\pi^3}{3} + \frac{n\pi}{2}$
$\int \varphi^2 sc d\varphi = \frac{\varphi^2}{2} s^2 - \frac{\varphi^2}{16} + \frac{\varphi}{8} sc + \frac{1}{32}(c^2 - s^2)$	0

Si noti che gli integrali che ai limiti indicati risultano nulli, sono pure nulli tra $-\Phi$ e $+\Phi$, essendo integrali di funzioni dispari di φ.

Ciò posto, è facile verificare che dei 21 coefficienti a_{ik} distinti, 10 sono nulli, e precisamente i seguenti:

$$a_{12},\ a_{13},\ a_{15},\ a_{16};\ a_{24};\ a_{34},\ a_{35};\ a_{45},\ a_{46};\ a_{56}.$$

Sono diversi da zero gli altri 11 coefficienti, che sono:

$$a_{11} = \frac{R}{C}\int_{-\Phi}^{+\Phi}\left[\frac{C^2}{EF}s^2 + \frac{1}{GF}(\chi_b c^2 + \chi_a S^2 s^2) + \frac{R^2 T^2}{EJ_a}\varphi^2 s^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{R^2}{EJ_b}(Cs + TS\varphi c)^2 + \frac{\psi R^2}{GJ_p}S^2(s - \varphi c)^2\right]d\varphi$$

$$a_{22} = \frac{R}{C}\int_{-\Phi}^{+\Phi}\left[\frac{C^2}{EF}c^2 + \frac{1}{GF}(\chi_b s^2 + \chi_a S^2 c^2) + \frac{R^2 T^2}{EJ_b}\varphi^2 c^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{R^2}{EJ_b}(Cc - TS\varphi s)^2 + \frac{\psi R^2}{GJ_p}S^2(c + \varphi s)^2\right]d\varphi$$

$$a_{33} = \frac{2\Phi R}{C}\left[\frac{S^2}{EF} + \frac{\chi_b}{GF}C^2 + \frac{R^2}{EJ_b}S^2 + \frac{\psi R^2}{GJ_p}C^2\right]$$

$$a_{44} = \frac{R}{C}\int_{-\Phi}^{+\Phi}\left[\frac{c^2}{EJ_a} + \frac{S^2 s^2}{EJ_b} + \frac{\psi C^2 s^2}{GJ_p}\right]d\varphi$$

$$a_{55} = \frac{R}{C}\int_{-\Phi}^{+\Phi}\left[\frac{s^2}{EJ_a} + \frac{S^2 c^2}{EJ_b} + \frac{\psi C^2 c^2}{GJ_p}\right]d\varphi$$

$$a_{66} = \frac{2\Phi R}{C}\left[\frac{C^2}{EJ_b} + \frac{S^2}{GJ_p}\right]$$

$$a_{14} = \frac{R^2}{C}\int_{-\Phi}^{+\Phi}\left[\frac{T}{EJ_a}\varphi sc - \frac{S}{EJ_b}(Cs^2 + TS\varphi sc) + \frac{\psi SC}{GJ_p}(s^2 - \varphi sc)\right]d\varphi$$

$$a_{23} = \frac{R^3}{C}\int_{-\Phi}^{+\Phi}\left[\frac{S}{EJ_b}(-Cc + TS\varphi s) + \frac{\psi SC}{GJ_p}(c + \varphi s)\right]d\varphi$$

$$a_{25} = \frac{R^2}{C}\int_{-\Phi}^{+\Phi}\left[\frac{T}{EJ_a}\varphi sc - \frac{S}{EJ_b}(Cc^2 - TS\varphi sc) + \frac{\psi SC}{GJ_p}(c^2 + \varphi sc)\right]d\varphi$$

$$a_{26} = \frac{R^2}{C}\int_{-\Phi}^{+\Phi}\left[\frac{1}{EJ_b}(-C^2 c + S^2\varphi s) - \frac{\psi S^2}{GJ_p}(c + \varphi s)\right]d\varphi$$

$$a_{36} = 2\Phi R^2 S\left[\frac{1}{EJ_b} - \frac{\psi}{GJ_p}\right].$$

Esprimiamo ora questi coefficienti nel caso di un numero intero n di spire, ponendo nelle relazioni precedenti: $\Phi = n\pi$. Avremo:

$$a_{11} = \frac{n\pi R}{C}\left[\frac{C^2}{EF} + \frac{\chi_b}{GF} + \frac{\chi_a}{GF}S^2 + \frac{R^2T^2}{EJ_a}\left(\frac{n^2\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{R^2}{EJ_b}\left\{C^2 - S^2 + T^2S^2\left(\frac{n^2\pi^2}{3} + \frac{1}{2}\right)\right\} + \frac{R^2}{GJ_p}S^2\left(\frac{n^2\pi^2}{3} + \frac{5}{2}\right)\right]$$

$$a_{22} = \frac{n\pi R}{C}\left[\frac{C^2}{EF} + \frac{\chi_b}{GF} + \frac{\chi_a}{GF}S^2 + \frac{R^2T^2}{EJ_a}\left(\frac{n^2\pi^2}{3} + \frac{1}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{R^2}{EJ_b}\left\{1 + T^2S^2\left(\frac{n^2\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right)\right\} + \frac{R^2}{GJ_p}S^2\left(\frac{n^2\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$a_{33} = \frac{2n\pi R}{C}\left[\frac{S^2}{EF} + \frac{\chi_a C^2}{GF} + \frac{R^2S^2}{EJ_b} + \frac{R^2C^2}{GJ_p}\right]$$

$$a_{44} = \frac{n\pi R}{C}\left[\frac{1}{EJ_a} + \frac{S^2}{EJ_b} + \frac{C^2}{GJ_p}\right]$$

$$a_{55} = a_{44}$$

$$a_{66} = \frac{2n\pi R}{C}\left[\frac{C^2}{EJ_b} + \frac{S^2}{GJ_p}\right]$$

$$a_{14} = \frac{n\pi R^2}{C}\left[-\frac{T}{2EJ_a} - \frac{S}{EJ_b}\left(C - \frac{TS}{2}\right) + \frac{3}{2}\frac{SC}{GJ_p}\right]$$

$$a_{23} = 2n\pi R^3 S\left[\frac{T^2}{EJ_b} + \frac{1}{GJ_p}\right]$$

$$a_{25} = \frac{n\pi R^2}{C}\left[-\frac{T}{2EJ_a} - \frac{S}{EJ_b}\left(C + \frac{TS}{2}\right) + \frac{SC}{2GJ_p}\right]$$

$$a_{26} = \frac{2n\pi R^2S^2}{C}\left[\frac{1}{EJ_b} - \frac{1}{GJ_p}\right]$$

$$a_{36} = 2n\pi R^2 S\left[\frac{1}{EJ_b} - \frac{1}{GJ_p}\right].$$

Si noti che i coefficienti principali (a_{ii}) sono i soli che contengano termini in cui non compaiono S o T; quindi se riteniamo trascurabile l'inclinazione dell'elica, e perciò S e T, tutti i coefficienti non principali si annullano; e quelli principali assumono i valori che per essi si eran trovati nella trattazione approssimata.

Consideriamo ora il corpo rigido B vincolato a muoversi parallelamente ad un piano assiale; e cerchiamo la corrispondenza tra le forze di questo piano e gli spostamenti da esse

prodotti. Supponiamo che questo piano sia quello xz; per gli spostamenti da questo consentiti si ha:

$$v = 0 \quad p = 0 \quad r = 0$$

e per le forze agenti in questo piano si ha:

$$Y = 0 \quad L = 0 \quad N = 0.$$

La corrispondenza che cerchiamo sarà della forma:

$$u = b_{11} X + b_{12} Z + b_{13} M; \qquad w = b_{21} X + b_{22} Z + b_{23} M;$$
$$q = b_{31} X + b_{32} Z + b_{33} M.$$

I coefficienti b_{11}, b_{21}, e b_{31}, si possono dedurre come gli spostamenti u, w, q, prodotti dalla condizione di carico:

$$X = 1 \quad Z = 0 \quad M = 0.$$

Sostituendo questi valori dati nelle equazioni del sistema (I), le condizioni $v = 0$, $p = 0$, $r = 0$ (equazioni del vincolo) ci permettono di ricavare le reazioni del vincolo, Y, L, N, che sostituite nelle altre tre delle (I) ci dànno gli spostamenti cercati $u = b_{11}$, $w = b_{21}$, $q = b_{31}$.

Si noti che la soluzione del sistema si semplifica per l'annullarsi di quei 10 tra gli a_{ik} che abbiamo visto.

Si ottiene così:

$$b_{11} = a_{11} - \frac{a_{14}^2}{a_{44}} \qquad b_{21} = 0 \qquad b_{31} = 0.$$

Analogamente facendo:

$$X = 0 \qquad Z = 1 \qquad M = 0$$

collo stesso procedimento dalle (I) si ottiene:

$$b_{12} = 0$$
$$b_{22} = a_{23} \frac{a_{26} a_{36} - a_{23} a_{66}}{a_{22} a_{66} - a_{26}^2} + a_{36} \frac{a_{23} a_{26} - a_{22} a_{36}}{a_{22} a_{66} - a_{26}^2} + a_{33}$$
$$b_{32} = a_{25} \frac{a_{26} a_{36} - a_{23} a_{66}}{a_{22} a_{66} - a_{26}^2}.$$

Infine dalla condizione

$$X = 0 \qquad Z = 0 \qquad M = 1$$

si deduce:

$$b_{13} = 0 \qquad b_{23} = b_{32} \qquad b_{33} = a_{55} - \frac{a_{25}^2 \, a_{66}}{a_{22} \, a_{66} - a_{26}^2} .$$

Se il piano parallelamente al quale si muove il corpo B e nel quale agiscono le forze ad esso applicate è il piano yz, si avrà per gli spostamenti consentiti:

$$u = 0 \qquad q = 0 \qquad r = 0 ,$$

e per le forze esterne:

$$X = 0 \qquad M = 0 \qquad N = 0 .$$

La corrispondenza tra le Y, Z, L, e gli spostamenti v, w, p, è lineare della forma:

$$v = c_{11} Y + c_{12} Z + c_{13} L ; \qquad w = c_{21} Y + c_{22} Z + c_{23} L ;$$
$$p = c_{31} Y + c_{32} Z + c_{33} L .$$

I coefficienti c_{ik} si determinano come più sopra quelli b_{ik}. Facendo:

$$Y = 1 , \qquad Z = 0 , \qquad L = 0$$

si ottiene:

$$c_{11} = a_{22} - \frac{a_{25}^2}{a_{55}} - \frac{a_{26}^2}{a_{66}} , \qquad c_{21} = a_{23} - \frac{a_{26} \, a_{36}}{a_{66}} , \qquad c_{31} = 0 .$$

Per

$$Y = 0 , \qquad Z = 1 , \qquad L = 0$$

si ricava:

$$c_{12} = c_{21} , \qquad c_{22} = a_{33} - \frac{a_{36}^2}{a_{66}} , \qquad c_{32} = 0 .$$

Ponendo poi:

$$Y = 0\,, \qquad Z = 0\,, \qquad L = 1$$

deduciamo:

$$c_{13} = 0\,, \qquad c_{23} = 0\,, \qquad c_{33} = a_{44} - \frac{a_{14}^2}{a_{44}}\,.$$

Notiamo che in ciascuna delle trasformazioni di coefficienti b_{ik} e c_{ik}, oltre ai principali, soltanto un coefficiente è diverso da zero. Inoltre nella (I) i coefficienti a_{ik} non principali ($i \neq k$) contenendo S o T si possono considerare come quantità piccole di 1° ordine (a_{26} è del 2° ordine); essi nelle espressioni di b_{ik} e di c_{ik} entrano quasi sempre (salvo che in $c_{12} = c_{21}$) con un ordine non inferiore al secondo (prodotti, quadrati, ecc.). La loro influenza nella corrispondenza qui trattata è quindi trascurabile con buona approssimazione; se si osserva poi come anche nelle espressioni dei coefficienti principali della (I) a_{ii} le quantità S e T compaiono sempre almeno al 2° grado, si scorge come siano pienamente conciliabili con una approssimazione molto stretta le ipotesi semplificative poste a base della trattazione approssimata svolta nella prima parte di questo studio.

Torino, Marzo 1915.

Sopra un nuovo problema dei valori al contorno per un cerchio.

Nota di MATTEO BOTTASSO.

Il WIRTINGER, esaminando una trasformazione di LAGRANGE nello studio della forma dei getti liquidi, è stato condotto ad un problema al contorno che non rientra in quelli considerati ordinariamente, perchè nelle condizioni assegnate sul contorno compaiono le derivate seconde. Invece, com' è noto, negli ordinari problemi al contorno vien ricercata una funzione, armonica in un determinato campo connesso, conoscendo sulla superficie, o linea, contorno del campo, i valori assunti dalla funzione stessa, ovvero dalla sua derivata normale, od anche una combinazione lineare della funzione e della derivata normale.

Il menzionato problema d'idrodinamica conduce appunto a considerare, nel piano, il potenziale logaritmico, cioè la funzione $f(x, y)$, che è regolare in un' area chiusa ed ivi verifica l'equazione:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

e soddisfa inoltre sul contorno alla condizione:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Perciò, il WIRTINGER ha suggerito al sig. H. A. v. BECKH-WIDMANSTETTER il seguente problema più generale (*):

Determinare la funzione $f(x, y)$, che goda delle seguenti proprietà:

(*) H. A. v. BECKH-WIDMANSTETTER, *Eine neue Randwertaufgabe für das logarithmische Potential* [" Monatshefte für Mathematik und Physik ", XXIII (1912), pp. 240-260).

1° di essere armonica e regolare in tutto un cerchio Γ, avente l'origine O per centro, cioè di verificare in Γ alla equazione (1);

2° di soddisfare, sulla circonferenza γ che limita Γ, alla condizione:

$$(3) \qquad Ax^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2Bxy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + Cy^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = F(x, y),$$

ove tanto le costanti (reali) A, B, C, come la funzione $F(x, y)$, sono date.

Il sig. Beckh-Widmanstetter ha studiato tale problema supponendo — come è lecito, senza ledere alla generalità, — che il raggio r di Γ sia unitario, e ponendo poi

$$(4) \qquad A = p + q + r, \qquad B = p - r, \qquad C = p - q + r,$$

si riduce a considerare, in luogo della (3), l'equazione:

$$(3') \qquad (p + q + 1)\, x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,(p - 1)\, xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \\ + (p - q + 1)\, y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = F(x, y),$$

con le condizioni

$$(5) \qquad p \neq 0, \; q \neq 0, \; p^2 \neq 1, \; q^2 \neq 1, \; q^2 - 4p \neq 0,$$

escludendo quindi, per esempio, la (2) di Wirtinger (*). La trat-

---

(*) Peraltro con questa condizione (2) il problema può risolversi facilmente. Com'è noto, il primo membro della (2) in coordinate polari vale $r^2 \frac{d^2 f}{dr^2}$, e quindi la (2) stessa non è altro che la condizione:

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} = 0 \qquad \text{(sopra } \gamma\text{)};$$

e siccome si sa che, per $f(x, y)$ armonica, il primo membro è pure una funzione armonica, dall'equazione precedente si ritrae

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} = 0 \qquad \text{(in } \Gamma\text{)};$$

dalla quale si ricava che $f(x, y)$ è (in Γ) una funzione lineare arbitraria di r, cioè $f(x, y) = a\, r + b$, essendo a, b delle costanti arbitrarie.

tazione dell'A. è fondata sulla considerazione dei sistemi di infinite equazioni, lineari e ricorrenti [(5) e (6)], da esso dedotte fra i coefficienti di $f(x, y)$ e quelli di $F(x, y)$, quando si considerano sviluppate queste funzioni in serie di FOURIER. Il signor v. BECKH-WIDMANSTETTER ha riguardato un tale sistema (*) come un qualsivoglia sistema (lineare) con un numero finito di equazioni, il che non è lecito di fare, ed è stato così indotto nell'*errore di ritenere completamente arbitrarî alcuni dei coefficienti da determinarsi* (che compaiono solo nelle prime equazioni), *il che non è* (**). — Perciò, *non è vero che la soluzione del problema dipenda in generale da otto costanti e che tale numero possa accrescersi quando* p, q *assumono dei valori particolari.*

Invece, come verrà qui dimostrato (§ 4), si ha che:

Considerando nel piano delle variabili p, q, *il triangolo (isoscele e rettangolo, in coordinate ortogonali) di vertici* (—1, 0), (1, 2), (1, —2); *per i soli valori di* p, q *coordinate di punti interni al triangolo, escluso il contorno, si ha che la soluzione del problema esiste sempre ed ammette* OTTO *(e non più di otto) costanti reali arbitrarie.*

Invece, a tutti i valori di p *e* q, *coordinate di punti che appartengono ai due angoli opposti rispetto al primo vertice del triangolo, ed esterni a questo, esclusi i lati di tali angoli, corrispondono sempre soluzioni del problema, ma con solo* QUATTRO *costanti reali arbitrarie.*

Infine, per gli altri valori di p *e* q *[appartenenti ai rimanenti due angoli opposti al vertice, formati dai lati del triangolo concorrenti in* (—1, 0), *esclusi i punti interni al triangolo, ma incluso il suo contorno ed i lati dei due angoli indicati], il problema* NON AMMETTE SOLUZIONI, *finchè la funzione* F(x, y) *non è legata da particolari relazioni [dedotte dalle* (19), (20), *o dalle* (24), (25), (26), o dalle (15)] *ai valori considerati di* p *e* q.

Se poi la F(x, y) *soddisfa alle condizioni necessarie perchè il problema ammetta in un determinato punto* (p, q), *fra quelli ora*

(*) Cfr. pure: H. A. v. BECKH-WIDMANSTETTER, *Unmittelbare Behandlung der nichthomogenen linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten* [“ Monatshefte etc. „, cit., pp. 261-266].

(**) Per convincersi subito di tale errore basta supporre che la $F(x, y)$ sia un polinomio.

indicati, una soluzione, questa conterrà TRE *sole costanti reali arbitrarie se il punto è fuori del contorno del triangolo; conterrà* QUATTRO *di tali costanti se il punto è un vertice del triangolo, od appartiene al (segmento finito del) lato opposto al vertice* $(-1, 0)$; *e ne conterrà* SEI *se il punto appartiene ai segmenti finiti degli altri due lati del triangolo (esclusi i loro estremi).*

In tal modo cade anche qualsivoglia limitazione, posta con le (5) alla risoluzione del problema data dal sig. v. BECKH-WIDMANSTETTER. Di più va osservato che la via seguita da questo A. conduce ad un risultato molto complicato (oltrechè errato per le ragioni esposte). Infatti la formula finale, malgrado l'introduzione di alcuni simboli abbreviativi e di funzioni speciali e pure essendo scritta solamente per metà, occupa nel lavoro cit. (pp. 259-260) una pagina e mezza di stampa.

Invece il procedimento, che qui seguirò, permette di risolvere il problema in tutta la sua generalità, ed in modo assai semplice, giungendo rapidamente alla formula risolutiva (10). Esso è fondato essenzialmente sulle proprietà fondamentali delle funzioni di una variabile complessa, e sulla già nota determinazione, in un cerchio, della funzione di variabile complessa, la cui parte reale assume nel contorno valori dati.

Nel § 3 si considera il caso particolare di $F = 0$. Più in generale, nel § 5 è mostrato come si possa trattare il caso in cui la F ha forma polinomiale, mediante alcuni esempi. Si ritrovano così, in tali casi speciali, le condizioni eventuali a cui deve soddisfare la F, perchè il problema ammetta soluzioni, dando in ciascuno di essi la forma esplicita assunta dalla $f(x, y)$.

§ 1. — Formula risolutiva del problema.

1. — L'equazione (3'), tenendo conto dell' equazione (1) e della relazione $x^2 + y^2 = 1$, può scriversi:

$$(6) \qquad p\left[(x^2 - y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right] + q\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \\ + \left[(x^2 - y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right] = F(x, y).$$

Ora osserviamo che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ è ovviamente una funzione della variabile complessa

$$z = x + iy,$$

non appena si ammetta, come noi faremo, che siano funzioni continue e derivabili non solo le derivate seconde, ma anche le derivate terze di $f(x, y)$; poichè la detta funzione soddisfa allora, in virtù della (1), alle condizioni di monogeneità di CAUCHY.

Indichiamo tale funzione di variabile complessa con $U(z)$, cioè poniamo:

$$U(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \tag{7}$$

inoltre, sia $F(z)$ la funzione, pure della variabile complessa z, regolare nell'area circolare Γ, la cui parte reale assume sulla circonferenza contorno γ gli stessi valori ivi presi dalla funzione data $F(x, y)$. Di tale funzione $F(z)$ si conoscono, com'è noto (*), varie espressioni assai semplici in funzione di $F(x, y)$ (**).

Dopo ciò la (6) può scriversi:

$$\mathcal{R}[pz^2 U(z)] + \mathcal{R}[qU(z)] + \mathcal{R}[z^2 U(z)] = \mathcal{R}[F(z)], \tag{8}$$

ove il simbolo $\mathcal{R}$, premesso ad una funzione, significa che di questa si deve prendere la sola parte reale, ed inoltre si conviene, anche per tutto il seguito, di indicare la *coniugata* di una qualsivoglia quantità complessa con la stessa lettera (o simbolo di funzione) usata per quest'ultima, ma in carattere *grassetto.*

(*) Vedi T. BOGGIO, *Sulle funzioni di variabile complessa in un'area circolare* [" Atti „ di questa Accademia, vol. XLVII (1911-1912), pp. 22-37].

(**) Una è stata data senza dimostrazione dallo SCHWARZ, nel " Journal f. d. r. u. angew. Math. „ (Crelle) nel 1872 [Bd. 74, *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, pp. 218-253]; un'altra, in un caso particolare, dal VILLAT negli " Annales de l'École Normale Sup. de Paris „ nel 1911 [t. 28, (3ª), *Sur la résistance des fluides*, pp. 203-311]; e tutte sono dedotte facilmente con altri notevoli risultati nella citata Nota del Prof. BOGGIO.

2. — La (8), per ipotesi, deve sussistere per tutti i punti della circonferenza γ, di centro l'origine e raggio unitario, per i quali è $r = \mathrm{mod}\, z = 1$; ossia, su questa circonferenza γ, si ha:

$$(8') \qquad \mathcal{R}\left\{ pz^2 U(z) + qU(z) + \bar{z}^2 [U(z) - U_0 - U_1 z] + \right. \\ \left. + \bar{z}^2 U_0 + \bar{z}^2 z U_1 \right\} = \mathcal{R}[F(z)],$$

avendo indicato con U_0, U_1 delle costanti complesse, per ora indeterminate; l'opportunità dell'introduzione di queste costanti risulterà chiaramente da quanto si vedrà fra poco.

Poichè, per essere $\mathrm{mod}\, z = 1$, si ha:

$$z\bar{z} = 1, \qquad \mathcal{R}(\bar{z}^2 U_0) = \mathcal{R}(z^2 \bar{U}_0),$$
$$\mathcal{R}(\bar{z}^2 z U_1) = \mathcal{R}(\bar{z} U_1) = \mathcal{R}(z \bar{U}_1),$$

l'equazione precedente si può scrivere:

$$\mathcal{R}\left\{ pz^2 U(z) + qU(z) + \frac{U(z) - U_0 - U_1 z}{z^2} + z^2 \bar{U}_0 + z\bar{U}_1 \right\} = \\ = \mathcal{R}[F(z)].$$

Nella parentesi $\{\ \}$ del primo membro si ha così una funzione della variabile complessa z, la cui parte reale è uguale alla parte reale di $F(z)$, epperò detta funzione sarà pure eguale, a meno di una costante additiva arbitraria, priva di parte reale, alla $F(z)$ stessa, cioè si avrà, sempre per $\mathrm{mod}\, z = 1$,

$$pz^2 U(z) + qU(z) + \frac{U(z) - U_0 - U_1 z}{z^2} + z^2 \bar{U}_0 + z\bar{U}_1 = F(z) + ih,$$

con h costante reale (per ora arbitraria). Osserviamo ancora che, scegliendo opportunamente i valori di U_0, U_1, possiamo far sì che il primo membro, il quale è una funzione finita e continua, al pari di $U(z)$ e di $F(z)$, sulla circonferenza γ, risulti pure tale in tutti i punti del cerchio Γ limitato da γ: basterà a tal fine che U_0, U_1 siano i valori assunti nell'origine dalla funzione $U(z)$ e dalla sua derivata prima (rispettivamente) (*). In tal modo

---

(*) Ciò giustifica la necessità dell'introduzione fatta delle costanti U_0, U_1.

i due membri dell'eguaglianza ultima, che sono due funzioni di variabile complessa, eguali sulla circonferenza γ e regolari all'interno del cerchio Γ, risulteranno ancora eguali in Γ, e si avrà quindi, per mod $z \leq 1$:

$$(9)\qquad (pz^4 + qz^2 + 1)\, U(z) - U_0 - U_1 z + U_0 z^4 + U_1 z^3 = \\ = z^2 F(z) + ihz^2.$$

Questa equazione, supposto $pz^4 + qz^2 + 1 \neq 0$, determina la funzione $U(z)$ mediante la funzione nota $F(z)$, i valori dati di p, q e le indeterminate U_0, U_1, h; precisamente, si ha:

$$(9')\qquad U(z) = \frac{z^2 F(z) + ihz^2 + U_0 + U_1 z - U_0 z^4 - U_1 z^3}{pz^4 + qz^2 + 1}.$$

3. — Ora osserviamo che, indicando con $\Phi(z)$ la funzione di variabile complessa avente come parte reale la funzione incognita $f(x, y)$, dalla (7) e dalle condizioni di analiticità di Cauchy, segue subito che:

$$\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} = U(z);$$

da cui integrando:

$$\Phi(z) = \int_0^z \left\{ \int_0^z U(z)\, dz \right\} dz + C_1 z + C_2,$$

ove C_1, C_2 sono delle costanti complesse arbitrarie, e ciascuna delle due integrazioni s'intende fatta lungo una linea qualsiasi (essendo $U(z)$ monogena in Γ) tutta contenuta in Γ e che va dall'origine al punto z (limite superiore dell'integrale), di Γ, o della circonferenza γ. Perciò, supposto $C_1 = m_1 - im_2$, $C_2 = m_0 + im$, con m, m_0, m_1, m_2 reali, la funzione cercata:

$$(10)\qquad f(x, y) = \mathcal{R} \int_0^z \left\{ \int_0^z U(z)\, dz \right\} dz + m_1 x + m_2 y + m_0,$$

conterrà tre costanti reali arbitrarie (m_0, m_1, m_2), oltre a quelle che possono risultare tali di h, e delle parti reali e dei coefficienti delle parti immaginarie di U_0, U_1. Va peraltro notato subito che l'esistenza della funzione $f(x, y)$, espressa dalla (10), è subordinata all'esistenza delle costanti U_0, U_1, h, tali che la $U(z)$ risulti regolare sulla circonferenza γ e nel cerchio Γ.

§ 2. — Condizioni di esistenza e di indeterminazione del problema.

4. — Affinchè l'equazione (9) fornisca una funzione regolare in Γ, occorre che in quei z di Γ, o di γ, per i quali si ha:

$$pz^4 + qz^2 + 1 = 0, \tag{11}$$

si abbia pure identicamente:

$$-U_0 - U_1 z + \mathbf{U}_1 z^3 + \mathbf{U}_0 z^4 = z^2 F(z) + ihz^2 . \tag{12}$$

Più precisamente, le due funzioni

$$pz^4 + qz^2 + 1, \quad z^2 F(z) + ihz^2 + U_0 + U_1 z - \mathbf{U}_1 z^3 - \mathbf{U}_0 z^4, \tag{13}$$

debbono avere sopra γ, od in Γ, gli stessi zeri ed avere in ognuno di questi la medesima molteplicità.

5. — Se $p = q = 0$, la (11) non è verificata da nessun valore (finito) di z, e le otto costanti prima indicate, che compaiono nell'espressione (10) di $f(x, y)$, sono completamente arbitrarie.

Se $p = 0$, $q \neq 0$, l'equazione (11) si riduce a $qz^2 + 1 = 0$ e le sue due radici (opposte) hanno un modulo non maggiore di uno, solo quando $q^2 \geq 1$. Quindi, nell'ipotesi considerata, per $q^2 < 1$ le costanti suindicate sono completamente arbitrarie, e per $q^2 \geq 1$ tali costanti dovranno verificare le condizioni:

$$\left\{\begin{aligned} -U_0 - U_1 z_k + \mathbf{U}_1 z_k^3 + \mathbf{U}_0 z_k^4 &= z_k^2 F(z_k) + ihz_k^2, \\ -U_0 + U_1 z_k - \mathbf{U}_1 z_k^3 + \mathbf{U}_0 z_k^4 &= z_k^2 F(-z_k) + ihz_k^2, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

avendo indicato con z_k una (qualunque) delle due radici della equazione (11) per $p = 0$. Queste equazioni (14) permettono, in generale, di determinare le costanti U_0, U_1, in funzione di $F(z_k)$, $F(-z_k)$ ed h. Precisamente, ciò si potrà fare sempre quando non sia nullo il determinante dei coefficienti di U_0, U_1, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_0$,

delle (14) e di quelle che si ottengono da queste prendendo i coniugati di ambo i membri, il quale determinante vale

$$-4 z_k \mathbf{z}_k (z_k^2 \mathbf{z}_k^2 - 1)(z_k^4 \mathbf{z}_k^4 - 1).$$

Quindi, essendo sempre $z_k \neq 0$, dalle (14) non risulteranno determinati U_0, U_1 (nel modo indicato) solo quando mod $z_k = 1$; ossia, nell'ipotesi di $p = 0$, quando $q^2 = 1$.

Supposto appunto mod $z_k = 1$, nel sistema ora ricordato, lineare nelle incognite U_0, U_1, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_0$, ih (formato dalle (14) e dalle coniugate di queste), la matrice dei coefficienti è di caratteristica *due*. Perciò, per il teorema di Rouché-Capelli (*), affinchè il sistema sia compatibile, occorre e basta che la matrice formata dai coefficienti e dai termini noti sia pure di caratteristica due. E, per questo, si riconosce esser sufficiente che sia nulla la matrice formata dai coefficienti di U_0, U_1 e dai termini noti, cioè dev'essere (perchè $z_k \mathbf{z}_k = \pm 1$ e $z_k \neq 0$):

$$F(z_k) + \mathbf{F}(z_k) = 0, \qquad F(-z_k) + \mathbf{F}(-z_k) = 0. \tag{15}$$

Soddisfatte queste condizioni, le (14) permetteranno di determinare due sole delle cinque costanti reali h, $U_0 + \mathbf{U}_0$, $U_0 - \mathbf{U}_0$, $U_1 + \mathbf{U}_1$, $U_1 - \mathbf{U}_1$, e nell'espressione (10) di $f(x, y)$ compariranno sei costanti reali.

Concludendo, nel caso considerato si ha:

Quando $p = 0$ *e* $q^2 \neq 1$ *esiste sempre una funzione* $f(x, y)$, *che soddisfa a tutte le condizioni del problema, ed espressa dalla* (10), *la quale contiene otto costanti* (*reali*) *arbitrarie se* $q^2 < 1$, *e ne contiene solo quattro se* $q^2 > 1$.

Quando $p = 0$ *e* $q^2 = 1$, *affinchè il problema ammetta delle soluzioni occorre che la funzione nota* $F(z)$ *verifichi le condizioni* (15), *ove* $z_k = \sqrt{-1/q}$; *soddisfatte queste condizioni, la* $f(x, y)$, *espressa dalla* (10), *conterrà sei costanti reali arbitrarie.*

(*) Per una dimostrazione di questo, vedasi l'Appendice della mia Nota *Il teorema di Rouché-Capelli per i sistemi di equazioni integrali* [" Atti „ di questa Accad., vol. XLVIII (1912-1913), pp. 19-42].

6. — Per $p \neq 0$, le radici dell'equazione biquadratica (11), a due a due opposte, si potranno indicare con $\pm z_1$ e $\pm z_2$, ove si ponga:

$$(16) \qquad z_1 = \sqrt{\frac{-q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2p}}, \qquad z_2 = \sqrt{\frac{-q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2p}}.$$

E si ha intanto che *se i moduli di* z_1 *e* z_2 *sono entrambi maggiori di uno, nell'espressione* (10) *di* f(x, y) *si hanno otto costanti reali affatto arbitrarie.*

Se invece (per $q^2 \neq 4p$) *uno solo di tali radicali ha modulo maggiore di uno*, mentre per l'altro radicale, z_k, si ha mod $z_k \leq 1$, dovranno essere soddisfatte le relazioni (14), lineari nelle U_0, $\mathbf{U}_0$, U_1, $\mathbf{U}_1$, h e *finchè le* (14) *sono compatibili, ossia* (n. 5) mod $z_k \neq 1$, *nella* f(x, y) *che soddisfa al problema vi sono quattro (sole) costanti reali arbitrarie.*

Dal n. 5 si ha pure che, *quando* mod $z_k = 1$, *affinchè il problema ammetta soluzioni è necessario che la funzione nota* F(z) *soddisfi alle relazioni* (15); *e, soddisfatte queste, la soluzione del problema conterrà sei costanti reali arbitrarie.*

7. — Se poi $\pm z_1$ e z_2 sono distinti, ed *i loro moduli sono entrambi minori od eguali ad uno*, le relazioni complesse (14) debbono essere soddisfatte per $k = 1, 2$. E siccome in esse compariscono, quali indeterminate, solamente il numero reale h ed i complessi U_0, U_1, si avrà che *il problema non ammette alcuna soluzione, finchè la funzione nota* F(z) [e *quindi anche la* F(x, y)] *non soddisfa a particolari relazioni.*

Affinchè, nell'ipotesi ultima, il problema abbia soluzioni, occorre e basta che sia (poichè z_1 e z_2 non sono mai nulli):

$$(17) \quad \begin{cases} 2\,(\mathbf{U}_1 z_1^2 - U_1) = z_1\,[F(z_1) - F(-z_1)], \\ 2\,(\mathbf{U}_1 z_2^2 - U_1) = z_2\,[F(z_2) - F(-z_2)], \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} 2\,(\mathbf{U}_0 z_1^4 - U_0) = z_1^2\,[F(z_1) + F(-z_1) + 2ih], \\ 2\,(\mathbf{U}_0 z_2^4 - U_0) = z_2^2\,[F(z_2) + F(-z_2) + 2ih]. \end{cases}$$

Siccome, per ipotesi, $z_1^2 \neq z_2^2$, le equazioni (17) permette-

ranno di ricavare per U_1 ed $\mathbf{U}_1$ due valori complessi coniugati, sempre quando si abbia:

$$(19)\quad (\boldsymbol{z}_2^2 - \boldsymbol{z}_1^2)\{z_1^2 z_2[F(z_2) - F(-z_2)] - z_2^2 z_1[F(z_1) - F(-z_1)]\}$$
$$= (z_2^2 - z_1^2)\{\boldsymbol{z}_2[\mathbf{F}(\boldsymbol{z}_2) - \mathbf{F}(-\boldsymbol{z}_2)] - \boldsymbol{z}_1[\mathbf{F}(\boldsymbol{z}_1) - \mathbf{F}(-\boldsymbol{z}_1)]\}.$$

Per la coesistenza delle (18) e delle loro coniugate, cioè delle

$$(18')\quad \begin{cases} U_0 z_1^4 - U_0 \quad - ihz_1^2 = z_1^2[F(z_1) + F(-z_1)]/2, \\ U_0 z_2^4 - U_0 \quad - ihz_2^2 = z_2^2[F(z_2) + F(-z_2)]/2, \\ \mathbf{U}_0 \quad + U_0 \boldsymbol{z}_1^4 + ih\boldsymbol{z}_1^2 = \boldsymbol{z}_1^2[\mathbf{F}(\boldsymbol{z}_1) + \mathbf{F}(-\boldsymbol{z}_1)]/2, \\ \mathbf{U}_0 \quad + U_0 \boldsymbol{z}_2^4 + ih\boldsymbol{z}_2^2 = \boldsymbol{z}_2^2[\mathbf{F}(\boldsymbol{z}_2) + \mathbf{F}(-\boldsymbol{z}_2)]/2, \end{cases}$$

dev'essere verificata la seguente relazione (reale, perchè coniugata di sè stessa):

$$(20)\quad \begin{vmatrix} z_1^4 & -1 & -z_1^2 & z_1^2[F(z_1) + F(-z_1)] \\ z_2^4 & -1 & -z_2^2 & z_2^2[F(z_2) + F(-z_2)] \\ -1 & \boldsymbol{z}_1^4 & \boldsymbol{z}_1^2 & \boldsymbol{z}_1^2[\mathbf{F}(\boldsymbol{z}_1) + \mathbf{F}(-\boldsymbol{z}_1)] \\ -1 & \boldsymbol{z}_2^4 & \boldsymbol{z}_2^2 & \boldsymbol{z}_2^2[\mathbf{F}(\boldsymbol{z}_2) + \mathbf{F}(-\boldsymbol{z}_2)] \end{vmatrix} = 0.$$

Se la $F(z)$ soddisfa alla (19), le (17) permetteranno sempre di determinare U_1, essendo $z_1^2 \neq z_2^2$. Se inoltre la $F(z)$ soddisfa alla (20), e tanto il determinante del primo membro, come la matrice formata dalle sue prime tre colonne, hanno per caratteristica tre, le (18') permetteranno di determinare U_0, $\mathbf{U}_0$, ed h, in modo che h sia reale ed $\mathbf{U}_0$ sia coniugato di U_0.

Si riconosce facilmente che la caratteristica della matrice ora indicata non può essere minore di due, essendo $z_1^2 \neq z_2^2$, e si riduce a due quando si ha:

$$(21)\qquad 1 - (z_1^2 + z_2^2)\boldsymbol{z}_k^2 + z_1^2 z_2^2 \boldsymbol{z}_k^4 = 0 \qquad (k = 1, 2),$$

ossia, poichè z_1 e z_2 sono radici della (11),

$$(21')\qquad p + q\boldsymbol{z}_k^2 + \boldsymbol{z}_k^4 = 0 \qquad (\text{per } k = 1, 2).$$

Perciò, i valori $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2$ debbono soddisfare alla equazione a radici reciproche della (11), e ne segue così che, per $p \neq 1$,

z_1^2, z_2^2 debbono aver modulo unitario, il che si verifica, per $z_1^2 \neq z_2^2$, solo quando $p = -1, q = 0$. Per $p = 1$, dovendo entrambi i moduli di z_1 e z_2 essere non maggiori di uno, dovrà risultare $z_1^2 = z_2^2$, il che accade solo quando $p = 1$ e $q^2 < 4$.

In tal modo, se la detta caratteristica è due, cioè se $p = -1$, $q = 0$, oppure $p = 1$, $q^2 < 4$, e la caratteristica del determinante (20) è tre, il problema non avrà soluzioni; ma se la $F(z)$ annulla tutti i minori del terz'ordine di (20), le equazioni (18') permetteranno sempre di determinar due (e due sole) delle costanti reali $U_0 + \bar{U}_0$, $i(U_0 - \bar{U}_0)$ ed h, mentre l'altra risulterà arbitraria. Dunque:

Se $\pm z_1$ e z_2 *sono distinti ed i loro moduli sono entrambi minori od eguali ad uno, non esiste in generale alcuna funzione* $f(x, y)$ *che soddisfa alle condizioni imposte dal problema.*

Affinchè il problema ammetta delle soluzioni, occorre che la funzione nota $F(z)$ *soddisfi tanto alla relazione* (19), *quanto alla* (20); *ed inoltre quando* $p = -1$, $q = 0$, *oppure* $p = 1$, $q^2 < 4$, *annulli tutti i minori del terz' ordine del determinante* (20), *chè in tal caso già risultano nulli, fra quei minori, quelli della matrice formata dalle prime tre colonne dello stesso determinante* (20).

Soddisfatte tali condizioni, esisterà una funzione $f(x, y)$, *che verifica tutte le condizioni del problema, la quale conterrà — in generale — tre sole costanti reali arbitrarie* [*le* m_0, m_1, m_2 *della* (10)]. *Precisamente, la* $f(x, y)$ *conterrà quattro (e mai più di quattro) costanti reali arbitrarie solo quando* $p = -1$, $q = 0$, *ovvero* $p = 1$, $q^2 < 4$.

8. — Nell'ipotesi di $z_1 = z_2$ (cioè di $q^2 = 4p$) ed il modulo comune dei radicali (16) non è maggiore di uno, per ciascuna delle due radici (opposte e doppie) z_1 e $-z_1$ dell'equazione (11) dovranno essere verificate tanto l'equazione (12), quanto quella che si deduce da questa derivando ambo i membri rispetto a z. In tal modo, com'è necessario (V. n. 4), le funzioni (13) avranno entrambe in z_1 e $-z_1$ uno zero di secondo ordine. Così dev'essere:

$$
\begin{aligned}
-U_0 - U_1 z_1 + \bar{U}_1 z_1^3 + \bar{U}_0 z_1^4 &= z_1^2 F(z_1) + ihz_1^2, \\
-U_0 + U_1 z_1 - \bar{U}_1 z_1^3 + \bar{U}_0 z_1^4 &= z_1^2 F(-z_1) + ihz_1^2, \\
-U_1 + 3\bar{U}_1 z_1^2 + 4\bar{U}_0 z_1^3 &= z_1^2 F'(z_1) + 2z_1[F(z_1) + ih], \\
-U_1 + 3\bar{U}_1 z_1^2 - 4\bar{U}_0 z_1^3 &= z_1^2 F'(-z_1) - 2z_1[F(-z_1) + ih];
\end{aligned}
$$

ovvero, essendo $z_1 \neq 0$,

$$(22) \quad \begin{cases} 2(\mathbf{U}_1 z_1^2 - U_1) = z_1 [F(z_1) - F(-z_1)], \\ 2(3\mathbf{U}_1 z_1^3 - U_1) = 2z_1 [F(z_1) - F(-z_1)] + \\ \qquad + z_1^2 [F'(z_1) + F'(-z_1)], \end{cases}$$

$$(23) \quad \begin{cases} 2(-U_0 + \mathbf{U}_0 z_1^4 - ihz_1^2) = z_1^2 [F(z_1) + F(-z_1)], \\ 4(2\mathbf{U}_0 z_1^2 - ih) = 2 [F(z_1) + F(-z_1)] + \\ \qquad z_1 [F'(z_1) - F'(-z_1)]; \end{cases}$$

essendo $F'(z_1)$ la derivata di $F(z_1)$ rispetto a z_1, ed $F(-z_1)$ il valore assunto da $F'(z)$ sostituendo in questa $-z_1$, a z.

9. — Analogamente a quanto si è detto nel n. 7 per le (17), le (22) permetteranno di ricavare per U_1, $\mathbf{U}_1$ due valori coniugati, quando sia $3z_1 \neq 1$ (e quindi $3\mathbf{z}_1 \neq 1$), e sia inoltre:

$$(24) \quad (3\mathbf{z}_1 - 1)\{F(z_1) - F(-z_1) + z_1[F'(z_1) + F'(-z_1)]\} + z_1(3z_1 - 1)\{\mathbf{z}_1(3\mathbf{z}_1 - 2)[\mathbf{F}(z_1) - \mathbf{F}(-z_1)] - \mathbf{z}_1^2[\mathbf{F}'(z_1) + \mathbf{F}'(-z_1)]\} = 0.$$

Se invece $3z_1 = 1$, cioè $z_1 = 1/3$, perchè esistano dei valori U_1, $\mathbf{U}_1$, soddisfacenti alle (22), dev'essere:

$$(25) \quad F(1/3) - F(-1/3) + F'(1/3) + F'(-1/3) = 0;$$

e, soddisfatta questa condizione, una qualsiasi delle (22), per es. la prima, permetterà di determinare sia la parte reale, sia quella immaginaria di U_1.

Affinchè poi le (23) permettano di determinare h (reale), U_0, $\mathbf{U}_0$, occorre e basta che le (23) coesistano insieme alle:

$$(23') \quad 2(U_0 \mathbf{z}_1^4 - \mathbf{U}_0 + ih\mathbf{z}_1^2) = \mathbf{z}_1^2 [\mathbf{F}(z_1) + \mathbf{F}(-z_1)]$$
$$4(2U_0 \mathbf{z}_1^2 + ih) = 2[\mathbf{F}(z_1) + \mathbf{F}(-z_1)] + \mathbf{z}_1[\mathbf{F}'(z_1) - \mathbf{F}'(-z_1)],$$

coniugate delle (23) stesse. Ne segue che, essendo $z_1 \neq 0$, deve essere soddisfatta la condizione (reale, perchè coniugata di sè stessa):

$$(26)\quad \begin{vmatrix} -1 & z_1^4 & -z_1^2 & z_1^2[F(z_1)+F(-z_1)] \\ 2 & 2z_1^4 & 0 & z_1^3[F'(z_1)-F'(-z_1)] \\ \mathfrak{z}_1^4 & -1 & \mathfrak{z}_1^2 & \mathfrak{z}_1^2[\mathbf{F}(z_1)+\mathbf{F}(-z_1)] \\ 2 & 2\mathfrak{z}_1^4 & 0 & \mathfrak{z}_1^3[\mathbf{F}'(z_1)-\mathbf{F}'(-z_1)] \end{vmatrix} = 0\,;$$

e la caratteristica di questo determinante (almeno eguale a due) deve essere eguale a quella della matrice formata dalle sue prime tre colonne. Se tale caratteristica è tre, le (23) determineranno completamente h (reale) ed U_0 (complesso). Quando invece detta caratteristica è due, una delle due parti (reale ed immaginaria) di U_0, od h, risulta arbitraria. È facile riconoscere che ciò accade solo quando

$$z_1^2\,(1-z_1^2\mathfrak{z}_1^2)^2 = 0\,, \qquad z_1^2\,(z_1^4-\mathfrak{z}_1^4) = 0\,;$$

da cui, essendo $z_1 \neq 0$, per $q^2 = 4p$, si trae $p = 1$, $q = \pm 2$ e $z_1{}^2 = \mp 1$; e perchè il determinante (26) abbia allora per caratteristica due occorre che, nel primo caso ($z_1{}^2 = -1$), per $z = i$ la funzione $F(z) + F(-z)$ assuma un valore privo di parte reale ed $F'(z) - F'(-z)$ assuma un valore reale, mentre nel secondo caso ($z_1{}^2 = 1$) il valore assunto dalle dette funzioni in $z = 1$ dev'essere privo di parte reale. Dunque:

Quando $z_1 = z_2$, *cioè* $q^2 = 4p$ *ed il modulo di* z_1 (*o di* z_2) *non è maggiore di uno, affinchè il problema ammetta delle soluzioni occorre* (*e basta*) *siano soddisfatte tanto la equazione complessa* (24) *per* $3z_1 \neq 1$, *ovvero la* (25) *per* $3z_1 = 1$, *quanto l'equazione reale* (26), *e la caratteristica del primo membro di questa equazione non deve superare la caratteristica della matrice formata con le sue prime tre colonne. Soddisfatte queste condizioni, la* $f(x, y)$, *espressa dalla* (10) *e soddisfacente a tutte le condizioni del problema, conterrà in generale tre sole costanti reali arbitrarie* (*le* m_0, m_1, m_2); *si avranno peraltro quattro* (*e non più di quattro*) *costanti reali arbitrarie quando e solo quando* $p = 1$, $q = \pm 2$.

§ 3. — Caso in cui la funzione data $F(x, y)$ è nulla.

10. — Quanto si è esposto precedentemente si applica senz'altro al caso in cui il secondo membro della (3) è nullo, cioè $F(z) = 0$.

In tale ipotesi sono soddisfatte tutte le condizioni di compatibilità delle (17), (18), ovvero delle (22), (23), cioè son verificate identicamente le (19), (20), ovvero la (24), o (25), e la (26), cioè *il problema ammette sempre (qualunque siano* p *e* q) *delle soluzioni.*

Precisamente, se $\pm z_1 \neq z_2$, ed entrambi i moduli di z_1 e di z_2 sono minori od eguali ad uno, dalle (17) si trae $U_1 = 0$. Inoltre, dalle (18), o (18'), si ricava $U_0 = \mathbf{U}_0 = h = 0$, finchè la matrice formata dalle prime tre colonne del determinante (20) non è nulla; ossia non sono verificate le relazioni (21), o (21'); cioè (n. 7) non è $p = 1$ (e $q^2 < 4$), o $p = -1$, $q = 0$. Quando invece questa matrice è nulla, delle tre costanti reali h, $U_0 + \mathbf{U}_0$, $i(U_0 - \mathbf{U}_0)$, una risulterà arbitraria e le altre si potranno determinare in conseguenza.

Quindi, nell'ipotesi di $F(x, y) = 0$, mod $z_1 \leq 1$, mod $z_2 \leq 1$, $z_1^2 \neq z_2^2$, *per* $\mathrm{p} \neq 1$, *e per* $\mathrm{q} \neq 0$ *quando* $\mathrm{p} = -1$, *la funzione* U(z) *è nulla, e la funzione* f(x, y) *soddisfacente al problema proposto sarà una funzione lineare arbitraria:*

$$f(x, y) = m_1 x + m_2 y + m_0. \tag{27}$$

Se invece $\mathrm{p} = 1$ $(\mathrm{q}^2 < 4)$, *la funzione* f(x, y) *che soddisfa alle condizioni del problema, espressa dalla* (10), *contiene quattro costanti reali arbitrarie.*

11. — Se con $F = 0$ facciamo l'ipotesi di $q^2 = 4p$, cioè $z_1 = z_2$, ed il modulo di questi non è maggiore di uno, dalle (22) seguirà immediatamente $U_1 = 0$, qualunque sia il valore di z_1. Inoltre, dalle (23) si trae pure $U_0 = \mathbf{U}_0 = h = 0$, finchè non è nulla la matrice formata con le prime tre colonne del determinante (26); cioè (n. 9), finchè non risulti $p = 1$, $q^2 = 4$, $z_1^2 = \pm 1$.

Soddisfatte invece queste condizioni, da una delle (23) si ricava $\mathcal{R}U_0 = 0$, ed h, che può scegliersi ad arbitrio, è opposto od eguale al doppio del coefficiente della parte immaginaria di U_0. Inoltre il primo membro della (11) si riduce ad $(1 \mp z^2)^2$, ed il numeratore di $U(z)$ sarà:

$$ihz^2 \mp \left(\frac{1}{2} ih + \frac{1}{2} ihz^4\right) = \mp \frac{1}{2} ih (1 \mp z^2)^2.$$

Quindi nelle (9′) e (10) si ha:

$$U(z) = \mp \frac{1}{2} ih, \qquad \int_0^z \left\{ \int_0^z U(z)\, dz \right\} dz = \mp \frac{1}{2} ihz^2;$$

perciò, dalla (10) si ricava — in modo esplicito — quale funzione soddisfacente alle condizioni del problema:

$$f(x, y) = hxy + m_1 x + m_2 y + m_0, \tag{28}$$

ove h, m_0, m_1, m_2 sono costanti (reali) arbitrarie. Dunque:

Se la funzione data (al contorno) F *è nulla, e l'equazione di secondo grado*

$$pt^2 + qt + 1 = 0,$$

ha due radici eguali, e non maggiori di uno in valore assoluto, la funzione f(x, y), *che soddisfa alle condizioni del problema, contiene in generale tre sole costanti arbitrarie ed è una funzione lineare arbitraria. Quando e solo quando le radici di detta equazione quadratica sono eguali a* ± 1, *cioè è* $p = 1$, $q = \pm 2$, *la funzione* f(x, y) *può contenere quattro costanti arbitrarie; poichè essa risulta allora un'arbitraria funzione bilineare in* x *ed* y.

§ 4. — Indeterminazione del problema in relazione con i coefficienti dell'equazione al contorno.

12. — Dai §§ 1 e 2, e per mezzo delle (16) è facile riconoscere se e come esistano delle soluzioni del nostro problema per valori reali assegnati di p e q.

Supposto dapprima $q^2 < 4p$ (e quindi $p > 0$), i due radicali z_1, z_2 sono complessi coniugati ed hanno quale modulo comune

$$\sqrt[4]{\frac{q^2 - (q^2 - 4p)}{4p^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{p}};$$

perciò, in tale ipotesi, le costanti U_0, U_1, h risultano arbitrarie per $p < 1$. Se $p \geq 1$ e la funzione nota $F(z)$ non soddisfa ad una qualunque delle (19) e (20), il problema non ammette soluzioni; mentre quando $F(z)$ soddisfa alle (19) e (20) e la caratteristica del determinante (20) è eguale a quella della matrice formata dalle sue prime tre colonne, esiste una funzione $f(x, y)$, che soddisfa al problema, la quale contiene in generale tre sole costanti arbitrarie. Però (n. 7) quando (e solo quando) $p = 1$ e la funzione nota $F(z)$ è tale che la caratteristica del determinante (20) sia due, come è quella della matrice formata dalle prime tre colonne dello stesso determinante, la $f(x, y)$ contiene quattro (e non più di quattro) costanti arbitrarie.

Così, *nel piano delle variabili* p, q, *i punti interni alla parabola d'equazione* $q^2 = 4p$ *son divisi dalla retta* $p = 1$ *in due segmenti parabolici: l'uno finito* ($p < 1$), *ad ogni punto del quale* (*non del contorno*) *corrisponde una soluzione del problema con otto costanti* (*reali*) *arbitrarie; l'altro infinito* ($p \geq 1$) *ad ogni punto del quale non corrisponde alcuna soluzione del problema, finchè la funzione* F *non soddisfa a particolari relazioni; ovvero* (*in caso contrario, per es., se* $F = 0$) *può — a tal punto — corrispondere una soluzione con tre od al più quattro costanti reali arbitrarie. Precisamente, se* F *soddisfa alle condizioni necessarie perchè il problema ammetta soluzioni, in queste si hanno quattro costanti reali arbitrarie se il punto appartiene alla corda che divide i due segmenti parabolici, e se ne hanno tre sole se il punto appartiene al segmento parabolico infinito esclusa la corda* ($p > 1$).

13. — Supposto $q^2 = 4p > 0$, si ha $z_1 = z_2$ e le due radici doppie della (11) sono entrambe reali, od entrambe immaginarie pure (ed opposte), ed hanno quale modulo comune

$$\sqrt[4]{\frac{q^2}{4p^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{p}}.$$

Ne segue, per i nn. 8 e 9, che:

Dei punti della parabola $q^2 = 4p$, *quelli dell'arco finito staccato dalla retta* $p = 1$, *esclusi gli estremi, corrispondono a soluzioni* (10) *del problema con otto costanti reali arbitrarie; ed a ciascun punto dell'altro arco della parabola, o non corrisponde alcuna soluzione* (*per* F *generica rispetto a quel punto*), *o può corrispondergli una soluzione* (*per* F *legata al punto da relazioni speciali*) *con quattro costanti arbitrarie, se il punto è uno dei due estremi dell'arco; o con tre sole di tali costanti, per un punto dell'arco esclusi gli estremi.*

14. — Supposto $q^2 > 4p$, allora:

a) se $p > 0$ e $q > 0$, i radicali z_1 e z_2 sono entrambi immaginari (puri), ed i quadrati dei loro moduli sono rispettivamente:

$$(29) \qquad \frac{q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2p}, \qquad (30) \qquad \frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2p};$$

b) se $p > 0$ e $q < 0$, i radicali z_1, z_2 sono entrambi reali, ed i quadrati dei loro moduli sono rispettivamente:

$$(31) \qquad \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2p}, \qquad (32) \qquad \frac{-q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2p};$$

c) se $p < 0$ (qualunque sia q), z_1 è immaginario (puro), z_2 è reale ed i quadrati dei loro moduli sono rispettivamente espressi dalle (29) e (32).

Indicando, per brevità, con p' e q' i valori assoluti di p e q, quando è $p > 0$, risulta $q' > \sqrt{q^2 - 4p}$; perciò, affinchè sia $\text{mod} z_1 \leq 1$ per $q > 0$, ovvero $\text{mod} z_2 \leq 1$ per $q < 0$, dev'essere $q' - 2p \leq \sqrt{q^2 - 4p}$, ossia:

$$2p \geq q', \qquad \text{oppure} \qquad q' - p \geq 1;$$

ed affinchè non sia maggiore di uno il modulo di z_1 per $q < 0$, o quello di z_2 per $q > 0$, dev'essere $q' + \sqrt{q^2 - 4p} \leq 2p$, ossia:

$$2p > q', \qquad \text{ed inoltre} \qquad q' - p \leq 1.$$

Quindi, se $q' > 2p > 0$, $q' - p < 1$ (ossia $q' - p < 1$ e $p < 1$, per essere $q^2 > 4p$), i moduli di z_1 e z_2 sono entrambi maggiori di uno, e la (10) contiene otto costanti arbitrarie.

Solo quando $2p > q'$ e $q' - p \leq 1$ (ossia $q' - p \leq 1$ e $p \geq 1$) i moduli di z_1 e z_2 risultano entrambi non maggiori di uno, ed uno solo di questi moduli può anche risultare eguale ad uno (quando $p = q' - 1 > 1$).

In ogni altro caso di

$$q' - p > 1 \quad \text{per } p \geq 1, \quad q' - p \geq 1 \quad \text{per } 1 > p > 0,$$

si ha che uno dei moduli indicati è sempre maggiore di uno e l'altro è uguale ad uno per $q' = p + 1 < 2$ ed è minore di uno negli altri casi.

Quindi, per i nn. 6 e 7, si ha:

Se nel piano della parabola $q^2 = 4p$ *si considerano le tangenti* t_1 *e* t_2 *alla parabola nei punti* $p = 1$, $q = \pm 2$; *dei punti esterni della parabola, e dalla stessa sua parte rispetto alla tangente nel vertice:*

1° *a quelli dei due angoli opposti al vertice di* t_1, t_2, *non contenenti la parabola, escluse le rette* t_1, t_2, *corrispondono sempre delle soluzioni del problema con quattro costanti reali arbitrarie;*

2° *ai punti dell'angolo di* t_1, t_2 *contenente la parabola, ed esterni a questa, per i quali* $p < 1$, *escluso il contorno, corrispondono soluzioni con otto costanti reali arbitrarie;*

3° *a ciascuno dei punti dell'angolo ora indicato, per i quali è* $p > 1$, *non corrisponde in generale alcuna soluzione del problema; può tuttavia esistere (per funzioni* F *particolari), anche nel punto considerato, una soluzione contenente tre (e tre sole) costanti reali arbitrarie;*

4° *a ciascuno dei punti delle rette* t_1, t_2 *per i quali* $1 > p > 0$, *non corrisponde in generale alcuna soluzione; tuttavia, per* F *particolari, il problema può ammettere soluzione, e questa contiene allora sei costanti reali arbitrarie.*

15. — Quando $p < 0$, ne segue $q' < \sqrt{q^2 + 4p'}$. La condizione perchè il modulo di z_1 non superi uno è $\sqrt{q^2 + 4p'} \leq 2p' + q$, da cui $p' + q \geq 1$; ed affinchè $\mathrm{mod}\, z_2 \leq 1$ deve essere $\sqrt{q^2 + 4p'} \leq 2p' - q$, ossia basta che $p' - q \geq 1$ e $2p' > q$.

Quindi, per $p' + q' < 1$, i moduli di entrambi i radicali z_1, z_2 sono maggiori di uno; per $p' - q' \geq 1$ detti moduli sono entrambi non maggiori di uno, risultando anzi tutti e due eguali ad uno quando e solo quando $p = -1$, $q = 0$; in ogni altro caso uno di questi moduli è maggiore di uno, mentre l'altro è eguale ad uno per $q' = p + 1$ e minore di uno per $q' \neq p + 1$.

Dei punti del piano della parabola $q^2 = 4p$, *situati dalla parte opposta della parabola, rispetto alla tangente nel vertice:*

1° *a quelli che appartengono ai due angoli opposti al vertice delle rette* t_1, t_2 *e non contenenti la parabola, escluso il contorno, corrispondono sempre soluzioni del problema contenenti quattro (e non più di quattro) costanti reali arbitrarie;*

2° *a ciascun punto delle rette* t_1, t_2, *per cui è* $-1 < p < 0$, *non corrisponde in generale alcuna soluzione del problema; se però* F *soddisfa a determinate relazioni (dipendenti dal valore di* p *considerato), il problema ammetterà una soluzione con sei costanti reali arbitrarie;*

3° *ad ogni punto dell'angolo di* t_1, t_2 *che contiene la parabola (per* $p < 0$), *escluso il contorno, corrisponde una soluzione con otto costanti reali arbitrarie;*

4° *a ciascuno dei punti del rimanente angolo, opposto al vertice a quello che contiene la parabola, compresi i lati, non corrisponde in generale alcuna soluzione del problema; tuttavia, se la* F *è legata da relazioni speciali al punto considerato, e questo è il vertice dell'angolo, esisterà una soluzione con quattro costanti reali arbitrarie; se non si tratta invece del vertice, l'eventuale soluzione conterrà tre sole costanti reali arbitrarie.*

16. — Basta ora riunire quanto si è detto nel n. 5 per $p = 0$ con quanto si è esposto nei precedenti numeri 12-15, per poter enunciare senz'altro, avuto riguardo all'insieme di tutti i valori che possono essere assunti dalla coppia p, q di numeri reali, la proprietà enunciata nell'introduzione.

§ 5. — Alcuni casi particolari.

17. — Si può riconoscere, in altro modo, la necessità per la funzione nota $F(z)$ di soddisfare a delle relazioni particolari

affinchè, in certi casi (enumerati nei §§ precedenti), il problema ammetta delle soluzioni, supponendo che la $F(z)$ stessa, pur senza essere nulla (come si è supposto nel § 4), si riduca ad un polinomio. Mi limiterò a mostrarlo sopra qualche esempio:

1° Sia $F(z)$ un polinomio di secondo grado in z, cioè:

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 , \tag{33}$$

sia la funzione di variabile complessa, la cui parte reale su γ (come in ogni punto del piano) è:

$$F(x, y) = a_0' + a_1' x - a_1'' y + a_2' (x^2 - y^2) - 2a_2'' xy , \tag{33'}$$

avendo usato, per ciascuno dei coefficienti a_0, a_1, la stessa lettera con un apice per indicarne la parte reale, e con due apici per indicarne il coefficiente della parte immaginaria, come conveniamo di fare, in questo §, anche per tutti gli altri parametri complessi $U_0, U_1, b_0, b_1, \ldots$

Supponiamo poi che $p \neq 0$, e q, siano tali che i moduli delle radici dell'equazione (11) siano tutti non maggiori di uno. Allora i moduli delle due funzioni (12) debbono avere gli stessi zeri (in Γ o su γ) e la stessa molteplicità in ognuno di essi, per il che occorre e basta si abbia, per ogni valore di z:

$$\begin{aligned} z^2 (ih + a_0 + a_1 z + a_2 z^2) + U_0 + U_1 z - U_1 z^3 - U_0 z^4 = \\ = b_0 (p z^4 + q z^2 + 1) , \end{aligned}$$

essendo b_0 un numero complesso. Occorre quindi esistano delle costanti U_0, U_1, b_0 (complesse) ed h (reale) soddisfacenti alle condizioni

$$U_0 = b_0 , \; U_1 = 0 , \; a_1 - U_1 = 0 , \; a_0 + ih = b_0 q , \; a_2 - U_0 = b_0 p .$$

Dalla 2ª e 3ª segue intanto che *dev'essere* $a_1 = 0$, *cioè* $F(z)$ *espressa dalla* (33) *dev'essere funzione pari* [e con ciò risulta soddisfatta la (19), o la (24)]. Inoltre, dalle rimanenti equazioni si trae:

$$U_0 q - ih = a_0 , \qquad U_0 p + U_0 = a_2 ; \tag{34}$$

ossia:

$$qU_0' = a_0', \ (p+1)U_0' = a_2', \ qU_0'' - h = a_0'', \ (p-1)U_0'' = a_2'',$$

per la cui coesistenza, se $p^2 \neq 1$, dev'essere:

$$(35) \qquad (p+1)\,a_0' = qa_2',$$

e, soddisfatta questa [corrispondente alla (20)], si ricava:

$$U_0 = \frac{a_2'}{p+1} + i\,\frac{a_2''}{p-1}, \qquad h = \frac{qa_2''}{p-1} - a_0''.$$

Dopo ciò, siccome nella (10), per il caso in esame si ha:

$$\mathcal{R}\int_0^z \left\{ \int_0^z U(z)\,dz \right\} dz = \frac{1}{2}\,\mathcal{R}(U_0 z^2) = \frac{1}{2}\,U_0'(x^2 - y^2) - U_0'' xy,$$

si potrà concludere che:

Quando i moduli delle radici dell'equazione (11) *non sono maggiori di uno,* $p^2 \neq 1$, *e la data funzione al contorno è espressa dalla* (33′), *il problema non ammette soluzioni se non sono verificate le condizioni* $a_1 = 0$, $(p+1)\,a_0'' = qa_2''$; *se queste sono soddisfatte esisterà invece una funzione, che soddisfa al problema,*

$$(36) \quad f(x,y) = \frac{1}{2}\,U_0'(x^2 - y^2) - U_0'' xy + m_1 x + m_2 y + m_0,$$

la quale contiene tre sole costanti arbitrarie, essendo $U_0' = a_2'/(p+1)$, *ed* $U_0'' = a_2''/(p-1)$.

Lo stesso può ripetersi per $p = -1$ e $q \neq 0$ (in cui la (35) si riduce ad $a_2' = 0$) ponendo allora $U_0' = a_0'/q$.

Se invece è $p = -1$ e $q = 0$, la $F(x,y)$ dovrà soddisfare alle condizioni: $a_1 = a_0' = a_2' = 0$, e nella (36) anche U_0' sarà arbitrario.

Infine, per $p = 1$, la F deve soddisfare, oltre a quelle indicate ($a_1 = 0$, $2a_0' = qa_2'$), alla condizione $a_2'' = 0$, e, nella (36), U_0'' è allora arbitrario.

2° Mantenendo per $F(x, y)$ l'espressione (33'), supponiamo sia $p = 0$, $q^2 > 1$. Dovrà allora essere, per ogni valore di z:

$$z^2 [ih + F(z)] + U_0 + U_1 z - U_1 z^3 - U_0 z^4 =$$
$$= (qz^2 + 1)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2),$$

essendo b_0, b_1, b_2 complessi; cioè devon sussistere le relazioni:

$$U_0 = b_0, \quad U_1 = b_1, \quad a_0 + ih = qb_0 + b_2,$$
$$a_1 - U_1 = qb_1, \quad a_2 - U_0 = qb_2;$$

ossia:

$$(37) \quad \begin{cases} b_0 = U_0, \ b_1 = U_1, \ b_2 = a_0 - qU_0 + ih, \\ q^2 U_0 - U_0 - iqh = a_0 q - a_2, \ qU_1 + U_1 = a_1. \end{cases}$$

Le ultime due relazioni permettono, per $q^2 \neq 1$, di determinare U_0, U_1:

$$(38) \quad U_1 = \frac{a_1'}{q+1} + i\frac{a_1''}{q-1}, \quad U_0 = \frac{q^2 a_0' - a_2'}{q^2 - 1} + i\frac{qa_0'' + qh - a_2''}{q^2+1},$$

mediante i valori dati (di q e delle a) e di h che può essere arbitrario; dopo di che, dalle precedenti relazioni si ottengono b_0, b_1, b_2.

Per $q^2 = 1$, affinchè sussistano le due ultime relazioni (37), dev'essere:

$$(39) \quad \begin{aligned} a_1'' &= 0, \ a_0' = a_2' \ \text{per} \ q = 1; \\ a_1' &= 0, \ a_0' = -a_2' \ \text{per} \ q = -1; \end{aligned}$$

ed allora risulterà arbitrario U_0', oltrechè U_1'' nel 1° caso, ed U_1' nel 2° caso; cosicchè le (37) si potranno tutte soddisfare lasciando tre costanti reali arbitrarie.

Quindi, dalle (10), si otterrà facilmente:

$$(40) \quad \begin{aligned} f(x,y) = {} & \frac{1}{12}(a_0' - qU_0')(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) - \\ & - \frac{1}{3}(a_0'' - qU_0'' + h)(x^2 - y^2)xy + \\ & + \frac{1}{6}[U_1'x(x^2 - 3y^2) - U_1''y(3x^2 - y^2)] + \\ & + \frac{1}{2}U_0'(x^2 - y^2) - U_0''xy + m_1x + m_2y + m_0, \end{aligned}$$

ove per $q^2 \neq 1$ sono arbitrarie le sole costanti m_0, m_1, m_2, h, mentre U_0', U_0'', U_1', U_1'' son definite dalle (38), che esprimono $U_0 = U_0' + iU_0''$, ed $U_1 = U_1' + iU_1''$; se poi $q^2 = 1$, affinchè esistano soluzioni debbono essere verificate le relazioni (39), e, soddisfatte queste, si avranno sei costanti arbitrarie: cioè, oltre alle precedenti, U_0' ed una delle due U_1', U_1''.

3° Nel caso di $p = q = 0$, dalla (10) si ottiene immediatamente, con la doppia integrazione, l'espressione di $f(x,y)$, supposto che $F(z)$ sia una qualsivoglia funzione intera. Così, per es., se la $F(z)$ è ancora data dalla (33), si ricava subito:

$$\begin{aligned} f(x,y) = &- \frac{1}{30}(U_0' - a_2')(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6) + \\ &+ \frac{1}{15}(U_0'' - a_2'')(3x^4 - 10x^2y^2 + 3y^4)\,xy - \\ &- \frac{1}{20}(U_1' - a_1')(x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4)\,x + \\ &+ \frac{1}{20}(U_1'' - a_1'')(5x^4 - 10x^2y^2 + y^4)\,y + \\ &+ \frac{1}{12}a_0'(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) - \\ &- \frac{1}{3}(a_0'' + h)(x^2 - y^2)\,xy + \\ &+ \frac{1}{6}U_1'(x^2 - 3y^2)\,x - \frac{1}{6}U_1''(3x^2 - y^2)\,y + \\ &+ \frac{1}{2}U_0'(x^2 - y^2) - U_0''xy + m_1x + m_2y + m_0, \end{aligned}$$

ove sono costanti arbitrarie $U_0', U_0'', U_1', U_1'', m_1, m_2, m_0, h$.

Torino, Febbraio 1915.

Nuove applicazioni degli operatori.

Nota di C. BURALI-FORTI.

Le *Formazioni geometriche* di (Grassmann-Peano), i *vettori*, le *lunghezze*, le *aree*,... si sanno attualmente definire, o *per astrazione*, — e in tal caso sono classi che risultano formate da *enti semplici* —, o col metodo di Russell, — e in tal caso sono classi che hanno per elementi, classi, classi di classi... di coppie di terne... di classi... —. In questa nota, abbandonando l'un metodo e l'altro, definisco *nominalmente* (cioè, " ente da definire „ = " espressione nota „) gli enti ora considerati come classi di *operatori*, e quindi come classi formate da elementi semplici quali si considerano sempre praticamente.

Il principio logico che ho posto a base (*) ([4]) delle definizioni per astrazione, non solo non è infirmato dal contenuto di

(*) Avremo occasione di citare i lavori seguenti:

([1]) G. Peano, *Delle proposizioni esistenziali*, " International Congress of Mathematicians „, Cambridge, 1912.

([2]) S. Catania, *Sul concetto di funzione monodroma e su quelli che da esso derivano*, " Rend. R. Acc. Lincei „, vol. XXII, s. 5ª (1913), pp. 546-551, 639-642.

([3]) C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Éléments de calcul vectoriel* (A. Hermann, Paris, 1901), *Analyse vectorielle générale*, vol. I, II (Mattei e C., Pavia, 1912, 1913)

([4]) C. Burali-Forti, *Gli enti astratti definiti come enti relativi ad un campo di nozioni* (" Rend. R. Acc. Lincei „, vol. XXI, s. 5ª, 1912).

([5]) Idem, *I numeri reali definiti come operatori per le grandezze* (Id., 1915).

([6]) Idem, *Sur les lois générales de l'algoritme des symboles de fonction et d'opération* (International Congress, Cambridge, 1912).

([7]) Idem, *Geometria analitico-proiettiva* (G. B. Petrini, Torino, 1912).

([8]) Idem, *Isomerie vettoriali e moti geometrici*, " Memorie della R. Accademia di Torino „, 1915.

questa Nota, ma riceve, anzi, una piena conferma. Per l'esatta applicazione del principio ora ricordato (la proposizione [8]) è necessario *precisare* il campo di nozioni $\mathcal{N}$, campo che varia, necessariamente, col variare della classe che si vuol definire per astrazione (*) e può anche variare secondo il nostro arbitrio, cioè a seconda del campo logico che ci *conviene* avere a disposizione. Dal contenuto di questa nota risulta, ad es., che se il campo $\mathcal{N}$ contiene gli *operatori*, allora per le *direzioni*, *vettori* ecc., l'ipotesi della [8] non è verificata e quindi la definizione per astrazione non è applicabile; nella stessa ipotesi non è applicabile neanche per i numeri reali che si possono ottenere (5) come operatori per le grandezze.

È appunto come *operatori*, o *funzioni monodrome*, che, in questa nota, definisco le classi indicate in principio. Per le leggi formali che devono regolare gli operatori si possono consultare i lavori (2) (3) (6) ai quali intendo riferirmi. Per la definizione, logicamente esatta, di *operatore*, mi riferisco al recente lavoro di S. Catania (2). Una corrispondenza univoca (generica) tra gli elementi della classe u e quelli della classe v è determinata da un elemento (classe di coppie) della classe $\mathrm{F}(u, v)$ che è definita nominalmente. L'*azione grafica* (*primitiva*, o almeno attualmente non definibile mediante elementi noti) di preporre il simbolo f, operatore, all'elemento generico x di u per ottenere il corrispondente fx di v, conduce alla definizione di *operatore tra gli* u *e i* v, $\mathrm{Op}(u, v)$, identico al $v f u$ di Peano, e, come questo, logicamente preciso. La relazione tra $\mathrm{F}(u, v)$ e $\mathrm{Op}(u, v)$ è stata posta in piena luce dal Catania; ma si può, di più, sempre mediante il con-

---

(*) A questo proposito il prof. E. Senigaglia mi fece giustamente osservare che la frase " campo delle nozioni logico-geometriche contenute nei libri di Euclide „ da me data (4) per individuare il campo $\mathcal{N}$ cui si deve ricorrere per definire per astrazione la classe *direzione*, individua invece un campo $\mathcal{N}$ per il quale l'ipotesi della [8] non è vera e quindi il principio [8] non è applicabile; e non è vera perchè, nel campo $\mathcal{N}$ considerato, la classe direzione si può rappresentare biunivocamente in una mezza superficie sferica soppressa una parte del contorno. Ciò è perfettamente esatto. Ma l'obiezione sussiste solo perchè nella mia nota (4) io ho imperfettamente caratterizzato il campo $\mathcal{N}$ per l'esempio delle direzioni; avrei dovuto escludere, fra altro, i *sistemi non lineari* dal campo $\mathcal{N}$; una volta fatto questo la [8] è applicabile alle direzioni.

cetto grafico primitivo sopra indicato, definire gli Op (u, v) mediante F (u, v), così:

$$u, v \in \mathrm{Cls} . \supset . \mathrm{Op}\,(u, v) = f \ni [\exists\, \mathrm{F}\,(u, v) \cap \iota\,(x; fx) \,|\, x`u].$$

Occorre peraltro notare, come ha ben osservato il Catania, che senza l'*azione grafica* considerata non si può da F (u, v) dedurre Op (u, v), come non è possibile la deduzione inversa. L'*azione grafica* considerata è fatto costante e comune in tutta la matematica (sen x, log x, operatori di Hamilton, Omografie vettoriali [3]); può essere negata, ma il negarla vale esprimere una *opinione* e non constatare un errore logico; può essere non adoperata, e allora ci si priva volontariamente di una notazione che, oltre essere comune e semplice, ha reso, e rende sempre, i più grandi servigi.

Contrariamente a quanto fa il Russell, per il quale è concetto fondamentale quello di *relazione*, io intendo che il concetto fondamentale (del resto logicamente definito [2]) sia quello di operatore. I due concetti sono *equivalenti* perchè l'uno deduttibile dall'altro [2]; ma quello di operatore è più comune e più semplice del concetto di relazione, e quindi la preferenza spetta indubbiamente all'operatore, tanto più che in tal modo non ci si allontana dalla bella e geniale semplicità hamiltoniana, per seguire forme inadeguate allo scopo finale.

Può sorgere la questione dell'*esistenza*. Pare che la preferenza che si dà alle *relazioni* in confronto agli *operatori* sia dovuta al fatto che, facendo uso delle relazioni, le classi definite mediante queste hanno esistenza effettiva. Ora è chiaro che tale esistenza delle classi non può resultare se non è provata, a priori, l'esistenza delle relazioni adoperate. Allora, se le relazioni esistono, *per dimostrata esistenza e per significato esatto e ben precisato dell'esistere*, esistono pure gli operatori, che delle relazioni sono immediata conseguenza. Se, cioè, seguendo Russell, si può dimostrare l'*esistenza delle relazioni*, la stessa dimostrazione, con lievi cambiamenti di forma, deve servire per dimostrare l'*esistenza degli operatori*. Ergo...! Ma credo che sarebbe opportuno che coloro che amano discutere dell'esistenza, precisassero bene il significato della parola *esiste* [1].

Giova notare esplicitamente che gli enti **F**, *vettori*, *lunghezze*,...

definiti, in questa Nota, come *operatori*, traggono da questa loro origine certe operazioni fondamentali che, una volta stabilite, permettono agli enti stessi di emanciparsi dalla loro origine e, con algoritmo loro proprio, procedere, sicuri di sè e fecondi di applicazioni, nel campo matematico. E questa è legge naturale; i figli ricevono dai genitori vita e forza e della vita e forza acquisita si servono, a suo tempo, per operare da sè senza che, per questo, la loro origine resti distrutta; anzi, in certi casi, questa origine serve loro di appoggio, appoggio eventuale ma non continuo. Ampio ed interessante esempio di enti simili a quelli definiti in questa Nota, è dato dalle *Omografie vettoriali* (3) che, definite come operatori tra vettori e vettori, acquistano algoritmo loro proprio, e questo, insieme alla loro origine, rende i più grandi servigi alla Meccanica, alla Fisica matematica e alla Geometria (3).

Formazioni geometriche di Grassmann-Peano.

1. — Se A, B, C, D sono punti, con la notazione

$$\text{Vol}\,(A, B, C, D) \tag{1}$$

indichiamo il numero reale relativo tale che: 1° il suo valore assoluto è il numero che misura il volume del tetraedro di vertici A, B, C, D essendo l'unità di misura il cubo di una lunghezza stabilita una volta per tutte (e che riteniamo sempre sottintesa); 2° se non è nullo, il suo segno è $+$ o $-$ secondo che si può disporre, o no, l'indice, il medio e il pollice della mano destra, da A rispettivamente verso B, C, D.

Inutile ripetere qui (3) (7) come varia il segno del numero (1) quando varia l'*ordine* dei punti A, B, C, D. Basta tener presente che il numero (1) è funzione della *successione* A, B, C, D e *non* della classe di punti formata da A, B, C, D.

2. — Sia r uno qualunque dei numeri interi 1, 2, 3.

Assumendo i i valori interi $1, 2, \ldots n$, siano x_i dei *numeri reali* e $A_{1i}, \ldots A_{ri}$ dei *punti* e con la notazione (*provvisoria*)

$$(x_i\,,\ A_{1i}\,, \ldots A_{ri})_1^n \tag{2}$$

indichiamo la *successione* i cui elementi si ottengono dalla successione, di $r+1$ elementi (un numero e r punti), $x_i, A_{1i}, \ldots A_{ri}$, variando i da 1 ad n.

Ciò posto, con la notazione (pure *provvisoria*)

$$f_r(x_i, A_{1i}, \ldots A_{ri})_1^n \tag{3}$$

indichiamo: *quell'operatore, tra gruppi di* $4-\mathrm{r}$ *punti e numeri reali, tale che comunque si fissino i* $4-\mathrm{r}$ *punti* $\mathrm{P}_1, \ldots \mathrm{P}_{4-r}$, si *abbia sempre*

$$[f_r(x_i, A_{1i}, \ldots A_{ri})_1^n](P_1, \ldots P_{4-r}) = \Sigma_1^n x_i . \mathrm{Vol}\,(A_{1i}, \ldots A_{ri}, P_1, \ldots P_{4-r}). \tag{4}$$

In altri termini: l'ente (3) deve essere il simbolo di una funzione monodroma di $4-r$ variabili, appartenendo queste al campo totale dei punti, che applicato ad un qualsiasi gruppo di $4-r$ punti produce il numero reale indicato dal secondo membro della (4) (*).

Data la successione (2) il numero secondo membro della (4) è determinato in modo unico *comunque sia dato il gruppo dei* $4-\mathrm{r}$ *punti* P, inoltre è determinato con *legge finita.* Dunque è *determinato* ed *unico* (o, se piace, *esiste* ed è *unico*) l'operatore che applicato al gruppo arbitrario di $4-r$ punti P produce il secondo membro della (4). Ma si è convenuto di indicare tale operatore, che dipende dalla successione (2), con la notazione composta (3) e quindi: *il simbolo composto* (3) *è un operatore* (il che *implica, esiste ed è unico*) *tra gruppi di* $4-\mathrm{r}$ *punti e numeri reali.*

Nel simbolo composto (3), la parte (2) è variabile mentre f_r è *simbolo fisso* che, a sua volta, risulta essere *operatore* (esistente ed unico) tra *successioni del tipo* (2) e *operatori tra gruppi di* $4-\mathrm{r}$ *punti e numeri reali.* Avremmo dunque potuto definire prima f_r,

---

(*) Sottintesa l'ipotesi relativa alla (1), la definizione simbolica dell'operatore (3), ad es., per $r=2$, è la seguente, ove scriviamo p al posto di *punto*,

$$f_2(x_i, A_{1i}, A_{2i})_1{}^n = \iota\,[\mathrm{q\,f\,(p\,{}^{\varsigma}\,p)} \cap \varphi \ni \}\, P, Q \in \mathrm{p} \,.\, \supset_{P,Q} .\, \varphi(P, Q) = \Sigma_1{}^n\, x_i\, \mathrm{Vol}\,(A_{1i}, A_{2i}, P, Q) \{\,].$$

poi da esso *dedurre* l'operatore (3); ma, a parte la maggior complicazione di forma, è inutile seguire tale via perchè, una volta definite le operazioni fondamentali per gli operatori (3), questi rimangono espressi in modo semplicissimo mediante speciali operatori (3) e il simbolo f_r sparisce del tutto (Cfr. n. 4) (*).

3. — Variando la successione (2) nel campo di tutte le possibili successioni formate come la (2), l'operatore (3) percorre una *classe* che indicheremo con $\mathbf{F}_r$ e che è niente altro che la *classe delle formazioni geometriche di specie* r *di* Grassmann-Peano.

Dicendo, dunque, " a è una $\mathbf{F}_r$ " si vien a dire precisamente che *esiste una successione* (2) *tale che*

$$a = f_r\,(x_i\,,\ A_{1i}\,,\ \dots,\ A_{ri})_1^n\,.$$

La condizione di eguaglianza di due $\mathbf{F}_r$, che risulta identica a quella usualmente adoperata ([7]), si *deduce* facilmente dalla definizione nominale delle $\mathbf{F}_r$. Siano a, b delle $\mathbf{F}_r$, vale a dire si abbia

$$(5)\qquad a = f_r\,(x_i\,,\ A_{1i}\,,\ \dots,\ A_{ri})_1^n\,,\qquad b = f_r\,(y_i\,,\ B_{1i}\,,\ \dots,\ B_{ri})_1^m\,;$$

siccome a, b sono operatori pei gruppi di $4-r$ punti, dalla condizione di eguaglianza di due operatori ([2]) risulta

$$a = b \quad \text{solo quando} \quad a\,(P_1\,,\ \dots,\ P_{4-r}) = b\,(P_1\,,\ \dots,\ P_{4-r})$$

qualunque siano i $4-r$ punti P, vale a dire, per la (4),

$$(6)\quad \Sigma_1^n x_i \mathrm{Vol}\,(A_{1i},\dots A_{ri},\, P_1,\dots P_{4-r}) = \Sigma_1^m y_i \mathrm{Vol}\,(B_{1i},\dots B_{ri},\, P_1,\dots P_{4-r})$$

che è appunto l'ordinaria condizione necessaria e sufficiente per l'identità delle (5).

(*) L'f_r è però necessario nella notazione (3). L'operatore (3) dipende dalla successione (2) e quindi il simbolo che lo indica deve contenere, come indice almeno, la successione (2); non può esser indicato *tout-court* con la notazione (2), perchè esso è una funzione della successione (2) e non può essere identificato, neanche provvisoriamente, alla (2).

Giova estendere ad $r = 4$ il significato di f_r, $\mathbf{F}_r$ considerando le successioni (2) pure per $r = 4$. Porremo

$$(7) \quad f_r(x_i, A_{1i}, A_{2i}, A_{3i}, A_{4i})_1^m = \Sigma_1^n x_i \operatorname{Vol}(A_{1i}, A_{2i}, A_{3i}, A_{4i})$$

e quindi $\mathbf{F}_r$, *forma geometrica di* 4^a *specie*, è niente altro che la classe dei *numeri reali* (*relativi*).

4. — Essendoci, in generale, proposto di definire le $\mathbf{F}$, il nostro compito sarebbe finito. Ma crediamo interessante accennare al modo di definire le operazioni fondamentali per le $\mathbf{F}$ e far vedere come, da queste, si deduca la forma effettiva degli operatori (3) mediante speciali $\mathbf{F}$.

La $\mathbf{F}_r$ nulla si definisce come nel modo ordinario ([7]) e risulta, per le (5), (6), unica e ben determinata. Si indica, per r qualunque, col simbolo 0 (zero).

La *somma* di due $\mathbf{F}_r$, il *prodotto di una* $\mathbf{F}_r$ *per un numero reale*, si possono definire, approfittando della qualità di operatori, così (ove p sta al posto di *punto*);

$$(7) \quad a, b \,\epsilon\, \mathbf{F}_r \,.\, \supset .\, a + b = \iota\, \mathbf{F}_r \cap x \ni \{ P_1, \ldots, P_{4-r} \,\epsilon\, p \,.\, \supset_P . \; x(P_1, \ldots, P_{4-r}) = a(P_1, \ldots, P_{4-r}) + b(P_1, \ldots, P_{4-r}) \} .$$

$$(8) \quad a \,\epsilon\, \mathbf{F}_r \,.\, h \,\epsilon\, q \,.\, \supset .\, ha = \iota\, \mathbf{F}_r \cap x \ni \{ P_1, \ldots, P_{4-r} \,\epsilon\, p \,.\, \supset_P . \; x(P_1, \ldots, P_{4-r}) = ha(P_1, \ldots, P_{4-r}) \} .$$

Per il *prodotto alternato* (progressivo) di una $\mathbf{F}_r$ per una $\mathbf{F}_s$, con $r + s \lesseqgtr 4$, conviene ricorrere alla ordinaria definizione ([7]) poichè non esiste *il prodotto funzionale* ([6]) di una $\mathbf{F}_r$ per una $\mathbf{F}_s$. Se a è una $\mathbf{F}_r$ e b è una $\mathbf{F}_s$ indicheremo con $a \bigcirc b$ il *prodotto alternato* di a per b, supposto $r + s \lesseqgtr 4$, e lo intenderemo definito nel modo solito come $\mathbf{F}_{r+s}$, osservando che si può considerare il prodotto di tre fattori di specie r, s, t con $r + s + t \lesseqgtr 4$ e il prodotto di quattro $\mathbf{F}_1$, ma non oltre. Ciò posto si ha immediatamente

$$(9) \quad \begin{cases} f_1(x_i, A_{1i})_1^n = \Sigma_1^n x_i (1A_{1i}) \\ f_2(x_i, A_{1i}, A_{2i})_1^n = \Sigma_1^n x_i (1A_{1i}) \bigcirc (1A_{2i}) \\ f_3(x_i, A_{1i}, A_{2i}, A_{3i})_1^n = \Sigma_1^n x_i (1A_{1i}) \bigcirc (1A_{2i}) \bigcirc (1A_{3i}) \end{cases}$$

quando si estenda alla somma delle $\mathbf{F}_r$ il Σ_1^n usato in algebra.

Essendo A un punto, si può poi, come di solito ([7]), *identificare* $1A$ ad A, cioè includere i *punti* nelle $\mathbf{F}_1$, ed inoltre *sottintendere*, quando ciò non possa portare ad assurdi, il segno $\bigcirc$ di operazione; allora i secondi membri delle (9) danno le forme usuali

$$\Sigma_1^n x_i A_{1i}\,, \qquad \Sigma_1^n x_i A_{1i} A_{2i}\,, \qquad \Sigma_1^n x_i A_{1i} A_{2i} A_{3i}\,,$$

forme *abbreviate* e molto comode per il calcolo pratico.

È peraltro indispensabile tener ben presente che, se l'identificazione di $1A$ ad A non produce inconvenienti logici (solo dà a *punto* un significato alquanto diverso dall'usuale), la soppressione del simbolo $\bigcirc$ di prodotto alternato, soppressione *assoluta*, conduce a notevoli errori logici. Se, ad es., a è una $\mathbf{F}_r$, b è una $\mathbf{F}_s$, con $r+s \lesseqgtr 4$, $a \bigcirc b$ è una $\mathbf{F}_{r+s}$ e quindi il simbolo composto $a \bigcirc$ è operatore, a sinistra, tra $\mathbf{F}_s$ e $\mathbf{F}_{r+s}$; se si sopprime il simbolo $\bigcirc$ allora $a\,b$, identico ad $a \bigcirc b$, è una $\mathbf{F}_{r+s}$ e segue che *a è un operatore tra $\mathbf{F}_s$ e $\mathbf{F}_{r+s}$*, il che è assurdo, poichè a, per definizione, *è operatore tra gruppi di* $4-r$ *punti e numeri reali.* Molti assurdi, troppo usuali, e molte complicazioni di notazioni potrebbero essere evitate seguendo delle leggi fisse, e razionalmente stabilite, per l'algoritmo degli operatori e delle operazioni ([3]).

Vettori.

5. — Una volta introdotte le $\mathbf{F}$, i *vettori* risultano come speciali $\mathbf{F}_1$, $1B - 1A$, ovvero $B - A$ se si conviene di sopprimere il coefficiente 1, essendo A, B dei punti. Ma si può voler introdurre i vettori indipendentemente dalle $\mathbf{F}$; e allora si può operare così.

Se A, B sono punti, il *vettore da* A *a* B, che può indicarsi subito, seguendo Hamilton e Grassmann, con la notazione $B - A$, lo *definiamo* stabilendo che sia *quell'operatore, tra terne di punti e numeri reali, tale che, qualunque siano i punti* P, Q, R, *si abbia sempre*

$$(10) \quad (B - A)(P, Q, R) = \mathrm{Vol}\,(B, P, Q, R) - \mathrm{Vol}\,(A, P, Q, R),$$

ovvero in simboli

$$(11)\quad A, B \varepsilon \mathrm{p} . \supset . B - A = \iota\, [\mathrm{q\,f}(p \,\vdots\, p \,\vdots\, p) \cap \alpha \ni \} P, Q, R \varepsilon \mathrm{p} . \supset_{P,Q,R} . \alpha(P, Q, R) = \mathrm{Vol}\,(B, P, Q, R) - \mathrm{Vol}\,(A, P, Q, R) \{].$$

Dati i punti A, B, il numero reale secondo membro della (10) è determinato in modo unico qualunque sia la terna di punti P, Q, R ed inoltre è determinato con legge finita. Dunque è determinato ed unico l'operatore, $B - A$, che applicato al gruppo arbitrario delle tre variabili P, Q, R produce il secondo membro della (10), vale a dire: B — A *è operatore univocamente determinato tra terne di punti e numeri reali.*

6. — La classe *vettore* è formata dagli operatori $B - A$, variando A e B, comunque, nella classe punto:

$$(12)\quad \mathrm{Vettore} = \boldsymbol{u} \ni \exists\, (A ; B) \ni \} A, B \varepsilon \mathrm{p} . \boldsymbol{u} = B - A \{,$$

vale a dire: $\boldsymbol{u}$ *è un vettore quando esistono, almeno, i punti* A, B *tali che* $\boldsymbol{u} = \mathrm{B} - \mathrm{A}$.

Se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sono vettori, dalla condizione di eguaglianza di due operatori (²) risulta che

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \text{ solo quando } \boldsymbol{u}(P, Q, R) = \boldsymbol{v}(P, Q, R)$$

comunque si fissino i punti P, Q, R. Si sia, ora, posto, in un modo,

$$\boldsymbol{u} = B - A, \qquad \boldsymbol{v} = D - C$$

e si scriva Med (A, B) al posto di *punto medio tra* A *e* B. Per la (10) si ha $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ solo quando

$$\mathrm{Vol}\,(B, P, Q, R) + \mathrm{Vol}\,(C, P, Q, R) = \mathrm{Vol}\,(A, B, Q, R) + \mathrm{Vol}\,(D, P, Q, R),$$

ovvero, ed equivale, solo quando

$$2\,\mathrm{Vol}\,\{\, \mathrm{Med}\,(B, C), P, Q, R \,\} = 2\,\mathrm{Vol}\,\{\, \mathrm{Med}\,(A, D), P, Q, R \,\},$$

ovvero, ed equivale ancora, solo quando

$$\mathrm{Med}\,(B, C) = \mathrm{Med}\,(A, D).$$

Segue che

$$(13)\quad A, B, C, D\,\epsilon\,\mathrm{p}\,.\supset: B-A=D-C\,.=.\,\mathrm{Med}(B,C)=\mathrm{Med}(A,D)$$

che è la solita, e semplice, condizione di eguaglianza di due vettori.

Dopo ciò si può definire, nel modo solito ([3]), la *somma di un punto con un vettore*, la *somma di due vettori*, ecc.

7. — Se A è un punto ed $\boldsymbol{u}$ è un vettore, è noto che $P+\boldsymbol{u}$, ovvero $\boldsymbol{u}+P$ è *il* punto B tale che $\boldsymbol{u}=B-A$. Ne segue che $+\boldsymbol{u}$ è *operatore a destra tra punti e punti*, come $\boldsymbol{u}+$ è *operatore a sinistra tra punti e punti*, e tali proprietà si troveranno sempre, comunque si definiscano i vettori, quando si voglia introdurre l'algoritmo usuale, così semplice, così comodo, così potente, della somma. Ne segue pure che, ad es., il prodotto funzionale dei due operatori a destra $+\boldsymbol{u}$, $+\boldsymbol{v}$ è l'operatore a destra $+\boldsymbol{w}$ ove $\boldsymbol{w}$ è il vettore somma di $\boldsymbol{u}$ con $\boldsymbol{v}$, cioè $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$. È in causa di questi fatti, e per conservare inalterate le leggi fondamentali degli operatori e operazioni ([3]) ([6]), che non conviene definire il vettore $B-A$ come operatore tra punti e punti, ad es., sotto la forma seguente

$$(a)\quad A,B\,\epsilon\,\mathrm{p}\,.\supset.\,B-A=\iota[\mathrm{p}\,\mathsf{f}\,\mathrm{p}\cap\alpha\ni\{P\,\epsilon\,\mathrm{p}\,.\supset_P.\,\mathrm{Med}(B,P)=\mathrm{Med}(A,P\alpha)\}]$$

che, a priori, può parere più semplice della (11). Se si adotta la (a) allora $P\boldsymbol{u}$ indica l'ordinaria somma di P con $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}$ (sottinteso il simbolo, necessario ([6]), di prodotto funzionale) la somma di $\boldsymbol{u}$ con $\boldsymbol{v}$; e si comprende facilmente come l'algoritmo ordinario rimanga totalmente distrutto. Nè si rimedia all'inconveniente definendo, ammessa la (a), il $P+\boldsymbol{u}$ e l' $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ come identici a $P\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{u}$; perchè allora, da $P\boldsymbol{u}$ identico a $P+\boldsymbol{u}$, si ha $\boldsymbol{u}=+\boldsymbol{u}$, il che, se può parere simile a quanto avviene in algebra per i numeri assoluti e relativi, non cessa di costituire un assurdo logico-formale.

Direzioni.

8. — Se a è una *retta*, l'ente che comunemente chiamasi *direzione di* a, dir$a$, è una *funzione della retta* a che questa ha

in comune con *tutte* le rette parallele ad a; cioè, sempre secondo il comune concetto, dir$\,a$ può rappresentare biunivocamente la *stella delle rette parallele ad* a. Se noi vogliamo definire dir$\,a$ come operatore, il mezzo più semplice che ci si presenta per raggiungere lo scopo è quello di definire dir$\,a$ come operatore tra rette e classi di rette, in modo che dir$\,a$ applicato ad a, o ad una retta parallela ad a, produca l'ente, che ci è noto, dipendente da a e dal concetto di parallellismo, cioè la stella delle rette parallele ad a. Ma dir$\,a$ deve potersi applicare anche ad una retta b non parallela ad a, e in tal caso, se si vuol conservare la corrispondenza biunivoca tra *direzione* e *stella di rette parallele*, è necessario che l'operatore dir$\,a$ applicato a b produca la classe *vuota* o *nulla*.

Ciò posto, scrivendo r al posto di retta e indicando con || la relazione " è parallela a ", si può definire dir$\,a$ nel modo seguente:

$$(14) \qquad a \in \mathrm{r} \,.\, \supset .\, \mathrm{dir}\, a = \iota \,[\, (\mathrm{Cls}\,‘\,\mathrm{r})\, \mathrm{f}\, r \cap \alpha \ni \{\, b \in r \,.\, \supset_b .\; \alpha b = \mathrm{r} \cap x \ni (x \parallel a \,.\, x \parallel b) \,\}\,],$$

cioè: dir$\,a$ *è quell'operatore tra rette e classi di rette tale che, comunque si fissi la retta* b, (dir$\,a$)b *è la classe delle rette parallele tanto ad* a *quanto* a b.

Resta da provare che dir$\,a$, così definita, *è operatore esistente ed unico*. Data la retta a, la classe (dir$\,a$)b, formata dalle rette parallele tanto ad a quanto a b, è univocamente determinata qualunque sia b; è la *stella delle rette parallele ad* a quando $b \parallel a$, è la *classe nulla* quando b non è parallela ad a. Dunque dir$\,a$ è operatore univocamente determinato, dalla (14), tra rette e classi di rette.

Se nella notazione composta dir$\,a$ facciamo variare a nella classe r, allora dir è simbolo fisso che è, a sua volta, operatore tra *rette* e *operatori tra rette e classi di rette.* Si può, volendo, definire dir direttamente:

$$(15) \qquad \mathrm{dir} = \iota \,[((\mathrm{Cls}\,‘\,\mathrm{r})\, \mathrm{f}\, \mathrm{r})\, \mathrm{f}\, \mathrm{r} \cap \alpha \ni \{\, a, b \in \mathrm{r} \,.\, \supset_{a,b} .\; (\alpha a)\, b = \mathrm{r} \cap x \ni (x \parallel a \,.\, x \parallel b) \,\}\,],$$

ma è più semplice la forma (14).

9. — Per la condizione di uguaglianza di due direzioni si giunge alla forma usuale

$$(16) \qquad a, b \in \mathrm{r} . \supset : \operatorname{dir} a = \operatorname{dir} b . = . a \parallel b .$$

Invero. Dalla (14) e dalla solita condizione di eguaglianza di due operatori ([2]) si ha

$$\operatorname{dir} a = \operatorname{dir} b \text{ solo quando } (\operatorname{dir} a) x = (\operatorname{dir} b) x$$

qualunque sia la retta x. Se a non è parallela a b allora $(\operatorname{dir} b) a$ è classe vuota, mentre $(\operatorname{dir} a) a$ è la classe, esistente, delle rette parallele ad a, quindi $(\operatorname{dir} a) a -= (\operatorname{dir} b) a$ e in conseguenza $\operatorname{dir} a -= \operatorname{dir} b$; vale a dire: da $\operatorname{dir} a = \operatorname{dir} b$ segue $a \parallel b$. — Se $a \parallel b$ allora $(\operatorname{dir} a) x = (\operatorname{dir} b) x$ qualunque sia x, perchè se x è parallela ad a e b le due classi dànno una stessa stella e se x non è parallela ad a le due classi sono entrambe vuote; dunque da $a \parallel b$ segue $\operatorname{dir} a = \operatorname{dir} b$.

10. — Per gli operatori dir, $\operatorname{dir} a$, non si ha, come per le **F** e i *vettori*, un vasto algoritmo. Introdotto l'operatore dir tutto è fatto, poichè, essendo a una retta,

$$a' = a \cup \iota (\operatorname{dir} a)$$

è appunto la *retta proiettiva* (con punti propri) ([7]) della quale $\operatorname{dir} a$ rappresenta il *punto all'infinito*; $\operatorname{dir} x$, variando x tra le rette parallele ad un piano α, costituisce una classe di direzioni che è l'ordinaria *retta all'infinito* del piano proiettivo che si ottiene da α unendo ai suoi punti (somma logica) le direzioni di tutte le sue rette; $\operatorname{dir} x$, variando x nella classe totale delle rette, dà la classe *direzione* o *piano all'infinito*.

Lunghezze, Aree, Volumi, Ampiezze di angoli.

11. — Scriviamo segm al posto di *segmento*, classe di punti, e $\equiv$ per indicare la relazione *è sovrapponibile a* (o, anche, *eguaglianza geometrica*, da non confondersi con l'*identità*, $=$, di Leibniz).

Ripetendo le considerazioni fatte nel n. 8 si può definire la *lunghezza del segmento* a, lung a, ponendo

$$(17) \quad a \,\epsilon\, \text{segm} \,.\, \supset .\, \text{lung}\, a = \iota\, [(\text{Cls}\text{‘}\,\text{segm})\, \text{f}\, \text{segm} \cap \alpha \ni \{ b \,\epsilon\, \text{segm} \,.\, \supset_b .\; \alpha\, b = \text{segm} \cap x \ni (x \equiv a \,.\, x \equiv b) \}\,,$$

cioè: lung a *è quell'operatore tra segmenti e classi di segmenti, che, applicato ad un segmento arbitrario* b, *produce la classe dei segmenti sovrapponibili* (*o, anche, geometricamente eguali*) *tanto al segmento* a *quanto al segmento* b.

Come nel n. 8 si prova l'esistenza e l'univocità degli operatori lung a, lung, e come nel n. 9 si trova la condizione di uguaglianza di due lunghezze,

$$(18) \qquad a, b \,\epsilon\, \text{segm} \,.\, \supset :\, \text{lung}\, a = \text{lung}\, b \,.=.\, a \equiv b$$

che è appunto quella ordinariamente considerata.

Procedimento analogo vale per le *aree poligonali piane*, i *volumi dei prismi*, le *ampiezze degli angoli.*

12. — Definita la classe *lunghezza* si definirà, geometricamente, la lunghezza *somma*, $+$, di una lunghezza con un'altra. Mediante il sistema di postulati geometrici dei quali si dispone, si proverà che per la classe lunghezza e l'operazione $+$ valgono le proprietà I-VIII citate nella mia Nota ([5]), vale a dire che *le lunghezze formano una classe omogenea di grandezze rispetto all'operazione* $+$. Dopo ciò, mediante il *limite superiore*, si potrà far vedere che definita la *lunghezza di una linea* (non segmento) questa è una lunghezza (n. 11) e in tal modo con mezzi semplici e rapidi potremo introdurre lunghezze e numeri ([5]) in Geometria senza che la *purezza geometrica* venga a perder nulla, anzi acquistando notevolmente per la soppressione dell'antiquato algoritmo delle proporzioni che, utilissimo quando non era noto l'algoritmo algebrico, è, ora, pesante, ingombrante e vuoto.

Identiche considerazioni per *aree* e *volumi* con relativa applicazione del *limite superiore* per le figure non comprese nella definizione primitiva.

Per le *ampiezze degli angoli*, — se si vuol parlare di angoli geometrici (classi di punti) e non di altre pseudo-classi che su-

perano quattro retti —, occorrono limitazioni per la somma. Per fare a meno di tali limitazioni e applicare subito, con grande vantaggio, le I-VIII già citate, basta considerare le *rotazioni* ([8]) in luogo degli angoli.

I *numeri immaginari* si sanno già definire regolarmente, quali *operatori*, o come *sostituzioni* per complessi del secondo ordine (Formulario di G. Peano), o come *operatori vettoriali* (quaternioni coassiali) ([3]) ([7]); anzi, l'una e l'altra forma di definizione è già stata introdotta nell'insegnamento medio dal Prof. S. Catania con la sua solita precisione e semplicità (*).

Osservazioni.

Ho indicati (n. 5, 7) due modi diversi per definire il vettore $B - A$, sempre come operatore: possono trovarsene anche altri. Questa pluralità di modi si ha certamente anche per le altre classi considerate in questa nota. — Il Prof. G. Peano mi suggerisce questo per la direzione della retta a: dir a è l'operatore che applicato al punto arbitrario x produce la retta uscente da x e parallela ad a (**). — In modo analogo, se a è un *segmento* si può stabilire che lung a sia l'operatore che applicato ad un punto x arbitrario produce la superficie sferica di centro x e raggio a, cioè la classe dei punti y tali che il segmento avente x e y per estremi è sovrapponibile ad a. Si rimane in tal modo nel campo degli elementi *punto sfera,* scelti da M. Pieri come primitivi per istituire la Geometria elemen-

---

(*) Parrebbe quindi giunto il momento di abbandonare definizioni come le seguenti: " $\sqrt{-1}$ non ha alcun significato. Per $\sqrt{-1}$ *conveniamo* di intendere *quel numero che elevato a quadrato dà* -1. Ecc. „ , " Noi diremo numero complesso, ed indicheremo con (a, b), una coppia di numeri reali $a, b, \ldots$ „, dove *complesso* vale *immaginario*. La prima confonde l'algoritmo con la definizione; la seconda *identifica* una *speciale funzione* di una coppia alla coppia ed è ancor meno logica della prima.

(**) Come pure si potrebbe stabilire che dir a è l'operatore che applicato ad un punto x arbitrario produce il piano uscente da x e normale ad a, oppure, il fascio di raggi di centro x e perpendicolari ad a. E ancora in altri modi.

tare (*). — Non pare egualmente facile di trovare altre forme di definizioni per le classi *area, volume, rotazione* (**).

È l'intuizione, guidata dai bisogni scientifici e pratici di un dato ramo di scienza, che ci conduce a considerare una certa classe della quale diamo il *nome U* (come *numero, vettore, lunghezza,...*) e, ciò che più interessa, l'*algoritmo* dei suoi elementi, *molto tempo prima* che ci sia possibile di dare una definizione logicamente precisa della classe stessa. Giunto il momento nel quale si *riesce* a *definire,* non di rado avviene che la classe considerata si *possa* definire in *più di un modo*, sempre, si intende, *mantenendo inalterato l'algoritmo dei suoi elementi*, algoritmo acquisito per intuizione e adattato, già da tempo, ai bisogni della scienza. È pure possibile che a due modi diversi di definizione corrispondano enti che, pur avendo lo stesso algoritmo, abbiano *specie* (o *natura*) *logica* diversa (***).

Un esame superficiale del fatto ora indicato, può far credere che le forme di definizione introdotte in questa nota, siano logicamente difettose perchè possono dar luogo a pluralità di specie logica. Ciò non è. Consideriamo, ad es., la classe *lunghezza*, ben nota per intuizione e l'algoritmo dei cui elementi è pure ben noto indipendentemente dalla *definizione* della classe stessa. Se, essendo a un segmento, con lung a indichiamo l'operatore, definito nel n. 11, tra *segmenti* e *classi di segmenti*, si ritrova l'ordinario algoritmo e, inoltre, *una* classe *lunghezza* è

(*) *La Geometria elementare istituita nelle nozioni di Punto e Sfera*, " Memorie della Società italiana delle Scienze „, s. 3ª, t. XV.

(**) Giova notare che la *forma* di definizione scelta nel testo per la classe direzione (n. 5) ha, almeno attualmente, il vantaggio su altre possibili forme, di essere immediatamente applicabile anche alle classi lunghezza, area, volume, rotazione. Inoltre si vale della classe " rette parallele ad a „, come *mezzo* per definire la dir a, il che fa vedere la relazione, ma non la presunta identità, tra l'ente *semplice* dir a e la classe delle " rette parallele ad a „.

(***) Ciò *non può avvenire* quando, ad es., *data* una classe u si vuol definire una classe v formata con gli u, cioè quando si può porre $v = u \cap x \ni (A_x)$. La condizione A_x può, evidentemente, essere espressa in più modi diversi (ma necessariamente *equivalenti*) senza che varî la classe v. Lo stesso non può dirsi, ad es., per gli N_0 definiti, o mediante postulati (Peano-Pieri), o come operatori per le grandezze (5), o come classi di classi finite simili (Russell).

logicamente definita. Se vogliamo che l'ente cui si dà di solito il nome " lunghezza di a „ sia definito come operatore tra *punti* e *sfere*, con gli elementi primitivi di Pieri nel modo poco fa indicato, allora il *simbolo* che deve indicare la " lunghezza di a „, non può essere lung a, già adoperato con un significato diverso; ma sarà, ad es., lung$'a$. E se si dà ancora un altro modo di definizione, l'ente considerato sarà indicato con la notazione lung$''a$; e così di seguito. Gli enti lung$a$, lung$'a$, lung$''a$, ..., hanno, è vero, natura logica diversa, ma, col variare di a nella classe *segmento*, producono enti che *hanno a comune l'algoritmo*, e si capisce che *scelto* uno di questi, *a piacere* (purchè non presenti inconvenienti formali come nel n. 7 per i vettori), gli altri *restano esclusi necessariamente*. — Dunque la pluralità delle *specie logiche* non costituisce un difetto logico; si cade invece in un errore logico, quando si vuole attribuire alla nozione intuitiva, ad es., " lunghezza di a „ un significato logico *assoluto*, e si pretende di dare una definizione *assoluta* di lung$a$ (*). — Ciò nonostante sorgerà, forse, la questione della *specie logica*, e vi è da augurarsi che non finisca, come quella dell'*esistenza*, cioè in lunghe discussioni con conclusioni nulle.

(*) Si ritiene *assoluta* la definizione, di tipo moderno,

$$(a) \qquad a \,\epsilon\, \text{segm} \,.\, \supset .\, \text{lung}\, a = \text{segm} \cap x \ni (x \equiv a).$$

Ora ponendo, ad es,

$$(b) \qquad a \,\epsilon\, \text{segm} \,.\, \supset .\, \text{lung}\, a = (\text{p} \,\vdots\, \text{p}) \cap (x\,;\,y) \ni \{ \text{Segm}\,(x, y) \equiv a \}$$

(ove Segm (x, y) indica il segmento di estremi x, y) si ha una definizione che *pare* assoluta, come la (a), e che dà lung$a$ di specie logica diversa dalla precedente! Ma come si sono *identificati* i *quaternioni retti* ai *vettori*, i *quaternioni* di Hamilton a *coppie di immaginari*, gli *interi* di Russell ai *razionali* $m/1$ ottenuti con le definizioni per classi, non si troverà, forse, difficoltà ad identificare la *classe di segmenti* data dalla (a), alla *classe di coppie di punti* data dalla (b).

Sugli integrali abeliani riducibili.

Nota di CARLO ROSATI.

In questa Nota vien data una semplice dimostrazione geometrica del teorema di Poincaré: *Se sopra una curva di genere* p *esiste un sistema* ∞^{q-1} (q < p) *di integrali riducibili con* 2q *periodi ridotti, ne esiste un secondo, indipendente dal primo,* ∞^{p-q-1} *con* 2 (p — q) *periodi ridotti* (*).

A fondamento della dimostrazione vien posta una rappresentazione geometrica, che mi sembra già interessante di per se stessa, per la quale i cicli della superficie di Riemann relativa alla curva vengono rappresentati dai punti *razionali* di un iperspazio S_{2p-1} e gli integrali (di 1ª specie) della curva dagli iperpiani di un sistema lineare ∞^{p-1} di questo iperspazio, in tal guisa che l'appartenenza di un punto razionale ad un iperpiano del sistema significa che l'integrale corrispondente all'iperpiano ha il periodo nullo lungo il ciclo che ha per immagine il punto.

I sistemi regolari di integrali riducibili hanno allora per immagine sistemi lineari di iperpiani contenuti entro il detto sistema ∞^{p-1}, i cui sostegni contengono un certo numero di punti razionali linearmente indipendenti. Infine la considerazione di un sistema nullo dell'iperspazio S_{2p-1} conduce in modo semplicissimo al teorema di Poincaré: il sistema *complementare* di

(*) Poincaré, *Sur les fonctions abéliennes* (“ American Journal „, 1886, tom. 8).

Debbo dichiarare che mentre stavo attendendo alla redazione di questo lavoro il prof. Scorza mi diede notizia di aver ritrovato in modo semplice ed elegante il teorema di Poincaré, senza accennare ad alcun particolare della sua dimostrazione. Poiché le ricerche del prof. Scorza e mia sono procedute affatto indipendentemente l'una dall'altra, non stimo inopportuna la pubblicazione di questa Nota. La Nota del prof. Scorza esce contemporaneamente a questa nei Rendiconti della Rª Accademia dei Lincei.

un sistema regolare di integrali riducibili nasce dallo spazio polare dell'immagine di questo nel sistema nullo.

Le medesime considerazioni vengono infine applicate a ritrovare l'altro teorema di Poincaré circa l'esistenza di infiniti integrali ellittici sopra una curva di genere p che possegga $\mu+1$ integrali ellittici linearmente dipendenti $(2 \leq \mu \leq p)$, teorema del quale il Severi (*) ha pure dato recentemente una elegante dimostrazione geometrica ed una notevole generalizzazione.

1. — Incominciamo col dimostrare la seguente proprietà:

Se una curva di genere p *possiede un sistema lineare di integrali riducibili con* r ($<$ 2p) *periodi ridotti, l'integrale generico del sistema ha nulli i periodi lungo* 2p — r *cicli distinti della superficie di Riemann relativa alla curva, e reciprocamente.*

Sarà bene avvertire anzitutto che quando diciamo che un sistema lineare di integrali riducibili possiede r periodi ridotti, intendiamo significare che i periodi normali dell'integrale generico del sistema si possono esprimere mediante combinazioni lineari a coefficienti interi di r, e non di un numero minore di r, quantità; senza escludere che per integrali particolari il numero dei periodi ridotti possa ulteriormente diminuire.

Ciò detto, si supponga che i periodi normali $\Omega_1\,\Omega_2\,...\,\Omega_{2p}$ dell'integrale generico I del sistema siano espressi dalle formule

$$\Omega_k = m_{k1}\,\omega_1 + m_{k2}\,\omega_2 + ... + m_{kr}\,\omega_r \qquad (k = 1, 2, ..., 2p)$$

nelle quali i coefficienti m_{ki} sono numeri interi; interpretando le $m_{1,i}\,m_{2,i}\,...\,m_{2p,i}$ come coordinate omogenee di un punto *razionale* (**) P_i entro uno spazio S_{2p-1}, i punti $P_1\,P_2\,...\,P_r$ do-

(*) SEVERI, *Sugli integrali abeliani riducibili* (" Rendiconti della R. Acc. dei Lincei „, aprile, 1914).

(**) Poiché in seguito dovremo fare largo uso della nozione di spazio razionale, enunciamo per maggior chiarezza in modo esplicito alcune semplici proprietà di dimostrazione immediata.

Fissata entro S_r la piramide di riferimento ed, al modo solito, il punto e l'iperpiano unità, diciamo *razionali* un punto o un iperpiano di S_r quando le loro coordinate omogenee rispetto a quegli elementi fondamentali possono ridursi intere moltiplicandole per un conveniente coefficiente

vranno essere indipendenti, e l'S_{r-1} da essi individuato sarà il minimo spazio razionale contenente il punto P di coordinate $\Omega_1\, \Omega_2 \ldots \Omega_{2p}$, fin tanto che l'integrale I è generico. Per questo S_{r-1} potranno condursi allora $2p - r$ iperpiani razionali linearmente indipendenti, ed ogni altro iperpiano razionale passante per P dovrà contenere tutto l'S_{r-1} ed essere quindi dipendente da quelli, ché altrimenti per P passerebbe uno spazio razionale di dimensione minore di $r - 1$. Poiché ogni relazione lineare ed omogenea a coefficienti interi fra i periodi normali Ω corrisponde ad un ciclo della superficie di Riemann lungo il quale l'integrale I ha periodo nullo, segue che di tali cicli se ne hanno $2p - r$ distinti.

Reciprocamente, se l'integrale generico I del sistema ha nulli i periodi lungo $2p - r$ cicli distinti, per il punto P, che ha per coordinate i periodi normali di I, potranno condursi $2p - r$ e non più iperpiani razionali linearmente indipendenti, e sarà quindi un S_{r-1} il minimo spazio razionale contenente P. Scegliendo entro questo S_{r-1} r punti razionali indipendenti, le coordinate Ω di P saranno le medesime combinazioni lineari delle coordinate di questi punti, onde segue che l'integrale I, e quindi il sistema di cui esso è integrale generico, è riducibile ed ha r periodi ridotti.

2. — Sulla superficie di Riemann R relativa ad una curva C di genere p si consideri un sistema di retrosezioni $(\sigma_1\, \sigma_{p+1})$ $(\sigma_2\, \sigma_{p+2}) \ldots (\sigma_p\, \sigma_{2p})$; ogni ciclo σ di R è omologo ad una com-

---

di proporzionalità. Un iperpiano razionale contiene r punti razionali linearmente indipendenti e correlativamente.

Un S_k di S_r dicesi *razionale* quando contiene $k+1$ punti razionali linearmente indipendenti, o, ciò che è lo stesso, quando è contenuto in $r-k-1$ iperpiani razionali indipendenti. Dalla prima definizione discende che è razionale lo spazio a cui *appartengono* più spazi razionali, dalla seconda che è razionale la loro (completa) intersezione.

Fissati entro un S_k razionale di S_r $k+1$ punti razionali indipendenti, ogni punto di S_k che è razionale rispetto a quei punti scelti come elementi di riferimento, è razionale in S_r.

Ogni omografia o correlazione a coefficienti razionali muta gli spazi razionali in spazi razionali.

binazione lineare a coefficienti interi dei $2p$ cicli $\sigma_1 \sigma_2 \ldots {}_{2p}$ costituenti le retrosezioni, cioè si ha

$$\sigma \sim m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 + \ldots + m_{2p} \sigma_{2p} ;$$

se dunque ad ogni ciclo σ associamo il punto P di uno spazio S_{2p-1} che ha per coordinate omogenee gli interi $m_1 m_2 \ldots m_{2p}$, ad ogni ciclo di R viene a corrispondere un punto razionale di S_{2p-1}, mentre un punto razionale è immagine di infiniti cicli a due a due dipendenti, cioè tali che una loro combinazione lineare è un ciclo omologo a zero. I cicli costituenti le retrosezioni corrispondono ai vertici della piramide fondamentale; inoltre è chiaro che cicli distinti hanno per immagine punti linearmente indipendenti e reciprocamente.

Siano ora $u_1 u_2 \ldots u_p$ gli integrali normali di 1ª specie della curva C ed i loro periodi alle retrosezioni siano dati dalla tabella

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1p} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2p} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \tau_{p1} & \tau_{p2} & \ldots & \tau_{pp} ; \end{array} \right.$$

sia inoltre τ l'S_{p-1} intersezione dei p iperpiani $\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_p$ che hanno per coordinate le orizzontali della tabella (I).

Se ora ad ogni integrale di prima specie $U = \lambda_1 u_1 + + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$ associamo l'iperpiano di S_{2p-1} che ha per coordinate i periodi normali dell'integrale U, veniamo a stabilire una corrispondenza biunivoca proiettiva fra il sistema ∞^{p-1} di detti integrali e il sistema lineare, che diremo Σ, degli iperpiani uscenti dallo spazio τ. Ad ogni integrale della curva corrisponde un iperpiano di Σ; ad ogni iperpiano di Σ corrisponde, a meno di un fattore costante e di una costante addittiva, un integrale di 1ª specie della curva.

È facile ora vedere che in questa rappresentazione, in cui i cicli di R corrispondono ai punti razionali di S_{2p-1} e gli integrali della curva agli iperpiani del sistema Σ, la condizione di appartenenza di un iperpiano π e di un punto razionale P

si traduce nel fatto che l'integrale U corrispondente a π ha il periodo nullo lungo il ciclo corrispondente a P.

Le coordinate di π saranno infatti le medesime combinazioni lineari delle coordinate degli iperpiani $\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_p$, cioè saranno

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \lambda_1 \tau_{11} + \lambda_2 \tau_{21} + \ldots + \lambda_p \tau_{p1}, \ldots, \lambda_1 \tau_{p1} + \\ + \lambda_2 \tau_{p2} + \ldots + \lambda_p \tau_{pp}.$$

Se dunque π contiene il punto razionale $(m_1 m_2 \ldots m_{2p})$, si avrà l'uguaglianza

$$\lambda_1 (m_1 + m_{p+1} \tau_{11} + \ldots + m_{2p} \tau_{1p}) + \\ + \lambda_2 (m_2 + m_{p+1} \tau_{21} + \ldots + m_{2p} \tau_{2p}) + \ldots \\ + \lambda_p (m_p + m_{p+1} \tau_{p1} + \ldots + m_{2p} \tau_{pp}) = 0,$$

la quale dice che l'integrale $U = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$ corrispondente a π ha nullo il periodo lungo il ciclo

$$\sigma \sim m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 + \ldots + m_{2p} \sigma_{2p}$$

che ha per immagine P, e reciprocamente.

Si osservi inoltre che lo spazio τ non contiene alcun punto reale; se infatti P fosse un punto reale situato in τ, fra i periodi normali degli integrali $u_1 u_2 \ldots u_p$ passerebbero p relazioni lineari omogenee a coefficienti reali non tutti nulli (le coordinate di P), il che, come è noto, non può avvenire. Ed anche non può passare per τ alcun iperpiano reale, perché un tale iperpiano dovrebbe contenere lo spazio τ_0 coniugato di τ ed allora τ e τ_0 avrebbero un punto reale comune.

Osservazione. — Dalla rappresentazione esposta e da ciò che dicemmo al n° 1 si deduce che un sistema lineare ∞^{q-1} di integrali riducibili con r periodi ridotti è rappresentato da un sistema lineare ∞^{q-1} di iperpiani contenuto in Σ e tale che entro l'S_{2p-1-q} sostegno sono contenuti $2p - r$ punti razionali linearmente indipendenti. Se il sistema è completo, lo spazio razionale S_{2p-r-1} da essi individuato e lo spazio τ *appartengono* all'S_{2p-1-q} ed hanno perciò comune uno spazio di dimensione $p + q - r - 1$; onde segue $r \leq p + q$. Se a questa dis-

uguaglianza si aggiunge l'altra importante $2q \leq r$, dovuta a Severi (*), si vede che *il numero* r *dei periodi ridotti di un sistema lineare completo* ∞^{q-1} *di integrali riducibili esistente sopra una curva di genere* p *soddisfa alle disuguaglianze* $2q \leq r \leq p + q$.

Quando $r = 2q$, ed è questo il caso più interessante, adottando una denominazione di Severi, il sistema si dirà *regolare*.

3. — Si indichino con $r_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ $(i, k = 1, 2, ..., 2p)$ le coordinate di retta nello spazio S_{2p-1} ed in questo spazio si consideri il complesso lineare dato dall'equazione

$$r_{1,p+1} + r_{2,p+2} + ... + r_{p,2p} = 0.$$

Nel sistema nullo, non degenere, determinato da questo complesso lineare e definito dalle equazioni

$$\xi_1 = -x_{p+1}, \ \xi_2 = -x_{p+2}, ... \ \xi_p = -x_{2p}, \ \xi_{p+1} = x_1, \ \xi_{p+2} = x_2, ... \ \xi_{2p} = x_p,$$

gli iperpiani $\pi_1 \pi_2 ... \pi_p$ hanno per i poli i punti di coordinate

$$\begin{matrix} \tau_{11} & \tau_{12} & ... & \tau_{1p} & -1 & 0 & ... & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & ... & \tau_{2p} & 0 & -1 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \tau_{p1} & \tau_{p2} & ... & \tau_{pp} & 0 & 0 & ... & -1; \end{matrix}$$

ciascuno di questi punti giace dunque in tutti gli iperpiani π, e quindi *lo spazio* τ *è autopolare nel sistema nullo, vale a dire che ogni retta di* τ *appartiene al complesso lineare.*

È poi chiaro che un punto razionale ha nel sistema nullo per iperpiano polare un iperpiano razionale e, più in generale, lo spazio polare di uno spazio razionale è razionale.

Supponiamo ora che la curva C possegga un sistema lineare *regolare* ∞^{q-1} di integrali riducibili; esso avrà per immagine nell'S_{2p-1} un sistema lineare ∞^{q-1}, che diremo Σ', di iperpiani,

---

(*) SEVERI, *Lezioni di Geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908).

il cui S_{2p-1-q} sostegno passerà per τ e conterrà $2(p-q)$ punti razionali linearmente indipendenti.

Poiché il sistema regolare di integrali è completo, lo spazio τ e lo spazio di dimensione $2(p-q)-1$ individuato da quei punti razionali, e che indicheremo con $R_{2(p-q)-1}$, appartengono all'S_{2p-1-q}; avranno perciò un S_{p-q-1} comune.

Si considerino ora gli iperpiani polari dei punti di questo S_{p-q-1}: essi formeranno un sistema ∞^{p-q-1}, che diremo Σ'', il cui sostegno sarà un S_{p+q-1} passante per τ.

Poiché l'S_{p-q-1} giace nello spazio razionale $R_{2(p-q)-1}$, il sostegno S_{p+q-1} di Σ'' dovrà contenere lo spazio R'_{2q-1} polare del suddetto spazio razionale nel sistema nullo e quindi esso stesso razionale: conterrà cioè $2q$ punti razionali linearmente indipendenti.

Il sistema Σ'' sarà dunque immagine di un sistema lineare (regolare) ∞^{p-q-1} di integrali riducibili con $2(p-q)$ periodi ridotti.

4. — Ci resta ora da provare che il sistema riducibile ∞^{p-q-1} corrispondente a Σ'' è indipendente da quello ∞^{q-1} che ha per immagine Σ', che cioè i due sistemi non hanno alcun integrale comune.

Invero, gli iperpiani di Σ' e Σ'' hanno per poli nel sistema nullo i punti degli spazi S_{q-1} ed S_{p-q-1} in cui gli spazi razionali R'_{2q-1} ed $R_{2(p-q)-1}$ si appoggiano a τ. Se dunque esistesse qualche integrale comune ai due sistemi riducibili, gli spazi suddetti S_{q-1} ed S_{p-q-1} avrebbero comune uno spazio S_l di dimensione $l \geq 0$. Ed è chiaro che S_l non può esaurire l'intersezione di R'_{2q-1} ed $R_{2(p-q)-1}$ perché tale intersezione (completa) è uno spazio razionale, mentre sappiamo che τ non contiene alcun punto reale. I due spazi R'_{2q-1} ed $R_{2(p-q)-1}$ si segano perciò in uno spazio di dimensione $> l$ appoggiato a τ lungo S_l.

Dunque l'ipotesi che i due sistemi riducibili non siano indipendenti conduce alla costruzione di uno spazio razionale appoggiato a τ ed *appartenente al complesso.* Ora noi mostreremo che un tale spazio non può esistere.

Si osservi infatti che ogni spazio appartenente al complesso, cioè contenuto nel proprio polare, ha la dimensione $\leq p-1$. Ove la dimensione dello spazio di intersezione di R ed R' non

raggiungesse questo limite, si conduca per esso, il che può sempre farsi in infiniti modi, uno spazio razionale R_{p-1} pure appartenente al complesso e si fissino poi nell'S_{2p-1} $2p$ punti razionali linearmente indipendenti $L_1 L_2 \dots L_{2p}$, dei quali p cadano nell'R_{p-1}: siano questi $L_{p+1} L_{p+2} \dots L_{2p}$. Se $\sigma'_1 \sigma'_2 \dots \sigma'_{2p}$ sono $2p$ cicli della superficie di Riemann che hanno per immagine i punti suddetti, nelle relazioni

$$\begin{array}{l} \sigma'_1 \sim l_{1,1}\,\sigma_1 + l_{1,2}\,\sigma_2 + \dots + l_{1,2p}\,\sigma_{2p} \\ \sigma'_2 \sim l_{2,1}\,\sigma_1 + l_{2,2}\,\sigma_2 + \dots + l_{2,2p}\,\sigma_{2p} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sigma'_{2p} \sim l_{2p,1}\,\sigma_1 + l_{2p,2}\,\sigma_2 + \dots + l_{2p,2p}\,\sigma_{2p}, \end{array}$$

che legano i cicli medesimi alle retrosezioni, dovrà dunque essere il determinante $\Lambda = |l_{ik}| \neq 0$.

Conduciamo ora un iperpiano che contenga gli spazi τ ed R_{p-1} e si consideri l'integrale U ad esso corrispondente, il quale avrà nulli i periodi lungo i cicli $\sigma'_{p+1} \dots \sigma'_{2p}$.

Indicando con $a_h = a_h' + i\, a_h''$ e $b_h = b_h' + i\, b_h''$ i periodi di U alle retrosezioni complementari $\sigma_h\, \sigma_{p+h}$, con $c_h = c_h' + i\, c_h''$ quelli lungo il ciclo σ_h', $(h = 1, 2, \dots, p)$, e con λ_{ik} il complemento algebrico dell'elemento l_{ik} nel determinante Λ, dalle relazioni precedenti si deducono le altre

$$\begin{array}{l} \Lambda\, a_h = \lambda_{1h}\, c_1 + \lambda_{2h}\, c_2 + \dots\dots + \lambda_{p,h}\, c_p \\ \Lambda\, b_h = \lambda_{1,p+h}\, c_1 + \lambda_{2,p+h}\, c_2 + \dots + \lambda_{p,p+h}\, c_p, \end{array}$$

le quali, ove si uguaglino separatamente le parti reali e le immaginarie, conducono facilmente all'uguaglianza

$$(1) \qquad \Lambda^2 \sum_h^{1\dots p} (a_h'\, b_h'' - b_h'\, a_h'') = \sum_{ik}^{1\dots p} c_i'\, c_k' \sum_h^{1\dots p} (\lambda_{ih}\, \lambda_{k,p+h} - \lambda_{i,p+h}\, \lambda_{k,h}).$$

Ma ora proveremo che questa uguaglianza è assurda, dal che segue la verità dell'asserto.

Ed invero si osservi che gli iperpiani di coordinate

$$\begin{array}{l} \lambda_{i,1}\ \lambda_{i,2}\ \dots\dots\ \lambda_{i,2p} \\ \lambda_{k,1}\ \lambda_{k,2}\ \dots\dots\ \lambda_{k,2p}, \end{array}$$

essendo quelli opposti ai vertici $L_i\, L_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, p)$ nella piramide $L_1\, L_2 \ldots L_{2p}$, passano per lo spazio R_{p-1} appartenente al complesso; i loro poli sono quindi contenuti in questo spazio e perciò congiunti da una retta del complesso. Poiché le coordinate dei poli medesimi sono

$$\lambda_{i,p+1}, \ldots, \lambda_{i,2p}, -\lambda_{i1}, \ldots, -\lambda_{i,p}$$
$$\lambda_{k,p+1}, \ldots, \lambda_{k,2p}, -\lambda_{k1}, \ldots, -\lambda_{k.p},$$

si avrà

$$\sum_h^{1\ldots p} (\lambda_{i,h}\, \lambda_{k,p+h} - \lambda_{i,p+h}\, \lambda_{k,h}) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p),$$

il che prova che il secondo membro della (1) è identicamente nullo. E siccome il primo membro è invece > 0, in forza della disuguaglianza fondamentale di Riemann, rimane dimostrato completamente il teorema di Poincaré.

5. — Con lo stesso procedimento possiamo dimostrare l'altro teorema di Poincaré citato nella prefazione.

La curva C possegga $\mu + 1$ integrali ellittici $I_1\, I_2 \ldots I_\mu\, I_{\mu+1}$ dipendenti, che possiamo supporre, senza introdurre alcuna restrizione essenziale, siano a μ a μ indipendenti: si tratta di dimostrare che essa ne possiede infiniti.

Agli integrali $I_1\, I_2 \ldots I_\mu$ corrisponderanno μ iperpiani del sistema Σ, che diremo $\pi_1\, \pi_2 \ldots \pi_\mu$, i quali si segheranno in un $S_{2p-1-\mu}$ passante per τ e conterranno ciascuno uno spazio razionale di dimensione $2p - 3$. Questi spazi razionali $R'\, R'' \ldots R^{(\mu)}$ dovranno poi avere come intersezione (completa) uno spazio razionale ω, contenuto in $S_{2p-1-\mu}$ ed avente la dimensione $\geq 2(p - \mu) - 1$. Ma è facile vedere che la dimensione di ω non può superare quel limite, perché altrimenti il sistema $\infty^{\mu-1}$ di integrali riducibili determinato da $I_1\, I_2 \ldots I_\mu$ avrebbe meno di 2μ periodi ridotti, il che non può essere per il già citato teorema di Severi.

L'integrale $I_{\mu+1}$, dipendente dai precedenti, avrà per corrispondente un iperpiano $\pi^{(\mu+1)}$ che dovrà passare per l'$S_{2p-1-\mu}$ e contenere uno spazio razionale $R^{(\mu+1)}$ di dimensione $2p - 3$. Ma è facile ora vedere che $R^{(\mu+1)}$ contiene lo spazio ω, e perciò

basta notare che ne contiene tutti i punti razionali. Se infatti un punto razionale di ω non giacesse in $R^{(\mu+1)}$, l'iperpiano $\pi^{(\mu+1)}$ sarebbe razionale, il che è assurdo, non potendo τ esser contenuto in alcun iperpiano reale.

I $\mu+1$ iperpiani $\pi_1\,\pi_2 \dots \pi_{\mu+1}$ avranno per poli nel sistema nullo $\mu+1$ punti di τ giacenti nell' $S_{\mu-1}$ polare dell' $S_{2p-\mu-1}$; per essi passeranno rispettivamente le rette razionali $r'r'' \dots r^{(\mu+1)}$ polari degli spazi $R'\,R'' \dots R^{(\mu+1)}$; queste rette apparterranno allo spazio Ω, di dimensione $2\mu-1$, polare di ω.

Si consideri ora entro lo spazio Ω la varietà di Segre generata dagli ∞^1 $S_{\mu-1}$ che si appoggiano in un punto alle $\mu+1$ rette $r'\,r'' \dots r^{(\mu+1)}$; questa varietà contiene inoltre un sistema $\infty^{\mu-1}$ di S_1 che si appoggiano in un punto agli $S_{\mu-1}$ del sistema suddetto e quindi anche all' $S_{\mu-1}$ che lo spazio Ω ha comune con τ.

Ora è facile costruire infiniti S_1 razionali appartenenti a questo secondo sistema. Ed invero gli $S_{\mu-1}$ del 1° sistema uscenti dai punti razionali di r', essendo intersezioni (complete) di spazi razionali (quelli proiettanti da questi punti gli spazi determinati dalle rimanenti rette r prese a $\mu-1$ a $\mu-1$) sono razionali e similmente saranno razionali gli S_1 del 2° sistema uscenti dai punti razionali di un $S_{\mu-1}$ razionale del 1° sistema.

Esistono dunque nello spazio Ω infinite rette razionali che intersecano τ; ed allora gli iperpiani polari di quei punti di intersezione dovranno contenere degli spazi razionali di dimensione $2p-3$ ed essere quindi immagini di infiniti integrali ellittici dipendenti da $I_1\,I_2 \dots I_{\mu+1}$.

Pisa, 25 febbraio 1915.

Relazione sulla Memoria del Dott. Marco Pitzorno, *Nuove ricerche sulla struttura dei gangli del simpatico nei vertebrati inferiori.*

I risultati delle numerosissime ricerche del Pitzorno sui gangli dei tronchi del simpatico dei vertebrati inferiori hanno una notevole importanza, perchè, in causa delle grandi difficoltà che si incontrano nello studio del sistema nervoso simpatico, notizie poco sicure abbiamo sulla morfologia e sulle connessioni degli elementi di tale sistema e mancavano quasi totalmente osservazioni su questo riguardo per i gangli ed i nervi simpatici dei *Selacidi.*

L'A. intraprese le sue ricerche nell'Istituto Anatomico della R. Università di Sassari sotto la guida del Prof. Levi; egli si servì del metodo di riduzione dei sali d'argento proposto dal Ramón y Cajal e lo applicò su abbondante materiale tratto da molte specie appartenenti alle classi degli Uccelli, Rettili, Anfibi, Pesci.

Nei tronchi del simpatico dei Pesci oltre al tessuto nervoso l'A. trovò rappresentato il tessuto feocromo, il quale nei Selacidi forma due notevoli prolungamenti alle estremità dei gangli, non ha limite netto rispetto ai gangli stessi e contiene esso stesso cellule e fibre nervose. Rilevò anche che in alcune specie (*Lophius*) non esistono veri gangli, essendo le cellule nervose sparse per un'estensione notevole lungo il tronco del simpatico.

Circa l'architettura dei gangli, l'A. osservò che negli animali di piccola mole le cellule nervose di tali gangli sono vicine le une alle altre, essendo scarso il tessuto connettivo di sostegno, mentre negli animali di grande mole le cellule sono lontane le une dalle altre per esservi abbondante il tessuto interstiziale.

Oltre questa esistono altre importanti differenze: le cellule nervose simpatiche sono più voluminose negli animali di maggior mole, sono più piccole negli animali di piccola mole; le cellule più voluminose sono specialmente quelle che presentano maggiore varietà nella loro morfologia.

Infatti mentre le cellule gangliari piccole ordinariamente hanno un corpo regolarmente delimitato, le cellule gangliari grandi si discostano da questa forma regolare. In molti Selacidi, ad esempio, esse appaiono fenestrate, verificandosi tutte le varietà possibili di tale fenestramento, tanto che alcune appaiono semplicemente trapassate alla periferia da piccoli e radi fori, in altre questa canalizzazione si fa così complicata che la parte periferica della cellula acquista l'aspetto di una spugna o di un groviglio di anse filamentose. L'indicato fenestramento della cellula fu già trovato dal Cajal per i gangli cerebro-spinali e dal Levi venne interpretato come una proiezione in fuori della parte periferica del corpo cellulare per la necessità della nutrizione.

Un'altra varietà di forma è quella delle cellule con lobi o con appendici a forma di clava, varietà che l'A. trovò rara nei Pesci e frequentissima nei Cheloni, dove tale forma è frequente anche nei gangli cerebro-spinali.

È noto che tutte le cellule nervose simpatiche dei mammiferi posseggono, oltre alla neurite, anche dei prolungamenti protoplasmatici o dendridii: l'A. invece rilevò che la presenza di dendridii non è un fatto costante nei vertebrati inferiori, i dendridii mancano in tutte le cellule simpatiche degli Anfibi ed anche in alcune cellule simpatiche dei Pesci e dei Cheloni. Per le cellule portanti dendridii un fatto caratteristico che l'A. ha rilevato nei vertebrati inferiori è la frequenza, se non la costanza, dell'origine di sottili dendridii da un grosso tronco comune, dal quale spesso origina anche la neurite.

Per quanto riguarda il quesito delle connessioni fra gli elementi nervosi noi ci limiteremo a riferire: 1° che l'A. rilevò nei gangli la presenza di glomeruli, cioè di allacciamenti, talora molto complicati, di rami provenienti dai dendridii di due o più cellule nervose; 2° che rilevò anche la presenza di terminazioni di fini fibre nervose di origine esogena attorno al corpo delle cellule gangliari.

L'A. accompagna la sua Memoria con un gran numero di nitide figure ricavate a forte ingrandimento; queste dànno una idea esatta dei reperti ed esonerano l'A. da minute descrizioni, ma lo obbligheranno d'altra parte a concorrere con non lieve somma nella spesa della riproduzione, qualora la Memoria venga pubblicata. Circa alla pubblicazione di questa nei volumi accademici i Commissarii, in considerazione della grande diligenza con cui furono condotte le ricerche, della estensione di queste e dei risultati ottenuti, la propongono alla Classe.

R. Fusari, *Relatore.*
Pio Foà.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 14 Marzo 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO ANZIANO
ITALO PIZZI

Sono presenti i Socii: De Sanctis, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato e Stampini, Segretario della Classe. — È scusata l'assenza dei Socii S. E. Boselli, Presidente dell'Accademia, Chironi, Direttore della Classe, Manno, Carle, Ruffini e Schiaparelli.

Si legge e si approva l'atto verbale della adunanza precedente del 28 febbraio.

Il Presidente presenta alla Classe i nuovi Socii nazionali residenti Giovanni Vidari e Giuseppe Prato dando loro il benvenuto. Anche a nome del consocio presente Giuseppe Prato, il Socio Vidari porge vivi ringraziamenti al Presidente per le cortesi parole di presentazione e alla Classe per la grande dimostrazione di stima data ad entrambi.

Indi il Presidente presenta alla Classe una pubblicazione del Socio corrispondente Zuccante dal titolo *Aristotele nella storia della coltura*.

Il Socio Brondi, anche a nome del Socio Ruffini, presenta, per la inserzione negli *Atti*, una Nota del Dott. Emilio Betti

che ha per titolo *L'effetto della 'confessio' e della 'infitiatio certae pecuniae' nel processo civile romano.*

Il Socio De Sanctis, anche a nome del Socio Sforza insieme con lui incaricato di esaminare la monografia del Dott. Ubaldo Mazzini, *L'anfiteatro romano di Luni illustrato e descritto,* legge la sua relazione pienamente favorevole alla inserzione della detta monografia nelle *Memorie* accademiche.

La Classe approva alla unanimità la relazione e con votazione segreta, che è pure unanime, delibera in conformità della proposta della Commissione.

LETTURE

L'effetto della 'confessio' e della 'infitiatio certae pecuniae' nel processo civile romano.

Nota del D[r] EMILIO BETTI.

Dal carattere di processo privato arbitrale (Schiedsgericht) che ha il più antico processo contenzioso romano, discende per logica conseguenza come la separazione e indipendenza del processo esecutivo dal contenzioso così la perfetta equivalenza di principio tra il giudizio della parte e il giudizio del giudice: tra la confessio in iure del reus o il ius iurandum in iure di una delle parti e la pronuntiatio (iudicatio) del iudex, tra la pactio o decisio delle parti tra loro (o, in origine, il ius iurandum in litem) e la damnatio dell'arbiter. La stessa pronuncia del giudice trae la sua forza vincolante da un atto di disposizione delle parti, dalla litis contestatio: confessio, ius iurandum, pactio, quali atti di disposizione vincolanti, equivalenti, surrogano quella pronuncia, escludono litis contestatio, ne' limiti entro i quali essi si estendono. L'affermazione giuridica con cui l'actor fa valere il proprio diritto (intentio) e la congrua risposta — sia *negativa* (infitiatio), sia *positiva* (confessio) — che il reus gli oppone nel più antico processo contenzioso (legis actio sacramento), costituiscono insieme una *procedura bilaterale* — contradditoria nel primo caso, pacifica nel secondo —, il risultato complessivo e lo scopo della quale — mediato dalla iudicatio nel primo caso, immediato nel secondo — è l'*accertamento* del diritto preteso. Conseguenza appunto di tale accertamento a cui riesce quella procedura bilaterale (1) è la forza esecutiva (manus

(1) Non conseguenza della sola actio dell'actor quale esercizio *unilaterale fattivo* delle proprie ragioni, in quanto esso non abbia incontrato in generale contradizione — anche nella mancanza di un adversarius in

iniectio) così della confessio come del iudicatum o della damnatio iudicis nel processo della legis actio, in quanto essi si riferiscano ad *aes* ossia a quantità di danaro precisamente determinate: lex XII tab. 3, 1-2 aeris confessi [rebus] ⟨aeris⟩que iure iudicati[s] (1) XXX dies iusti sunto. post deinde manus iniectio esto (Gell. 20, 1, 45).

La ragione storica remota per cui l'esecutorietà sulla persona è dalla l. XII tab. limitata al solo *aes* confessum o iudi-

---

iure — o la contradizione opposta sia stata giudicata infondata (contro DEMELIUS, *Confessio*, 77-79, 84-85. 96, v. WLASSAK, in “ Sav. Z. „, 25, 118[3-4]. 150). Nelle sue origini l'actio è bensì esercizio arbitrario di ragione; ma una volta sorto il processo contenzioso, ossia una volta stabilito quale presupposto imprescindibile dell'esecuzione sulla persona l'accertamento della ragione, l'esecutorietà non è più effetto dell'actio come tale, purchè non contradetta o superata la contradizione, bensì effetto appunto della dichiarazione formale di non contradire o della pronuntiatio “ essere la contradizione illegittima „. Non è questa una questione di sole parole: è una opposizione fondamentale di *punti di vista*: l'un punto di vista (errato) è quello del DEMELIUS, l'altro è quello del WLASSAK. La funzione della intentio dell'actor nella l. actio sacramento è appunto quella di *formulare la questione processuale* e di provocare da parte del reus confessio o infitiatio. Per non cadere nella unilateralità opposta a quella del DEMELIUS deve dirsi che l'esecutorietà è effetto della procedura *complessiva* (Gesamtaktion: WLASSAK, in “ Sav. Z. „, 25, 151) intentio-confessio, intentio-infitiatio-litis contestatio-iudicatio (damnatio): confessio e iudicatio sono *momenti necessari* nello svolgimento della pretesa a pretesa esecutiva.

(1) Che “ rebus iudicatis „ non può, anche per la sconcordanza del caso, essere genuino fu già veduto dal GRADENWITZ, *Zu den XII Tafeln* in “ Mélanges Girard „, I, 505-22. Che esecutivo non potesse essere se non l'aes iudicatum, risulta dalla stessa esposizione di Gell., 20, 1, 42 conquirendae *pecuniae* causa. 47 quantaeque *pecuniae* iudicati essent, praedicabatur e dalla stessa formola della manus iniectio iudicati (I. 4, 21) “ quod tu mihi iudicatus (sive “ damnatus „) es H S $\overline{X}$ milia... H S $\overline{X}$ milium i. m. inicio „; inoltre da molte altre testimonianze indirette, p. es. da: Cic. *de orat.*, 2, 63, 255 qui iudicatum duci videns percontatur ita: *Quanti* addictus? *Mille nummum*; Liv., 23, 14 2 quique pecuniae iudicati in vinculis essent; Gai. I. 3, 78 iudicatorum (bona veneunt) post tempus quod eis... lege $\overline{XII}$ tabularum... ad expediendam *pecuniam* tribuitur; anche la clausola edittale riferita da Ulp., 58 ed. 42, 2, 4, 5 condemnatus [ut] ⟨nisi⟩ *pecuniam* solvat (§ 3 Labeo: “ neque eo nomine satisfaciat „). La *m. iniectio* presuppone *come tale* un debito *pecuniario precisamente determinato* (certum aes).

catum (damnatus) è a nostro avviso (1), che tale aes tiene le veci del primitivo " *prezzo del riscatto* „ (*poena*, nel senso originario) della persona contro la quale la manus iniectio si dirige. Dal primitivo uso di riscattarsi (se solvere) mediante danaro si è svolta pel debitore la *facoltà primaria* di *pagare* il prezzo del proprio riscatto (aes confessum o iudicatum *facere*: l. XII tab. 3, 3) nelle forme della solutio per aes et libram (2). Appunto perchè il confessus (iudicatus, damnatus) possa esercitare tale facoltà, la lex XII tab. gli concede una *dilazione* della m. iniectio di 30 giorni: Gell. 20, 1, 42-3 iudicatis triginta dies sunt dati conquirendae pecuniae causa quam dissolverent, eosque dies decemviri " iustos „ appellaverunt, velut quoddam iustitium, id est iuris (sc. manus iniectionis) inter eos interstitionem quandam (3). Il vincitore del processo aspetta bensì dal iudicatus *anzitutto* il pagamento dell'aes iudicatum, ma non può da parte sua pretenderlo con un'actio positiva diretta all'adem-

---

(1) Betti, *Su la formola del proc. civ. rom.*, 9[1].

(2) La quale (I. 3, 174) non è che l'*atto formalizzato del riscattare* (imaginaria solutio) *la persona dalla potestà altrui* (" *me*... a te *solvo* liberoque „) *mediante danaro* (" *hoc aere* „); appunto perchè l'aes iudicatum (confessum) importa manus iniectio, la solutio p. a. et l. è il contrarius actus *preventivo* della m. iniectio (§ 173 sive quid ex causa iudicati debeatur): come quello (iud.) è un " aere obligari „, così questa (solutio) è un " aere solvi „. Cfr. Liv. 23, 14, 2 quique pecuniae iudicati in vinculis essent... eos... *pecunia sese exsolvi* iussurum. È notevole anche la corrispondenza del formulario (1ª parte) della solutio p. a. et l. (I. 3, 174 " condemnatus „ al tempo di Gaio; in origine anche qui " iudicatus „ o " damnatus „ secondo i casi) col formulario della manus iniectio (I. 4, 21): all' " ego tibi manum inicio „ corrisponde il " me a te solvo liberoque „.

(3) Cfr. I. 3, 78 tempus quod eis (iudicatis)... tribuitur; Gai. ed. pr. u. 42, 1, 7 intra dies [constitutos] ⟨iustos⟩ quamvis iudicati agi non possit [multis tamen modis] ⟨*per aes et libram tamen*⟩ (così già Rudorff in " Zeitschr. f. gesch. Rechtsw. „, 14, 304) *iudicatum liberari* [posse hodie non dubitatur] ⟨*potest*⟩, quia iustorum dierum spatium *pro iudicato, non contra* iudicatum per legem ⟨XII tabularum⟩ constitutum est. I 30 giorni sono dunque un termine di grazia: *a rigore* la manus iniectio sul confessus o iudicatus spetterebbe senz'altro, immediatamente: tale doveva essere lo stato di diritto anteriore alla lex XII tab., la quale ha qui come altrove introdotto una innovazione. Che il " se solvere „ sia pel iudicatus in origine *facoltà*, non obbligo primario, è confermato dalla storia giuridica comparata: cfr., p. es., Koschaker, *Bab. assyr. Bürgschaftsr.*, 74, 76.

pimento: verso di lui egli non solo non ha più un'actio a " dare oportere ", ma non ha neanche un'actio a " iudicatum facere oportere " — forma, questa, che l'a°. iudicati assumerà propriamente soltanto nel processo formolare —, bensì solo, dopo trascorso il termine, la manus iniectio. Nella sua forma originaria l'actio iudicati non è quindi un'azione diretta al risarcimento (a°. quae rem persequitur), bensì un'azione diretta contro la persona del iudicatus (a°. quae personam persequitur) per mettersene in possesso quasi pignus (ex causa iudicati captum) (1), un mezzo di coazione soltanto indiretta per ottenere il pagamento dello aes iudicatum quale prezzo di riscatto (poena). Per tale guisa indiretta nel formolario della m. i. " ob eam rem ego tibi H S $\overline{X}$ milia iudicati manum inicio " si esprime in certo modo il far valere del diritto a una poena. Qui, chi vi guardi bene addentro, può scoprirsi la radice storica profonda della condemnatio pecuniaria formolare di tutte le actiones in personam: nella quale al pignoramento della persona si sostituirà senz'altro il far valere del diritto alla composizione di un torto (credito processuale: condemnari oportere) (2).

Il iudicatum della procedura formolare (a prescindere dai praeiudicia) genera *sempre* l'a°. iudicati in quanto la condemnatio pecuniaria gli è divenuta immanente: I. 4, 48 iudex non ipsam rem condemnat eum cum quo actum est..., sed aestimata re pecuniam eum condemnat. § 51 iudex, si condemnet, *certam pecuniam* condemnare debet, et si certa pecunia in condemnatione posita non sit. Resta per contro possibile nella procedura formolare una confessio de ipsa re che non sia certa pecunia: orbene una confessio tale non ha forza esecutiva (3) più di quello che l'avessero nella legis actio il iudicatum e il confessum che non si riferissero ad aes (4). Come colà il credito non di-

(1) Caec. Afr. in Gell. 20, 1, 41 chiama la m. i. poena perfidiae debitorum; cfr. Gell. 20, 1, 47 tertiis nundinis *capite* (anzi che " aere ") poenas dabant. V. su ciò Rudorff, in " Zeitschr. f. gesch. Rechtsw. ", 14, 301-2.

(2) È per tale continuità storica e logica tra la manus iniectio e la condemnatio pecuniaria (Betti, *Su la formola*, 42 nota) che il processo romano classico ha la funzione di *accertamento e stima di un torto*.

(3) Cfr., p. es., Wlassak, in " Sav. Z. ", 25 149[1].

(4) Cfr. Bethmann-Hollweg, *Civilprozess*. I, 157. 196; Keller, *Civilpr.*[6], 301; Demelius, *Confessio*, 61 sgg.; Horten, *Personalexekution*, II, 13.

veniva esecutivo se non attraverso e dopo un arbitrium litis aestimandae da introdursi con una nuova legis actio (per arbitri postulationem) (1), così qui il credito confessato non diviene esecutivo se non attraverso e dopo un'actio aestimatoria ex confessione. Invece nella cognitio extra ordinem, che dipende per intero dall'imperium del magistrato anzi che dall'attività dei privati, si riconosce forza esecutiva anche a sentenze e confessioni che non abbiano per contenuto una somma di danaro. Lo svolgimento storico del iudicatum con riguardo alla forza esecutiva può pertanto riassumersi nello schema seguente: 1) nella legis actio esso, quale pronuntiatio de ipsa re (con termine improprio chiamata da Gaio condemnatio in ipsam rem), α) se è emesso ad occasione di una l. actio sacramento (2) in personam, fonda la manus iniectio solo allor che la ipsa res sia certum aes: β) altrimenti no — salva sempre una successiva legis actio (per arbitri post..) allo scopo di procedere alla litis aestimatio e damnatio pecuniae; γ) se è emesso ad occasione di una l. actio in rem, la manus iniectio contro i praedes l. et. v. non può essere parimenti fondata che da posteriore l. aestimatio e damnatio pec. (3); 2) nel iudicium il iudicatum, nel quale

(1) Cfr. Puchta, *Institutionen*, 2[5], 238[t] e Wlassak, in " Sav. Z. ,, 25, 165[3]; cfr. Huvelin, *L'arbitrium liti aestimandae et l'evolution de la formule*, in " Mélanges Gérardin „ (1907).

(2) Iudicatio è soltanto la sentenza emessa in questa l. actio; la sentenza emessa nella l. actio per iud. a. ve postulationem è una damnatio la quale è sempre esecutiva, purchè, come di regola, sia una damnatio pecuniae (cfr. Wlassak, in " Sav. Z. ,, 25, 149[1].

(3) Cfr. Mommsen, *Stadtrechte von Salpensa u. Malaca*, in " Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. ,, 3, 471[41] (" Ges. Schriften ,, I, 361); Gradenwitz, *Zwangsvollstreckung* in " Festgabe f. Gneist ,, 287-8. Il iudicatum della l. a°. in rem, in quanto legittima per implicito il vincitore che non possiede a mettersi in possesso della cosa, può dirsi avere come tale esecuzione estragiudiziale in natura per opera diretta del privato stesso (così, p. es., Stintzing in " Kritische Zeitschrift „ (Heidelberg) 3 (1856), 344 sgg.; Bekker, *Aktionen*, I, 78[3]; Perozzi, *Dell'arbitrium liti aestimandae nella procedura civile romana* (1884)); ma nel caso che l'esecuzione in natura non sia possibile, p. es., per la resistenza del vinto e questi si rifiuti di pagare la litis estimatio, non rispondono se non i praedes: cfr. I, 4, 89 si victus sis nec rem ipsam restituas nec litis aestimationem sufferas sit mihi potestas... agendi... cum sponsoribus tuis.

sono sempre di necessità congiunte pronuntiatio e litis aestimatio (1), genera come tale sempre a°. iudicati; 3) nella cognitio extra ordinem la sentenza, nella quale, almeno di regola, si torna a prescindere da litis aestimatio, e che è una vera e propria condemnatio in rem ipsam nel senso rigoroso del termine, ha esecuzione giudiziale (manu militari) in natura (p. es. D. 6, 1, 68; C. Th. 11, 36, 25) (2).

Lo svolgimento storico della confessio nel riguardo della forza esecutiva percorre tre fasi analoghe: 1) nella legis actio *α*) la confessio aeris ha per conseguenza immediata (a prescindere dal termine di grazia) la manus iniectio iudicati con la sola modificazione che nella demonstratio della formola orale in luogo del termine " iudicatus " viene quello di " confessus " (3), come nel caso di damnatio l'altro di " damnatus " (confessus pro iudicato habetur); *β*) ogni altra confessio de ipsa re emessa di fronte a un'actio in personam non è — salva successiva damnatio pecuniae — esecutiva come tale; *γ*) se è emessa ad occasione di un'actio in rem (in iure cessio) (4) può dirsi avere " esecuzione immediata " in natura per opera del privato stesso

---

(1) Cfr. Rudorff, in " Zeitschr. f. gesch. R. W. ", 14, 301; Puchta, *Institutionen*, 2[5], 238[u]; Kleineidam, *Personalexecution*, 34; cfr. Huschke, *Ueber das Recht des Nexum* 14[17].

(2) Betmann-Hollweg, *Civilprozess*, III, 312-13; Hartmann, *Der Ordo Judiciorum u. die Judicia extraordinaria d. Römer*, I (hg. v. Ubbelohde) 502 sgg., 515 seg.

(3) " Quod tu mihi confessus es H S $\overline{X}$ milia, quandoc non solvisti, ob eam rem ego tibi H S $\overline{X}$ milia iudicati manum inicio ". D'altro avviso Schlossmann, *Altrömisches Schuldr. u. Schuldverf.* 150[2] (quod tu mihi iudicatus es). A torto il Wlassak, in " Sav. Z. ", 25, 179 ricostruisce " pro iudicato manum inicio " (così già il Rudorff, in " Zeitschr. f. gesch. R. W. ", 14, 349[70], " quando ais neque negas "); la manus iniectio pro iudicato tipica è l'a°. depensi; se al confessus si fosse applicata la m. i. *pro* iudicato anzi che la m. i. iudicati, l'*equiparazione perfetta* del confessus al iudicatus non avrebbe avuto base; la regola " pro iudicato *haberi* " non dimostra che la m. i. contro il confessus sia quella pro iudicato, creazione tardiva di leges posteriori alla l. XII tab.; in questa (3, 1) l'aes confessum è posto sulla stessa linea dell'aes iudicatum.

(4) Nella legis actio non esiste una confessio di diritti reali diversa dalla in iure cessio (cfr. Wlassak, in " Sav. Z. ", 25, 102); del resto il ter-

in quanto questi viene per esplicito autorizzato in iure (addictio) dal magistrato a impadronirsi della cosa (secum ducere); — 2) nel iudicium α) la confessio de certa pecunia fonda non altrimenti che il iudicatum formolare l'a°. iudicati (con la sostituzione del termine " confessus „ all'altro di " condemnatus „ nella demonstratio): non più in tutta la sua estensione possibile ma solo entro questi limiti la regola " confessus pro iudicato habetur „ resta vera; β) ogni altra confessio emessa di fronte a un'actio in personam (su certa res, su incertum, o su un factum) non è atta a fondare come tale se non un'actio ex confessione (non rei iudicandae sed aestimandae causa: cfr. Ulp. 9, 2, 25, 2); γ) parimenti la confessio de ipsa re emessa di fronte a un'actio in rem o a un' actio ex interdicto exhibitorio vel restitutorio non equivale come tale che alla pronuntiatio secundum actorem da parte del iudex (Ulp. 42, 2, 6, 2 si " fundum „ vindicem " meum esse „ tuque confessus sis, *perinde habeberis* atque si " dominii mei fundum esse „ pronuntiatum esset) e non è atta a fondare che un'actio ex confessione con formula ficticia.

In età classica avanzata in forza di una oratio di M. Aurelio — della quale da Giustiniano è stata generalizzata l'estensione (D. 42, 2, 6, 2; D. 42, 1, 56) e dagli studiosi del nostro tema esagerata l'importanza oltre i suoi limiti veri (1) — la confessio reale pare aver provocato *subito* un arbitratus de re restituenda (invito a restituire entro un certo termine) da parte *dello stesso praetor* (arg. da: subsequi *praetorem* voluntatem orationis divi Marci debere [...] dabit[ur] igitur [...] confesso tempus ad restitutionem) e, nel caso che il possessore non restituisca entro il termine prefisso, la concessione di un'actio aestimatoria ex confessione priva della clausola così d. arbitraria (arg. da: et si non restituatur, lis aestimabitur). — 3) nella

---

mine " confessio „ è tecnico della confessione di debito (p. es., lex Rubria c. 22). Sulla " esecutorietà „ della in iure cessio v. GIFFARD, *Confessio in iure*, 27-28 (prise de possession), v. però WLASSAK, in " Sav. Z. „, 25, 115.

(1) V. p. es., PUCHTA, *Institutionen*, 2[5] 191-2; ZIMMERN, *Gesch. d. R. P. R.*, III, 382-3; SAVIGNY, *System*, 7, 15; KARLOWA, *Civilprozess*, 154[4]; BETMANN-HOLLWEG, *Versuche über Civilprozess*, 265 sgg., *Civilprozess*, 2, 548; KELLER, *Civilprozess*, § 63, n. 726; DEMELIUS, *Confessio*, 192-204; GIFFARD, *Confessio*, 173-181; KLEINEIDAM, *Personalexekution*, 32, 35.

cognitio extra ordinem, come si è usata la condemnatio in rem ipsam, così per coerenza logica anche alla confessio dev'essere stato riconosciuto l'effetto di fondare l'esecuzione giudiziale in rem ipsam: tale non è invece ancora l'esecuzione ex oratione divi Marci (1).

A quanto si è detto della confessio sotto 2 α-β paiono ostare il fr. 6 per 1-2, il fr. 3 del tit. 42, 2 e il fr. 56 (42, 1) ove la regola " confessus pro iudicato habetur " è applicata anche a casi di confessio *certae rei* (2); ma essi sono interpolati. È evidente che, dato il principio della procedura classica per cui iudicatum (agli effetti dell'a°. iudicati) = condemnatio certae pecuniae (I. 4, 51), quella regola non può valere che per confessio certae pecuniae, e che dato per contro il principio della procedura giustinianea, che è la condemnatio (e la esecuzione) in rem ipsam, quella regola vale per qualsiasi confessio di un *certum*, non è applicabile invece alla sola confessio d'incertum. Secondo il sistema classico la confessio su incertum (factum) o species (corpus) o genus (quantitas) non può che sostituire la pronuntiatio sull'intentio e fondare un " ex confesso teneri " (Paul. 42, 2, 4) ossia un'actio ex confessione (con formula ficticia). Per contro nella procedura extra ordinem giustinianea, sparita con la litis contestatio e la formola classica, anche la possibilità di una formula ficticia ex confessione, non essendo la confessio d'incertum come tale suscettibile di esecuzione giudiziale in rem ipsam, s'introduce la *coazione giudiziale* (extra ordinem coerceri) *alla confessio certi* (3), certae rei (trattandosi

(1) Sullo svolgimento della confessio v. KARLOWA, *Civilprozess*, 154 e KLEINEIDAM, *Personalexekution*, 32-35.

(2) Tale applicazione non è ammessa del resto come classica, nè dal DEMELIUS, *Confessio*, 139-146, 147-163, in specie 152[2]. 163, nè dal GIFFARD, *Confessio*, 80-90. 113. 170, i quali per " *confessio certi* " intendono sempre la sola confessio certae pecuniae, ma non sospettano itpl.[to] il fr. 6, pr. 1: così anche KELLER, *Civilprozess*[6], § 63, p. 301 a n. 726. L'esecutorietà della confessio certae rei nella procedura formolare è invece ammessa per esplicito dal KARLOWA, *Civilprozess*, 154[4]; cfr. anche BETHMANN-HOLLWEG, *Civilprozess*, 2, 546, 558[12], 663[10] (v. però, 2, 548[40], 665), SAVIGNY, *System*, VII, 15; RUDORFF, *Rechtsgesch.*, 2, 217 e KLEINEIDAM, *Personalexekution*, 34-35.

(3) Nella classicità di tale coazione, inspiegabile coi principî classici, gli scrittori hanno ciecamente creduto sinora! V. p. es.: KELLER, *Civilprozess*[6],

di species) o certae quantitatis (trattandosi di genus). Pertanto i compilatori dicono: (fr. 6 pr. 1) certum confessus pro iudicato erit, incertum non erit. si quis incertum confiteatur vel corpus (sc. incertum (1)) sit confessus [...gloss.] dare se oportere, *urgeri debet ut certum confiteatur* (2), item eum qui rem (sc. genus) confessus est (sc. urgeri debet), ut certam quantitatem fateatur. Ulpiano (l. 5 omn. trib. Pal. 2277) non poteva invece dire che così (all'incirca): cert⟨am pecuniam⟩ confessus pro iudicato erit, incertum ⟨vel corpus⟩ non erit. si quis incertum vel corpus (sc. certum (3)) sit confessus dare se oportere ⟨*perinde habebitur atque si pronuntiatum esset* incertum vel corpus dare eum oportere: in eum enim ex confessione sua iudicium datur: idem observandum erit etiam si quis⟩ certam quantitatem fateatur. Che tale fosse il pensiero di Ulpiano è dimostrato da quanto egli dice nel § successivo che s'introduce col nesso " sed et si ": questo nesso indica che la configurazione giuridica della confessio classica nei casi del § 1 (processi per debito) e ne' casi del § 2 (processi reali) doveva essere analoga: il che essa non sarebbe stata se l'" urgeri debet " fosse genuino. Lo stato vero del diritto classico in materia di confessio certae rei traspare

---

301 a n. 726; Bethmann-Hollweg, *Civilprozess*, 2, 548[41]; Karlowa, *Civilprozess*, 154; Demelius, *Confessio*, 159 sgg.; Giffard, *Confessio*, 128, 168 sgg.; Kleineidam, *Personalexekution*, 35[31] (che si limita a chiamar " köstlich " l'urgeri del fr. 6 senza per altro sospettarne l'origine compilatoria).

(1) Con tale restrizione va inteso il termine " corpus " nel contesto interpolato e nel senso voluto dai compilatori: cosa non determinata precisamente.

(2) L'urgeri richiama naturalmente il pensiero all'" extra ordinem coerceri ": in Hartmann, *Ordo*, I, 509-10, possono vedersene esempi; tra gli altri questo analogo al nostro (29, 3, 2, 8): si quis *non negans* apud se tabulas esse, non patiatur inspici et describi, omnimodo ad hoc compelletur. È parimenti, a nostro avviso, interpolato l'urgeri ad solutionem in D. 36, 2, 12, 4 (Ulp.) (da nisi forte) e l'urgeri ad suscipiendum iudicium in D. 30, 71, 2 (Ulp.: modicum tempus ad solutionem dandum est [...] quod [quidem tempus] etc.).

(3) Così va inteso nel senso di Ulpiano: è evidente che questi voleva citare un esempio di certa res. Il " vel corpus " è la prova sicura che il " certum " nel pr. è itpl. per certa pecunia. Cfr. Anche Anton. (211) C. 7, 59, 1 confessos in iure pro iudicatis haberi placet. quare sine causa desideras recedi a confessione tua cum et *solvere* cogeris.

ancora attraverso Ulp. 27 ed. (795) 42, 2, 5 qui *Stichum* debere se confessus est, sive mortuus iam Stichus erat sive post litis contestationem decesserit, (in litis aestimationem) *condemnandus* est: il condemnari non può che riferirsi a un'actio ex confessione (certae rei) litis aestimandae causa (1). Il medesimo risulta da Paul. 9 Plaut. (1176) 42, 2, 2, 3 Julianus ait confessum certum (sc. certae rei, come appare dal seguito) se debere legatum [omnimodo ... fuisset], et si ⟨res⟩ iam a natura recessit, [ita tamen ut] (2) in aestimationem eius damn⟨andum esse⟩ (3): il damnari si riferisce anche qui a un'actio ex confessione. Ma se questa è necessaria non è vero nel caso proposto che " confessus pro iudicato habetur ": la motivazione " quia c. p. i. h. " non può dunque appartenere a Paolo, il quale, se mai, non avrebbe potuto dare che quest'altra: quia confessus certam rem se debere perinde habetur atque si eam rem dare eum oportere pronuntiatum esset. Lo scopo della interpolaz. della regola è quello di generalizzarne l'applicazione a qualsiasi confessio di certum: in questo medesimo scopo la regola è interpolata nel fr. 6, 2 (42, 2) [et omne omnino quod quis confessus est, pro iudicato habere] e nel fr. 56 (42, 1) [post orationem divi Marci, quia in iure confessi pro iudicatis habentur].

Vero è soltanto (Ulp. 27 ed. 794) che " post rem iudicatam vel iureiurando decisam vel confessionem in iure factam, *nihil quaeritur* ⟨*de ea re de qua* iudicatum vel iuratum, vel confessio facta est, *sed solum quaeri potest an* iudicatum, vel iuratum, vel confessio facta sit⟩ "; ma ciò non significa che ogni ius iurandum o confessio abbia come tale senz'altro forza esecutiva come il iudicatum formolare. La regola " confessus pro iudicato habetur " vale senza restrizioni soltanto nella legis actio e propriamente nella l. a. sacramento, nella quale è, a nostro avviso (4), da ricercare la sua origine remota: di fronte alla intentio certa di

---

(1) Così anche Demelius, *Confessio*, 208-9.

(2) Questa restrizione si spiega soltanto tenendo presente che la condemnatio *normale* del processo giustinianeo è la condemnatio in ipsam rem.

(3) Tale restituzione è resa sicura dai Basil. 9, 4, 3 *Ὁ ὁμολογῶν χρεωστεῖν ληγάτον, κἂν μὴ φαίνεται τὸ πρᾶγμα* (res), *εἰς τιμὴν τὴν αὐτοῦ κατακρίνεται.*

(4) Betti, *L'antitesi storica tra iudicare e damnare*, 3 sg.

quella l. actio confessio e iudicatio si equivalgono in tutto. Il iudicatum de sacramento è una pura pronuntiatio (mediata) de ipsa re, priva di damnatio: l'effetto negativo di esso come della confessio è il " de eadem re nihil quaeri „, come dice Ulp., l'effetto positivo è il " ius facere, pro veritate accipi, praeiudicium facere veritati „, come si dice altrove (1): il iudicatum formolare, per contro, fonte di obligatio e actio iudicati (iudicatum facere oportere) è inoltre damnatio pecuniae. Che infine il termine " certum „ (aggettivo sostantivato) usato nel fr. 6, pr. 1 (42, 2) abbia pei classici il significato tecnico di " oggetto (in generale) precisamente determinato „ e non quello di " certa pecunia „ (2) è provato dalla chiara definizione di Paul. 28 ed. (431) D. 12, 1, 6 (a proposito della rubrica edittale " si certum petetur „): certum est cuius *species* vel *quantitas* (quae *in obligatione* versatur, aut nomine suo aut ea demonstratione quae nominis vice fungitur), *qualis quantaque* sit ostenditur (3).

Questo lo svolgimento della confessio in rapporto con l'esecuzione. Esaminiamo ora l'effetto dell'atto contrario nelle quattro actiones quibus adversus infitiantem in duplum agitur: iudicati, depensi, ex testamento certi per damnationem legati, damni iniuriae legis Aquiliae (I. 4, 9. 171 (insieme, nella sezione delle actiones); 2, 282; 3, 127. 216 (singolarmente, nella sezione delle res)). La *necessità processuale* della confessio o infitiatio propria di queste actiones non risale a un particolare instituto loro peculiare come ad es. la interrogatio in iure del processo formolare, bensì risulta dalla struttura stessa del modus

(1) Ciò almeno quando oggetto del iudicatum è uno stato di diritto che *ognuno* deve riconoscere: allora il suo contenuto vale *quale* verità (non *in vece della verità*); negli altri casi invece esso vincola le sole parti a comportarsi *come se esistesse*: se si tratta di un diritto che si esaurisce in una relazione delle parti tra loro (credito), la limitazione della res iudicata alle parti non ha alcuna rilevanza pratica (Hölder, in *Jherings Jahrbücher*, 51, 318).

(2) Come sostengono Savigny, *System*, 7, 8[g]; 5, 623-4; Rudorff, in " Zeitschr. f. gesch. R. W. „, 14, 412[164]; Bethmann-Hollweg, *Civilprozess*, 2, 548[40]; Kleineidam, *Personalexekution*, 31[21].

(3) Che, come nel fr. 6 pr. Ulpiano diceva " certam pecuniam „, così anche nell'editto riferito in D. 12, 2, 34, 6 il pretore dicesse " eum a quo certa pecunia petetur solvere aut iurare cogam „ (così Geouffre de Lapradelle, *L'évolution historique du serment décisoire en d. r.*, (1894) 47-56;

lege agendi proprio del genere di pretese (certe) con esse fatte valere: la legis actio sacramento in personam. La intentio di questa l. actio pone la questione processuale in termini categorici indicando l'ammontare preciso del debito e non consente altra risposta che di sì e di no: la litis contestatio sacramento (provocatio) e la iudicatio che ne procede presuppongono la infitiatio del reus: Rhet. ad Her. 1, 17 p. ex intentione et infitiatione iudicatio constituitur (1). In quanto tra le parti vi sia *lis* nel senso primitivo rigoroso di questo termine — ossia *controversia sull'esistenza* o inesistenza del credito —, in quanto tra esse vi sia *actio* nel senso tecnico ristretto di questo termine — ossia processo contradittorio —, la infitiatio del reus ne è il necessario presupposto (1). Dal punto di vista processuale dunque la classica actio adversus infitiantem è l'*actio* iudicati,

---

Giffard, *La confessio in iure*, 86[1]; da ultimo Biondi, *Il giuram. decisorio*; cfr. Demelius, *Schiedseid*, 73[4]), si può arguire dall'analogia con la confessio e dallo stesso "solvere": di una res non si dice "solvere"; anche quell'actio de eo quod certo l. nella cui formola si dice "si quid interfuit... solvi" si riferisce a sola certa pecunia. Parimenti a questa sola si riferiva in origine la solutio per *aes* et libram.

(1) Cfr. Varro, l. lat., 5, 180, qui petebat et qui infitiabatur. Altrove invece di infitiatio si dice *depulsio*: il quale termine crediamo che abbia la sua ragione storica profonda nel fatto che dal (manum) *depellere* del vindex (caratteristica del più antico processo personale contradittorio; m. iniectio con vindex) si è svolta appunto la infitiatio dello stesso reus, prima nella forma del sibi m. depellere, poi senza quella forma: Quint. inst. or. 3, 6, 7, quaestio constat... ex *intentione* et depulsione, 13, 16 *ex depulsione* nasci statum (= statum causae = quaestionem). 17 accusatoris *intentio*... Si *neget* reus faciat statum qui negat. Quid *si confitetur*...?... *nulla lis est*... Ita erit quidem status (= quaestio) *ex* prima *depulsione*. 19 *intentio* est:...; *depulsio*:...; quaestio:... 20 statum esse id quod appareat *ex intentione et depulsione*; 3, 9, 1 (iudiciale genus. officiis constat duobus, *intentionis ac depulsionis*; 6, 4, 2 constat enim ex *intentione ac depulsione*; 8 pr. 9 depulsionem porro omnem *infitiationem* duplici... constare; Cic. de inv., 1, 10 constitutio est prima conflictio causarum *ex depulsione intentionis* profecta (constitutio = quaestio, controversia). 13 si constitutio et ipsa et pars eius quaelibet *intentionis depulsio* est, quae intentionis depulsio non est, ea nec constitutio nec pars constitutionis est; 2, 15 *intentio* est criminis: "occidisti", *Depulsio*: "non occidi", ex quibus constitutio est, id est *quaestio*, eadem... quae *iudicatio*: "occideritne?". 52 *intentio* est: "maie-

depensi etc. *normale* (1); dal punto di vista storico essa è la fedele traduzione della l. actio sacramento nel processo formolare.

Resta a spiegare il *duplum* della condemnatio. È evidente che la ragione di questo non può trovarsi entro la l. actio sacramento perchè non ogni pretesa in essa fatta valere, genera per ciò stesso una pretesa processuale al duplum dell'importo primitivo. Quella ragione (2) è da ricercare invece nel *carattere intrinseco del debito* e della responsabilità fatti valere con le quattro actiones, e anzitutto del debito e della responsabilità fatti valere con quelle due tra esse che sono le più antiche: l'a°. iudicati (ex lege XII tabul. 3, 1: I. 4, 21), e l'a°. depensi (ex lege Publilia: I. 3, 127; 4, 22). Tale debito 1) ha per *contenuto*: *a*) una somma di danaro (*aes*) precisamente determinata (*liquida*) (3), la quale *b*) è stata *accertata* (o fissata) in processo o in iure in confronto col debitore stesso (confessio, iudicatum, damnatio iudicis) (4) o almeno accertata in confronto

---

statem minuisti... „. *Depulsio* est: " non minui maiestatem „. *Quaestio* est: " maiestatemne minuerit „. ...*Judicatio* est: " minuatne is maiestatem, qui... „. 62 intentio-depulsio–quaestio-... iudicatio. 70 (idem). 73 (idem). 79 (idem). 87 (idem). 92 (idem). 97 (idem). 98 (idem). top. 93 depulsio criminis... appellatur... status.

(1) " Normale „ chiama invece l'Albertario (in " Bull. „, 26, 98) l'a.° l. Aquilia ex confessione: espressione che riposa su un pregiudizio che ci accingiamo a sfatare.

(2) Indagini su di essa sono state fatte da: Huschke, *Kritische Bemerkungen zum 4. Buch des Gaius*, in " Zeit. f. geschichtl. Rechtsw. „, 13 (1846), 256-284 (notevole); Sell, *Von den causis ex quibus lis infitiando crescit in duplum*, in " Sell's Jahrbücher für Bearbeitung des Römischen Rechts „, 2 (1846), 1-64, 175 sgg.; Rudorff, *Ueber die Litiscrescenz*, in " Zeitschr. f. gesch. R. W. „, 14, (1848), IX, p. 287-478 (notevole); Karlowa, *Civilprozess, z. Z. d. L. a.* „, 189-200; Wenger, *Actio iudicati*, 32-42, 102-106; cfr. inoltre: Huschke, *Ueber das Recht des Nexum*, 142; Jhering, *Geist d. r. R.*, I[1], 150[64]; Bekker, *Aktionen*, I, 40; Schlossmann, *Altr. Schuldr. u. Schuldverf.*, 172; Kleineidam, *Personalexekution*, 192-202.

(3) Il momento della determinatezza (certum) del debito è rilevato a ragione dallo Huschke, in " Z. f. g. R. W. „, 13, 264-9 (cfr. Wenger, op. cit., 32[16]) e dal Wenger, op. cit., 32-34.

(4) Il momento dell'accertamento giudiziale è rilevato dal Rudorff, op. cit., 466-7 (cfr. Wenger, op. cit., 34[24]). Se non che invece di esso si rileva

col suo sponsor (eventualità possibile nel caso del depensum) dopo essere stata fissata nella sponsio, e *c*) ha la funzione di poena, ossia di prezzo del riscatto d'una persona (1). Di tale debito (Schuld), non esigibile come tale, 2) la *garanzia* (Haftung), formata dalla persona stessa del debitore, può esser fatta valere senz'altro in via di manus iniectio (iudicati, pro iudicato) su quest'ultima, quando il debitore non abbia pagato il debito entro il termine (XXX dies, VI menses) concessogli dalla legge (2) (3).

---

talvolta il concetto dell'onere della prova addossato all'actor (SELL, op. cit., 180 sgg.; RUDORFF, op. cit., 470-75) o il concetto della pubblicità della damnatio o nuncupatio e della sua esecutorietà, del quale ha abusato lo HUSCHKE (p. es. in " Z. f. g. R. W. „, 13, 251-63) e altri hanno abusato dopo lui (RUDORFF, op. cit., 374, 468; KARLOWA, *Civilprozess*, 198, *Rechtsg.*, 2, 803; B. HOLLWEG, *Civilprozess*, 2, 534[40]; in contrario v. MITTEIS, in " Sav. Z. „, 22, 114 18 e WLASSAK, ivi, 31, 200[1]).

(1) V. sopra pag. 2-3. Il momento della penalità non è rilevato da alcuno: eppure esso è dimostrato dalla irripetibilità del solutum.

(2) Il momento della connessione con la manus iniectio è ben a ragione rilevato dallo JHERING, op. cit., 1, 150[64], BEKKER, op. cit., 1, 40, controverso dallo SCHLOSSMANN, op. cit., 172, difeso dal KLEINEIDAM, op. cit., 192 sgg. Se non che nel BEKKER esso si complica con la falsa spiegazione del duplum da un doppio debito, l'uno dell'is cui m. depulsa est, l'altro proprio del vindex.

(3) L'assimilazione ex lege Publilia dell'a°. depensi, quale a°. pro iudicato, all'a°. iudicati (su essa RUDORFF, op. cit., 357-64) ha sua ragione nel concetto della *surrogazione reale* (successione) dello sponsor qui dependit (= reum liberavit) nel medesimo diritto di pegno sulla persona che il creditore sodisfatto aveva verso l'is pro quo depensum est. Lo sponsor deve in antico anzitutto 1) con la sponsio, *obbligarsi a dare in mano* (= *spondere*: cfr. spondere filiam quasi uxorem) al creditore la *persona* del debitore iudicatus (quasi pignus) o il prezzo del suo riscatto (*poena*); indi 2) col depensum, nelle forme della solutio per aes et l. liberare il debitore dal creditore pagandone il riscatto (formola: " quod L. Titius (debitor) tibi H S $\overline{X}$ milia iudicatus (confessus, damnatus) est, quo nomine ego sponsor sum, eum ego a te solvo liberoque hoc aere a. q. l.); poscia 3) intervenire quale vindex (cfr. anche RUDORFF, op. cit., 359) nella manus iniectio del creditore sul debitore per compiere la formalità del manum depellere, di cui il creditore riconosce la legittimità — ritirando per implicito la sua pretesa — col rinunciare alla provocatio sacramento (manus depulsio pacifica, da paragonarsi alla manumissio vindicta, ch'è pure una vindicatio in libertatem pacifica); infine 4) dopo aver aspettato invano per sei mesi il pagamento del-

Ora di fronte alla manus iniectio con cui il creditore mira a impadronirsi della persona del debitore quale unico pignus ed eventuale surrogato dell'aes che gli è dovuto, la manus depulsio con cui il vindex sottrae (eximit) quella persona al potere del creditore dev'essere apparsa alla ingenua concezione primitiva quale privazione illegittima dell'oggetto di sodisfazione del proprio credito — tale da generare pel vindex, quando fosse giudicata infondata, il debito di una poena dupla della poena prima dovuta, alla medesima guisa che un furtum nec manifestum (1). A tale idea per l'appunto accenna anche la concezione tipica del debito quale *aes alienum* per chi lo deve dare (2),

---

l'aes depensum, esercitare egli stesso la m. iniectio sul debitore (formola: " quod ego pro te iudicato, (confesso, damnato) P. Mevio H S $\overline{X}$ milia (: la poena) spopondi eoque aere per libram depenso te a P. Mevio solvi liberavi, quandoc (sc. in sex mensibus) non solvisti, ob eam rem ego tibi H S $\overline{X}$ milia pro iudicato (si noti la rispondenza simmetrica con le prime parole della demonstratio) manum inicio „). Cfr. anche per analogia il diritto babilonese (KOSCHAKER, *B. a. Bürgschaftst.*, 50 sgg. 72) e la redemptio ab hostibus (D. 49, 15, 15. 19, 9. 21 pr.).

(1) Sulla vasta applicazione primitiva dell'idea del furtum nec manifestum v. JHERING, *Geist*[1], 2 115-116 (n. 127-130). 3, 31 (n. 11). 133 (n. 172). 180 (n. 235). 189 (n. 254) e sopratutto ora HUVELIN, *Études sur le furtum dans le très ancien droit romain*, I. La poena prima dovuta è, quale prezzo del riscatto, l'*equivalente* della persona che viene sottratta con la m. depulsio: la poena dovuta da chi la sottrasse (vindex) è per l'appunto il doppio dell'equivalente, come in un furtum rei.

(2) V. Inoltre: Jav., 9 ep. 49, 14, 11 id... *bonorum* cuiusque esse intellegitur, quod aeri alieno superest; Paul. 53 ed. (Pal. 655) 50, 16, 39, 1 *bona* intelleguntur cuiusque quae deducto aere alieno supersunt; Pomp. 5 Sab. (Pal. 451) 50, 26, 165 " venisse ad heredem „ nihil intelligitur nisi deducto aere alieno; Paul. 8 resp. 23, 3, 72 pr. non plus esse in promissione bonorum quam quod superest deducto aere alieno; Paul. 41 ed. 37, 7, 2, 1 illud intellegendum est filium in bonis habere, quod deducto aere alieno superest; Ulp. 6 fideic. 5, 1, 50, 1 aes enim alienum patrimonium totum imminuere constitit non certi loci facultates; Ulp. 14 ed. 5, 2, 8, 9; Ulp. 25 Sab., 33, 8, 8, 1; Ulp. 15 Sab. 37, 9, 9; Ulp. 21 Sab. 33, 8, 6, 4 sicut... aes alienum, hoc est quod debetur domino, minuit legatum peculium, ita *per contrarium* id quod dominus debet servo *augere* debet. V. inoltre la costruzione del deducere in: Maec. Ulp. 36, 1, 17 (16), 3; Ulp. 31, 77, 81; Paul. 35, 2, 39; Proc. 50, 16, 125; Pomp. 11, 7, 26; 35, 2, 69; Ven. 33, 2, 43; Marc. 36, 1, 46 (44), 1; Scaev. 35, 2, 94; 36, 1, 1, 18; (Marcell.) 40, 5, 24, 13; Paul.

suum per chi lo deve ricevere (1), secondo la definizione tradizionale riferita da Ulp. 1 reg. (Pal. 2367) D. 50, 16, 213, 1: aes alienum est quod nos aliis debemus: " aes suum „ est quod alii nobis debent. Col manum depellere (vindicere) ei (eum) cui manus iniecta est il vindex anzitutto *libera* senz'altro il debitore dal potere del creditore e distrugge il debito primario di questo verso quello (2); in secondo luogo, per una specie di novatio, obbliga eventualmente sè stesso o *trasferisce* nella persona propria il debito raddoppiato nell'ammontare.

Di fronte alla manus *iniectio* del creditore *quale intentio* (in factum) che afferma *a*) " iudicatum (confessum, damnatum, depensum) esse „ *b*) " aes solutum non esse „, la manus *depulsio* (vindicatio) del vindex *presuppone* sempre di necessità (3) la *infitiatio* (= impugnativa) dell'uno o dell'altro factum affermato

---

24, 1, 55; 24, 3, 54; 35, 2, 36, 2; 42, 1, 19 pr. 1; Sent. 4, 3, 3; 5, 6. Perciò Jav. 1 ep. 42, 5, 28 in omni aere alieno... etiam *invitus* heres obligatur (cfr. Gai, I. 3, 84). Tale concetto del debito si rivela pure nel fatto che l'obligatio pei sacra del defunctus viene dai pontefici addossata, in mancanza d'altri, ai creditori o ai debitori, quali, rispettivamente, titolari o detentori dell'aes del defunctus: Cic. de leg. 2, 19, 48 si nemo sit qui ullam rem ceperit, de creditoribus eius qui plurimum servet. 49 extrema illa persona est, ut si quid ei qui mortuus sit, *pecuniam debuerit* neminique eam solverit, *proinde habeatur quasi eam pecuniam* (a defuncto) *ceperit*.

(1) Lab.-Ulp. 66 ed. 42, 8, 6, 6 eum qui *suum recipiat* nullam videri fraudem (= furtum) facere; Paul. 14 Plaut. 12, 6, 44 repetitio nulla est ab eo qui suum recepit; Paul. 21 ed. 50, 17, 129, 1. V. inoltre (con suum recipere): Paul. 31 ed. 46, 2, 12; Urs.-Cass.-Ulp. 76 ed. 44, 5, 1, 10; Marcell.-Ulp. 26 ed. 12, 6, 26, 12; Cels. 28 dig. 39, 5, 21 pr.; Proc. 7 ep. 12, 6, 53 (itp.): sempre in materia di condictio indebiti o di exc°. doli. V. anche suum consequi in I. 2, 55.

(2) V. su ciò Kleineidam, *Personalexekution*, 185-191.

(3) Del contrario avviso Kleineidam, op. cit., 192, pel quale in base al m. depellere (vindicere) il *vindex* ha la facoltà alternativa di scelta tra il " iudicatum (simplum) facere „ e il processo d'impugnativa del iud^{tum}. Il vero è invece (cfr. la nostra esposizione a pag. 713, nota 3, n. 3) che della m. depulsio non il vindex bensì l'is qui manum iniecerat veniva posto di fronte all'alternativa o di impugnare la m. depulsio (sacramento provocare) o di acquietarvisi (m. iniectio pacifica). Il tempo utile per " iudicatum facere „ era già trascorso per altri che non fosse lo stesso iudicatus (onde l'alternativa in l. XII, tab. 3, 3 ni (ipse) iudicatum facit *aut* quis endo eo [in iure] vindicit). Questa interpretazione è comprovata dal fatto che il termine

dal creditore (1): " nego iudicatum (etc.) esse ", ovvero " aio aes solutum esse: *quam ob rem* ego isti manum depello ". Il *fondamento* quindi della responsabilità del vindex sotto l'aspetto tecnico formale è la sua depulsio (infitiatio), qualora l'is qui manum iniecit la impugni d'illegittimità col provocare sacramento su di essa (" *quando iniuria manum depulisti te s. q. provoco* ") e la iudicatio che ne procede dichiari iniustum il sacramentum del vindex (= iudicatum esse, solutum non esse). La ragione intrinseca materiale del *duplum* d'altra parte è che con l'infitiatio iniusta il vindex ha in primo luogo posto in questione un credito pecuniario certo (liquido) superiore a ogni dubbio facendo correre al creditore il rischio di perderlo, in secondo luogo ha differito la sodisfazione d'una pretesa personale esecutiva (2). Sotto questo aspetto materiale, che la rude concezione primitiva non dovè accentuare meno di quello formale, la iniusta infitiatio (iniuria m. depellere) iudicati (confessi, depensi) non potè apparire altrimenti che la infitiatio (abnegatio,

---

depulsio è restato tecnico nei retori posteriori per designare appunto la infitiatio: essa non ha dunque potuto essere in origine che l'atto concomitante la infitiatio.

(1) Cfr. Eisele, *Ueber actio iudicati und Nichtigkeitsbeschwerde* in " Abhandlungen zumr. Civilprozess ", 142; Wenger, *Actio iudicati*, 35-39. Nel significato *tecnico* d' " *impugnare* " (contrapposto a confiteri), " *fare il processo* " (= agere in senso ristretto) nella parte di convenuto, e riferito all'a°. iudicati o depensi etc. il termine infitiari è usato ne' seg. fr. de' Dig.: Ulpiano 5, 3, 20, 4; 9, 2, 23, 10; 9, 3, 1, 4; 11, 3, 5, 2; 46, 3, 7; Gai 9, 2, 2, 1: Ped.–Paul. 12, 2, 30 pr. (cfr. Sent. 1, 19, 1-2); con portata generale in: Nerat. 3 membr. 46, 7, 16 ad infitiationem (= iudicium) compelli eum qui *sine iudice* dare paratus est; Paul. 6 Sab. 10, 2, 44, 4 et *actores* sunt et *rei* et ideo iurare debent non calumniae causa *litem intendere* et non calumniae causa *ad infitias ire* (si noti il parallelismo); Ulp. 74 ed. 44, 1, 2, 4 qui dicit non licere procuratorio nomine agi non prorsus *litem infitiatur* sed personam evitat (di exceptio dilatoria, o translatio: Prozessvoraussetzung): cfr. Marcell. 3 dig. 44, 1, 9 non utique existimatur confiteri de intentione adversarii is quo cum agitur, quia exceptione utitur (sc. cum sit *peremptoria* exceptio); Ulp. 7 disp. 46, 1, 10, 1 ita demum inter fideiussores dividitur actio, si non infitientur: nam infitiantibus auxilium divisionis non est indulgendus. V. anche il contrapposto tra infitiari e confiteri in Cic. p. Tull. 1. Sest. 40. Catil. 3, 11. Fragm. B. 8, 17.

(2) Cfr. Wenger, *Actio iudicati*, 34-35.

abiuratio) crediti (depositi), ossia quale furtum senza subreptio (fraus) (1).

Il torto (iniuria) formale del contradire (cfr. I. 4, 13 poenae nomine) non potè essere concepito disgiunto dal torto materiale consistente nel non solvere di cui la stessa formola della m. iniectio faceva rimprovero esplicito al reus, ma dovè anzi essere considerato quale espressione (riproduzione) processuale di esso. Nell'a°. iudicati e nell'a°. depensi tradotte dalla forma di legis actio sacramento in quella di iudicium, mentre il momento materiale del non solvere è superato e dimenticato, il momento formale della infitiatio assume per contro — caduta la necessità generale di essa — un valore per sè stante particolare: di conseguenza nella costruzione classica il duplum diviene una poena *puramente processuale* (temere litigatium).

Questo medesimo fenomeno è avvenuto nelle altre due actiones che restano a considerare. Per quanto poi concerne il

(1) In questo significato *materiale* infitiari è usato in: Cels. 12 dig. 47, 2, 68 (67) pr. infitiando depositum nemo facit furtum (nec enim furtum est ipsa infitiatio licet prope (sc. sine subreptione) furtum est; cfr. Paul. 39 ed. 47, 2, 1, 2 is qui depositum abnegat non statim etiam furti tenetur; Paul. 45 ed. (vet. Sab. Cass.), 41, 2, 3, 18 si rem apud te depositam... loco non moveris et infitiandi animum habeas... furtum sine contrectatione fieri non potest: ma la cosa era appunto controversa tra i veteres; cfr. Paul. 31 ed. 16, 3, 13 pr.; Ulp. 12, 3, 3; 16, 3, 11. V. su ciò le definizioni — qui come altrove certo di origine antica — di Festus (Paul. p. 112) infitiari = *creditum* fraudare e di Isidor. orig. 5, 26 infitiatio est negatio *debitae* rei cum a creditore deposcitur: inoltre Cic. de off. 3, 65 cum ex XII tabulis satis esset ea *praestari* quae essent lingua nuncupata, *quae qui infitiatus esset dupli poenam subiret* (su esso Huschke, in "Zeitschr. f. gesch. R. W.", 13, 263 e Voigt, XII Tafeln, I, 554); Cic. p. Flacc. 48, fraudatorum et infitiatorum; Senec. benef. 3, 18, infitiator ac fraudulentus. de ira 2, 9 circumscriptiones, furta, fraudes, infitiationes; Martial. 1, 104 fallax atque infitiator; Juvenal. 13, 60. Cfr. anche la frase "abiurare (abnegare) pecuniam (rem) creditam" in: Plaut. Rud. 14; Curc. 496; Persa 478; tab. Heracl; Sall. Catil. 25, 4; Isid. orig. 5, 2, 20; Serv. Aen. 8, 263 = rem creditam negare periurio. Sulla infitiatio quale furtum v. Huvelin, *Études*, I, 204, 370-78, 387, 612-15, 711. La lingua volgare, meno accessibile a delimitazioni tecniche, rispecchia a nostro avviso (d'altro avviso Rotondi, *Teorie postclassiche sull'actio legis Aquiliae*, 13) il concetto primitivo dell'infitiari nel suo aspetto materiale: solutio mancata, rifiutata o differita. Bisogna infatti tener presente che

carattere loro primitivo, il credito fatto valere con l'actio legati per d. ha 1) in origine per contenuto *a*) soltanto una somma di danaro (aes) liquida (1), la quale *b*) è stata precisamente fissata dal testatore nel testamento e *c*) è stata da lui imposta (damnatio) allo heres institutus a titolo di damnum cioè di " composizione „ — o, più precisamente a titolo di " *compenso* „ del lucro ch'egli fa con l'acquisto dell'hereditas — da prestare a un terzo, quasi compenso per non averlo instituito. Tale credito è 2) quanto alla sua garanzia *privilegiato* come quello dello sponsor ossia è fatto valere in un modus agendi tale che pur senza togliere al debitore la *facoltà di controvertere* l'intentio dell'actor, gliene *rende* tuttavia *più difficile* l'esercizio col pericolo del duplum (2). Poichè il raddoppiarsi dell'importo del debito primario non è conseguenza propria della infitiatio come tale in ogni l. actio sacramento in personam e d'altra parte non si ha notizia alcuna di una speciale disposizione (cautio) di legge che per l'a°. aeris legati adv. infitiantem stabilisse per esplicito e in guisa artificiosa, come la lex Aquilia, tale conseguenza, data inoltre la stretta analogia tra la nostra actio e l'a°. ex lege Furia testamentaria (I. 4, 23), è verosimile (3) che l'incognito modus agendi fosse la manus iniectio pura. Tale m. iniectio segna per la facoltà di sibi manum depellere dello

---

nella formola della m. iniectio il rimprovero che si muove al debitore è " quandoc *non solvisti* „: nella formola classica (civile) invece non più: in questa il concetto materiale è stato ricacciato indietro dal tecnico. Nel periodo postclassico il concetto materiale torna alla superficie per prevalere sul tecnico e questo subisce una involuzione dopo l'evoluzione classica (questo è il nocciolo di verità nella tesi del Rotondi): avviene una specie di " ricorso „ storico. — Anche nel primitivo diritto nordico l'inadempimento del debito viene concepito quale " rán „ ossia quale attentato ladresco o sottrazione illegittima al creditore di ciò che gli spetta (Amira, *Nordgermanisches Obligationenrecht,* 2, 437-442; cfr. 1, 144).

(1) Ciò è dimostrato dal fatto che questo caso è restato tipico (Theoph. 2, 27, 7) e dalla connessione con la solutio p. a. et l. (I. 3, 174): la estensione ad ogni certum (I. 4, 9 certa) è posteriore.

(2) Cfr. Rudorff, op. cit., 468.

(3) Di contrario avviso Ferrini, *Teoria generale dei legati*, 20, e Mitteis, in " Sav. Z. „, 22, 111 sgg. Ma la critica del Mitteis ha ragion d'essere solo contro le vecchie teorie che, a differenza della nostra, argomentano

stesso reus, l'anello ideale di passaggio dalla l. actio sacramento che si svolge attraverso la m. iniectio e la m. depulsio del vindex e la l. actio sacramento con pura intentio-infitiatio (senza la mimica della iniectio-depulsio) (1); la sua affinità con la prima sta, oltre che nella forma anche in alcuni caratteri intrinseci strettamente connessi col periculum dupli. Carattere comune dei crediti fatti valere con la m. iniectio pura e con quella pro iudicato è di essere *pecuniarî*, *precisamente determinati*, *penali*, *privilegiati*, *di regresso o di rimborso* (2) per una spesa a favore del reus o per un *lucro illecito* a carico dell'actor: I. 4, 22 pro quo sponsor *dependisset*, si... *non solvisset* sponsori pecuniam; qui a sponsore plus quam virilem partem *exegisset*. 23 qui legatorum nomine... plus M assibus *cepisset*; si usuras *exegissent*, de his *reddendis*. La connessione di tali crediti con la m. iniectio ha la sua ragione profonda nella concezione del *certum aes alienum* quale prezzo del riscatto (poena), soltanto prestando il quale la persona può liberarsi (solutio p. a. et l.) dalla stretta (m. iniectio) del creditore. Che il raddoppiamento del debito primario fosse conseguenza anche della m. iniectio pura (3) è dimostrato dal fatto che la *condemnatio* in seguito a *processo* (infitiatio) *per m. iniectio pura* ne' due casi nominati in I. 4, 23 va al quadruplum, ossia al *doppio del duplum* ceptae (exactae) pecuniae che costituisce il *debito primario* (4). La ragione della poena dupli primitiva è che il fatto del " legatorum nomine mortisve causa plus M assibus cepisse „ da parte del

---

la m. iniectio dalla damnatio — quasi che questa fosse sempre esecutiva come tale (il che è la sola damnatio iudicis) — e dall'uso della solutio per a. et l. quale contrarius actus del nexum — quasi che dal nexum nascesse m. iniectio (ciò che è assurdo).

(1) Cfr. sopra nota a pag. 12 e Huschke, *Die Multa und das Sacramentum* (1874), 432 sgg.

(2) Cfr. Karlowa, *Civilprozess*, 193, 198. Cfr. Plaut. Persa 71, tantidem ille illi rursus iniciat manum.

(3) Lo nega il Mitteis, in " Sav. Z. „, 22, 111 sgg. perchè gli fa comodo (questa è almeno la nostra impressione) per la critica della damnatio esecutiva.

(4) Cfr. Huschke, *Ueber das Recht des Nexum*, 142, 123 (n. 160) e Karlowa, *Civilprozess*, 192-94, 197-98.

legatario o donatario e lo " usuras exegisse „ da parte del faenerator vengono ab initio *già di per sè* come tali (a prescindere da processo) puniti dalla lex Furia e Marcia col duplum, alla medesima stregua di un furtum nec manifestum (1). La ragione intrinseca della poena *quadrupli* (alterum duplum) è la *infitiatio certi aeris alieni* punita dalle medesime leges col duplum del duplum (quale un *secondo* furtum nec manifestum sovrappostosi al primo) in quanto esse appunto hanno disposto quale modus agendi la m. iniectio pura. Ciò risulta da Cato de re rust. 1 maiores enim nostri hoc sic habuerunt, et ita in legibus posiverunt, furem dupli *condemnari*, feneratorem quadrupli: la ragione tecnica della differenza è piana: il credito nascente da furtum rei (caso normale) non avendo per oggetto una somma di danaro liquida non può esser fatto valere senz'altro in via esecutiva finchè non sia stato accertato e stimato bensì solo nella semplice intentio della l. actio sacramento vera e propria, così che l'importo del credito dichiarato dalla iudicatio de sacramento è per l'appunto il medesimo di quello primario; per contro il credito nascente da foeneratio è, come liquido, *atto* di per sè a farsi valere per m. iniectio. Il medesimo risulta da Ps. Ascon. in Cic. div. 7 quadruplatores esse eorum reorum accusatores, qui *convicti* quadrupli *damnari* soleant, ut aleae aut pecuniae gravioribus usuris feneratae... aut eiusmodi aliorum criminum. In questo senso ossia con riferimento alla *infitiatio-condemnatio* va inteso quindi anche Ulp. Reg. 1, 2 lex Furia testamentaria, quae plus quam M assium legatum... prohibet capere... et adversus eum qui plus ceperit, quadrupli poenam (= actionem) constituit: ove *actio* (= processo contradittorio) vi sia, per la infitiatio dell'is cui m. iniecta est, essa non può che essere in quadruplum. Non si esprimono in modo diverso per l'a°. depensi Gai. I. 3, 127 sponsores ex lege Publilia habent *actionem in duplum*, quae appellatur depensi, e per l'a°. legis Aquiliae Cic. p. Tull. 41 si id esset (sc. si de damno ageretur) nec recuperatores (a°. vi bonorum

---

(1) Urterebbe infatti contro ogni verosimiglianza l'ipotesi che il legatario e il faenerator che fossero disposti a " solvere tantam pecuniam duplam quantam acceperant „ venissero trattati *più* duramente che il fur nec manifestus.

rapt.) potius *darent* quam *iudicem* nec in universam familiam, sed in eum quicum nominatim ageretur, nec in quadruplum, sed *in duplum*, et ad " damnum „ adderetur " iniuria „ (1). E s'intende bene perchè: l'actio adversus infitiantem è l'actio *normale*: la confessio certae pecuniae (iudicatae, depensae, legatae) esclude come tale litis contestatio e actio, a meno che ad essa non si accompagni una taxatio, relativa, anzi che alla intentio, all'importo della condemnatio (divisionis, dumtaxat quod facere potest etc.) (2).

Resta a parlare dell'a°. legis Aquiliae. Dal principio che la m. iniectio presuppone come tale una *poena* (prezzo di riscatto) o damnum *certi aeris* risulta che la lex Aquilia, dopo aver disposto " qui... iniuria occiderit, quanti id in eo anno plurimi fuit, *tantum aes dare* domino *damnas esto* „ (D. 9, 2, 2 pr.; I. 3, 210. 214), non *poteva* disporre quale modus agendi la manus iniectio pura (3). Il damnum (composizione) si esprime bensì anche qui in aes ma non è precisamente determinato: esso non potrà dunque essere preteso che col modus agendi sacramento (senza m. iniectio) o per iudicis postulationem (I. 4, 20). Orbene pel caso che la *litis contestatio* avvenga nel primo modus (= a°. adversus infitiantem), la lex con una clausola speciale (cautio) dispone (D. 9, 2, 2, 1) che la iudicatio contra reum abbia a carico di lui quella medesima conseguenza (poena dupla) che essa avrebbe avuta ove l'actio (se il debito fosse stato di aes certum) avesse potuto essere esperita per m. iniectio. Una conseguenza caratteristica della m. iniectio viene dunque ex

---

(1) Cfr. SCHRADER, in " Kritische Zeitschrift (Tübingen) „, I, 2, 136 sg.: v. anche Diocl. et Max. (291), C. 3, 35, 5 legis Aquiliae actione in duplum agere potest: il passo di Cicerone prova che questo testo non è alterato (contro ROTONDI, op. cit., 26). L'espressione " *crescere* in duplum „ non è classica, come conto di mostrare altrove.

(2) Ciò è stato messo in luce per l'a°. iudicati dal WENGER, op. c. 43-95. La formola della m. iniectio pura pel legato può ricostruirsi: " quod tu mihi a L. Titio testamento dare damnatus es (cfr. I. 3, 175) H S $\overline{X}$ milia, quandoc non solvisti, ob eam rem ego tibi H S $\overline{X}$ milia manum inicio „.

(3) Del contrario avviso p. es. HUSCHKE (cfr. anche KARLOWA, *Civilprozess*, 198) il quale in " Zeitschr. f. gesch. R. W. „, 13, 262 opera con la fantastica costruzione aver la lex fatto la funzione del iudicatum dichiarando in generale " qui occiderit „ damnas una volta per tutte (!).

lege Aquilia stralciata da questa ed estesa in guisa *artificiale* alla l. a.° sacramento (1), considerandosi per anticipazione lo aes come certum.

Tra la esecutorietà della confessio aeris (certi) e il periculum dupli della infitiatio (certi) aeris esiste una innegabile simmetria. La concezione del certum aes (alienum) quale poena dovuta per riscattarsi dalla m. iniectio traspare ancora dalla irripetibilità del solutum ex causa ex qua adversus infitiantem in duplum agitur quale liberatio poenae (2).

Relazione sulla Monografia del Dr. Ubaldo Mazzini, *L'anfiteatro romano di Luni illustrato e descritto.*

Egregi Colleghi,

La prima illustrazione dei resti dell'anfiteatro dell'antica Luni che avesse carattere veramente scientifico fu quella data da Carlo Promis nella monografia ' Dell'antica città di Luni e del suo stato presente ' edita nelle Memorie della nostra Accademia, ser. II, t. I (1839), p. 165 segg. Ma per l'ingombro della terra e delle macerie che coprivano in parte le rovine, non poche sono le inesattezze in cui il Promis incorse, ripetute poi da quelli che dopo di lui ebbero occasione d'occuparsi dell'insigne monumento. Da quando peraltro circa il 1880 s'iniziò a cura del comm. Carlo Fabbricotti di Carrara lo sgombero delle rovine dell'anfiteatro e specie da che i lavori di sgombero furono

---

(1) Erra quindi a nostro avviso il Wenger, *Actio iudicati*, 106, nell'attribuire alla lex Publilia il medesimo artificio. Il periculum dupli proprio della m. iniectio non ha potuto essere che stabilito in generale dalla fonte di diritto da cui la l. actio per m. iniectionem deriva.

(2) Cfr. Ulp. 68 ed. 12, 6, 42 poenae non solent repeti cum depensae sunt; Ulp. 43, *Sab.* 46, 3, 7 si ex causa quae infitiatione ⟨duplatur⟩ *vel poenali* ⟨et ex alia causa⟩ debetur: dicendum est id solutum videri quod poenae habet liberationem; Ulp. 43 Sab. 12, 6, 23, 4; I. 2, 283; Just. I. 3. 27, 7; Jul. 5 dig. 5, 1, 74, 2; Paul. 2 quest. 10, 2, 36. Di diverso parere Huschke, loc cit., 273-4; Rudorff, op. cit, 323-332.

compiuti nel 1910 per opera del cav. Carlo Andrea Fabbricotti, figlio del comm. Carlo, se ne rese possibile un rilievo più esatto e una illustrazione più precisa e compiuta.

A questa si è accinto, coadiuvato dall'ing. Antonio Farina, il sig. Ubaldo Mazzini, nella breve ma succosa Memoria su cui abbiamo l'onore di riferire alla Classe. In essa l'A., dopo aver richiamato l'attenzione sopra un documento del 10 giugno 1033, già edito, ma rimasto fin qui inavvertito, ove sono menzionate per la prima volta le rovine di Luni, dopo aver accennato alle menzioni più antiche che si hanno dell'anfiteatro lunense e alle descrizioni varie che ne sono state fatte, da quella di Agostino Brenucci a quella di Carlo Promis, descrive egli stesso i resti quali appaiono dopo gli ultimi lavori di sterro, studiandosi di correggere le inesattezze in cui sono incorsi i suoi predecessori.

Il lavoro, sobrio e diligente, ci sembra ben degno d'essere pubblicato in quelle stesse Memorie accademiche che accolsero la prima illustrazione scientifica del monumento.

Giovanni Sforza.
G. De Sanctis, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini.

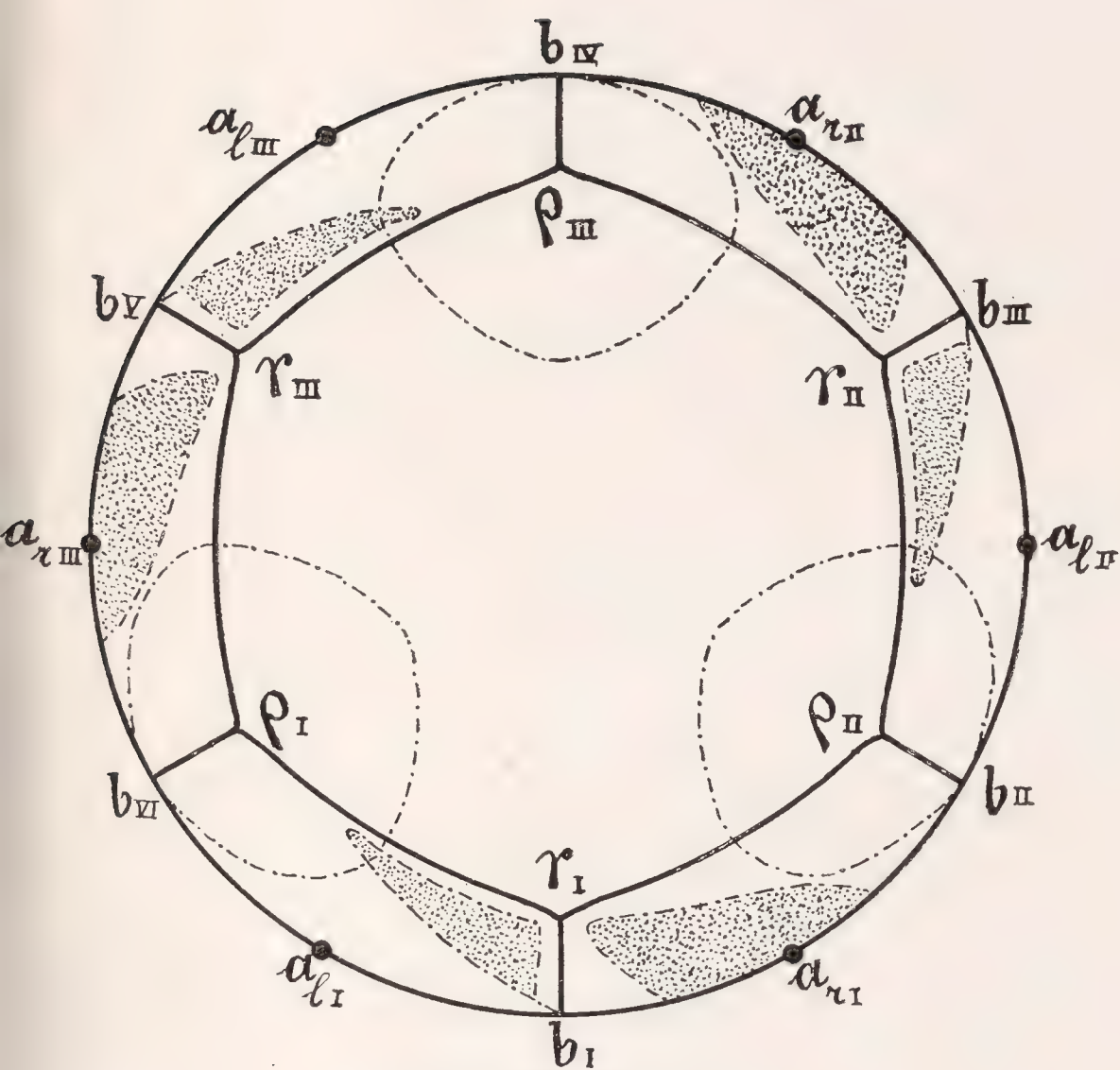



Fig. 1 e 2.

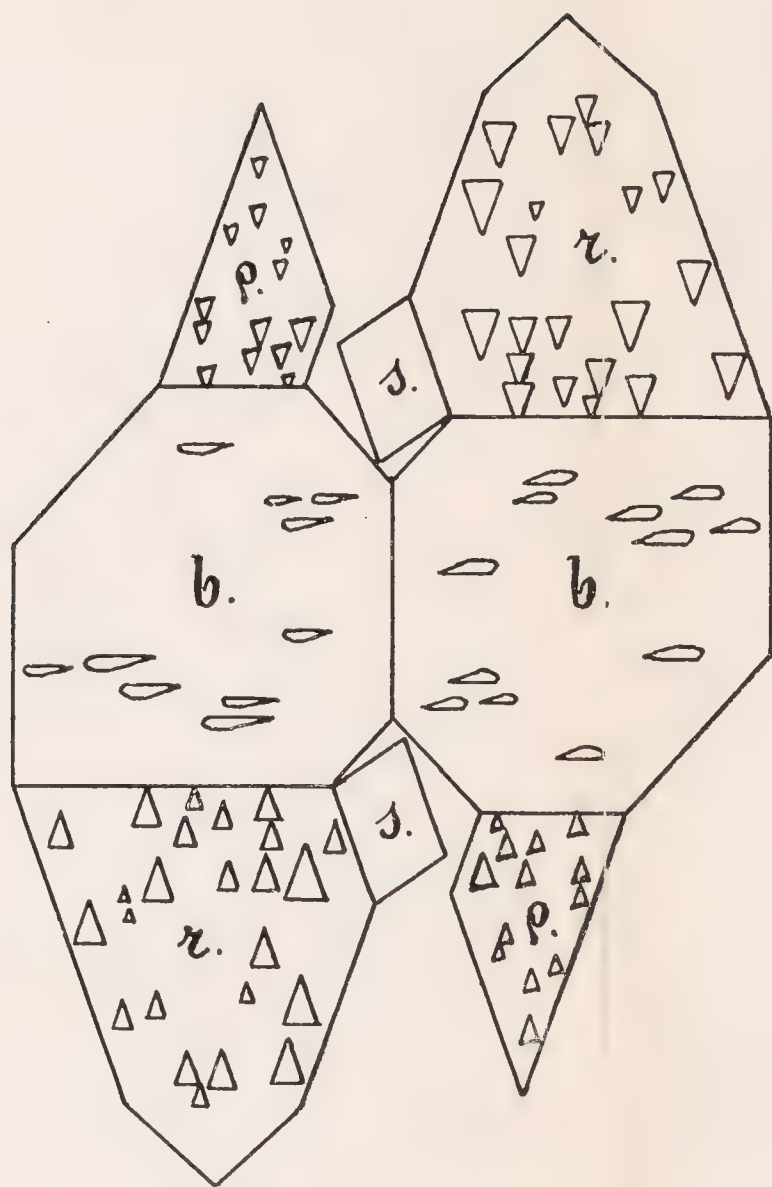



Fig. 3.

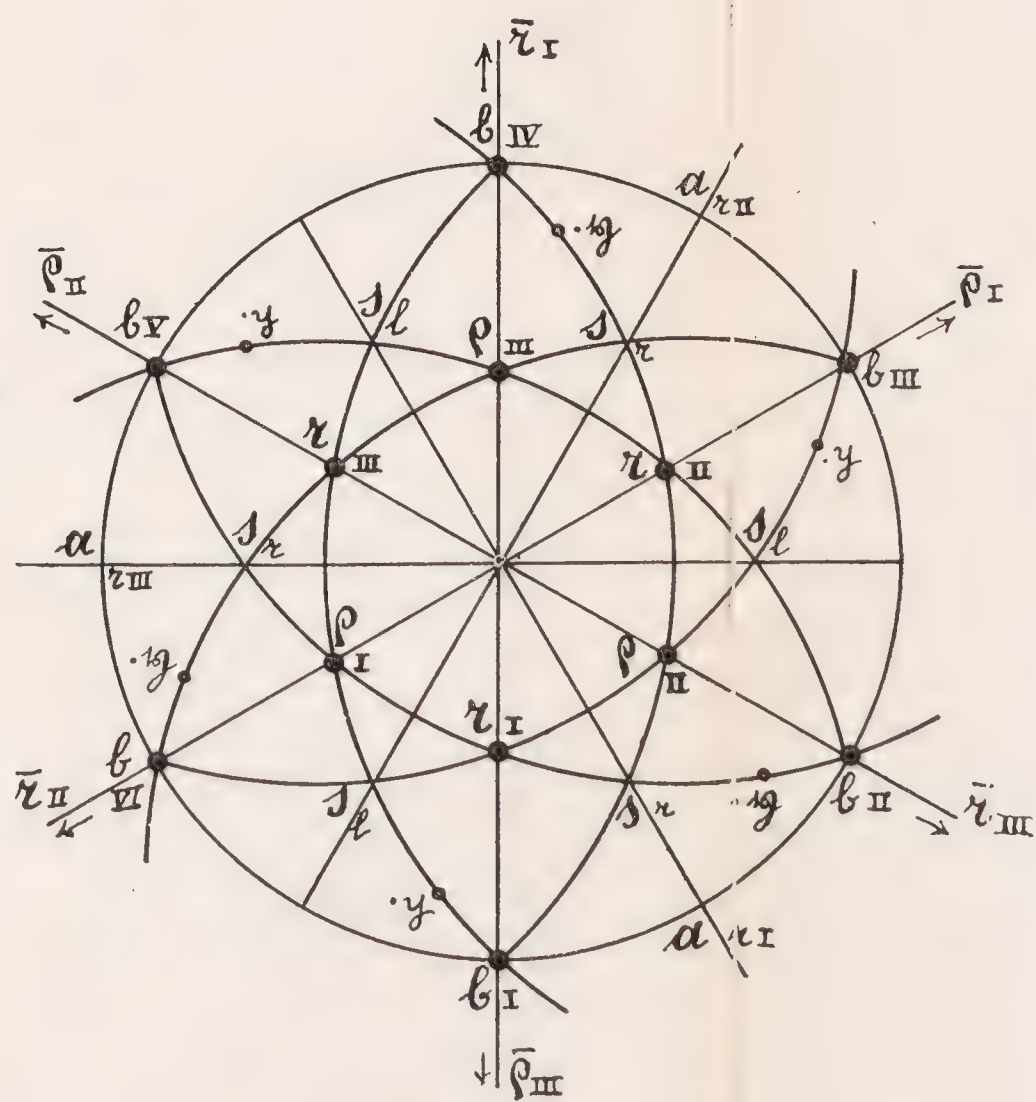
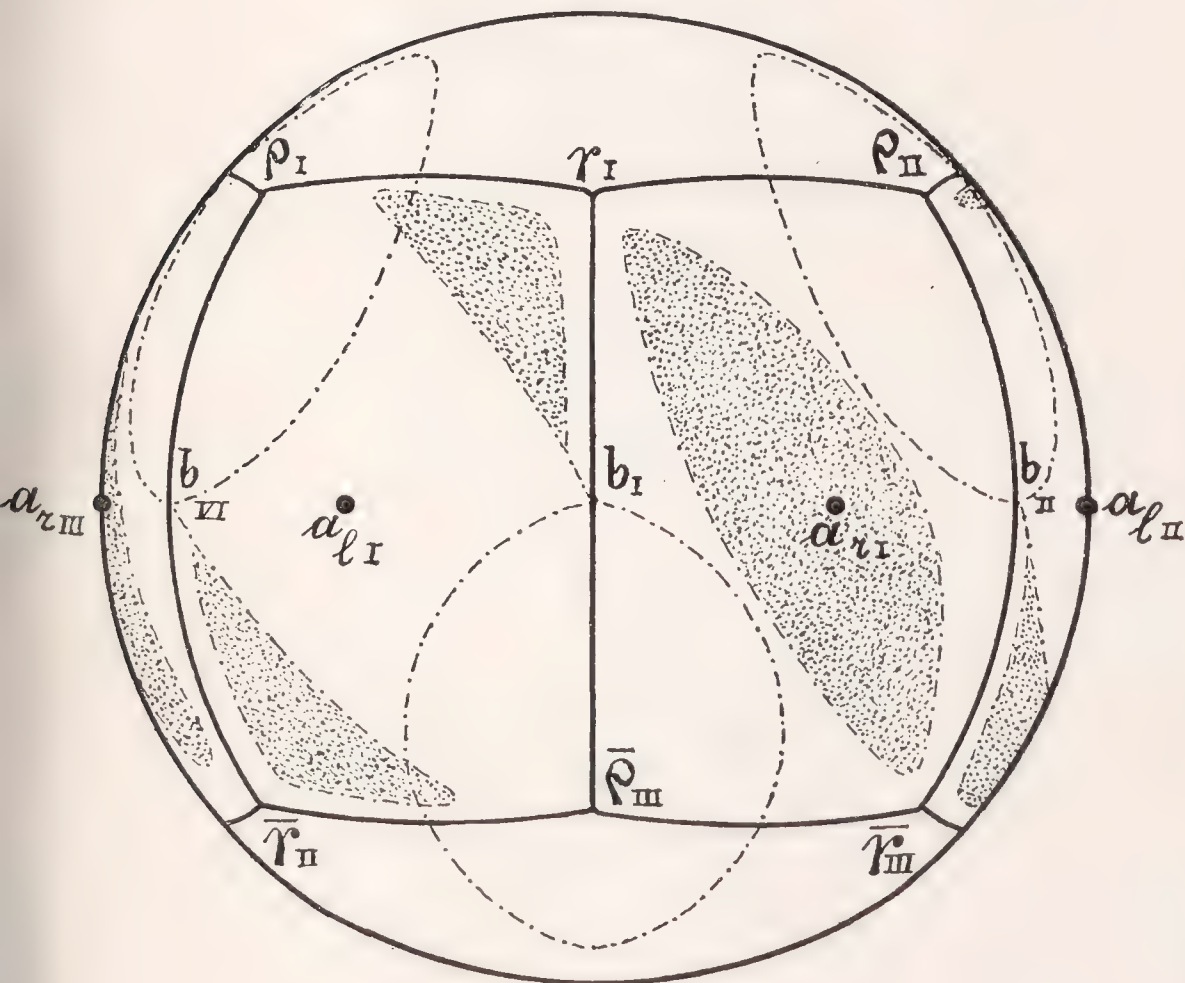



Fig. 4.

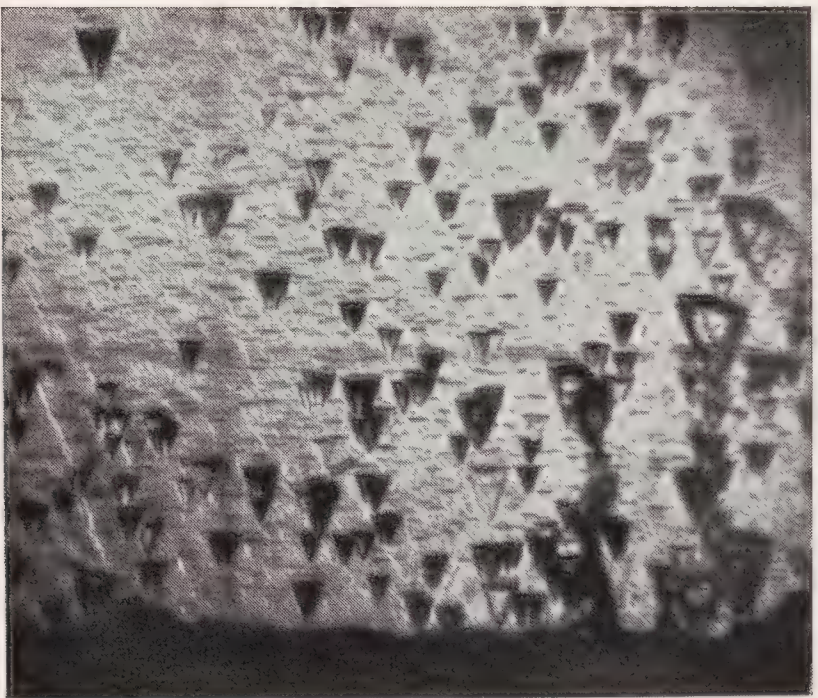



Fig. 5. r $\frac{r}{b}$

Fig. 6. ϱ $\frac{r}{\varrho}$

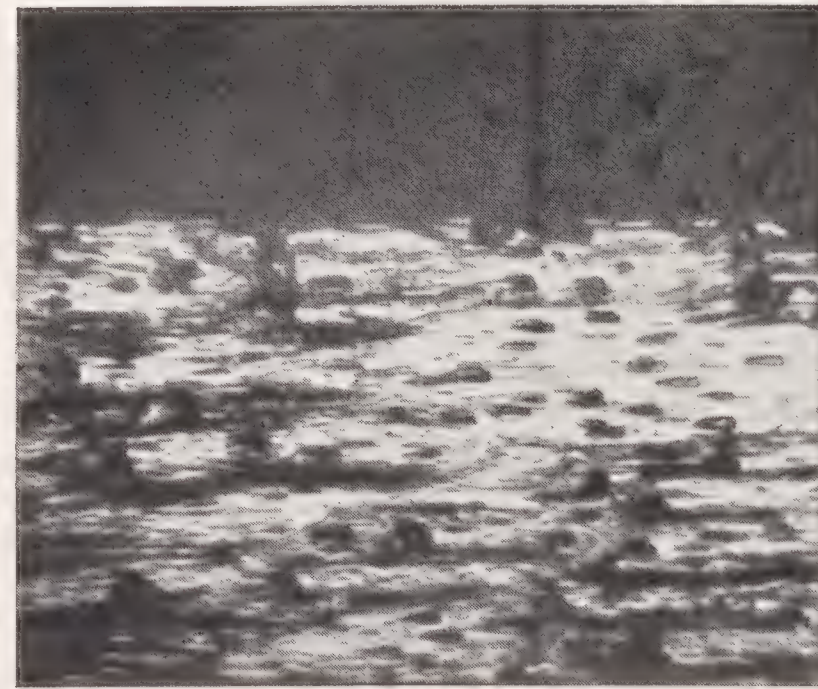



Fig. 7. b $\frac{r}{b}$

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona – Torino.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. L. DISP. **10ª**. **1914-1915**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

Questa tavola va inserita nella dispensa 8ª.

GIUSEPPE LORENZONI

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 21 Marzo 1915.

PRESIDENZA DEL SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Naccari, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Balbiano, Panetti e Segre, Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Parona e Fusari.

Letto e approvato il verbale della precedente adunanza, il Presidente dà un cordiale benvenuto, a nome della Classe, al nuovo Socio Prof. Panetti. Questi ringrazia vivamente, per l'onore che gli fu fatto colla elezione a Socio e per le gentili parole del Presidente.

Il Socio Guareschi offre in omaggio, anche a nome dell'Associazione chimica industriale di Torino, un fascicolo su le *Onoranze centenarie ad Ascanio Sobrero. 31 maggio 1914*; e così pure il Socio Mattirolo un suo opuscolo sulle *Tuberaceae* della Tripolitania, ed un altro intitolato *Notes sur l'histoire de la "pierre à champignons" (pietra fungaia).*

Vengono presentate, per la stampa negli *Atti*, le seguenti Note:

G. Charrier, *Sulla trasformazione dei nitrati delle arilidrazine* $Ar\,NH\,.\,NH_2\,.\,HNO_3$ *in nitrati di arildiazonio* $Ar-\underset{\displaystyle NO^3}{\overset{}{N}}\equiv N$ *per azione dell'acido nitrico,* dal Socio Guareschi.

F. Castellano, *I numeri complessi considerati come operatori sui vettori di un piano*, dal Socio Peano.

M. Panetti, *Ricerche sperimentali sulla resistenza dell'aria contro schermi piani, sottili, rotanti.*

E. Laura, *Sopra il problema della propagazione di moto all'esterno di una sfera in un mezzo elastico isotropo indefinito (Nota 2ª)*, dal Socio Segre.

Il Socio Mattirolo, anche a nome del Collega Parona, legge la Relazione sulla Memoria del Dott. B. Peyronel, *Primo elenco di Funghi di Val San Martino o Valle della Germanasca.* Con votazione unanime la Classe, accogliendo le proposte della Commissione, delibera la stampa della Memoria nei volumi accademici.

Per gli stessi volumi il Socio Segre presenta una Memoria del Dott. E. Del Vecchio, *Sulle equazioni* $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(xy)$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi(xy)$. Vengono incaricati di riferire intorno ad essa i Soci D'Ovidio e Segre.

LETTURE

I numeri complessi considerati come operatori sui vettori di un piano.

Nota di FILIBERTO CASTELLANO.

1. Unità immaginaria. — Moltiplicare i vettori di un piano per (-1) significa farli rotare di 180° in un verso prestabilito; moltiplicarli per $(-1)^2$, $(-1)^3$ ... $(-1)^n$ con n intero significa farli rotare di 2, 3, ... n angoli piatti.

Indicheremo con $(-1)^x$ il fattore che produce nei vettori di un piano la rotazione di x angoli piatti, essendo x un numero reale qualunque.

Posto $x = \frac{1}{2}$, sarà $(-1)^{\frac{1}{2}}$, cioè $\sqrt{-1}$, cioè i, il fattore che produce la rotazione di $\frac{1}{2}$ angolo piatto, cioè di un angolo retto, e sarà i^x il fattore che produce la rotazione di x retti, $i^{1/90}$ il *rotatore* (rotor) di 1°, $i^{2/\pi}$ il *rotatore* di un *radiante*.

Ne consegue che:

$$i^0 = 1\,, \qquad i^1 = i\,, \qquad i^2 = -1\,, \qquad i^3 = -i\,, \qquad i^4 = 1 \text{ ecc.}$$

$$i^x = i^{x+4} = i^{x+8} = \ldots = i^{x + \text{multiplo di } 4}.$$

Dall'eguaglianza:

$$i^x = i^y$$

si deduce:

$$x \equiv y \pmod 4.$$

2. — Rotare un vettore di x retti poi di y retti equivale a rotarlo di $x + y$ retti, quindi:

$$i^x \,.\, i^y = i^{x+y}. \tag{1}$$

Posto:

$$y = -x$$

si deduce:

$$i^x \,.\, i^{-x} = i^0 = 1.$$

Quindi:

$$i^{-x} = 1/i^x. \tag{2}$$

Ne consegue che se m è intero, sarà:

$$(i^x)^m = i^{mx}. \tag{3}$$

$$(i^x)^{-m} = i^{-mx}. \tag{3'}$$

Essendo:

$$(i^{x/m})^m = i^x$$

sarà:

$$i^{x/m} = \sqrt[m]{i^x}. \tag{4}$$

Se y è un razionale, sarà:

$$(i^x)^y = i^{xy}. \tag{4'}$$

3. — Assumeremo come definizione di somma di i^x con i^y la relazione:

$$(i^x + i^y)\,u = i^x u + i^y u \tag{5}$$

dove u è un vettore qualunque.

Riterremo uguali due operatori vettoriali se operando sullo stesso vettore producono vettori uguali. Ne consegue che:

1° se ρ è un numero reale, sarà:

$$\rho\,(i^x + i^y) = \rho i^x + \rho i^y. \tag{5'}$$

Infatti:

$$\rho\,(i^x + i^y)\,u = \rho\,(i^x u + i^y u) = \rho\, i^x u + \rho\, i^y u.$$

(5″) 2°

$$(i^x + i^y)\, i^z = i^{x+z} + i^{y+z}.$$

Infatti:

$$(i^x + i^y)\, i^z u = (i^x + i^y)\,(i^z u) = i^x\,(i^z u) + i^y\,(i^z u) = i^{x+z} u + i^{y+z} u =$$
$$= (i^{x+z} + i^{y+z})\,u.$$

4. — Le espressioni $i^x + i^y$ e ρi^x sono *operatori* vettoriali. Cerchiamo il significato di $i^x + i^{-x}$ e di $i^x - i^{-x}$.

Si ha che:

$$(i^x + i^{-x})\,u = i^x u + i^{-x} u.$$

Siano O, A, M, M', P punti tali che (*):

$$A - O = u\,, \quad M - O = i^x u\,, \quad M' - O = i^{-x} u\,, \quad P = \frac{M + M'}{2}$$

sarà:

$$(i^x + i^{-x})\,u = M - O + M' - O = 2\,(P - O) = 2\cos x\,.\,u$$

$$(i^x - i^{-x})\,u = (M - O) - (M' - O) = M - M' = 2\,(M - P) =$$
$$= 2\,\mathrm{sen}\,x\,.\,iu$$

quindi:

$$i^x + i^{-x} = 2\cos x \tag{6}$$

$$i^x - i^{-x} = 2i\,\mathrm{sen}\,x \tag{6'}$$

da cui:

$$i^x = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x \tag{7}$$

$$i^{-x} = \cos x - i\,\mathrm{sen}\,x \tag{7'}$$

ed anche:

$$M - O = \cos x\,.\,u + i\,\mathrm{sen}\,x\,.\,u$$

$$M' - O = \cos x\,.\,u - i\,\mathrm{sen}\,x\,.\,u$$

ossia:

$$i^{\pm x}\,u = \cos x\,.\,u \pm i\,\mathrm{sen}\,x\,.\,u \tag{8}$$

$$\rho i^{\varphi} = \rho\,(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) = \rho\cos\varphi + i\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi. \tag{9}$$

5. — Posto:

$$\rho\cos\varphi = a \qquad \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi = b$$

sarà:

$$\rho i^{\varphi} = a + bi.$$

L'espressione ρi^{φ} si chiama *complesso* di *modulo* ρ e di argomento φ.

Posto:

$$\rho i^{\varphi} = c$$

(*) Il lettore è pregato di fare la figura.

diremo:

$$(10)\qquad \rho = \mathrm{mod}\, c\,, \qquad \varphi = \arg c\,,$$

$$(10')\qquad \rho \cos\varphi = \mathrm{real}\, c\,, \qquad \rho\, \mathrm{sen}\, \varphi = \mathrm{imag}\, c\,,$$

e sarà:

$$(11)\qquad c = \mathrm{mod}\, c \,.\, i^{\arg c} = \mathrm{real}\, c + i \,.\, \mathrm{imag}\, c$$

$$(11')\qquad = \mathrm{mod}\, c\, (\cos \arg c + i\, \mathrm{sen} \arg c)$$

$$(12)\qquad (\mathrm{mod}\, c)^2 = (\mathrm{real}\, c)^2 + (\mathrm{imag}\, c)^2.$$

Ogni espressione del tipo $a + bi$, dove a e b sono numeri reali, è un complesso di modulo $\sqrt{a^2 + b^2}$, che ha per argomento un angolo φ, tale che:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \qquad \mathrm{sen}\,\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \qquad \mathrm{tang}\,\varphi = \frac{b}{a}\,.$$

6. — Se:

$$c_1 = c_2$$

sarà:

$$\mathrm{mod}\, c_1 = \mathrm{mod}\, c_2$$

$$\arg c_1 = \arg c_2 + \text{multiplo di } 4$$

$$\mathrm{real}\, c_1 = \mathrm{real}\, c_2\,, \qquad \mathrm{imag}\, c_1 = \mathrm{imag}\, c_2\,.$$

Se:

$$a + bi = a' + b'i$$

sarà:

$$a = a'\,, \qquad b = b'$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a'^2 + b'^2}.$$

Se:

$$a + bi = 0$$

sarà:

$$a = 0\,, \qquad b = 0\,.$$

Se:

$$c = 0$$

sarà:

$$\mathrm{real}\, c = \mathrm{imag}\, c = \mathrm{mod}\, c = 0\,.$$

Se:

$$\mathrm{mod}\, c = 0$$

sarà:

$$c = 0\,.$$

7. — *Moltiplicare* un complesso per un *vettore* significa moltiplicare il *vettore* per il *modulo* del complesso, e farlo rotare di un *angolo* uguale all'*argomento* del complesso.

Viceversa il *quoziente di due vettori* sarà un complesso avente per *modulo* il rapporto dei moduli dei due vettori, ed avente per *argomento* l'angolo dei due vettori.

Se u e v sono vettori, e v non è nullo, sarà:

$$(13) \qquad \frac{u}{v} = \frac{\mathrm{mod}\, u}{\mathrm{mod}\, v}\, i^{\mathrm{ang}\,(u,v)/\mathrm{retto}} = \frac{\mathrm{mod}\, u}{\mathrm{mod}\, v}\left[\cos\,(u,v) + i\,\mathrm{sen}\,(u,v)\right]$$

$$\mathrm{reale}\,\frac{u}{v} = \frac{\mathrm{mod}\, u}{\mathrm{mod}\, v}\cos\,(u,v)$$

$$(14) \qquad \mathrm{imag}\,\frac{u}{v} = \frac{\mathrm{mod}\, u}{\mathrm{mod}\, v}\,\mathrm{sen}\,(u,v)$$

$$(15) \qquad \frac{cu}{u} = c\,, \qquad \left(\frac{u}{v}\right) v = u\,.$$

8. — L'equazione:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

è una *proporzione vettoriale*; esprime che:

$$\frac{\mathrm{mod}\, u_1}{\mathrm{mod}\, u_2} = \frac{\mathrm{mod}\, v_1}{\mathrm{mod}\, v_2}\,, \qquad \mathrm{ang}\,(u_1, u_2) = \mathrm{ang}\,(v_1, v_2).$$

In essa si può *permutare*, *alternare*, *comporre*, ecc. come nella *proporzione* tra numeri.

Posto:

$$A_1 - O = u_1\,, \quad A_2 - O = u_2\,, \quad B_1 - O = v_1\,, \quad B_2 - O = v_2$$

i triangoli OA_1A_2, OB_1B_2 sono direttamente simili, e si può facilmente costrurre il vettore $\frac{u_2}{u_1}v_1$, *quarto proporzionale* dopo u_1, u_2, v_1.

Il *medio proporzionale* tra due vettori u e v è un vettore X tale che:

$$u/X = X/v\,.$$

Sarà :

$$\text{mod}\, X = \sqrt{\text{mod}\, u \,.\, \text{mod}\, v}$$
$$\text{ang}\,(u, X) = \text{ang}\,(X, v).$$

Posto :

$$A - O = u\,, \qquad B - O = v$$

siano b, b' le bisettrici interne ed esterne dell'angolo AOB. La circonferenza che passa per A e B, ed ha il centro sulla b', incontra b in due punti M, M' equidistanti da O. I vettori $M - O$, $M' - O$ sono uguali ed opposti. Ciascuno di essi si può considerare come medio proporzionale tra u e v.

Se u e v hanno la stessa direzione e verso contrario, questa costruzione coincide con quella di Euclide.

9. Somma, prodotto, quoziente, potenza di complessi. — Siano c, c_1, c_2 dei complessi, m un numero intero, u un vettore non nullo. Porremo :

$$c_1 + c_2 = \frac{c_1 u + c_2 u}{u} \tag{16}$$

$$c_1\, c_2 = \frac{c_1(c_2 u)}{u} \tag{17}$$

$$c_1/c_2 = c_1 u / c_2 u\,. \tag{18}$$

Ne consegue che :

1°
$$\text{mod}\,(c_1 + c_2) \leq \text{mod}\, c_1 + \text{mod}\, c_2$$
$$\text{real}\,(c_1 + c_2) = \text{real}\, c_1 + \text{real}\, c_2$$
$$\text{imag}\,(c_1 + c_2) = \text{imag}\, c_1 + \text{imag}\, c_2$$
$$c_1 + c_2 = c_2 + c_1$$

2°
$$\text{mod}\,(c_1 \,.\, c_2) = \text{mod}\, c_1 \,.\, \text{mod}\, c_2$$
$$\text{arg}\,(c_1 \,.\, c_2) \equiv \text{arg}\, c_1 + \text{arg}\, c_2$$
$$\text{real}\,(c_1\, c_2) = \text{real}\, c_1\, \text{real}\, c_2 - \text{imag}\, c_1\, \text{imag}\, c_2$$
$$\text{imag}\,(c_1\, c_2) = \text{real}\, c_1\, \text{imag}\, c_2 + \text{real}\, c_2\, \text{imag}\, c_1$$
$$c_1\, c_2 = c_2\, c_1\,.$$

3° $\mathrm{mod}\,\frac{c_1}{c_2} = \frac{\mathrm{mod}\,c_1}{\mathrm{mod}\,c_2}$, $\qquad \arg\frac{c_1}{c_2} = \arg c_1 - \arg c_2$

$$\mathrm{real}\,1/c = \mathrm{real}\,c/(\mathrm{mod}\,c)^2, \qquad \mathrm{imag}\,1/c = -\,\mathrm{imag}\,c/(\mathrm{mod}\,c)^2$$

$$\mathrm{real}\,\frac{c_1}{c_2} = \mathrm{real}\,[c_1\,(1/c_2)] \text{ ecc.}$$

4° $$c\,(c_1 + c_2) = c\,c_1 + c\,c_2 .$$

5° Se u, v, w sono vettori non nulli, sarà:

$$\frac{u}{w} + \frac{v}{w} = \frac{u+v}{w} \qquad \text{perchè} \qquad \left(\frac{u+v}{w}\right) w = u + v .$$

6° $$\frac{u}{v} \cdot \frac{v}{w} = \frac{u}{w} \qquad \text{"} \qquad \left(\frac{u}{v} \cdot \frac{v}{w}\right) w = \frac{u}{v} \cdot v = u .$$

7° $$\frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{u_3}{u_4} = \frac{u_1}{u_4} \cdot \frac{u_3}{u_2} .$$

8° $$c\,(u + v) = cu\left(1 + \frac{v}{u}\right) = cu + cv .$$

Posto:

$$c = \rho i^{\varphi}$$

sarà:

(19) $$c^m = \rho^m\, i^{m\varphi}$$

(19′) $$c^{-m} = \rho^{-m}\, i^{-m\varphi}$$

quindi:

(20) $$\mathrm{mod}\,c^m = (\mathrm{mod}\,c)^m$$

(20′) $$\arg c^m = m \arg c$$

$$(i^{\varphi})^m = i^{m\varphi},$$

ossia:

$$(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)^m = \cos m\varphi + i\,\mathrm{sen}\,m\varphi$$

che è la formola di Moivre.

10. — Le formole precedenti contengono le formole della goniometria, ed in particolare quelle relative all'addizione, sottrazione, moltiplicazione degli archi.

Accennerò alle principali:

$$\cos(x \pm y) = \text{real}\, i^{x \pm y} = \text{real}\,(i^x \,.\, i^{\pm y}) =$$
$$= \text{real}\, i^x \,\text{real}\, i^y \mp \text{imag}\, i^x \,\text{imag}\, i^y =$$
$$= \cos x \cos y \mp \text{sen}\, x \,\text{sen}\, y$$
$$\text{sen}\,(x \pm y) = \text{real}\, i^{x \pm y} = \text{real}\,(i^x \,.\, i^{-y}) = \text{sen}\, x \cos y \pm \text{sen}\, y \cos x$$
$$\cos(mx) = \text{real}\, i^{mx} = \text{real}\,(\cos x + i\,\text{sen}\, x)^m = \text{ecc.}$$
$$\text{sen}\,(mx) = \text{imag}\, i^{mx} = \text{imag}\,(\cos x + i\,\text{sen}\, x)^m = \text{ecc.}$$

Si ha identicamente:

$$(21) \qquad i^x + i^y = i^{\frac{x+y}{2}} \left(i^{\frac{x-y}{2}} + i^{\frac{y-x}{2}} \right) = 2 \cos \frac{x-y}{2}\, i^{\frac{x+y}{2}}$$

$$(21') \qquad i^x - i^y = 2\, i\, \text{sen}\, \frac{x-y}{2}\, i^{\frac{x+y}{2}}$$

uguagliando i reali e gli immaginari dei due membri si hanno le formole che trasformano in prodotto la somma di due seni o coseni:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$
$$\text{sen}\, x + \text{sen}\, y = 2 \cos \frac{x-y}{2}\, \text{sen}\, \frac{x+y}{2}, \quad \text{ecc.}$$

11. — Dalle relazioni tra i quozienti di vettori si possono dedurre le formole della trigonometria. — Sia ABC un triangolo di lati a, b, c e di angoli α, β, γ, e sia I un vettore del piano. Dalla relazione:

$$(A - B) + (B - C) + (C - A) = 0$$

dividendo per I si deduce:

$$(22) \qquad \frac{A-B}{I} + \frac{B-C}{I} + \frac{C-A}{I} = 0.$$

Uguagliando i reali e gli imag. dei due membri si ha:

$$a \cos(a, I) + b \cos(b, i) + c \cos(c, i) = 0$$
$$a\, \text{sen}\,(a, I) + b\, \text{sen}\,(b, i) + c\, \text{sen}\,(c, i) = 0.$$

Se si pone $I = B - A$ si ha:

$$\frac{B-C}{B-A} + \frac{C-A}{B-A} = 1$$

da cui:

$$\frac{a}{c} i^{-\beta} + \frac{b}{c} i^{\alpha} = 1$$

ossia:

$$c = a i^{-\beta} + b i^{\alpha}, \tag{23}$$

uguagliando i reali, gli imag. ed i moduli si ha:

$$\begin{aligned} c &= a \cos\beta + b \cos\alpha \\ 0 &= b \operatorname{sen}\alpha - a \operatorname{sen}\beta \\ c &= \sqrt{(a\cos\beta + b\cos\alpha)^2 + (b \operatorname{sen}\alpha - a \operatorname{sen}\beta)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

che sono le formole fondamentali della trigonometria.

12. — Tra quattro punti ed un vettore I di un piano passa la relazione:

$$(A-B)\frac{C-D}{I} + (A-C)\frac{D-B}{I} + (A-D)\frac{B-C}{I} = 0 \tag{24}$$

che si riduce ad una identità osservando che:

$$C - D = (A - D) - (A - C) \text{ ecc.}$$

Da essa si possono dedurre le formole della *quadrangolometria.*

13. — Si può stabilire una corrispondenza tra i punti di un piano ed i complessi, per modo che, ad ogni *complesso* corrisponda un *punto* ed ad ogni *punto* un *complesso.* — Sia O un punto ed I un vettore unità del piano, c un complesso; posto:

$$P = O + cI$$

sarà :

$$c = \frac{P - O}{I},$$

ad ogni c corrisponde un P, ad ogni P corrisponde un c.

Le coordinate cartesiane di P nel sistema O, I, iI sono *real* c ed *imag* c; le coordinate polari di P sono *mod* c ed *arg* c.

Il punto P si chiama l'*immagine* di c, il complesso c si può chiamare la *coordinata* di P.

Posto :

$$P_1 = O + c_1 I, \qquad P_2 = O + c_2 I$$

sarà :

$$\begin{aligned} \mathit{immagine}\,(c_1 + c_2) &= O + (c_1 + c_2)\, I = O + c_1 I + c_2 I \\ &= O + (P_1 - O) + (P_2 - O) \\ &= P_1 + (P_2 - O) = P_2 + (P_1 - O), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathit{immagine}\,(c_1 c_2) &= O + c_1 c_2 I = \\ &= O + \frac{P_1 - O}{I} \cdot \frac{P_2 - O}{I} I \\ &= O + \frac{P_1 - O}{I}(P_2 - O) = O + \frac{P_2 - O}{I}(P_1 - O) \end{aligned}$$

e si costruisce aggiungendo a O il quarto proporzionale dopo I, $(P_1 - O)$, $(P_2 - O)$.

Febbraio 1915.

Ricerche sperimentali sulla resistenza dell'aria contro schermi piani, sottili, rotanti.

Nota del Socio MODESTO PANETTI.

1. — L'uso del molinello Renard per misurare la potenza dei motori veloci, consistente in un braccio girevole che porta due pale piane, parallele all'asse di rotazione e fissabili a distanza variabile da esso, ha richiamata da tempo l'attenzione degli sperimentatori sulla resistenza dell'aria contro gli schermi piani, sottili, animati di moto rotatorio.

Prove numerose hanno già dimostrato che tale resistenza è sensibilmente più grande di quella calcolabile come risultante delle azioni relative a ciascun elemento di area, in ragione del quadrato della sua velocità e del coefficiente di resistenza specifica per il moto di traslazione.

Ora è cosa ben nota in aerodinamica che le azioni sopra un complesso non si possono dedurre da quelle supposte note sopra i singoli suoi elementi, per somma. La singolarità del fenomeno constatato non consiste dunque nell'errore che si commette procedendo per integrazione, ma nel segno di questo errore.

Era logico infatti ritenere che l'aria trascinata in moto rotatorio dal molinello dovesse battere contro le sue pale con velocità relativa minore, e quindi opporre una resistenza più piccola di quella in giuoco nel moto traslatorio. Invece la resistenza specifica è risultata maggiore. Ciò è probabilmente dovuto a due cause distinte:

La prima consiste nelle velocità molto grandi alla periferia dei molinelli, sicchè, varcati i limiti pei quali la resistenza cresce col quadrato della velocità, deve avverarsi una legge incrementale più rapida.

La seconda discende dal moto di trascinamento dell'aria per parte del molinello. In conseguenza le pale non devono incontrare l'aria normalmente, ma obliquamente rispetto al loro piano, poichè essa sfugge in direzione radiale per forza centrifuga: ed è noto che ad incidenze diverse dall'angolo retto e prossime a 40° corrispondono resistenze specifiche più elevate e dipendenti dal *rapporto di figura* φ (*). Insieme col valore più grande della reazione si intuisce quindi come detto rapporto, quasi affatto privo di influenza sulla resistenza delle piastre alla traslazione normale al loro piano, possa acquistarne invece nel fenomeno qui discusso del moto rotatorio.

2. — Gli esperimenti, sui quali la Nota presente riferisce, non esauriscono l'argomento. Ad altri, tuttora in corso, spetterà l'ufficio di chiarire meglio i fatti accennati. Questa prima serie di prove riguarda in vero un tipo unico di pala fissata da esperimento ad esperimento in posizioni diverse del braccio, per fare apparire in grado differente l'influenza del fenomeno rotatorio. Come numero indicatore di questo grado si adottò il *rapporto di posizione* p espresso dal quoziente della dimensione radiale della pala al doppio del suo raggio medio.

Dette adunque R ed r le distanze del suo orlo esterno ed interno dall'asse di rotazione, si ha

$$p = \frac{R-r}{R+r}. \tag{1}$$

Così i due valori estremi del rapporto di posizione

$$p = 0 \qquad p = 1$$

esprimono rispettivamente le condizioni limiti del moto di traslazione e della rotazione dello schermo rettangolare intorno ad un suo lato.

(*) Con questa denominazione, nel caso di piastre sottili di figura rettangolare, investite dal vento in direzione parallela ad un piano di simmetria, si indica il rapporto fra il lato normale alla direzione del vento e quello inclinato.

3. — Scopo della ricerca fu determinare, in funzione del rapporto di posizione, il coefficiente di resistenza specifica K calcolato, come se fosse ammessibile la legge del quadrato della velocità per ogni elemento della pala rotante, e si potesse dedurre per tale ipotesi l'espressione della potenza meccanica assorbita dal molinello col procedimento di integrazione.

Quanto si è detto contro l'uso di tale procedimento non contradice la opportunità di valersene nella ricerca diretta del coefficiente, che deve tener conto della influenza che la figura della pala e la sua posizione rispetto all'asse di rotazione hanno sul fenomeno.

Ragioniamo dunque nel modo seguente:

Sia b (Fig. 1) la dimensione dello schermo rettangolare nella direzione dell'asse di rotazione, y la distanza da quest'asse dell'elemento di area bdy, ω la velocità angolare e quindi ωy la velocità assoluta dei punti dell'elemento. La resistenza dell'aria che gli corrisponde è nelle ipotesi premesse

$$Kbdy(\omega y)^2 \qquad (*);$$

quindi il momento resistente dell' intero schermo di lati b ed $R-r$ risulta espresso da

$$Kb\omega^2\int_r^R y^3dy;$$

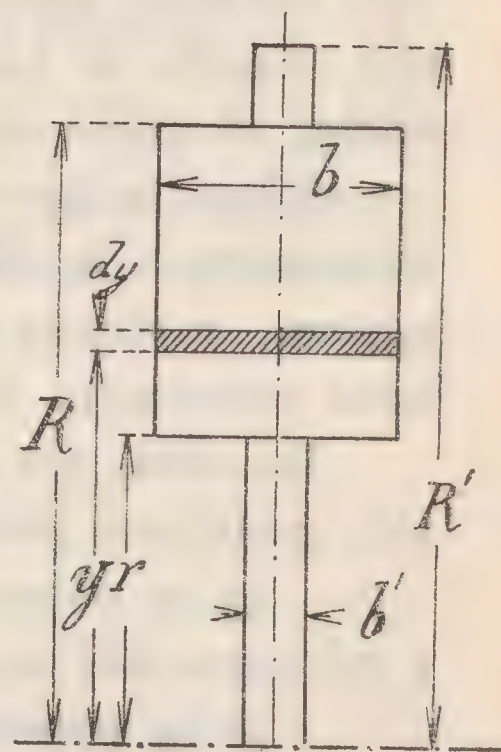



Fig. 1.

e la potenza assorbita da un complesso di due schermi identici, simmetricamente collocati, è

$$(2) \qquad 2Kb\omega^3\int_r^R y^3\,dy = 2Kb\omega^3\,\frac{R^4-r^4}{4}.$$

(*) Non si è in questa prima analisi tenuto conto della influenza della pressione, della temperatura e della umidità dell'aria che modificano la sua densità γ. Si calcolò quindi la resistenza specifica K; invece della resistività assoluta $\frac{K}{\gamma}$.

Scegliendo come unità di potenza il KW, come unità di lunghezza il metro e sostituendo alla velocità angolare ω il numero n di giri al minuto, la potenza assorbita si esprime con la formola

$$\Pi = 5640\, b(R^4 - r^4)\, K \left(\frac{n}{1000}\right)^3. \tag{3}$$

Questa ci permette, misurato con l'esperimento Π, di ricavare la resistenza specifica K.

4. — Le prove furono eseguite nel Laboratorio di Aeronautica del Politecnico di Torino, per mezzo del motore elettrico a corrente continua ed a velocità variabile di 100 cavalli, e di una trasmissione per cinghie, la quale, con un primo tiro di tipo normale comanda un albero intermedio, e con un secondo tiro, munito di Lenix tenditore, dà movimento all'albero delle eliche, al quale si possono fissare i molinelli.

Misurata per ciascun esperimento la intensità di corrente in ampère e la differenza di potenziale in volt sul quadro del motore, si ricavò per prodotto delle due letture, la potenza elettrica consumata in KW.

Da essa, per dedurre la potenza meccanica corrispondente alla resistenza dell'aria contro le due pale, bisogna sottrarre:

a) la potenza consumata per causa delle perdite nel ferro e nel rame dell'elettromotore e dei suoi accessori;

b) la potenza consumata dalla trasmissione;

c) la potenza assorbita dalla resistenza dell'aria contro il braccio del molinello.

Si apprezzò complessivamente la perdita a nel ferro e la perdita b facendo camminare motore e trasmissione senza molinello alle medesime velocità, e misurando il lavoro elettrico corrispondente. Indicheremo questo primo termine a sottrarsi col nome di potenza a vuoto e col simbolo Π_0.

Si apprezzò la perdita *a*) nel rame, limitandosi a dedurre per la resistenza elettrica dell'armatura, determinata in 0,159 ohm, il lavoro perduto per effetto joule, in corrispondenza delle intensità di corrente direttamente rilevate. Indicheremo questo secondo termine a sottrarsi con Π_j.

Siccome però in Π_0 è già inclusa la perdita joule del fun-

zionamento a vuoto, per non conteggiarla due volte la si sottrasse da Π_0, ottenendo in Π'_0 la potenza a vuoto depurata della perdita nel rame.

Si apprezzò finalmente la perdita *c*) sperimentando il solo braccio del molinello, sguernito delle pale, e ricavando per esso la potenza meccanica assorbita, dedotte le perdite *a*) e *b*).

Premesso che il suo comportamento è del tutto paragonabile, nel ragionamento fatto al n. 3 della presente nota, a quello di due schermi rettangolari accostati fino a contatto dei loro lati b, si può applicare senz'altro la formola (2) o la (3) che ne deriva per esprimere la potenza Π_b assorbita dal braccio, facendovi $r = 0$,

$R = R'$ semilunghezza del braccio,
$b = b'$ larghezza del braccio,
$K = (K)$ resistenza specifica speciale del braccio,

certamente diversa e certamente minore di quella delle pale, poichè il suo spessore, indispensabile a conferirgli la robustezza necessaria, ne avvicina le forme a quelle di un solido di buona penetrazione.

Risultò così:

$$\Pi_b = 5640\, b'(R')^4 (K) \left(\frac{n}{1000}\right)^3 \tag{4}$$

con la quale si determinò (K).

Fondandosi poi su questo valore, e ammettendo che le parti del braccio, non ricoperte dalle pale, si comportino, in ragione dell'area battuta e della sua posizione rispetto all'asse di rotazione, in modo identico al braccio nudo, si calcolò per ciascuna disposizione sperimentata del molinello la perdita *c*) con la formola

$$(\Pi) = 5640\, b'[r^4 + (R')^4 - R^4]\, (K) \left(\frac{n}{1000}\right)^3. \tag{5}$$

La potenza meccanica assorbita dalle pale risultò per conseguenza come differenza fra la potenza letta sugli apparecchi di misure elettriche e la somma delle potenze a sottrarsi

$$\Pi'_0 + \Pi_j + (\Pi). \tag{6}$$

5. — La determinazione dei termini da sottrarre dalla potenza indicata merita qualche giustificazione e qualche critica.

La ipotesi che le parti del braccio non ricoperte dalle pale si comportino in ragione dell'area battuta e della sua posizione rispetto all'asse, è naturalmente imperfetta pel fatto che i fenomeni aerodinamici non si possono prevedere fondandosi sul procedimento di integrazione che, da quanto succede per l'elemento, deduce ciò che deve avverarsi per il complesso.

Così pure: la possibilità di misurare le perdite meccaniche della trasmissione con la semplice prova a vuoto presuppone che il tiro delle cinghie conservi un valore sensibilmente costante, pur variando la potenza trasmessa, e le perdite dovute alla rigidezza trasversale ed alla elasticità longitudinale della cinghia rimangano inalterate. Avvalora tale ipotesi il fatto che, durante gli esperimenti, non furono modificate le posizioni relative degli alberi fra i quali il movimento è trasmesso, e la constatazione diretta che lo slittamento delle cinghie non subì assolutamente variazioni apprezzabili, passando dal carico nullo ai massimi carichi.

Ma la giustificazione non ha carattere assoluto.

Resta però bene inteso, anche prima di farne uno studio esauriente, che gli errori dovuti all'una e all'altra delle cause accennate sono assai piccoli rispetto ai termini complessivi a cui si riferiscono, ed a più forte ragione rispetto alla potenza assorbita dalla resistenza dell'aria contro le pale.

6. — Altra causa di alterazione dei risultati sperimentali si ebbe nella modificazione del coefficiente di attrito relativo ai perni col riscaldamento da essi sofferto nella durata dell'esperimento. Per eliminare l'errore assai grave al quale questa causa poteva dar luogo, senza dover in ciascun esperimento raggiungere il regime assoluto, prolungando a sufficienza la prova, si seguì una procedura identica in ogni saggio.

Essa consistette nel percorrere successivamente per gradi prestabiliti la scala delle velocità crescenti fino alla massima, e ripassare per gli stessi gradi della velocità in senso contrario, e nell'assumere come elementi utili alla calcolazione dei coefficienti le misure fatte nella 2ª serie di prove. Avendo riguardo a prolungare ogni esperimento per un tempo presso a poco

identico, le condizioni nelle quali le misure furono fatte riuscirono perfettamente paragonabili.

Il confronto fra i valori desunti nella 1ª serie di saggi, non utilizzati nelle calcolazioni, con quelli ottenuti nella 2ª serie dimostra che la misura precauzionale accennata era indispensabile, e dà al tempo stesso affidamento sulla sua efficacia.

7. — Nella esposizione dei risultati e delle calcolazioni in tabelle seguiremo costantemente la stessa traccia.

Sono dichiarate in una prima colonna le posizioni del reostato di eccitazione con numeri designanti i blocchetti del reostato stesso nell'ordine delle velocità crescenti, sebbene la successione delle misure sia avvenuta, come si disse, in ordine opposto. Nella seconda colonna sono scritte le velocità dell'albero del molinello espresse in giri al minuto. Nelle successive è dichiarata la tensione in volt e la intensità di corrente in ampère della corrente animatrice del motore. In seguito i chilowatt risultanti per prodotto, la perdita joule, la potenza assorbita dal braccio, la potenza meccanica corrispondente alle pale ed il coefficiente di resistenza specifica deducibile con l'uso della (3).

8. — Il primo esperimento si riferisce al *calcolo della potenza a vuoto* Π_0' depurata della perdita joule. I risultati di tale

13,0
12,0
KW.
11,0
10,0
700
800
900
1000
giri
1100
0
3
5
6
7
8
9
10

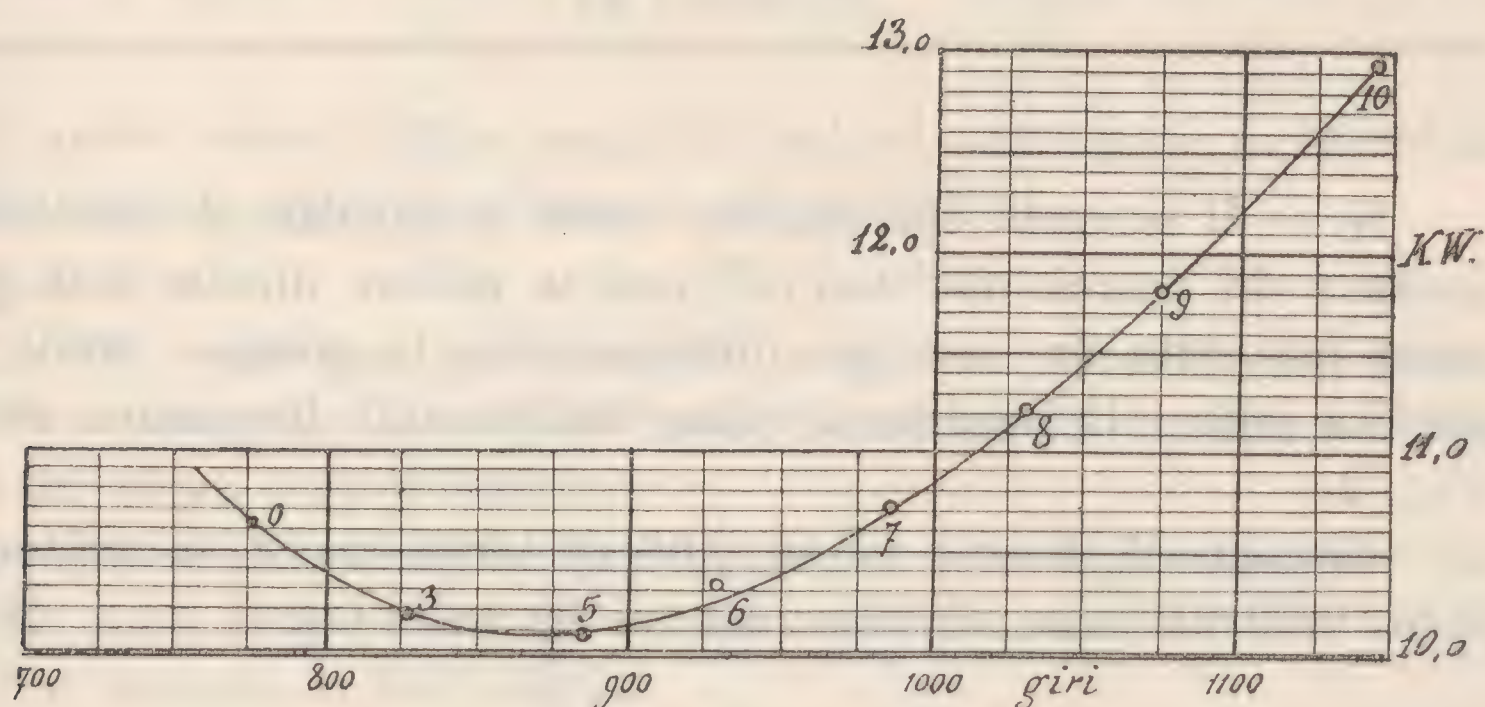



Fig. 2.

prova sono raccolti nel seguente prospetto e rappresentati dal diagramma della Fig. 2, portandovi come ascisse i numeri di

giri del molinello, a cominciare da 700, e come ordinate i valori di Π_0' cominciando da 10 *KW*. La curva che ne risulta rivela un minimo di potenza assorbita in prossimità di 875 giri, con un andamento parabolico ben netto, dovuto al fatto che le perdite nel ferro crescono quando la corrente di eccitazione è di massima intensità e quindi la velocità è minima.

Posizione del reostato	Giri del molinello n	Misure elettriche			Perdita joule *KW* $0{,}159 \frac{A^2}{1000}$	Potenza a vuoto depurata Π_0'
		Volt V	Ampère A	*KW* Π_0		
0	777	493	21,7	10,71	0,07	10,64
3	827	493	20,8	10,25	0,07	10,18
5	885	494	20,5	10,13	0,07	10,06
6	929	494	21,2	10,42	0,07	10,35
7	986	492	22,0	10,82	0,08	10,74
8	1031	492	23,0	11,32	0,08	11,24
9	1075	493	24,2	11,93	0,09	11,84
10	1145	492	26,5	13,04	0,11	12,93

9. — Il secondo esperimento servì a calcolare *la resistenza specifica del braccio dell'elica* (K) con la misura diretta della potenza assorbita da esso per differenza fra la potenza totale, la perdita joule e la perdita a vuoto dedotta dal diagramma della Fig. 2.

Siccome il braccio ha m. 0,06 di larghezza e si protende a m. 0,70 dall'asse di rotazione, si ha nella (4)

$$5640 b'(R')^4 = 81{,}2.$$

Dai valori di Π_b si dedussero quindi quelli di (K) con l'operazione indicata nel prospetto seguente:

Posizione del reostato	Giri del molinello n	Misure elettriche			Perdita joule in KW $0{,}159\frac{A^2}{1000}$	Potenza a vuoto depurata Π_0'	Potenza assorbita dal braccio $\Pi - \Pi_0' - \Pi_j$	$(K) = \frac{\Pi - \Pi_0' - \Pi_j}{81{,}2\left(\frac{n}{1000}\right)^3}$
		Volt V	Ampère A	KW Π				
0	771	495	30,5	15,10	0,15	10,70	4,25	0,114
3	818	494	31,0	15,30	0,15	10,24	4,91	0,111
5	875	493	33,5	16,50	0,18	10,09	6,23	0,114
6	920	493	36,0	17,75	0,21	10,22	7,32	0,115
7	978	492	40,5	19,90	0,26	10,64	9,10	0,120
8	1023	492	44,5	21,90	0,31	11,14	10,45	0,120
9	1067	489	48,5	23,70	0,37	11,72	11,61	0,118
10	1131	487	55,0	26,73	0,48	12,70	13,08	0,112

Ne risulta in media

$$(K) = 0{,}115,$$

col quale valore furono eseguiti i calcoli della potenza assorbita dal braccio negli esperimenti sul molinello.

10. — Le pale sperimentate in questa prima serie di prove sono rettangoli di m. 0,311 nella direzione del braccio e 0,238 in direzione perpendicolare.

I risultati di cui si dà cenno riguardano 4 posizioni distinte della pala, definite con le distanze dall'asse di rotazione R dell'orlo esterno, r dell'interno.

I dati degli esperimenti ed i risultati dei calcoli sono esposti nelle 4 tabelle seguenti:

Molinello m. 1,385 diametro esterno

$R = 0,692$ $r = 0,381$ $b = 0,238$ $b' = 0,06$ $R = 0,70$

rapporto di posizione $p = 0,290$

$5640\,b(R^4 - r^4) = 279,74$ $5640\,b'[r^4 + (R')^4 - R^4](K) = 1,247$

Posizione del reostato	Giri del molinello n	Misure elettriche Volt V	Ampère A	KW Π	Perdita joule in KW $\Pi_j = 0,159 \frac{A^2}{1000}$	Potenza a vuoto depurata Π_0'	Potenza assorbita dal braccio $(\Pi) = 1,247 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	Potenza assorbita dalle pale $\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	$K = \frac{\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)}{279,74}$
0	745	487	64,0	31,1	0,65	11,04	0,52	18,90	0,163
3	789	486	71,0	34,5	0,80	10,48	0,61	22,61	0,164
5	843	485	83,0	40,3	1,10	10,13	0,75	28,32	0,169
6	891	485	94,0	45,5	1,40	10,11	0,88	33,11	0,167
7	931	484	107,5	52,1	1,84	10,27	1,01	38,98	0,173
8	956	482	116,0	55,9	2,14	10,44	1,09	42,23	0,172
9	983	479	127,0	60,8	2,56	10,70	1,18	46,36	0,174

Molinello m. 1,245 diametro esterno

$R = 0,622$ $r = 0,311$ $b = 0,238$ $b' = 0,06$ $R' = 0,70$

rapporto di posizione $p = 0,333$

$5640\,b(R^4 - r^4) = 188,4$ $5640\,b'[r^4 + (R')^4 - R^4](K) = 3,89$

	n	Misure elettriche V	A	Π	$\Pi_j = 0,159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 3,89 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_9' - (\Pi)$	K
0	760	493	57,0	28,1	0,52	10,84	1,71	15,03	0,182
3	805	490	62,0	30,4	0,61	10,32	2,03	17,44	0,178
5	864	488	72,5	35,4	0,84	10,07	2,51	21,98	0,181
6	907	485	81,5	39,5	1,06	10,16	2,90	25,38	0,180
7	958	484	94,5	45,7	1,42	10,47	3,42	30,39	0,184
8	991	482	104,0	50,1	1,72	10,79	3,78	33,81	0,184
9	1021	478	113,0	54,0	2,03	11,11	4,14	36,72	0,182

***Molinello** m. 1,060 diametro esterno*

$R = 0{,}530 \quad r = 0{,}219 \quad b = 0{,}238 \quad b' = 0{,}06 \quad R' = 0{,}70$

rapporto di posizione $p = 0{,}415$

$5640\, b(R^4 - r^4) = 102{,}9 \qquad 5640\, b'[r^4 + (R')^4 - R^4]\,(K) = 6{,}38$

	n	Misure elettriche			$\Pi_j = 0{,}159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 6{,}38 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
		V	A	Π					
0	751	491	46,0	22,6	0,34	10,96	2,69	8,58	0,195
3	797	491	50,0	24,6	0,40	10,40	3,22	10,58	0,202
5	856	490	57,0	27,9	0,52	10,10	3,98	13,30	0,206
6	900	487	64,0	31,3	0,65	10,14	4,64	15,87	0,211
7	954	486	73,0	35,7	0,85	10,41	5,52	18,92	0,212
8	991	483	81,0	39,7	1,04	10,80	6,18	21,68	0,217
9	1026	482	88,0	43,2	1,23	11,17	6,87	23,93	0,216

***Molinello** m. 0,964 diametro esterno*

$R = 0{,}482 \quad r = 0{,}171 \quad b = 0{,}238 \quad b' = 0{,}06 \quad R' = 0{,}70$

rapporto di posizione $p = 0{,}475$

$5640\, b(R^4 - r^4) = 71{,}29 \qquad 5640\, b'[r^4 + (R')^4 - R^4]\,(K) = 7{,}276$

	n	Misure elettriche			$\Pi_j = 0{,}159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 7{,}276 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
		V	A	Π					
0	760	495	43,0	21,3	0,29	10,83	3,19	6,97	0,222
3	805	494	45,5	22,5	0,33	10,32	3,80	8,05	0,216
5	862	493	51,5	25,4	0,42	10,08	4,66	10,24	0,225
6	907	492	56,5	27,8	0,51	10,15	5,43	11,71	0,220
7	960	491	65,0	31,9	0,67	10,48	6,44	14,49	0,229
8	998	490	72,0	35,3	0,82	10,86	7,23	16,39	0,231
9	1033	488	79,0	38,6	0,99	11,26	8,03	18,32	0,233

11. — Dall'esame dei risultati ottenuti appare anzitutto l'accrescimento quasi regolare del valore di K coll'aumentare della velocità in ciascun esperimento. Ciò conferma una delle spiegazioni date del valore molto elevato della resistenza specifica in queste prove, eseguite tutte con velocità del lembo esterno della pala superiori a 38 m/s. e spinte fino a 71,5 m/s. Fra questi limiti infatti, come si disse, la legge incrementale della resistenza con la velocità dev'essere più rapida di quella dei quadrati.

Riservando a studi ulteriori il compito di chiarire questo punto, ci limitiamo per ora ad indicare come il valor medio della resistenza specifica dipenda dal rapporto di posizione p, considerato che le variazioni di K sono per ogni prova abbastanza piccole, perchè il prenderne in esame la media abbia tuttora significato.

Ora dai quattro esperimenti citati si ha per

p	K medio
$p = 0{,}290$	0,169
0,333	0,182
0,415	0,208
0,475	0,225.

Questi valori denotano una dipendenza lineare del coefficiente K dal parametro p.

Applicati i noti procedimenti di determinazione dei coefficienti di una funzione di forma prestabilita per mezzo di un numero sovrabbondante di dati sperimentali, risulta

$$K = 0{,}305\, p + 0{,}0806. \qquad (7)$$

Il termine noto, che rappresenta il valore di K per $p = 0$, ossia nelle condizioni del moto traslatorio, è vicinissimo al valore ben conosciuto della resistenza specifica, nel caso in cui il vento investe normalmente lo schermo sottile. Ciò dà indubbiamente affidamento per l'attendibilità dei risultati.

Non bisogna però dimenticare quanto si è premesso sulla maggiore resistenza dovuta alle velocità grandissime. Per questo fatto è verosimile che la formola debba subire in seguito a studi ulteriori qualche modificazione, e si presenti preferibile la legge di dipendenza quadratica fra resistenza specifica e rapporto di posizione, in modo da attribuire al termine noto valore più grande.

Sopra il problema della propagazione di moto all'esterno di una sfera in un mezzo elastico isotropo indefinito.

Nota 2ª di ERNESTO LAURA.

VI. — Casi particolari del problema precedente.

21. — Si ponga:

$$\lambda(t) = e^{\mu t} - 1 \tag{42}$$

essendo μ una costante qualunque.

Per soddisfare alla (39^{bis}) si ponga:

$$f(t) = \alpha e^{\mu t} + \beta$$

le α, β indicando costanti che ora determineremo. La (39^{bis}) diviene:

$$\alpha U_n\left(\frac{R\mu}{c}\right) e^{\mu t} + \beta U_n(0) = R^{n+1}(e^{\mu t} - 1)$$

da cui:

$$\alpha = \frac{R^{n+1}}{U_n\left(\frac{R\mu}{c}\right)} \qquad \beta = -\frac{R^{n+1}}{U_n(0)}.$$

Avremo dunque:

$$f(t) = \frac{R^{n+1} e^{\mu t}}{U_n\left(\frac{R\mu}{c}\right)} - \frac{R^{n+1}}{U_n(0)}.$$

La soluzione cercata vale dunque:

$$\varphi = \frac{1}{r^{n+1}} U_n\left(\frac{r}{c}\frac{d}{dt}\right) f\left(t - \frac{r-R}{c}\right) Y_n = \tag{42}$$

$$= \frac{R^{n+1} Y_n}{r^{n+1}} \left\{ \frac{U_n\left(\frac{r\mu}{c}\right)}{U_n\left(\frac{R\mu}{c}\right)} e^{\mu\left(t - \frac{r-R}{c}\right)} - 1 \right\}.$$

La funzione φ data dalla (42) soddisfa alla equazione:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\Delta\varphi$$

e per $r = R$ si riduce a:

$$Y_n\,(e^{\mu t} - 1).$$

Non soddisfa invece alla condizione di annullarsi sul bordo dell'onda (superficie sferica $r = R + ct$). Sopra questa superficie si ha invero:

$$\varphi = \frac{Y_n}{(R+ct)^{n+1}}\left[\frac{U_n\left(\frac{\mu R}{c} + \mu t\right)}{U_n\left(\frac{\mu R}{c}\right)} - 1\right].$$

Quantità ovviamente diversa da zero. La soluzione (42) qui trovata, sotto una forma un po' diversa, trovasi nella Memoria di Stokes già citata nell'introduzione. L'osservazione ora fatta permette di asserire che questa soluzione è solo approssimata. Per completarla bisognerà ad essa aggiungere una combinazione lineare di integrali della (39^{bis}) resa omogenea per modo da verificare le condizioni (40). Sieno $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ le radici dell'equazione:

$$U_n\left(\frac{R\lambda}{c}\right) = 0\,,$$

il termine da aggiungersi alla (42) sarà:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\, e^{\lambda_i t} \tag{43}$$

dove le A_i sono costanti determinate dalle equazioni:

$$\tag{44} \left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} A_i + \frac{1}{U_n\left(\frac{R\mu}{c}\right)} - 1 = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i + \frac{\mu}{U_n\left(\frac{R\mu}{c}\right)} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{n-1} A_i + \frac{\mu^{n-1}}{U_n\left(\frac{R\mu}{c}\right)} = 0 \end{aligned}\right.$$

Senza procedere alla completa determinazione delle A_i, possiamo concludere, ricordando le proprietà delle radici dei polinomî U_n, che la vibrazione richiesta si compone della (42), il cui carattere dipende unicamente dai valori che la φ assume sopra la superficie $r = R$, e di vibrazioni di carattere smorzato, *proprie della sfera vibrante*, l'ufficio delle quali è quello di rendere continuo lo spostamento attraverso il bordo dell'onda. Le A_i fornite dalle (43) non sono mai tutte nulle, poichè i secondi membri non sono tutti nulli, e le A_i sono tutte diverse (Cfr. il n° 13); perciò le vibrazioni smorzate proprie della sfera vibrante compaiono in generale sempre necessariamente. Consegue in particolare: *Il moto comunicato ad un mezzo fluido elastico da una sfera in esso vibrante di moto armonico semplice è composto, oltrechè di vibrazioni di periodo eguale a quello della sfera vibrante, di vibrazioni smorzate periodiche o aperiodiche i cui periodi non dipendono dal moto particolare del nucleo vibrante.*

Lo studio della propagazione di moto all'esterno di una superficie σ chiusa in un mezzo fluido nel quale c è la velocità del suono, generato da condizioni superficiali di tipo armonico semplice di periodo $\frac{2\pi}{\mu}$, fatto risolvendo l'equazione:

$$\Delta\varphi + \frac{\mu^2}{c^2}\varphi = 0 \tag{45}$$

deve quindi essere considerato incompleto. Il problema esterno per la equazione (45) non corrisponde cioè ad alcun problema fisico determinato. Ed in ciò forse consistono le difficoltà atte ad assicurare l'unicità di soluzione.

22. — Nel n° precedente si è supposto implicitamente che $\frac{R\mu}{c}$ non fosse radice dell'equazione:

$$U_n(\xi) = 0.$$

Quando ciò succede la precedente soluzione va modificata. Nell'equazione:

$$U_n\left(\frac{R}{c}\,\frac{d}{dt}\right) f = R^{n+1}\,(e^{\mu t} - 1) \tag{39bis}$$

si ponga:

$$f = \alpha t e^{\mu t} + \beta . \tag{46}$$

Si ricava facilmente:

$$U_n\left(\frac{R}{c}\frac{d}{dt}\right) t e^{\mu t} = t e^{\mu t} U_n\left(\frac{R\mu}{c}\right) + \frac{R}{c} U_n'\left(\frac{R\mu}{c}\right) e^{\mu} .$$

E poichè $U_n\left(\frac{R\mu}{c}\right)$ è nullo, mentrecchè $U_n'\left(\frac{R\mu}{c}\right)$ è diverso da zero, poichè il polinomio U_n non ha radici multiple, la (39^{bis}) per la posizione (46) diviene:

$$\alpha \frac{R}{c} U_n'\left(\frac{R\mu}{c}\right) e^{\mu t} + \beta U_n(0) = R^{n+1}(e^{\mu t} - 1)$$

da cui:

$$\alpha = \frac{R^{n+1}}{\frac{R}{c} U_n'\left(\frac{R\mu}{c}\right)} \qquad \beta = -\frac{R^{n+1}}{U_n(0)} .$$

Quindi la soluzione:

$$\varphi = \frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} Y_n \left\{ \frac{U_n\left(\frac{r\mu}{c}\right) t + \frac{r}{c} U_n'\left(\frac{r\mu}{c}\right)}{\frac{R}{c} U_n'\left(\frac{R\mu}{c}\right)} e^{\mu\left(t - \frac{r-R}{c}\right)} - 1 \right\} . \tag{47}$$

A questa soluzione bisognerà aggiungere un termine analogo a (43).

Questo caso corrisponde a quello della risonanza. Vi è però una differenza sostanziale. Le radici dell'equazione

$$U_n(\xi) = 0$$

sono o reali negative, o imaginarie con parte reale negativa. L'ampiezza delle oscillazioni date dalla (47) non può dunque divenire mai infinita.

23. — Il problema che consiste nel determinare il moto propagato all'esterno di una sfera, quando sopra di essa sono dati i valori di $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ si risolve come il precedente. Esso si ri-

duce in ultima analisi alla integrazione dell'equazione differenziale lineare:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{f(\tau_c)\right\}_n r^n \Big|_{r=R} = \text{funzione nota}$$

cioè all'equazione:

$$V_{n+1}\left(\frac{R}{c}\frac{d}{dt}\right)f = \text{funzione nota.}$$

Per questa questione si possono ripetere considerazioni analoghe alle precedenti.

23[bis]. — Applichiamo le formole precedenti alla soluzione della questione seguente: Determinare il moto propagato in un fluido elastico, indefinitamente esteso e non sollecitato da forze di massa, da una sfera rigida di raggio R in esso immersa, il moto della quale è composto di oscillazioni infinitesime di carattere armonico semplice e di periodo $T = \frac{2\pi}{k}$.

Se u è lo spostamento della sfera, supposto il moto iniziantesi all'istante $t = 0$ e il fluido inizialmente in quiete, avremo:

$$u = a \operatorname{sen} kt \qquad \text{per} \qquad t \geq 0.$$

Il moto del fluido ammette un potenziale di velocità φ; inoltre, per quanto precede, sopra il bordo dell'onda, cioè sulla sfera $r = R + ct$, si avrà $\varphi = 0$. Se θ è la colatitudine sulla sfera, l'asse dei poli coincidendo con la direzione del moto, per l'eguaglianza delle componenti normali della velocità del fluido e dei punti della sfera, avremo:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -ka \cos kt \cos\theta \text{ per } r = R,\ t \geq 0.$$

Gli sviluppi precedenti ci permettono allora di porre:

$$(*) \quad \varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{f\left(t - \frac{r-R}{c}\right)}{r} \cdot r\cos\theta = \left[\frac{1}{cr} f'\left(t - \frac{r-R}{c}\right) + \right.$$
$$\left. + f\left(t - \frac{r-R}{c}\right)\right]\cos\theta$$

dalla quale:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^3}\left[\frac{r^2}{c^2} f''\left(t - \frac{r-R}{c}\right) + 2\frac{r}{c} f'\left(t - \frac{r-R}{c}\right) + \right.$$
$$\left. + 2f\left(t - \frac{r-R}{c}\right)\right] \cos\theta .$$

La condizione in superficie fornisce allora per la f l'equazione differenziale:

$$(^{**}) \qquad \frac{R^2}{c^2} f''(t) + 2\frac{R}{c} f'(t) + 2f(t) = - ka \cos kt$$

mentrecchè la condizione al bordo dell'onda dà le condizioni iniziali della funzione incognita f [Cfr. Cap. II (14)]:

$$(^{***}) \qquad f(0) = f'(0) = 0.$$

La funzione f è dunque determinata univocamente.

La soluzione generale della (**) è:

$$f = Ae^{-\frac{Rt}{c}}\left(\cos\sqrt{3}\,\frac{R}{c}\,t + \alpha\right) + B\cos(kt + \beta)$$

dove:

$$B = ka \frac{\sqrt{4 + \frac{k^4R^4}{c^4}}}{4 + 2\frac{k^2R^2}{c^2} + \frac{k^4R^4}{c^4}} \qquad \operatorname{tang}\beta = \frac{2k\frac{R}{c}}{2 - \frac{k^2R^2}{c^2}} .$$

Le costanti A, α si determinano mediante le (***), e poichè β e B non sono mai nulle, tale sarà pure A. La (*) darà poi la φ. Dall'espressione trovata per la f, come nel caso generale discende: il moto propagato nel fluido dalle oscillazioni di tipo armonico semplice di una sfera rigida si compone oltrecchè di vibrazioni armoniche di periodo eguale a quelle della sfera oscillante, di vibrazioni smorzate il cui periodo e il cui coefficiente di smorzamento dipendono *unicamente* dal raggio della sfera e dal fluido.

VII. — Sui moti quasi-liberi.

24. — La funzione:

$$\varphi = \frac{1}{r^{n+1}} U_n\left(\frac{r\lambda}{c}\right) e^{\lambda\left(t - \frac{r-R}{c}\right)} Y_n \tag{48}$$

soddisfa all' equazione caratteristica delle onde sferiche. Essa non caratterizza un potenziale di velocità per un possibile moto all' esterno della sfera $r = R$, non soddisfacendo alle condizioni di continuità sul bordo dell'onda. Sia ξ una radice dell'equazione:

$$U_n(\xi) = 0.$$

L'equazione:

$$\frac{r\lambda}{c} = \xi$$

fornisce (per opportuni valori di λ) per r un valore reale positivo R, tale che sulla sfera $r = R$ la φ data dalla (48) si annulla per ogni valore di t. La funzione φ corrispondente *non caratterizza un moto possibile propagantesi all'esterno della sfera* r = R. Ciò discende da quanto precede; può però essere verificato facilmente. Sopra la superficie

$$r = R + ct$$

questa funzione diviene:

$$\frac{1}{(R+ct)^{n+1}} U_n\left(\frac{(R+ct)\lambda}{c}\right) Y_n. \tag{49}$$

Si ha ora:

$$U_n\left[\frac{(R+ct)\lambda}{c}\right] = U_n\left(\frac{R\lambda}{c}\right) + \lambda t\, U_n'\left(\frac{R\lambda}{c}\right) + \dots$$

Per le ipotesi poste si ha:

$$U_n\left(\frac{R\lambda}{c}\right) = 0,$$

e poichè i polinomî U_n non hanno radici doppie sarà:

$$U_n'\left(\frac{R\lambda}{c}\right) \neq 0.$$

Quindi la φ ora determinata non si annulla *mai* sulle sfere $r = R + ct$ per $t > 0$. Scritta esplicitamente la (49) diviene:

$$\alpha_{n,n}\frac{1}{R+ct}\frac{\lambda^n}{c^n} + \alpha_{n-1,n}\frac{1}{(R+ct)^2}\frac{\lambda^{n-1}}{c^{n-1}} + \dots$$

e quindi si annulla per $t = \infty$. Si conclude:

Nel caso di una sfera esistono funzioni soddisfacenti la equazione:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\Delta\varphi$$

regolari nello spazio compreso tra le sfere $\mathrm{r} = \mathrm{R}$, $\mathrm{r} = \mathrm{R} + \mathrm{ct}$, *che si annullano sulla sfera* $\mathrm{r} = \mathrm{R}$ *per ogni valore di* t *e sulla sfera* $\mathrm{r} = \mathrm{R} + \mathrm{ct}$ *per* t *infinitamente grande.*

25. — Considerazioni analoghe possono ripetersi ricercando funzioni soddisfacenti l'equazione:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\Delta\varphi$$

e la cui derivata normale si annulli sopra la sfera $r = R$. Si ha:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^{n+2}} V_{n+1}\left(\frac{r\lambda}{c}\right) e^{\lambda\left(t-\frac{r-R}{c}\right)} Y_n.$$

Se perciò ξ è una radice di:

$$V_{n+1}(\xi) = 0$$

la R tale che:

$$\frac{R\lambda}{c} = \xi$$

per valori opportuni di λ che dànno per R un valore reale e positivo, sarà il raggio di una sfera sopra la quale è nulla la $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$. Questa funzione non si annulla mai sopra la superficie

$$r = R + ct$$

per ogni $t > 0$. Si annulla solo per $t = \infty$. Queste funzioni non caratterizzano dunque mai possibili moti propagantisi all'esterno della sfera considerata.

26. — I moti definiti dalle funzioni considerate nei n.i 24 e 25, funzioni che potrebbero dirsi eccezionali per il problema che consideriamo, per analogia con le vibrazioni libere dei corpi di dimensioni finite, saranno chiamati *moti quasi-liberi*. Le proprietà dimostrate relative alle radici dei polinomî U_n, V_n dànno il risultato: *I moti quasi-liberi per una sfera sono o aperiodici o periodici non mai semplici; in ogni caso sono di tipo smorzato.*

Al risultato ottenuto al n. 21 si può dare la forma: *Le vibrazioni comunicate da una sfera vibrante di moto armonico semplice ad un mezzo fluido che la circonda provengono dalla composizione di vibrazioni armoniche semplici di egual periodo di quelle della sfera e di vibrazioni quasi-libere.*

Le vibrazioni armoniche semplici sono le uniche considerate dallo Stokes nella Memoria (5) citata nella Introduzione. La soluzione così data per punti molto distanti dal nucleo vibrante è sufficientemente approssimata, poichè le vibrazioni quasi-libere tendono ad annullarsi per t molto grande.

27. — Dimostrammo nel Cap. IV che i polinomî U_n, V_n non ammettono mai due radici reali. Questo fatto trova una riprova nell'osservazione seguente. Sieno α, β radici reali di U_n; se λ è una quantità negativa, ponendo:

$$\frac{R_1 \lambda}{c} = \alpha , \qquad \frac{R_2 \lambda}{c} = \beta ,$$

determineremo uno spazio racchiuso tra le due sfere $r = R_1$, $r = R_2$ per il quale λ è un valore eccezionale. La quantità λ dovrebbe essere, contrariamente all'ipotesi, un imaginario puro.

Un simile ragionamento porta poi a concludere pure che il rapporto di due radici dei polinomî U_n (o V_n) *non è mai una quantità reale.*

II^a Parte

VIII. — Posizione del problema esterno della Dinamica elastica.

28. — Le considerazioni prima svolte relativamente alla equazione caratteristica delle onde sferiche trovano la loro naturale applicazione allo studio della propagazione del moto in un mezzo elastico indefinito all'esterno di una sfera sulla quale sono dati gli spostamenti o le tensioni da un istante iniziale $t = 0$ in poi. I problemi che si hanno da risolvere, riferendoci alla nostra Memoria citata nella Introduzione, sono allora i seguenti:

Sia dato un mezzo elastico (nel quale a, b sono le velocità di propagazione delle onde longitudinali e di quelle trasversali), omogeneo, indefinito, inizialmente in quiete e indeformato, non sollecitato da forze di massa. Esso sia dotato di una cavità sferica di raggio R sulla quale sono noti gli spostamenti [1] o le tensioni da $t = 0$ in poi. Dovremo allora determinare sei funzioni (u_1, v_1, w_1) (u_2, v_2, w_2) delle quali le prime tre sono regolari nello spazio compreso tra le sfere $r = R$, $r = R + at$ e ivi soddisfanno alle equazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(u_1, v_1, w_1) = a^2 \Delta (u_1, v_1, w_1) \\ \text{rotor}\,(u_1, v_1, w_1) = 0 \end{cases}$$

e alle condizioni:

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0 \qquad \text{per} \qquad r = R + at, \; t \geq 0$$

e le ultime tre (u_2, v_2, w_2) sono regolari nello spazio compreso tra le sfere $r = R$, $r = R + bt$ e ivi soddisfanno alle equazioni:

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(u_2, v_2, w_2) = b^2 \Delta (u_2, v_2, w_2) \\ \text{div}\,(u_2, v_2, w_2) = 0 \end{cases}$$

---

[1] Per le ipotesi poste lo spostamento per $t = 0$ deve annullarsi sopra la sfera $r = R$.

con le condizioni al bordo:

$$(2^{bis}) \qquad u_2 = v_2 = w_2 = 0 \qquad \text{per} \qquad r = R + bt, \ t \geq 0.$$

Se infine sono note le velocità, sopra la superficie $r = R$, per ogni $t > 0$, si dovranno verificare le equazioni:

$$\frac{\partial (u_1 + u_2)}{\partial t} = A, \qquad \frac{\partial (v_1 + v_2)}{\partial t} = B, \qquad \frac{\partial (w_1 + w_2)}{\partial t} = C,$$

dove le A, B, C sono funzioni dei punti della superficie sferica $r = R$ definite e continue per i valori di $t \geq 0$. Essendo invece date le tensioni superficiali (per ogni $t \geq 0$), le funzioni stesse dovranno verificare le equazioni:

$$\begin{cases} X_r^{(1)} + X_r^{(2)} + L = 0 \\ Y_r^{(1)} + Y_r^{(2)} + M = 0 \\ Z_r^{(1)} + Z_r^{(2)} + N = 0 \end{cases}$$

dove le $(X_r^{(1)}, Y_r^{(1)}, Z_r^{(1)})$ sono le tensioni dovute allo spostamento (u_1, v_1, w_1), le $(X_r^{(2)}, Y_r^{(2)}, Z_r^{(2)})$ quelle dovute allo spostamento (u_2, v_2, w_2) e L, M, N le date tensioni le quali sono supposte funzioni dei punti della sfera $r = R$ definite e continue per ogni valore di $t \geq 0$.

La possibilità dello sviluppo in serie di funzioni armoniche delle u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 è dimostrata nel seguito di questa Nota. Ci sarà, a questo scopo, di giovamento l'analisi fatta dal Lamb nella sua classica memoria relativa alle vibrazioni libere della sfera elastica, già citata nella Introduzione, 1ª nota.

IX. — **Propagazione di vibrazioni longitudinali.**

29. — Le componenti di una vibrazione longitudinale soddisfanno alle equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} (u_1, v_1, w_1) = a^2 \Delta (u_1, v_1, w_1) \\ \text{rotor} \, (u_1, v_1, w_1) = 0 \end{cases}$$

Alla 2ª di queste si soddisfa ponendo:

$$(u_1, v_1, w_1) = \operatorname{grad} \varphi .$$

La 1ª diviene allora:

$$\operatorname{grad} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \operatorname{grad} \varphi .$$

A meno di una costante si ha dunque:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi .$$

Come funzione φ la più generale soddisfacente a questa equazione, per quanto precede, potremo assumere la seguente:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\} f_{n1}(\tau_a) \{_n \pi_{n1} + \dots + \} f_{n,2n+1}(\tau_a) \{_n \pi_{n,2n+1} \right]$$

nella quale le π_{ni} sono $(2n+1)$ polinomî armonici di ordine n indipendenti e le f_{ni} sono $(2n+1)$ funzioni di una variabile che determineremo. Inoltre si ha:

$$\} f(\tau_a) \{_n = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^n \frac{f\left(t - \dfrac{r-R}{a}\right)}{r} = \frac{(-1)^n}{r^{2n+1}} U_n\left(\frac{r}{c} \frac{d}{dt} \right) f(t).$$

Si ha ora:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\} f_{ni}(\tau_a) \{_n \pi_{ni} \right] = \frac{\partial}{\partial r} \} f_{ni}(\tau_a) \{_n \cdot \frac{x \pi_{ni}}{r} + \} f_{ni}(\tau_a) \{_n \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} .$$

Per la definizione del simbolo $\} f_{ni}(\tau_a) \{_n$ e per l'identità ben nota:

$$x \pi_{ni} = \frac{r^2}{2n+1} \left[\frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} - r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}} \right) \right],$$

avremo infine:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\} f_{ni}(\tau_a) \{_n \pi_{ni} \right] = \} f_{ni}(\tau_a) \{_{n+1} \frac{r^2}{2n+1} \left[\frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} - r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}} \right) \right] +$$
$$+ \} f_{ni}(\tau_a) \{_n \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} = \left[\frac{r^2}{2n+1} \} f_{ni}(\tau_a) \{_{n+1} + \} f_{ni}(\tau_a) \{_n \right] \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} -$$
$$- \} f_{ni}(\tau_a) \{_{n+1} \frac{r^{2n+3}}{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}} \right).$$

Tenendo presente la (9) del Cap. I si ha poi:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\} f_{ni}(\tau_a) \{_{n-1} = (2n+1) \} f_{ni}(\tau_a) \{_n + r^2 \} f_{ni}(\tau_a) \{_{n+1}.$$

Perciò come componenti della vibrazione longitudinale più generale propagantesi all'esterno della sfera $r = R$ potremo assumere le seguenti:

$$\text{(A)} \quad u_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2n+1}\left[\frac{1}{a^2}\} f''_{ni}(\tau_a) \{_{n-1}\frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} - \} f_{ni}(\tau_a) \{_{n+1} r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}}\right)\right]$$

e formole analoghe per le v_1, w_1.

Il moto definito da queste equazioni è possibile effettivamente in un mezzo in quiete solo qualora si abbia:

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0$$

sopra ogni superficie $r = R + at$ per ogni $t \geq 0$.

Per il Cap. III le funzioni f_{ni} dovranno in conseguenza soddisfare alle equazioni:

$$(\alpha) \qquad f_{ni}(0) = f'_{ni}(0) = \ldots = f_{ni}^{(n+1)}(0) = 0.$$

X. — Propagazione di onde trasversali.

30. — Le componenti di una vibrazione trasversale soddisfanno alle equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_2, v_2, w_2) = b^2\Delta(u_2, v_2, w_2) \\ \text{div}\,(u_2, v_2, w_2) = 0. \end{cases}$$

Si soddisfa ad esse ponendo:

$$u_2' = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2n+1}\} \varphi_{ni}(\tau_b) \{_n \left(y\frac{\partial \pi_{ni}}{\partial z} - z\frac{\partial \pi_{ni}}{\partial y}\right)$$

e due formole analoghe, dove le π_{ni} hanno il significato di prima, e le φ_{ni} sono funzioni arbitrarie di τ_b. Per questa vibrazione si ha:

$$xu_2' + yv_2' + zw_2' = 0,$$

cioè la sua componente radiale è nulla. Si hanno vibrazioni trasversali, come facilmente si verifica, a componente radiale non nulla ponendo:

$$(u_2'', v_2'', w_2'') = \text{rotor} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \left[\{ \psi_{ni}(\tau_b) \}_n \left(y \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial z} - z \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial y} \right), \ldots, \ldots \right].$$

Scriviamo esplicitamente le espressioni delle (u_2'', v_2'', w_2''). Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\{ \psi_{ni}(\tau_b) \}_n \left(x \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial y} - y \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\{ \psi_{ni}(\tau_b) \}_n \left(z \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} - x \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial z} \right) \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \{ \psi_{ni}(\tau_b) \}_n \cdot \frac{y}{r} \left(x \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial y} - y \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} \right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial r} \{ \psi_{ni}(\tau_b) \}_n \cdot \frac{z}{r} \left(z \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} - x \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial z} \right) +$$

$$+ \{ \psi_{ni}(\tau_b) \}_n \left[x \frac{\partial^2 \pi_{ni}}{\partial y^2} - \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \pi_{ni}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \pi_{ni}}{\partial x \partial z} + x \frac{\partial^2 \pi_{ni}}{\partial z^2} \right] =$$

$$= \{ \psi_{ni}(\tau_b) \}_{n+1} \left[x \left(x \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} + y \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial y} + z \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial z} \right) - (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} \right] +$$

$$+ \{ \psi_{ni}(\tau_b) \}_n \left[x \left(\frac{\partial^2 \pi_{ni}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi_{ni}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \pi_{ni}}{\partial z^2} \right) - \right.$$

$$\left. - x \frac{\partial^2 \pi_{ni}}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 \pi_{ni}}{\partial y \partial x} - z \frac{\partial^2 \pi_{ni}}{\partial z \partial x} - 2 \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} \right] = \because$$

E poichè π_{ni} è un polinomio armonico omogeneo di grado n avremo pure:

$$\because = \{ \psi_{ni}(\tau_b) \}_{n+1} \left(n x \pi_{ni} - r^2 \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} \right) - \{ \psi_{ni}(\tau_b) \}_n (n+1) \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x}.$$

D'altra parte:

$$x \pi_{ni} = \frac{r^2}{2n+1} \left[\frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} - r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}} \right],$$

quindi avremo pure:

$$\because = \{ \psi_{ni}(\tau_b) \}_{n+1} \left(- \frac{n+1}{2n+1} r^2 \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} - \frac{n}{2n+1} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}} \right) -$$

$$- \{ \psi_{ni}(\tau_b) \}_n (n+1) \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x}.$$

Il coefficiente di $- \frac{n+1}{2n+1} r^2 \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x}$ è:

$$r^2 \{ \psi_{ni}(\tau_b) \}_{n+1} + (2n+1) \{ \psi_{ni}(\tau_b) \}_n = \frac{1}{b^2} \{ \psi''_{ni}(\tau_b) \}_{n-1}.$$

Quindi infine avremo:

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} = -\frac{n+1}{2n+1}\frac{1}{b^2}\left\{\psi''_{ni}(\tau_b)\right\}_{n-1}\frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} - \\ -\frac{n}{2n+1}\left\{\psi_{ni}(\tau_b)\right\}_{n+1} r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}}.$$

Potremo dunque assumere:

$$u_2'' = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2n+1}\left[\frac{n+1}{b^2}\left\{\psi''_{ni}(\tau_b)\right\}_{n-1}\frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} + n\left\{\psi_{ni}(\tau_b)\right\}_{n+1} r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}}\right].$$

Come componenti della vibrazione trasversale la più generale avremo allora le seguenti:

$$\text{(B)} \qquad u_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2n+1}\Bigg[\left\{\varphi_{ni}(\tau_b)\right\}_n\left(y\frac{\partial \pi_{ni}}{\partial z} - z\frac{\partial \pi_{ni}}{\partial y}\right) + \\ + \frac{n+1}{b^2}\left\{\psi''_{ni}(\tau_b)\right\}_{n-1}\frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} + n\left\{\psi_{ni}(\tau_b)\right\}_{n+1} r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}}\Bigg]$$

e formole analoghe per v_2, w_2.

Queste saranno le componenti di una vibrazione *effettivamente* propagantesi in un mezzo in quiete se si ha:

$$u_2 = v_2 = w_2 = 0 \qquad \text{per} \qquad r = R + bt.$$

Le funzioni incognite φ_{ni}, ψ_{ni} che figurano nelle (B) devono (Cap. III) soddisfare alle condizioni:

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \varphi_{ni}(0) = \varphi'_{ni}(0) = \dots = \varphi^{(n)}_{ni}(0) = 0 \\ \psi_{ni}(0) = \psi'_{ni}(0) = \dots = \psi^{(n+1)}_{ni}(0) = 0. \end{cases}$$

XI. — Problema esterno della sfera quando sono note in superficie le velocità.

31. — Mediante le espressioni delle $u_1, v_1, \dots w_2$ date dalle (*A*) e (*B*) e tenendo inoltre presenti le condizioni (α) e (β), riesce facile il mostrare che il problema della propagazione del moto all'esterno di una sfera sulla quale sono note le velocità

dall'istante $t = 0$ in poi, quale fu da noi proposto, è effettivamente risolubile, e che quindi le condizioni imposte non sono sovrabbondanti.

Sieno:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(u_1 + u_2), \ \frac{\partial}{\partial t}(v_1 + v_2), \ \frac{\partial}{\partial t}(w_1 + w_2)\right] = (A, B, C) \tag{3}$$

le condizioni superficiali. Le (A, B, C) sono funzioni dei punti della sfera $r = R$ e di t (continue e definite per $t \geq 0$). Sviluppiamo le A, B, C in una serie di Y_n di Laplace:

$$\left\{\begin{aligned} A &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \lambda_{n,i}(t)\, Y_{n,i}(\theta, \varphi) \\ B &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \mu_{n,i}(t)\, Y_{n,i}(\theta, \varphi) \\ C &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \nu_{n,i}(t)\, Y_{n,i}(\theta, \varphi) \end{aligned}\right. \tag{4}$$

le $Y_{n,i}$ essendo $2n + 1$ funzioni sferiche di ordine n indipendenti. Potremo perciò porre:

$$r^n\, Y_{n,i} = \pi_{ni}.$$

Dalle formole (A), (B) e (3), tenendo conto delle (4), conseguono le identità:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \Big[& \frac{1}{a^2} \big\} f'''_{ni}(\tau_a) \big\{_{n-1} \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} - \big\} f'_{ni}(\tau_a) \big\{_{n+1} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}} + \\ & + \big\} \varphi'_{ni}(\tau_b) \big\{_n \left(y \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial z} - z \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial y} \right) + \frac{n+1}{b^2} \big\} \psi'''_{ni}(\tau_b) \big\{_{n-1} \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} + \\ & + n \big\} \psi'_{ni}(\tau_b) \big\{_{n+1} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}} \Big] \Big|_{r=R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{\lambda_{ni}(t)}{R^n} \pi_{ni} \Big|_{r=R}. \end{aligned}$$

Scriveremo queste identità sotto la forma:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \Big[A_{ni} \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} + B_{ni} \left(y \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial z} - z \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial y} \right) + C_{ni}\, r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}} \Big]_{r=R} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{\lambda_{ni}(t)}{R^n} \pi_{ni} \Big|_{r=R} \end{aligned} \tag{5}$$

dove abbiamo fatto le posizioni:

$$A_{ni} = \frac{1}{a^2} \left\{ f'''_{ni}(\tau_a) \right\}_{n-1} + \frac{n+1}{b^2} \left\{ \psi'''_{ni}(\tau_b) \right\}_{n-1} \Big|_{r=R}$$
$$B_{ni} = \left\{ \varphi'_{ni}(\tau_b) \right\}_n \Big|_{r=R}$$
$$C_{ni} = - \left\{ f'_{ni}(\tau_a) \right\}_{n+1} + n \left\{ \psi'_{ni}(\tau_b) \right\}_{n+1} \Big|_{r=R} .$$

Ed introducendo i polinomî U_n avremo pure:

$$(6) \quad \begin{cases} A_{ni} = \dfrac{1}{a^2 R^{2n-1}} U_{n-1}\left(\dfrac{R}{a} \dfrac{d}{dt}\right) f'''_{ni}(t) + \\ \qquad\qquad + \dfrac{n+1}{b^2} \dfrac{1}{R^{2n-1}} U_{n-1}\left(\dfrac{R}{b} \dfrac{d}{dt}\right) \psi'''_{ni}(t) \\ B_{ni} = \dfrac{1}{R^{2n+1}} U_n\left(\dfrac{R}{b} \dfrac{d}{dt}\right) \varphi'_{ni}(t) \\ C_{ni} = - \dfrac{1}{R^{2n+3}} U_{n+1}\left(\dfrac{R}{a} \dfrac{d}{dt}\right) f'_{ni}(t) + \dfrac{n}{R^{2n+3}} \left(\dfrac{R}{b} \dfrac{d}{dt}\right) \psi'_{ni}(t). \end{cases}$$

Le A_{ni}, B_{ni}, C_{ni} sono perciò funzioni dipendenti linearmente dalle funzioni f, φ, ψ e dalle loro derivate successive sino alla $(n+2)$-esima.

32. — I due membri della (5), considerati come funzioni delle sole x, y, z, sono funzioni regolari armoniche *in tutta la sfera*, e poichè prendono eguali valori sopra la superficie sferica $r = R$, coincideranno per ogni valore di x, y, z. Si ha identicamente cioè:

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \left\{ A_{ni} \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} + B_{ni} \left(y \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial z} - z \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial y} \right) + C_{ni} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}} \right\} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{\lambda_{ni}(t)}{R^n} \pi_{ni}$$

e due formole analoghe.

Da queste, moltiplicando la 1ª per x, la 2ª per y e la 3ª per z e poscia sommando, dopo facili semplificazioni si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} (n A_{ni} \pi_{ni} - (n+1) C_{ni} r^2 \pi_{ni}) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{\lambda_i(t)}{R^n} \frac{1}{2n+1} \left[r^2 \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} - r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}} \right] + \dots$$

Da questa si conclude che le due funzioni armoniche:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2n+1}\left(n A_{ni}\,\pi_{ni} - \overline{n+1}\; C_{ni} R^2 \pi_{ni}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{\lambda_i(t)}{R^n}\,\frac{1}{2n+1}\left[R^2\frac{\partial\pi_{ni}}{\partial x} - r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}}\right]+\dots$$

prendono eguali valori sopra la sfera $r=R$ e quindi coincidono in ogni punto della sfera. Poichè d'altra parte le

$$\frac{\partial\pi_{ni}}{\partial x},\qquad r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}},\ \dots$$

sono polinomî armonici, esse saranno combinazioni lineari delle π_{ni} (per opportuni valori dell'indice n). Si conclude dunque infine che le espressioni:

$$nA_{ni}-(n+1)\;R^2C_{ni}$$

sono funzioni note del tempo. Cioè potremo porre:

$$nA_{ni}-(n+1)\;R^2C_{ni}=\Phi_{ni}(t). \tag{8}$$

Se le (7) vengono d'altra parte derivate rispetto a x, y, z, e poscia sommate, si ha dopo qualche riduzione:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2n+1}(n+1)(2n+3)\,C_{ni}\,\pi_{ni}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2n+1}\left(\frac{\lambda_{ni}(t)}{R^n}\,\frac{\partial\pi_{ni}}{\partial x}+\dots\right).$$

Da questa con ragionamento simile a quello ora fatto si potranno ricavare le C_{ni} in funzione di t, e quindi le A_{ni} a mezzo delle (8).

Le B_{ni} si calcolano in funzione di t o sostituendo nelle (7) per le A_{ni}, C_{ni} i valori trovati, o meglio direttamente nel modo seguente. Si derivi la 1ª delle (7) rispetto ad y, la 2ª rispetto ad x e si sottraggano le equazioni ottenute. Con facili riduzioni si perviene alla relazione:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2n+1}(n+1)\,B_{ni}\frac{\partial\pi_{ni}}{\partial z}+(2n+3)\,C_{ni}\,r^{2n+1}\left(y\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}}-x\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}}\right)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2n+1}\left(\frac{\lambda_{ni}(t)}{R^n}\,\frac{\partial\pi_{ni}}{\partial y}-\frac{\mu_{ni}(t)}{R^n}\,\frac{\partial\pi_{ni}}{\partial x}\right).$$

Da questa e dalle due analoghe ricavate con permutazioni delle x, y, z, moltiplicate rispettivamente per x, y, z e sommate, si ricava:

$$(9) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} n(n+1) B_{ni} \pi_{ni} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{\lambda_{ni}(t)}{R^n} \left(z \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial y} - y \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial z} \right) + \ldots$$

Con metodo analogo ai precedenti sarà dunque possibile ricavare le B_{ni}.

In definitiva le condizioni in superficie dànno le A_{ni}, B_{ni}, C_{ni} in funzione di t:

$$(10) \qquad \begin{cases} A_{ni} = \Phi_{ni}(t) \\ B_{ni} = \Psi_{ni}(t) \\ C_{ni} = \mathrm{X}_{ni}(t) \end{cases}$$

La 1ª e 3ª delle (10) costituiscono un sistema differenziale lineare a coefficienti costanti nelle $f_{ni}(t)$ e $\psi_{ni}(t)$, il cui massimo ordine è $(n+2)$. Le condizioni al bordo (α) e (β):

$$f_{ni}(0) = f'_{ni}(0) = \ldots = f_{ni}^{(n+1)}(0) = \psi_{ni}(0) = \ldots = \psi_{ni}^{(n+1)}(0) = 0$$

assicurano l'unicità della soluzione del proposto problema. La 2ª delle (10) è invece un'equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti, di ordine $(n+1)$ nella $\varphi_{ni}(t)$. Le condizioni (β):

$$\varphi_{ni}(0) = \varphi'_{ni}(0) = \ldots = \varphi_{ni}^{(n)}(0) = 0$$

assicurano l'unicità della soluzione.

Si conclude infine: il problema esterno della Dinamica elastica nel caso della sfera, quando sono note le velocità da un istante $t = 0$ in poi, si risolve mediante le formole (A), (B). Le funzioni $f_{ni}(t)$, $\varphi_{ni}(t)$, $\psi_{ni}(t)$ sono poi determinate in modo unico dalle equazioni (10) e dalle condizioni ai bordi (α), (β).

XII. — Tensioni generate dallo spostamento (*A*).

33. — Per condurre il calcolo delle tensioni generate dagli spostamenti (*A*), (*B*) nel modo più semplice porremo:

$$u_n^{(1)} = \frac{1}{a^2} \} f_n''(\tau_a) \{_{n-1} \frac{\partial \pi_n}{\partial x} - \} f_n(\tau_a) \{_{n+1} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\pi_n}{r^{2n+1}} \right)$$

$$u_n^{(2)} = \} \varphi_n(\tau_b) \{_n \left(y \frac{\partial \pi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \pi_n}{\partial y} \right)$$

$$u_n^{(3)} = \frac{n+1}{b^2} \} \psi_n''(\tau_b) \{_{n-1} \frac{\partial \pi_n}{\partial x} + n \} \psi_n(\tau_b) \{_{n+1} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\pi_n}{r^{2n+1}} \right)$$

con formole analoghe per le v, w. La π_n è poi un polinomio armonico di ordine n. Le $(u_n^{(1)}, v_n^{(1)}, w_n^{(1)})$ sono le componenti di una vibrazione longitudinale, le $(u_n^{(2)}, \ldots)$ $(u_n^{(3)}, \ldots)$ quelle di una vibrazione trasversale di cui quella con indice 2 ha nulla la componente radiale di spostamento.

Le componenti delle tensioni corrispondenti (sulla sfera di raggio r) saranno rispettivamente indicate con

$$(X_r^{(n,1)}, Y_r^{(n,1)}, Z_r^{(n,1)}), \quad (X_r^{(n,2)}, Y_r^{(n,2)}, Z_r^{(n,2)}), \quad (X_r^{(n,3)}, Y_r^{(n,3)}, Z_r^{(n,3)}).$$

Poichè la $(u_n^{(1)}, v_n^{(1)}, w_n^{(1)})$ è longitudinale si ha:

$$(u_n^{(1)}, v_n^{(1)}, w_n^{(1)}) = \operatorname{grad} \varphi_n.$$

Per quanto precede si ha inoltre:

$$\varphi_n = (2n+1) \} f(\tau_a) \{_n \pi_n .$$

Sia $\theta_n^{(1)}$ la corrispondente dilatazione; avremo:

$$\theta_n^{(1)} = \Delta \varphi_n = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} = \frac{2n+1}{a^2} \} f''(\tau_a) \{_n \pi_n .$$

Poichè, d'altra parte, la rotazione è nulla, si ha (essendo ρ la densità):

$$\frac{1}{\rho} X_r^{(n,1)} = 2b^2 \frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial r} + (a^2 - 2b^2)\, \theta_n^{(1)} \frac{x}{r}$$

e formole analoghe.

Inoltre:

$$\frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial r} = \frac{r}{a^2} \{ f''_n(\tau_a) \}_n \frac{\partial \pi_n}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \{ f''_n(\tau_a) \}_{n-1} \frac{n-1}{r} \frac{\partial \pi_n}{\partial x} -$$

$$- r \{ f_n(\tau_a) \}_{n+2} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\pi_n}{r^{2n+1}} - \{ f_n(\tau_a) \}_{n+1} \frac{n+1}{r} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\pi_n}{r^{2n+1}} \right),$$

e quindi pure:

$$\frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial r} = \frac{1}{ra^2} [r^2 \{ f''_n(\tau_a) \}_n + (n-1) \{ f''_n(\tau_a) \}_{n-1}] \frac{\partial \pi_n}{\partial x} -$$

$$- \frac{1}{r} [r^2 \{ f_n(\tau_a) \}_{n+2} + (n+1) \{ f_n(\tau_a) \}_{n+1}] r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\pi_n}{r^{2n+1}} \right).$$

Poi si ha:

$$\theta_n^{(1)} \frac{x}{r} = \frac{2n+1}{ra^2} \{ f''_n(\tau_a) \}_n x\pi_n =$$

$$= \left[\frac{1}{ra^2} r^2 \frac{\partial \pi_n}{\partial x} - \frac{1}{ra^2} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\pi_n}{r^{2n+1}} \right) \right] \{ f''_n(\tau_a) \}_n.$$

Dunque infine potremo porre:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} X_r^{(n,1)} = \alpha_n \frac{\partial \pi_n}{\partial x} + \beta_n r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\pi_n}{r^{2n+1}} \right) \\ \text{e formole analoghe.} \end{array} \right.$$

dove si è posto (dopo qualche facile riduzione):

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n = \quad r \{ f''_n(\tau_a) \}_n + \frac{2b^2}{a^2} \frac{n-1}{r} \{ f''_n(\tau_a) \}_{n-1} \\ \beta_n = -\frac{1}{r} \{ f''_n(\tau_a) \}_n + 2b^2 \frac{n+2}{r} \{ f_n(\tau_a) \}_{n+1} \end{array} \right.$$

XIII. — Tensioni generate dallo spostamento (*B*).

34. — La dilatazione è in questo caso nulla. Avremo in conseguenza:

$$\frac{1}{\rho} X_r^{(n,2)} = 2b^2 \frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial r} + b^2 \left[\left(\frac{\partial v_n^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial y} \right) \frac{y}{r} + \left(\frac{\partial w_n^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial z} \right) \frac{z}{r} \right]$$

e due formole analoghe.

Si ha ora:

$$\frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial r} = r \} \varphi_n(\tau_b) \{_{n+1} \left(y \frac{\partial \pi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \pi_n}{\partial y} \right) + \frac{n}{r} \} \varphi_n(\tau_b) \{_n \left(y \frac{\partial \pi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \pi_n}{\partial y} \right).$$

Inoltre per quanto precede (Cap. X):

$$\frac{\partial v_n^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial y} = -\frac{n+1}{2n+1} \frac{1}{b^2} \} \varphi''_n(\tau_b) \{_{n-1} \frac{\partial \pi_n}{\partial z} - $$
$$- \frac{n}{2n+1} \} \varphi_n(\tau_b) \{_{n+1} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\pi_n}{r^{2n+1}} \right)$$

$$\frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial w_n^{(2)}}{\partial x} = -\frac{n+1}{2n+1} \frac{1}{b^2} \} \varphi''_n(\tau_b) \{_{n-1} \frac{\partial \pi_n}{\partial y} - $$
$$- \frac{n}{2n+1} \} \varphi_n(\tau_b) \{_{n+1} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\pi_n}{r^{2n+1}} \right).$$

Quindi:

$$\frac{y}{r} \left(\frac{\partial v_n^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial y} \right) + \frac{z}{r} \left(\frac{\partial w_n^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial z} \right) =$$
$$= -\frac{n+1}{2n+1} \frac{1}{b^2 r} \left(y \frac{\partial \pi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \pi_n}{\partial y} \right) \} \varphi''_n(\tau_b) \{_{n-1} - $$
$$- \frac{n}{2n+1} \} \varphi_n(\tau_b) \{_{n+1} r \left(y \frac{\partial \pi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \pi_n}{\partial y} \right).$$

Infine avremo:

(13) $$\frac{1}{\rho} X_r^{(n,2)} = \gamma_n \left(y \frac{\partial \pi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \pi_n}{\partial y} \right)$$ e formole analoghe,

dove si è posto:

(14) $$\gamma_n = b^2 r \} \varphi_n(\tau_b) \{_{n+1} + (n-1) b^2 \} \varphi_n(\tau_b) \{_n .$$

35. — Per la definizione stessa delle $u_n^{(3)}$, ... si può porre:

$$(u_n^{(3)}, v_n^{(3)}, w_n^{(3)}) = \text{rotor}\,(U, V, W)$$

dove, per quanto precede (Cap. X):

$$(U, V, W) = -(2n+1) \} \psi_n(\tau_b) \{_n \left(y \frac{\partial \pi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \pi_n}{\partial y}, \ldots, \ldots \right).$$

Perciò:

$$\frac{\partial v_n^{(3)}}{\partial x} - \frac{\partial u_n^{(3)}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) - \Delta W = -\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{2n+1}{b^2} \left\} \psi_n''(\tau_b) \right\{_n \left(x\frac{\partial \pi_n}{\partial y} - y\frac{\partial \pi_n}{\partial x}\right).$$

Analogamente:

$$\frac{\partial u_n^{(3)}}{\partial z} - \frac{\partial w_n^{(3)}}{\partial x} = \frac{2n+1}{b^2} \left\} \psi_n''(\tau_b) \right\{_n \left(z\frac{\partial \pi_n}{\partial x} - x\frac{\partial \pi_n}{\partial z}\right).$$

Quindi:

$$\frac{y}{r}\left(\frac{\partial v_n^{(3)}}{\partial x} - \frac{\partial u_n^{(3)}}{\partial y}\right) + \frac{z}{r}\left(\frac{\partial w_n^{(3)}}{\partial x} - \frac{\partial u_n^{(3)}}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{2n+1}{b^2 r} \left\} \psi_n''(\tau_b) \right\{_n \left[n x \pi_n - r^2 \frac{\partial \pi_n}{\partial x}\right] =$$

$$= \frac{2n+1}{b^2 r} \left\} \psi_n''(\tau_b) \right\{_n \left[\frac{n}{2n+1} r^2 \frac{\partial \pi_n}{\partial x} - \frac{n}{2n+1} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\pi_n}{r^{2n+1}} - r^2 \frac{\partial \pi_n}{\partial x}\right] =$$

$$= \frac{1}{b^2 r} \left\} \psi_n''(\tau_b) \right\{_n \left[-(n+1) r^2 \frac{\partial \pi_n}{\partial x} - n r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\pi_n}{r^{2n+1}}\right].$$

Inoltre si ha:

$$\frac{\partial u_n^{(3)}}{\partial r} = \frac{n+1}{b^2} r \left\} \psi_n''(\tau_b) \right\{_n \frac{\partial \pi_n}{\partial x} + \frac{(n+1)(n-1)}{b^2 r} \left\} \psi_n''(\tau_b) \right\{_{n-1} \frac{\partial \pi_n}{\partial x} +$$

$$+ n r \left\} \psi_n(\tau_b) \right\{_{n+2} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi_n}{r^{2n+1}}\right) +$$

$$+ \frac{n(n+1)}{r} \left\} \psi_n(\tau_b) \right\{_{n+1} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi_n}{r^{2n+1}}\right).$$

Quindi potremo porre:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} X_r^{(n,3)} = \delta_n \frac{\partial \pi_n}{\partial x} + \epsilon_n r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\pi_n}{r^{2n+1}} \\ \text{e formole analoghe,} \end{array} \right.$$

dove a riduzioni fatte si ha:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_n = \frac{n+1}{r}\left[r^2 \left\} \psi_n''(\tau_b) \right\{_n + (2n-2) \left\} \psi_n''(\tau_b) \right\{_{n-1}\right] \\ \epsilon_n = \frac{n b^2}{r}\left[- \left\} \psi_n(\tau_b) \right\{_{n+1} + r^2 \left\} \psi_n(\tau_b) \right\{_{n+2}\right] \end{array} \right.$$

35bis. — Dalle formole (11), (13), (15) e dalle posizioni (12), (14), (16) discende infine: Le tensioni dovute alla vibrazione longitudinale (A) attraverso la superficie sferica di raggio r sono date dalle formole:

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} X_r^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \left(\alpha_{ni} \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} + \beta_{ni}\, r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}} \right) \\ \text{e due formole analoghe,} \end{array} \right.$$

dove si è posto:

$$(18)\quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ni} = r \left\{ f''_{ni}(\tau_a) \right\}_n + \frac{2b^2}{a^2} \frac{n-1}{r} \left\{ f''_{ni}(\tau_a) \right\}_{n-1} \\ \beta_{ni} = -\frac{1}{r} \left\{ f''_{ni}(\tau_a) \right\}_n + 2b^2 \frac{n+2}{r} \left\{ f_{ni}(\tau_a) \right\}_{n+1}. \end{array} \right.$$

Ed introducendo i polinomî U_n si ha pure:

$$(19)\quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ni} = (-1)^n \left\{ \frac{1}{r^{2n}} U_n \left(\frac{r}{a} \frac{d}{dt} \right) f''_{ni}(\tau_a) - \right. \\ \qquad \left. - \frac{2b^2}{a^2} \frac{n-1}{r^{2n}} U_{n-1} \left(\frac{r}{a} \frac{d}{dt} \right) f''_{ni}(\tau_a) \right\} \\ \beta_{ni} = (-1)^n \left\{ -\frac{1}{r^{2n+2}} U_n \left(\frac{r}{a} \frac{d}{dt} \right) f''_{ni}(\tau_a) - \right. \\ \qquad \left. - 2b^2 \frac{n+2}{r^{2n+4}} U_{n+1} \left(\frac{r}{a} \frac{d}{dt} \right) f_{ni}(\tau_a) \right\} \end{array} \right.$$

Le tensioni dovute alla vibrazione trasversale (B) sono poi date dalle formole:

$$(20)\quad \frac{1}{\rho} X_r^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \left[\gamma_{ni} \left(y \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial z} - z \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial y} \right) + \delta_{ni} \frac{\partial \pi_{ni}}{\partial x} + \right. \\ \left. + \epsilon_{ni}\, r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\pi_{ni}}{r^{2n+1}} \right) \right]$$

dove si è posto:

$$(21)\quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{ni} = b^2 r \left\{ \varphi_{ni}(\tau_b) \right\}_{n+1} + b^2 \frac{n-1}{r} \left\{ \varphi_{ni}(\tau_b) \right\}_n \\ \delta_{ni} = \frac{n+1}{r} \left[r^2 \left\{ \psi''_{ni}(\tau_b) \right\}_n + (2n-2) \left\{ \psi''_{ni}(\tau_b) \right\}_{n-1} \right] \\ \epsilon_{ni} = \frac{nb^2}{r} \left[- \left\{ \psi_{ni}(\tau_b) \right\}_{n+1} + r^2 \left\{ \psi_{ni}(\tau_b) \right\}_{n+2} \right]. \end{array} \right.$$

Ed introducendo la notazione delle U_n:

$$(22)\quad \begin{cases} (-1)^n \gamma_{ni} = -\dfrac{b^2}{r^{2n+2}} U_{n+1}\left(\dfrac{r}{b}\dfrac{d}{dt}\right)\varphi_{ni}(\tau_b) + \\ \qquad + b^2 \dfrac{n-1}{r^{2n+2}} U_n\left(\dfrac{r}{b}\dfrac{d}{dt}\right)\varphi_{ni}(\tau_b) \\ (-1)^n \delta_{ni} = \dfrac{n+1}{r}\left[\dfrac{1}{r^{2n-1}} U_n\left(\dfrac{r}{b}\dfrac{d}{dt}\right)\psi''_{ni}(\tau_b) - \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{2n-2}{r^{2n-1}} U_{n-1}\left(\dfrac{r}{b}\dfrac{d}{dt}\right)\psi''_{ni}(\tau_b)\right] \\ (-1)^n \epsilon_{ni} = \dfrac{nb^2}{r}\left[\dfrac{1}{r^{2n+3}} U_{n+1}\left(\dfrac{r}{b}\dfrac{d}{dt}\right)\psi_{ni}(\tau_b) + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{1}{r^{2n+3}} U_{n+2}\left(\dfrac{r}{b}\dfrac{d}{dt}\right)\psi_{ni}(\tau_b)\right]. \end{cases}$$

XIV. — Problema esterno nel caso della sfera quando sono note le tensioni in superficie.

36. — Quando sono note le tensioni in superficie le formole (A) e (B) risolveranno il problema se le funzioni incognite che esse contengono, cioè le f_{ni}, φ_{ni}, ψ_{ni}, potranno essere determinate in modo da verificare le equazioni:

$$(23)\quad \begin{cases} (X_r^{(1)} + X_r^{(2)})|_{r=R} + L = 0 \\ (Y_r^{(1)} + Y_r^{(2)}|_{r=R} + M = 0 \\ (Z_r^{(1)} + Z_r^{(2)}|_{r=R} + N = 0 \end{cases}$$

dove L, M, N sono funzioni dei punti della sfera e di t (definite e continue per ogni $t > 0$), e le $X_r^{(1)}, \ldots, Z_r^{(2)}$ sono date dalle equazioni (17) e (20) del N. precedente. Le funzioni incognite dovranno inoltre verificare le condizioni (α) e (β) ai bordi dell'onda. Con un ragionamento perfettamente analogo a quello fatto al Cap. XI, osservando che le (23), scritte esplicitamente, sono della forma delle (5), si conclude che il dare le tensioni superficiali equivale a supporre note certe espressioni differenziali nelle f_{ni}, φ_{ni}, ψ_{ni}. Più precisamente, posto:

$$
(24)\quad \begin{cases}
\mathfrak{A}_{ni} = (-1)^n (\alpha_{ni} + \delta_{ni})|_{r=R} = \dfrac{1}{R^{2n}} U_n\left(\dfrac{R}{a}\dfrac{d}{dt}\right) f''_{ni}(t) - \\
\quad - \dfrac{2b^2}{a^2}\dfrac{n-1}{R^{2n}} U_{n-1}\left(\dfrac{R}{a}\dfrac{d}{dt}\right) f''_{ni}(t) + \\
\quad + \dfrac{n+1}{R^{2n}} U_n\left(\dfrac{R}{b}\dfrac{d}{dt}\right)\psi''_{ni}(t) - 2\dfrac{n^2-1}{R^{2n}} U_{n-1}\left(\dfrac{R}{b}\dfrac{d}{dt}\right)\psi''_{ni}(t) \\
\mathfrak{B}_{ni} = (-1)^n (\beta_{ni} + \epsilon_{ni})|_{r=R} = -\dfrac{1}{R^{2n+2}} U_n\left(\dfrac{R}{a}\dfrac{d}{dt}\right) f''_{ni}(t) - \\
\quad - 2b^2 \dfrac{n+2}{R^{2n+4}} U_{n+1}\left(\dfrac{R}{a}\dfrac{d}{dt}\right) f_{ni}(t) + \\
\quad + \dfrac{nb^2}{R^{2n+4}} U_{n+1}\left(\dfrac{R}{b}\dfrac{d}{dt}\right)\psi_{ni}(t) + \dfrac{nb^2}{R^{2n+4}} U_{n+2}\left(\dfrac{R}{b}\dfrac{d}{dt}\right)\psi_{ni}(t) \\
\mathfrak{C}_{ni} = (-1)^n \gamma_{ni}|_{r=R} = -\dfrac{b^2}{R^{2n+2}}\left[U_{n+1}\left(\dfrac{R}{b}\dfrac{d}{dt}\right)\varphi_{ni}(t) - \right. \\
\quad \left. -(n-1)\, U_n\left(\dfrac{R}{b}\dfrac{d}{dt}\right)\varphi_{ni}(t)\right]
\end{cases}
$$

si hanno da risolvere equazioni del tipo:

$$
(25)\quad \begin{cases}
\mathfrak{A}_{ni} = \text{funzione nota di } t \\
\mathfrak{B}_{ni} = \quad " \\
\mathfrak{C}_{ni} = \quad "
\end{cases}
$$

Le prime due delle (25) formano un sistema differenziale lineare nelle f e ψ a coefficienti costanti, la 3ª è una equazione differenziale lineare nella φ. L'ordine massimo di derivazione nel primo sistema è $n+2$, mentre $n+1$ è l'ordine dell'equazione differenziale nella φ. L'unicità di soluzione di queste equazioni è assicurata dalle condizioni ai bordi, le quali dànno i valori iniziali delle f e ψ e delle loro derivate sino all'ordine $n+1$, e i valori iniziali della φ e delle sue derivate sino all'ordine n.

XV. — **Sopra i moti quasi-liberi.**

37. — Il problema esterno della sfera è così ridotto alla integrazione del sistema differenziale (10), se sono note in superficie le velocità, e a quella del sistema (25) se invece sono note le tensioni. Questa integrazione, come è notissimo, si ri-

conduce a quella degli stessi sistemi privati dei loro 2^i membri; i quali nuovi sistemi evidentemente saranno caratteristici di moti che dànno velocità o tensioni nulle sulla superficie sferica. La propagazione effettiva di questi moti all'esterno della sfera non è però possibile, poichè le soluzioni dei sistemi differenziali (10) e (25) privati dei loro secondi membri, soddisfacenti alle condizioni ai bordi, cioè rispettivamente alle condizioni (α) e (β), sono identicamente nulle. Indicherò nel seguito questi moti col nome di *quasi-liberi* per porre in evidenza la proprietà che essi hanno in comune con le vibrazioni libere di un corpo elastico di dimensioni finite, di dare velocità o tensioni nulle in superficie. Le loro proprietà sono studiate nei numeri seguenti.

38. — Cominciamo con l'occuparci di quelli tra tali moti che dànno velocità nulle sulla sfera $r = R$. Essi sono definiti dalle equazioni seguenti (che altro non sono che le (10) sviluppate e prive dei secondi membri):

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{a^2} U_{n-1}\left(\frac{R}{a}\frac{d}{dt}\right) f_n'''(t) + \frac{n+1}{b^2} U_{n-1}\left(\frac{R}{b}\frac{d}{dt}\right) \psi_n'''(t) = 0 \\ &- U_{n+1}\left(\frac{R}{a}\frac{d}{dt}\right) f_n'(t) + \quad n \quad U_{n+1}\left(\frac{R}{b}\frac{d}{dt}\right) \psi_n'(t) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(27)\qquad U_n\left(\frac{R}{b}\frac{d}{dt}\right) \varphi_n'(t) = 0 .$$

Si ponga nelle (26) e 27):

$$f_n(t) = e^{kt} \qquad \psi_n(t) = \mu e^{kt} \qquad \varphi_n(t) = e^{ht}$$

otterremo le equazioni algebriche:

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{a^2} U_{n-1}\left(\frac{Rk}{a}\right) + \mu \frac{n+1}{b^2} U_{n-1}\left(\frac{Rk}{b}\right) = 0 \\ &- U_{n+1}\left(\frac{Rk}{a}\right) + \mu n \, U_{n+1}\left(\frac{Rk}{a}\right) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(29)\qquad U_n\left(\frac{Rh}{b}\right) = 0 .$$

Ed eliminando μ tra le (28) si ha:

$$(30)\quad \frac{1}{a^2} U_{n-1}\left(\frac{Rk}{a}\right) U_{n+1}\left(\frac{Rk}{b}\right) + \frac{n+1}{b^2} U_{n-1}\left(\frac{Rk}{b}\right) U_{n+1}\left(\frac{Rk}{a}\right) = 0 .$$

I moti quasi-liberi vengono determinati dalle radici delle equazioni (29) e (30). Se h_i, ad es., è una radice di (29) avremo in corrispondenza la vibrazione di componenti:

$$u = \frac{1}{r^{2n+1}} U_n \left(\frac{rh_i}{b}\right) e^{h_i\left(t - \frac{r-R}{b}\right)} \left(y \frac{\partial \pi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \pi_n}{\partial y}\right)$$

e due formole analoghe. Questa vibrazione è puramente trasversale ed ha componente radiale nulla.

Sia k_i una radice di (30); si ha allora (¹):

$$\mu_i = -\frac{b^2}{a^2} \frac{1}{n+1} \frac{U_{n-1}\left(\frac{Rk_i}{a}\right)}{U_{n-1}\left(\frac{Rk_i}{b}\right)}.$$

Le formole (A), (B) daranno le componenti della vibrazione quasi-libera ricercata, ponendo in esse:

$$f_{ni} = p_{ni}\, a^2 (n+1)\, U_{n-1}\left(\frac{Rk_i}{b}\right) e^{k_i t}$$

$$\psi_{ni} = -p_{ni}\, b^2\, U_{n-1}\left(\frac{Rk_i}{a}\right) e^{k_i t}$$

$$\varphi_{ni} = 0$$

dove le p_{ni} sono costanti.

La vibrazione così ottenuta è dunque decomponibile in una parte trasversale ed una longitudinale, le quali separatamente non sono quasi-libere.

Le vibrazioni quasi-libere vengono per tal modo separate in due classi, caratterizzate rispettivamente dalle equazioni (29) e (30). Analoga proprietà sussiste per le vibrazioni libere di una sfera, come fu già dimostrato dal Lamb (Memoria citata).

(¹) Non può essere $U_{n-1}\left(\frac{Rk_i}{b}\right) = 0$ poichè per la 1ª delle (28) si avrebbe di conseguenza $U_{n-1}\left(\frac{Rk_i}{a}\right) = 0$ e quindi, se k_i fosse reale, l'equazione $U_{n-1}(\xi) = 0$ avrebbe due radici reali, e se invece k_i fosse imaginario la stessa equazione avrebbe due radici imaginarie il cui rapporto è reale, il che contradice a proprietà già dimostrate relative alle radici dei polinomi U_n (Cfr. Cap. IV).

39. — La discussione delle vibrazioni della 1ª classe, caratterizzate dall'equazione (29), rientra in quanto già abbiamo detto nella 1ª parte di questa Nota. Questi moti sono dunque o aperiodici, o armonici non semplici sempre però con carattere smorzato.

Discutiamo le vibrazioni della 2ª classe. Dimostriamo quindi subito che l'equazione (30) *non ammette radici reali.* I suoi coefficienti sono invero positivi, quindi se essa ammette radici reali esse saranno negative; inoltre, essendo la (30) di grado pari, le sue radici reali si presentano a coppie.

Sieno ξ_1, ξ_2 due tali radici reali. Sia k una quantità negativa; posto allora:

$$R_1 = \frac{\xi_1}{k}, \qquad R_2 = \frac{\xi_2}{k},$$

R_1, R_2 si possono assumere come raggi di due sfere concentriche sulle quali è nullo lo spostamento. La vibrazione che nasce in corrispondenza, dipendente dal tempo a mezzo dell'esponenziale e^{kt}, sarà *libera* per lo spazio compreso tra queste sfere e quindi, contrariamente all'ipotesi di k reale, sarà di tipo armonico semplice. Da ciò l'impossibilità per la (30) di ammettere radici reali.

Lo stesso ragionamento conduce a conchiudere che la (30) non può ammettere due *radici imaginarie il cui rapporto sia reale.*

40. — I moti quasi-liberi caratterizzati dal generare tensioni nulle in superficie si ottengono dalle (24). Ponendo in esse:

$$f_{ni} = e^{ht} \qquad \psi_{ni} = \mu e^{ht} \qquad \varphi_{ni} = e^{kt}$$

avremo per la determinazione delle costanti h, k le equazioni:

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} & U_n\left(\frac{Rk}{a}\right) - \frac{2b^2}{a^2}(n-1)\,U_{n-1}\left(\frac{Rk}{a}\right) + \\ & \qquad + \mu(n+1)\left\{ U_n\left(\frac{Rk}{b}\right) - 2(n-1)\,U_{n-1}\left(\frac{Rk}{b}\right)\right\} = 0 \\ & -\frac{k^2}{R^2}\,U_n\left(\frac{Rk}{a}\right) - 2b^2(n+2)\,U_{n+1}\left(\frac{Rk}{a}\right) + \\ & \qquad + \mu n b^2 \left\{ U_{n+1}\left(\frac{Rk}{b}\right) + (n+2)\,U_{n+2}\left(\frac{Rk}{b}\right)\right\} = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(32) \qquad U_{n+1}\left(\frac{Rk}{b}\right) - (n-1)\,U_n\left(\frac{Rk}{b}\right) = 0\,.$$

Queste vibrazioni, come già le precedenti, si ripartiscono in due classi, quella definita dalla (32) che è costituita da vibrazioni puramente longitudinali (queste rientrano tra quelle già studiate nella 1ª parte), e quella definita dalle (31) costituita da vibrazioni decomponibili in una parte longitudinale ed una trasversale. I periodi di queste ultime soddisfanno all'equazione ottenuta eliminando μ tra le due equazioni (31):

$$\left\{ U_n\left(\frac{Rk}{a}\right) - 2\frac{b^2}{a^2}(n-1)\,U_{n-1}\left(\frac{Rk}{a}\right)\right\}\left\{U_{n+1}\left(\frac{Rk}{b}\right) + U_{n+2}\left(\frac{Rk}{b}\right)\right\} +$$
$$+ nb^2\left\{(n+1)\,U_n\left(\frac{Rk}{b}\right) - 2(n^2-1)\,U_{n-1}\left(\frac{Rk}{b}\right)\right\}\left\{\frac{R^2k^2}{a^2}U_n\left(\frac{Rk}{a}\right) +\right.$$
$$\left. + 2(n+2)\,b^2\,U_n\left(\frac{Rk}{a}\right)\right\} = 0\,.$$

Questa equazione è a coefficienti positivi. Si ha infatti per k reale (Cfr. Parte I):

$$U_n - (2n-1)\,U_{n-1} > 0\,.$$

Quindi, poichè $b < a$:

$$U_n\left(\frac{Rk}{a}\right) - 2\frac{b^2}{a^2}(n-1)\,U_{n-1}\left(\frac{Rk}{a}\right) > 0$$
$$U_n\left(\frac{Rk}{b}\right) - 2(n-1)\,U_{n-1}\left(\frac{Rk}{b}\right) > 0\,.$$

Valgono perciò per queste vibrazioni le proprietà stesse già dimostrate al n° 40 per i moti quasi-liberi che dànno velocità nulla in superficie.

Sulla trasformazione dei nitrati delle arilidrazine $ArNH.NH_2.HNO_3$ in nitrati di arildiazonio $Ar-\underset{NO_3}{\overset{|}{N}}\equiv N$ per azione dell'acido nitrico.

Nota di G. CHARRIER.

Studiando l'azione dell'acido nitrico in soluzione eterea sull'antrachinonfenilidrazone [1] ebbi occasione di constatare che il nitrato di fenilidrazina, che si otteneva da questo composto in una primaria idrolisi (assieme ad antrachinone) veniva a seconda delle condizioni a trasformarsi, in quantità più o meno rilevanti, in nitrato di fenildiazonio. Dimostrai che questa reazione può avvenire trattando nelle stesse condizioni quantità proporzionali ai pesi molecolari di fenilidrazina e di antrachinone collo stesso volume di soluzione eterea di acido nitrico, poichè ottenni sempre in tutte le prove quantità più o meno grandi di nitrato di fenildiazonio, mentre credetti di poter escludere da alcune prove preliminari eseguite che la trasformazione potesse avvenire senza la presenza del chinone. Più tardi ripetendo le prove sull'azione dell'acido nitrico in soluzione eterea sui nitrati di alcune arilidrazine, potei convincermi che anche in questo caso (escludendo cioè il chinone) si formano piccole quantità di nitrati di arildiazonio, ma che la reazione in assenza di antrachinone avviene in modo affatto diverso.

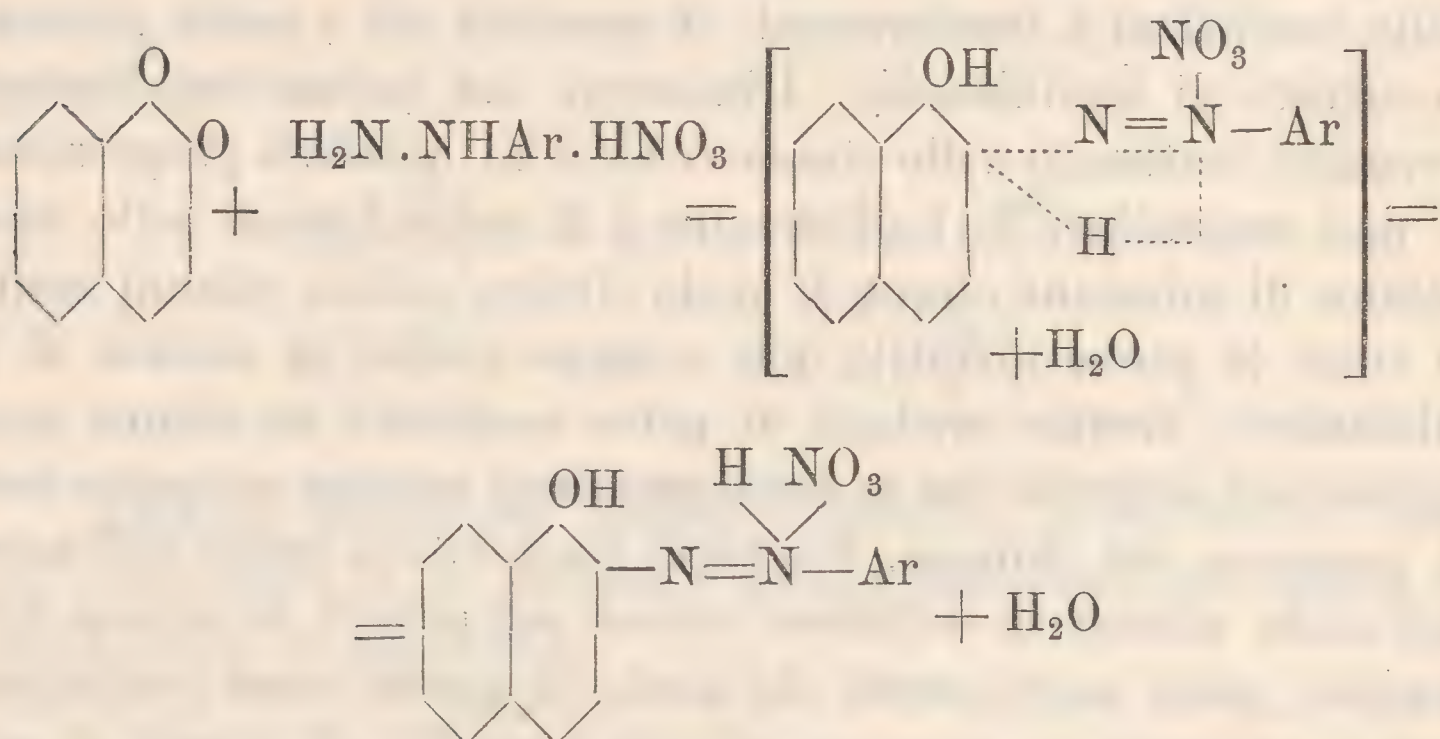
Volli perciò studiare l'influenza che la presenza dell'antrachinone esercitava sulla reazione dell'acido nitrico coi nitrati delle arilidrazine in generale, e decidere se si trattava sempli-

[1] " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", Vol. *50*, Disp. 9ª.

cemente di una accelerazione della reazione, cioè di un'azione catalitica, riottenendosi in gran parte l'antrachinone inalterato.

Cercai inoltre di stabilire l'attività di altri chinoni in questa reazione e sperimentai ancora, con quantità equimolecolari, l'azione del p. benzochinone, del timochinone, del 1-2-naftochinone, del fenantrenchinone e dell'acenaftenchinone sul nitrato di fenilidrazina e sui nitrati di o-, m-, e p-tolilidrazina, di as-m-xililidrazina, di s-pseudocumilidrazina e di p-anisil- e p-fenetilidrazina.

Tali ricerche, secondo me, presentavano una speciale importanza, poichè si trattava di stabilire se in questa reazione (in cui agiva il chinone) la formazione del nitrato di arildiazonio era collegata al fenomeno della diazoscissione, cioè se si poteva ammettere prima per azione del chinone sull'arilidrazina un'ossidazione di questa in nitrato di diazonio, accompagnata da una contemporanea riduzione del chinone a fenol e quindi, secondo lo schema già altrove proposto [1], la formazione del nitrato dell'ossiazocomposto

$$\text{(O, O)} + H_2N.NHAr.HNO_3 = \left[\text{(OH)} \cdots \overset{NO_3}{N=N-Ar} \cdots H + H_2O \right] = \text{(OH)}-N=\overset{H\ NO_3}{N}-Ar + H_2O$$

il quale poi subendo la diazoscissione avrebbe potuto facilmente dar luogo al nitrato di arildiazonio.

Dei chinoni scelti per le esperienze, il p-benzochinone, mentre ossida la fenilidrazina con sviluppo di azoto e le alchilfenilidrazine asimmetriche in tetrazoni, reagisce coll'o-nitro- e colla o-p-

---

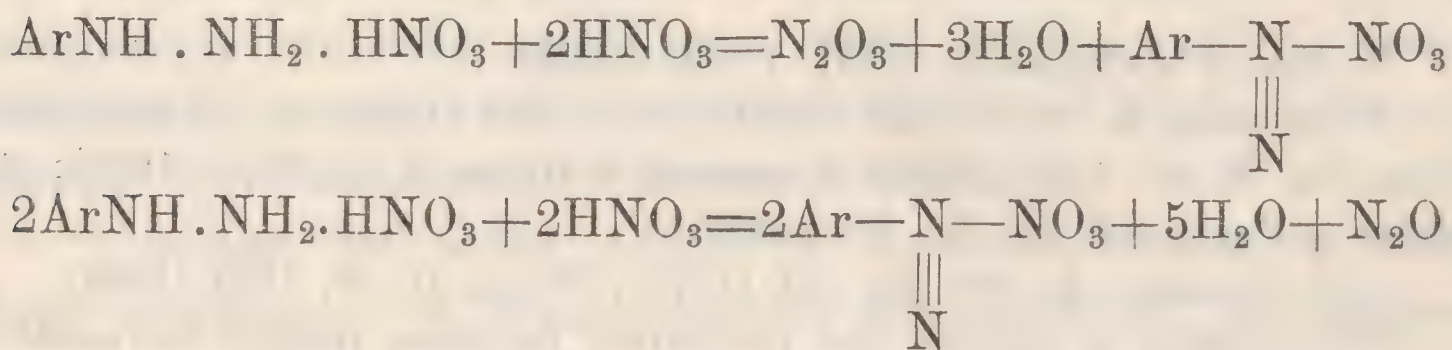
[1] G. *44*. II, 516 (1914).

dinitro-fenilidrazina con formazione di p-ossiazocomposti, il timochinone (o meglio un suo polimero, il politimochinone) dà colle arilidrazine arilidrazoni, il β-naftochinone, e il fenantrenchinone formano o-ossiazo-composti; per quanto riguarda l'antrachinone e l'acenaftenchinone, il primo non reagisce colla fenilidrazina, ma di esso sono noti preparati per via indiretta, alcuni arilidrazoni e il secondo forma colle arilidrazine arilidrazoni, come è noto dai lavori di Auwers ([1]) e come risulta confermato da nuove ricerche in corso in questo laboratorio.

La trasformazione dei nitrati delle arilidrazine in nitrati di arildiazonio per azione della soluzione eterea di acido nitrico avviene indubbiamente in modo affatto diverso se si opera in presenza o in assenza di chinoni. Nel primo caso talora agisce il chinone trasformando in buona parte il nitrato della idrazina in nitrato di diazonio, talora pare che impedisca l'azione dell'acido nitrico che si manifesta senza il chinone (catalisi negativa), ma sempre si svolgono solamente traccie riconoscibili soltanto coi reattivi di vapori nitrosi, nel secondo caso, cioè escludendo i chinoni, la reazione energica è accompagnata da vivo sviluppo di vapori rossi e di gas (azoto e protossido di azoto) e si può spiegare molto facilmente come una semplice ossidazione esercitata dall'acido nitrico e dai vapori nitrosi sul nitrato dell'arilidrazina.

Il fatto che l'acido nitrico o i suoi prodotti di decomposizione (anidride nitrosa, ipoazotide) possano ossidare i nitrati delle arilidrazine in nitrati di arildiazonio non presenta nulla di strano, quando si pensi che l'ossido di mercurio e gli alogeni producono in condizioni determinate la trasformazione delle arilidrazine in sali di diazonio ([2]); tale ossidazione potrebbe avvenire tra l'altro secondo gli schemi

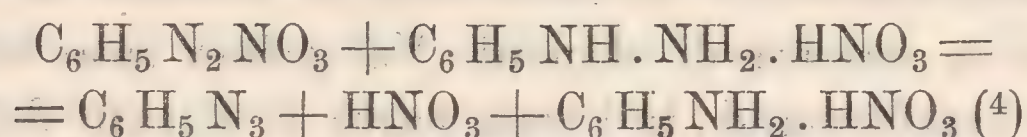
$$\mathrm{ArNH\,.\,NH_2\,.\,HNO_3 + 2HNO_3 = N_2O_3 + 3H_2O + Ar{-}\underset{\underset{\textstyle N}{|||}}{N}{-}NO_3}$$

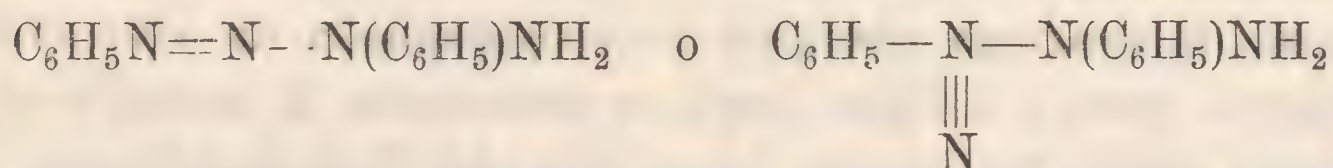
$$\mathrm{2ArNH.NH_2.HNO_3 + 2HNO_3 = 2Ar{-}\underset{\underset{\textstyle N}{|||}}{N}{-}NO_3 + 5H_2O + N_2O}$$

([1]) A. *378*, 244 (1911).

([2]) E. Fischer, A. *199*, 320 (1879); " Journ. Chem. Soc. „ *93*, 852 (1908).

e l'anidride nitrosa potrebbe poi ancora ulteriormente ossidare il nitrato di arilidrazina presente, poichè è noto che l'acido nitroso e i nitriti alchilici (nitrito di etile, nitrito di isoamile) reagiscono facilmente con alcuni derivati delle arilidrazine, sulle acilarilidrazine simmetriche [1] e sugli arilidrazoni delle aldeidi, in quest'ultimo caso con formazione, come osservò Bamberger, di piccole quantità di nitrato di diazoni [2].

Si doveva inoltre tener presente la capacità di reazione delle arilidrazine coi sali di diazonio, poichè in soluzione acida questi corpi possono formare, per es., il nitrato di fenildiazonio e il nitrato di fenilidrazina, anilina (nitrato) e diazobenzolimide [3]

$$C_6H_5N_2NO_3 + C_6H_5NH.NH_2.HNO_3 =$$
$$= C_6H_5N_3 + HNO_3 + C_6H_5NH_2.HNO_3 \text{ } (^4)$$

o d'altra parte possono reagire producendo i cosidetti derivati buzilenici [5].

$$C_6H_5N{=}N{-}N(C_6H_5)NH_2 \quad \text{o} \quad C_6H_5{-}\underset{\underset{\displaystyle N}{|||}}{N}{-}N(C_6H_5)NH_2$$

In presenza dei chinoni l'azione dell'acido nitrico sui nitrati delle arilidrazine avviene, come ho già detto, pressochè senza sviluppo gassoso: per alcuni chinoni, come il β-naftochinone e il timochinone, è pressapoco quantitativa, e si dimostra che deve essere prodotta dalla primaria formazione del nitrato dell'ossiazocomposto corrispondente, il quale per diazoscissione fornisce il nitrato del diazonio, poichè accanto a questo si riscontra

---

(1) Ponzio e Charrier, G. *39*, I, 596 (1909).

(2) Minunni, G. *22*, II, 228 (1892); *26*, I, 448 (1896); *27*, II, 291 (1897); Pechmann, B. *26*, 1046 (1893); Bamberger e Grob, B. *34*, 2017 (1901); Bamberger e Pensel, B. *36*, 62, 347 (1903).

(3) E. Fischer, A. *190*, 94, 161 (1877); Wohl, B. *26*, 1587 (1893).

(4) Il nitrato di anilina così prodottosi potrebbe reagire coll'acido nitroso ricostituendo il nitrato di fenildiazonio.

(5) E. Fischer, A. *199*, 306 (1879); Wohl, B. *26*, 1587 (1893); Bamberger, B. *28*, 840 (1895).

il prodotto normale della diazoscissione, cioè il nitrofenol corrispondente.

Per l'antrachinone, la cui azione sulla reazione è relativamente piccola, non si potè riscontrare il nitroantranol, nè ciò può colpire, quando si pensi che gli arilidrazoni dell'antrachinone si scindono sotto l'azione dell'acido nitrico in antrachinone e arilidrazine, le quali possono in queste condizioni venir facilmente trasformate in piccola quantità, specialmente a temperatura poco superiore all'ordinaria, in nitrati di arildiazonio. Il p-benzochinone, il fenantrenchinone e l'acenaftenchinone esercitano un'attività negativa sull'azione dell'acido nitrico sulle arilidrazine, cioè ne impediscono la trasformazione in nitrati di arildiazonio, che avverrebbe per ossidazione diretta senza la loro presenza.

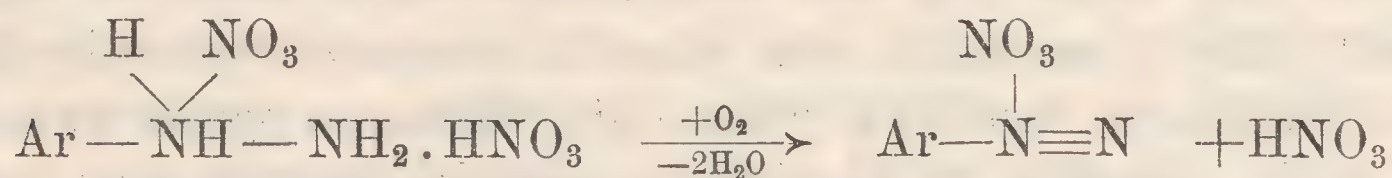
Salvo questo caso di azione catalitica negativa, non credo che si possa parlare di vera azione catalitica nel caso dell'antrachinone, poichè benchè questo si trovi inalterato alla fine della reazione, e la sua attività sia probabilmente da ascriversi alla formazione dell'antrachinon-arilidrazone, che subendo in presenza dell'acido nitrico l'idrolisi dà luogo all'arilidrazina che all'atto della formazione è più facilmente trasformata in nitrato di arildiazonio dall'acido nitrico (ciò del resto avviene in piccola quantità, per cui forse i prodotti di riduzione dell'acido nitrico non sono gran che constatabili sotto forma di vapori rossi), pure è necessaria una quantità pressochè equimolecolare di antrachinone rispetto al nitrato di arilidrazina perchè avvenga in modo sensibile la reazione e piccole quantità sono senza azione, perchè non impediscono che l'azione dell'acido nitrico si manifesti in modo violento, come avviene quando si esclude la presenza dei chinoni.

Si potrebbe pure pensare nel caso dell'antrachinone a una ossidazione prodotta sul nitrato della arilidrazina dal chinone stesso, che verrebbe ridotto ad idrochinone, il quale a sua volta sarebbe poi facilmente riossidato a chinone.

L'azione dell'acido nitrico in soluzione eterea sui nitrati delle arilidrazine e β-naftochinone etimochinone, con primaria formazione dei nitrati dei 2-arilazo-1 naftoli e dei 6-arilazotimoli, come ne fa fede il contemporaneo prodursi nella reazione del 2-nitro-1naftol e del 6-nitrotimol, mentre è una nuova conferma

della teoria sul meccanismo della copulazione che ammette la formazione intermedia del sale dell'ossiazocomposto, teoria fondata sul fenomeno della diazoscissione, e ampiamente altrove già discussa ([1]), ci può permettere di considerare come possibile la formazione di ossiazocomposti dai chinoni e arilidrazine, non già come si ammetteva per trasposizione intramolecolare del chinonidrazone formatosi in un primo tempo, ma per ossidazione del sale della arilidrazina in sale di diazonio prodotta dal chinone, che vien così ridotto a fenol, e copulazione del sale di diazonio col fenol con produzione intermedia del sale dell'ossiazocomposto, secondo lo schema altrove proposto ([2]) e già citato in questa nota.

Tentai di ottenere dalle arilidrazine che in alcuni casi possono funzionare da basi biacide (fluoridrato di fenilidrazina $C_6H_5NH . NH_2 . 2HF$) nitrati con due molecole di acido nitrico, ma non potei isolare tali composti quantunque se ne possa ammettere l'esistenza in soluzione in presenza di eccesso di acido nitrico: sia che il nitrato dell'arilidrazina possa assumere la struttura $Ar\overset{H\quad NO_3}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}H-NH_2$ o si consideri il binitrato $Ar\overset{H\quad NO_3}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}H-\overset{NO_3}{\overset{\diagup}{N}}H_3$ la trasformazione di questi nitrati di arilidrazonio in nitrati di arildiazonio può venir rappresentata generalmente così:

$$Ar-\overset{H\quad NO_3}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}H-NH_2 . HNO_3 \xrightarrow[-2H_2O]{+O_2} Ar-\overset{NO_3}{\overset{|}{N}}\equiv N \quad + HNO_3$$

Durante queste ricerche ebbi occasione di preparare parecchi nitrati di arilidrazine non ancora noti e potei convincermi che, contrariamente a quanto risulta dalla letteratura, sono in generale sostanze molto stabili che si possono in piccola quantità fondere inalterate e ricristallizzano per raffreddamento: la loro decomposizione per azione del calore avviene lentamente con sviluppo gassoso nel maggior numero dei casi

---

([1]) G. *43*, II, 148 (1913); *44*, II, 503 (1914).
([2]) G. *44*, II, 516 (1914).

a temperatura superiore di parecchi gradi al loro punto di fusione. I nitrati delle arilidrazine riscaldati lentamente si contraggono di volume talora molti gradi prima della loro fusione in un liquido incoloro. Sono solubilissimi nell'acqua e nell'alcool a 95° e cristallizzano bene dall'alcool assoluto. Contengono tutti per una molecola di base una molecola di acido nitrico.

Azione dell'acido nitrico 1,48 in soluzione eterea-cloroformica sui nitrati delle arilidrazine.

Gr. 2,16 di fenilidrazina ($^2/_{100}$ di grammomolecola) vennero sciolti in 120 cc. di cloroformio secco e con buon raffreddamento si aggiunse a poco a poco una soluzione eterea di acido nitrico (D = 1,48), preparata aggiungendo a 40 cc. di etere secco 20 cc. di acido nitrico. Collegato il pallone a un refrigerante ascendente si scaldò su bagnomaria. Il nitrato di fenilidrazina dapprima separatosi passò quasi completamente in soluzione, e appena il liquido incominciò a bollire si svilupparono abbondantemente vapori rossi. Cessato il riscaldamento, la reazione continuò: dopo raffreddamento si diluì fortemente con etere e si agitò la soluzione eterea con acqua.

La soluzione acquosa, neutralizzata, trattata con soluzione alcalina di β-naftol, diede un precipitato rosso, che venne agevolmente caratterizzato per fenilazo-βnaftol.

Altre prove eseguite, sempre colla stessa concentrazione di sostanza, riscaldando più o meno a lungo diedero quantità variabili, ma sempre notevoli di nitrato di fenildiazonio, che venne caratterizzato trasformandolo in fenilazo-β-naftol.

Così pure operando nelle medesime condizioni con quantità equivalenti delle tre tolilidrazine, della as-m-xililidrazina, della s-pseudocumilidrazina, e della p-anisil- e p-fenetilidrazina si ottennero i nitrati dei rispettivi diazonii, che diedero con soluzione alcalina di β-naftol i corrispondenti ossiazocomposti.

La reazione in tutti questi casi venne sempre accompagnata da sviluppo abbondante di vapori nitrosi e decorse in modo energico.

Azione dell'acido nitrico 1,48 in soluzione eterea-cloroformica sui nitrati delle arilidrazine in presenza di chinoni.

Fenilidrazina e p-benzochinone. — A 6,48 gr. di p-benzochinone ($^6/_{100}$ di grammomolecola) sciolti in 240 cc. di cloroformio secco si aggiunge la quantità equimolecolare di fenilidrazina (gr. 6,48) trasformata in nitrato sospeso in 120 cc. di soluzione eterea di acido nitrico (80 cc. etere + 40 cc. di KNO_3, 1,48) (1) e si scalda a bagnomaria per circa mezz'ora: il nitrato della fenilidrazina si scioglie, il liquido etereo-cloroformico si colora in rosso, non si sviluppano vapori rossi, ma azoto proveniente dalla ossidazione prodotta dal chinone sulla idrazina. Dopo raffreddamento e diluizione con etere, operando nel modo precedentemente descritto non si riesce a mettere in evidenza neppure traccia di nitrato di fenildiazonio.

Poichè la soluzione impiegata era relativamente più concentrata del solito, si provò a operare in soluzione più diluita, ma neppure in tal caso si ottenne del nitrato di fenildiazonio.

Analoghi risultati si ebbero coi nitrati di p-tolilidrazina e di as-m-xililidrazina. La presenza del benzochinone non permette la trasformazione dei nitrati delle arilidrazine in nitrati di arildiazonio coll'acido nitrico, o almeno decompone istantaneamente il nitrato di arildiazonio formatosi.

Fenilidrazina e timochinone. — A gr. 4,92 di timochinone sciolti in 120 cc. di cloroformio secco si aggiunsero gr. 3,24 di fenilidrazina trasformata in nitrato con una soluzione eterea di acido nitrico (40 cc. di etere + 20 cc. HNO_3 1,48) e si scaldò a bagnomaria: il nitrato dell'idrazina si sciolse prontamente, il liquido si colorò intensamente in rosso; dopo pochi minuti scomparve quasi completamente la colorazione rossa, mentre cominciò

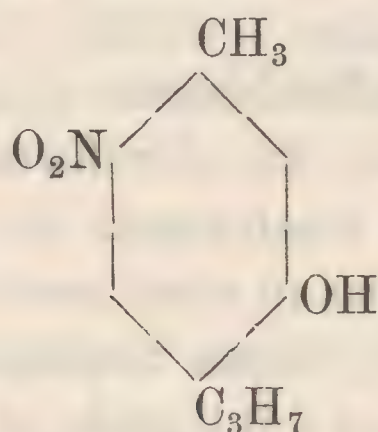
---

(1) Quando il chinone reagiva in soluzione neutra colla idrazina aggiunsi sempre il nitrato di essa sospeso nella soluzione eterea di acido nitrico necessaria per la reazione.

a cristallizzare una sostanza bianca, la cui separazione aumentò notevolmente diluendo con etere e raffreddando accuratamente in ghiaccio.

I cristalli raccolti e lavati abbondantemente con etere anidro si dimostrarono costituiti da nitrato di fenildiazonio, poichè si sciolsero in acqua e con soluzione alcalina di β-naftol diedero un abbondante precipitato di fenilazo-β-naftol.

La soluzione eterea-cloroformica lavata con acqua venne esaurita con soluzione di idrato sodico al 5 %: la soluzione alcalina così ottenuta diede con acido solforico un precipitato, che cristallizzato da una miscela di benzolo e ligroina, formò cristalli ben sviluppati bianchi, fusibili a 140-142° e per le altre sue proprietà si riconobbe per il 6-nitrotimol

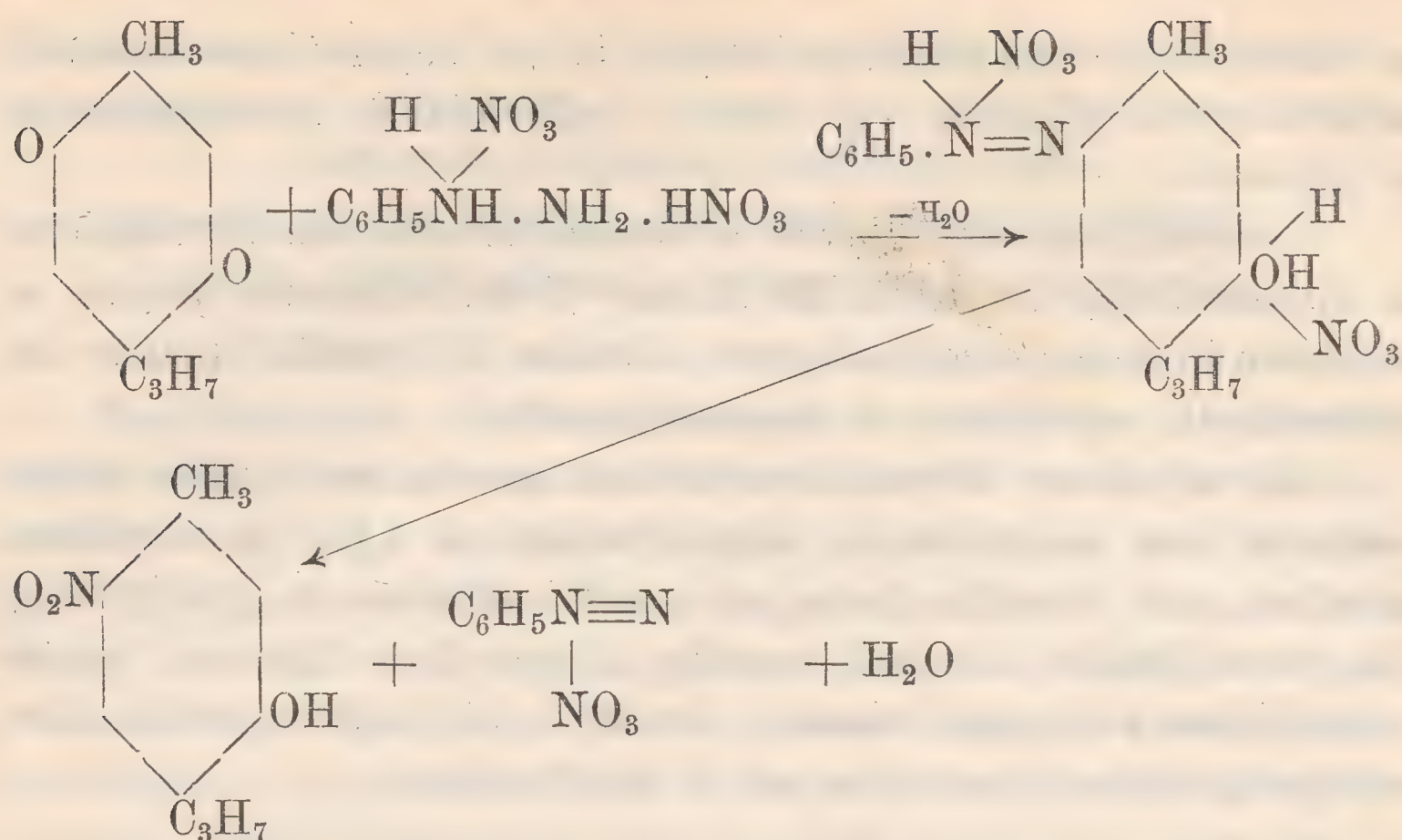
```
          CH3
          /\
   O2N|/    \
      |      |
      |      |
       \    /OH
        \  /
         \/
        C3H7
```

studiato più recentemente da Kehrmann [1].

Ma il 6-nitrotimol è il prodotto normale della diazoscissione del nitrato del 6-fenilazotimol, che si ottiene per azione del cloruro di fenildiazonio sul timol, per cui si deve ammettere come intermedia in questa reazione la formazione del nitrato del fenilazotimol. L'azione dell'acido nitrico in soluzione eterea sul nitrato di fenilidrazina in presenza della quantità equimolecolare di timochinone deve quindi procedere così:

---

[1] A. *310*, 107 (1900).

$$C_6H_3(CH_3)(C_3H_7)O_2 + C_6H_5NH.NH_2.HNO_3 \xrightarrow{-H_2O} C_6H_5.N(H)(NO_3){=}N-C_6H_3(CH_3)(C_3H_7)(OH)(H)(NO_3)$$

$$\longrightarrow O_2N-C_6H_2(CH_3)(C_3H_7)OH + \begin{matrix} C_6H_5N\equiv N \\ | \\ NO_3 \end{matrix} + H_2O$$

Fenilidrazina e β-naftochinone. — A gr. 3,16 di β-naftochinone sciolti in 120 cc. di cloroformio secco si aggiunsero gr. 2,16 di fenilidrazina trasformati in nitrato colla soluzione eterea di acido nitrico (40 cc. di etere secco + 20 cc. di HNO_3 1,48) e si scaldò leggermente in acqua tiepida: avvenne la soluzione del nitrato di fenilidrazina e il liquido si colorò in rosso vinoso cupo (formazione del nitrato del 2-fenilazo-1 naftol), quindi dopo pochi minuti l'intensità di colorazione del liquido diminuì fortemente e cristallizzò una sostanza bianca, che aumentò notevolmente per forte diluizione del liquido con etere anidro. Raccolti i cristalli e lavati con etere anidro, si sciolsero completamente in acqua e la soluzione acquosa copulata con β-naftol diede gr. 4,25 di fenilazo-β-naftol (teoria gr. 4,96). La sostanza bianca è quindi costituita da nitrato di fenildiazonio, che si forma in quantità vicina alla teorica.

La soluzione eterea da cui si separò il nitrato di fenildiazonio contenente un eccesso di acido nitrico venne lavata con acqua e quindi esaurita con soluzione al 5 °/₀ di idrato sodico: la soluzione alcalina così ottenuta venne, dopo acidificazione con acido solforico, distillata in corrente di vapore: passò una sostanza gialla, che cristallizza dall'alcool in fogliette gialle, fusibili a 127-128°, che sono costituite da 2-nitro-1-naftol $C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup(1)OH \\ \diagdown(2)NO_2\end{matrix}$.

Grammi 0,1107 di sostanza fornirono cc. 7,1 di azoto (H_0 = 733,209 t = 15°), ossia gr. 0,008121.

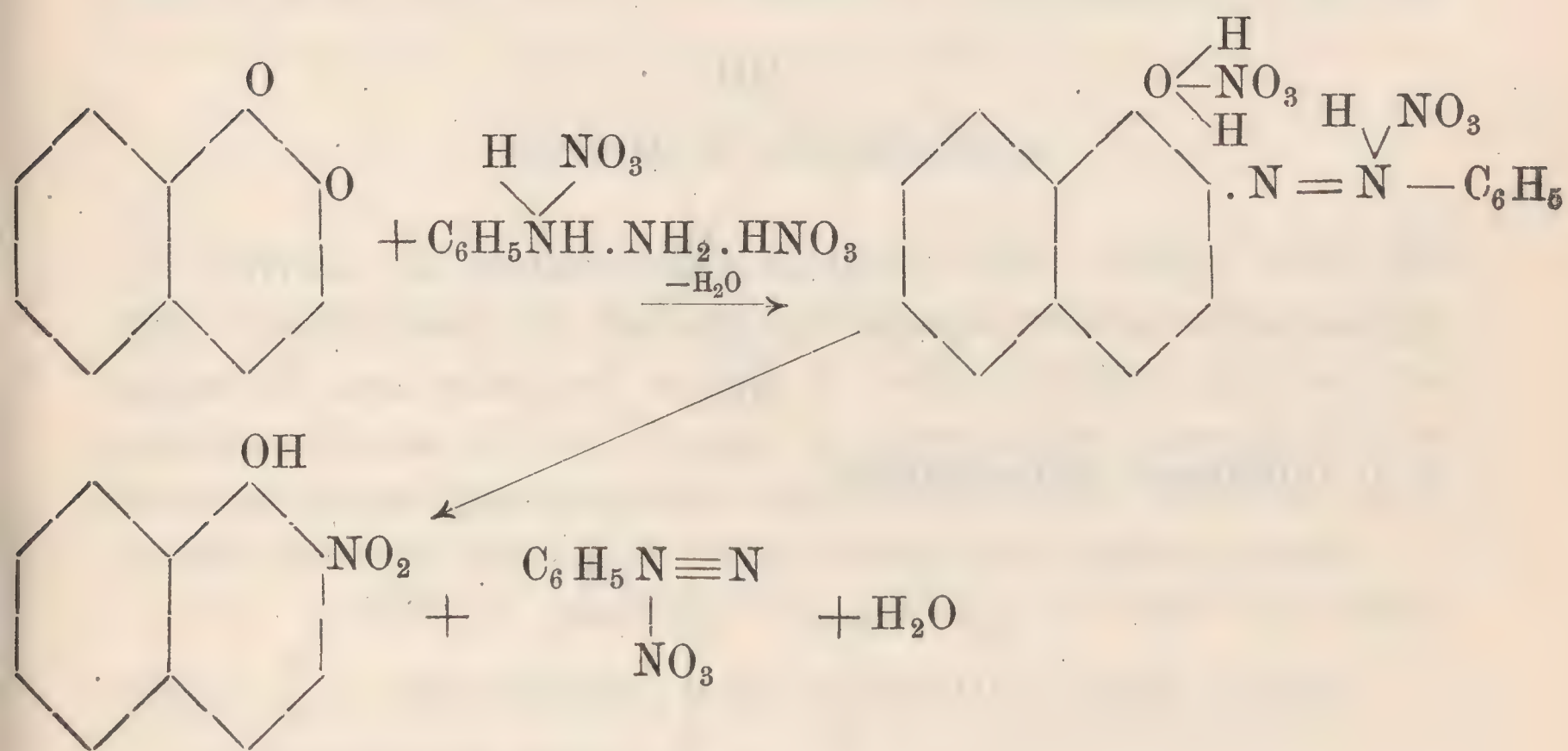
Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{10}H_7NO_3$
Azoto	7,33	7,40

La soluzione eterea, estratta colla soluzione, colorata in rosso chiaro, venne svaporata e si ottenne così un tenue residuo che venne caratterizzato per 2-fenilazo-1-naftol, sfuggito alla diazoscissione.

L'azione dell'acido nitrico in soluzione eterea sul nitrato di fenilidrazina in presenza della quantità equimolecolare di β-naftochinone si spiega soltanto basandola sulla formazione intermedia del nitrato del 2-fenilazo-1-naftol e consecutiva diazoscissione di questo secondo lo schema:

$$C_{10}H_6O_2 \text{ (O, O)} + C_6H_5\overset{H\ \ NO_3}{NH} . NH_2 . HNO_3 \xrightarrow{-H_2O} C_{10}H_6\begin{cases} O\overset{H}{\underset{H}{<}}NO_3 \\ . N = \overset{H\ \ NO_3}{N} - C_6H_5 \end{cases}$$

$$C_{10}H_6\begin{cases} OH \\ NO_2 \end{cases} + \begin{matrix} C_6H_5N\equiv N \\ | \\ NO_3 \end{matrix} + H_2O$$

Analoghi risultati si ebbero sottoponendo alla reazione nelle stesse condizioni quantità equivalenti di o- e p-tolilidrazina, di as-m-xililidrazina e di s-pseudocumilidrazina.

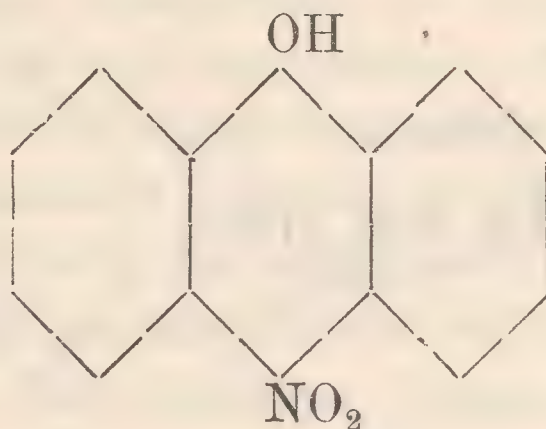
Si formò in tutti i casi il 2-nitro-1-naftol, fusibile a 128° e si ottennero i nitrati di o- e p-totildiazonio, di as-m-xilildiazonio e di s-pseudocumildiazonio, che vennero agevolmente caratterizzati trasformandoli colla soluzione alcalina di β-naftol nei corrispondenti ossiazocomposti.

Fenilidrazina e antrachinone. — Trattando gr. 2,16 di fenilidrazina e gr. 4,16 di antrachinone con 120 cc. di cloroformio secco, aggiungendo una soluzione eterea di acido nitrico ottenuta sciogliendo 20 cc. di HNO_3 1,48 in 40 cc. di etere secco e scaldando, non si nota sviluppo gassoso e soltanto colle carte amidoiodurate si dimostra la formazione di piccole quantità di vapori nitrosi. Lasciando a temperatura ambiente o scaldando più o meno lungamente in acqua tiepida non avvengono cambiamenti e la soluzione si colora soltanto più marcatamente in giallo-rossiccio.

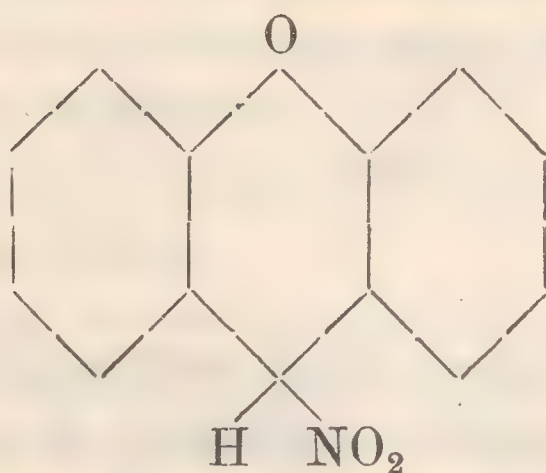
Diluendo con etere anidro, si separa l'antrachinone inalterato in quantità press'a poco uguale a quella aggiunta [1] e si formano quantità variabili, ma sempre piccole di nitrato di fenildiazonio, che si separa pure coll'antrachinone, ma che si ottiene facilmente trattando questo con acqua.

L'operazione venne ripetuta parecchie volte, senza poter riuscire a rintracciare il nitroantranol

OH

NO_2

o il tautomero nitro-antrone

O

H NO_2

Operando nelle stesse condizioni colla o-, m- e p-tolilidrazina, colla as-m-xililidrazina, colla s-pseudocumilidrazina, e colla

[1] Tenendo conto, ben inteso, della solubilità di questa sostanza nell'etere e cloroformio.

p-anisil- e p-fenetil-idrazina si ottennero risultati analoghi, cioè le arilidrazine trattate vennero in parte trasformate in nitrati di arildiazonio.

Fenilidrazina e fenantrenchinone — Fenilidrazina e acenaftenchinone. — Operando nelle medesime condizioni descritte per l'antrachinone con quantità corrispondenti di fenilidrazina e dei due chinoni soprascritti non si ottenne mai più che in traccie del nitrato di fenildiazonio (colorazione rossa della soluzione alcalina di β-naftol). La reazione che avviene tra nitrato di fenildrazina e acido nitrico in modo tumultoso con produzione di piccole quantità di nitrato di fenildiàzonio e sviluppo abbondante di vapori nitrosi è impedita dalla presenza dell'acenaftenchinone e del fenantrenchinone in quantità equimolecolari al nitrato di fenilidrazina. Piccole quantità sono senza azione, e lo stesso si verifica per piccole quantità di antrachinone, come è già stato precedentemente notato.

Nitrati di arilidrazine.

Nitrato di fenilidrazina $C_6H_5NH \, . \, NH_2 \, . \, HNO_3$. — Si ottiene cristallizzato in fini aghetti bianchi, stabili all'aria, per azione di una soluzione eterea di acido nitrico (1,48) su una soluzione diluita di fenilidrazina in etere anidro. Lavato abbondantemente con etere e seccato nel vuoto su acido solforico fonde a 145-146°, con rammollimento anteriore di qualche grado.

Gr. 0,6106 di sostanza impiegarono cc. 35,7 di idrato sodico $\frac{N}{10}$, corrispondenti a gr. 0,224910 di acido nitrico.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_6H_8N_2 \, . \, HNO_3$
Acido nitrico	36,83	36,84

Il nitrato di fenilidrazina, contrariamente a quanto afferma Thieme [1], è molto stabile, poichè fonde senza decomporsi in

(1) A. *272*, 210 (1893).

un liquido incoloro, che comincia appena ad ingiallire verso i 170°, e si decompone in modo apprezzabile con sviluppo gassoso soltanto verso 185-190°.

Nitrato di o-tolilidrazina $CH_3\,(2)\,C_6H_4\,(1)\,NH\,.\,NH_2\,.\,HNO_3$. — È costituito da grandi pagliette bianche, brillanti, che per lento riscaldamento cominciano a contrarsi verso 75° per fondere completamente soltanto a 98-100°.

Gr. 0,6042 di sostanza impiegarono cc. 32,5 di soluzione $\frac{N}{10}$ di idrato sodico, corrispondenti a gr. 0,113400 di acido nitrico.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_7H_{10}N_2\,.\,HNO_3$
Acido nitrico	33,88	34,05

Nitrato di m-tolilidrazina $CH_3\,(3)\,C_6H_4\,(1)\,NH\,.\,NH_2\,.\,HNO_3$. — Forma finissimi cristalli aghiformi pesanti, bianchi, che fondono verso 145-147°, con contrazione anteriore di volume di circa una ventina di gradi.

Gr. 0,3392 di sostanza impiegarono cc. 18 di soluzione $\frac{N}{10}$ di idrato sodico, corrispondenti a gr. 0,113400 di acido nitrico.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_7H_{10}N_2\,.\,HNO_3$
Acido nitrico	33,43	34,05

Nitrato di p-tolilidrazina $CH_3\,(4)\,C_6H_4\,(1)\,NH\,.\,NH_2\,.\,HNO_3$. — Cristallizza in fogliette bianche lucenti, fusibili a 152-153° con rammollimento anteriore di parecchi gradi.

Gr. 0,7704 di sostanza impiegarono cc. 42 di soluzione $\frac{N}{10}$ di idrato sodico, corrispondenti a gr. 0,264600 di acido nitrico.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_7H_{10}N_2\,.\,HNO_3$
Acido nitrico	34,34	34,05

Nitrato di as-m-xililidrazina $(CH_3)_2$ (1, 3) C_6H_4 (4) NH . . NH_2 . HNO_3. — Cristallizza in splendide lamelle bianche splendenti, che fondono a 146-147° con decomposizione accompagnata da sviluppo gassoso.

Nitrato di s-pseudocumilidrazina $(CH_3)_3$ (1, 2, 4) C_6H_4 (5) NH . NH_2 . HNO_3. — Forma fogliette incolore, lucenti, fusibili con sviluppo gassoso a 137-138°.

Nitrato di o-anisilidrazina CH_3O (2) C_6H_4 (1) NH . NH_2 . . HNO_3. — Costituisce una massa di apparenza gelatinosa, molto voluminosa, solubilissima nell'acqua. Seccato nel vuoto sull'acido solforico fonde a 108° con viva decomposizione.

Nitrato di p-anisilidrazina CH_3O (4) C_6H_4 (1) NH . NH_2 . . HNO_3. — Forma cristalli aghiformi, prismatici, incolori, che però rapidamente alla luce e all'aria si colorano in rosso e poi in violetto. P. F. 95-96° con decomposizione.

Nitrato di p-fenetilidrazina C_2H_5O (4) C_6H_4 (1) NH . NH_2 . HNO_3. — Forma lamelle bianche, splendenti, che si colorano alla luce e all'aria in roseo, fusibili a 107-108° con vivo sviluppo gassoso, previa contrazione di volume a incominciare da 98-100°.

Torino, Istituto Chimico della R. Università.
Marzo 1915.

Relazione sulla Memoria presentata dal Dott. B. Peyronel, dal titolo: *Primo Elenco di Funghi di Val San Martino o Valle della Germanasca.*

La Memoria presentata dal Dott. Beniamino Peyronel, ha riguardo allo Studio della Flora micologica delle *Valli Valdesi,* della quale già precedentemente erasi occupato il compianto Victor Fayod (1), in un pregevolissimo lavoro pubblicato nell'anno 1892 nel volume XXXV degli “ Annali della R. Accademia di Agricoltura di Torino „.

La micologia alpina, per le condizioni stesse delle regioni che la ospitano, è ancora nel periodo suo iniziale; non rappresentata finora, si può dire, che da Elenchi o censimenti di forme. Sopra di essi dovrà compiersi più tardi quel lavoro di sintesi scientifica, al quale sarà riservato il compito di assurgere allo studio dei problemi generali che riguardano la relazione delle specie fungine coll'ambiente; le variazioni determinate dalle condizioni altimetriche; le relazioni tra la Flora fanerogamica, che agisce come *matrice* e quella crittogama parassita o simbiota o saprofita, ecc., ecc.

La biologia micologica alpina sarà opera riservata all'avvenire, quando il lavoro di indagine per giungere alla cono-

(1) Credo utile ricordare qui, che il Fayod nel suo studio (che riassume tre periodi di raccolte estive, durate dal 1885 al 1887) ha registrato n. 362 specie — delle quali ben 334 appartengono agli *Imenomiceti superiori* — 21 agli *Ascomiceti* e solo 7 agli altri Ordini di Funghi.

Considerata la riconosciuta competenza del Fayod, questo suo contributo alla micologia alpina riveste una importanza speciale, sia per le specie nuove ivi descritte, sia per le osservazioni critiche che lo infiorano.

scenza delle varie forme sarà portato a quel grado di perfezione indispensabile, perchè si possano affrontare gli studi di indole generale.

Ecco le ragioni per le quali noi salutiamo con simpatia questo contributo portato dal Peyronel; il quale viene ad accrescere la serie dei materiali studiati che riguardano la micologia delle Alpi piemontesi, già così favorevolmente nota per le insigni raccolte dell'Abate Antonio Carestia; all'attività del quale dobbiamo, se la Flora micologica della Valsesia è oggi considerata fra le più note nel mondo scientifico.

La regione studiata dal Peyronel è quella specialmente che circonda il natio suo *Riclaretto* nella Valle della Germanasca (Val S. Martino; dai mille metri in su); nei Comuni di *Faetto* e di *Prali* e nei luoghi vicini.

Le specie elencate sono **365**. Tra queste si contano n. **15** affatto nuove, e n. **16** nuove per l'Italia.

Tre generi nuovi: *Syndiplodia* — *Riclaretia* — *Cephalosporiopsis*.

Di alcune specie di Ifomiceti il Peyronel ha potuto anche seguire il ciclo di sviluppo, sottoponendole a coltivazione.

Lo studio del materiale fu condotto nel Laboratorio della R. Università di Padova sotto la guida dell'illustre micologo Prof. P. A. Saccardo; ciò che dà affidamento della esatta determinazione.

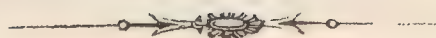
Questo contributo (il primo della serie che ci promette l'Autore) è un degno complemento del lavoro del Fayod; specialmente perciò che l'A. si è occupato di tipi dei quali il Fayod non si era quasi interessato.

Egli ha raccolto ed illustrato serie notevoli di *Uredinales,* di *Ustilaginales,* di *Sphaeriaceae,* di *Hypocreaceae,* di *Pezizacae,* di *Phycomycetes,* di *Melanconiceae,* di *Dematieae,* di *Mucedineae,* ecc., accordando alle specie nuove dovizia di figure illustrative e abbondanza di diagnosi.

Accogliendo (come noi proponiamo) la Memoria del Dottore B. Peyronel nei Volumi suoi, riteniamo che l'Accademia farà opera utile e scientificamente provvida; anche perchè invoglierà l'A. a proseguire nelle ricerche intraprese, le quali, quando saranno ulteriormente ampliate, potranno costituire un buon Prodromo della Flora micologica delle Alpi Cozie.

Così essa potrà essere paragonata con quella delle Alpi Pennine rivelataci dalle raccolte di Carestia (già studiate dai più illustri micologi italiani) e permetterà finalmente una idea complessiva di tutta la micologia delle Alpi Piemontesi; non facendo difetto le nozioni che riguardano i materiali delle Alpi marittime e delle Alpi Graie raccolti negli Erbari del R. Orto Botanico di Torino, e già in gran parte studiati, se non ancora pubblicati.

C. F. Parona.
Oreste Mattirolo, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 28 Marzo 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO ANZIANO
PASQUALE D'ERCOLE

Sono presenti i Soci: Sforza, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari e Prato. Funge da Segretario il Socio Einaudi.

È scusata l'assenza dei Soci S. E. Boselli, Presidente dell'Accademia, Chironi, Direttore della Classe, Stampini, Segretario, Carle, Ruffini e Schiaparelli.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 14 Marzo.

Il Presidente comunica alla Classe le lettere di ringraziamento dei nuovi Soci nazionali residenti Vidari e Prato e del Socio nazionale non residente Fraccaroli.

Indi il Presidente presenta, con parole di elogio, una memoria del Socio Sforza intorno ad *Un libro sfortunato contro i Turchi* (Documenti inediti) e due scritti del Socio Savio intorno a *I primordi del Cristianesimo nell'Umbria* e *Lettere sulla questione dei corpi dei SS. Vittore e Satiro a Milano.*

In seguito a domanda del Socio Vidari, il Presidente ed il Segretario forniscono spiegazioni intorno al conferimento del premio Gautieri per la filosofia.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di C. Frati, A. Baudi di Vesme e C. Cipolla.

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di C. Cipolla, G. De Sanctis e P. Fedele.

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona – Torino.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. L, Disp. **IIa**, **1914-1915**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Aprile 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Naccari, Camerano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Fusari, Balbiano e Panetti. — Scusa l'assenza il Segretario Segre, che è sostituito dal Socio Parona.

Letto e approvato il verbale della precedente adunanza, il Presidente dà, anche per parte sua, il benvenuto al nuovo Socio Panetti, e annuncia la morte del nostro Socio Nazionale Emanuele Fergola ricordandone con elevate parole le benemerenze. Si associa il Collega D'Ovidio, che col Jadanza fu allievo dell'illustre scienziato, e parla brevemente della sua vita e delle sue opere, come risulta dal cenno inserito negli *Atti*. Il Socio Nazionale Francesco D'Ovidio fu incaricato di rappresentare l'Accademia ai funerali, ed il Socio Jadanza di commemorare il compianto collega.

Si comunica una circolare della Società Leonardo da Vinci colla notizia che l'ordine del giorno votato dalla Leonardo stessa nell'assemblea dell'11 gennaio ha ottenuto in tutta Italia il più largo consenso.

Si prende atto delle lettere colle quali i nuovi Soci Nazionali Bertini, Pirotta, Righi e Taramelli ringraziano della nomina.

Il Socio Guareschi presenta in omaggio due suoi scritti, due commemorazioni o elogi storici: l'uno letto alla R. Acca-

demia di Medicina e riguarda il Prof. Alessandro CUGINI di Parma, l'altro letto alla R. Accademia di Agricoltura e riguarda il Prof. Vincenzo FINO di Torino, già Vice-Presidente di quell'Accademia: ne discorre brevemente. Così pure il Socio MATTIROLO della sua Memoria *'Il Mariscus elatus' Wahl*, e il Socio PANETTI delle sue Note sull'*Indirizzo e caratteri nella costruzione dei dirigibili moderni* e *Sulla tecnica delle costruzioni asismiche.* Il Presidente ringrazia.

Vengono presentate, per la stampa negli *Atti*, le seguenti Note:

I. GUARESCHI, *Ricerca del jodo nei jododerivati organici e nelle miscele con bromo e cloroderivati mediante il bromuro di ammonio* (Nota III).

L. CASALE, *Relazione fra il punto d'ebollizione e la costituzione*, dal Socio GUARESCHI.

M. BOTTASSO, *Sull'equilibrio delle piastre elastiche piane appoggiate lungo il contorno*, dal Socio SOMIGLIANA.

Per la stampa nelle Memorie si presentano:

G. COLOSI, *Osservazioni anatomo-istologiche sulla 'Runcina calaritana' n. sp.*, dal Socio CAMERANO.

G. SANNIA, *I limiti di una funzione in un punto limite del suo campo,* dal Socio PEANO.

L. COLOMBA, *Ricerche sui giacimenti di Brosso e Traversella* (Parte II), dal Socio PARONA.

Sono incaricati di riferire rispettivamente sulle tre Memorie i Soci: CAMERANO e SALVADORI, PEANO e D'OVIDIO, PARONA e SOMIGLIANA.

Il Socio D'OVIDIO, anche a nome del collega SEGRE (relatore), legge la relazione intorno alla Memoria del Dott. Ettore DEL VECCHIO: *Sulle equazioni* $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(xy)$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi(xy)$. — Con votazione unanime la Classe, accogliendo le proposte della Commissione, delibera la stampa della Memoria stessa nei volumi accademici.

LETTURE

PER

EMANUELE FERGOLA

Da una famiglia che si onorava di quell'illustre Nicola Fergola, il cui nome rimane nella storia del progresso delle discipline matematiche nel reame di Napoli, ivi nasceva il 30 ottobre 1830 l'uomo non meno insigne, Emanuele Fergola, del quale oggi deploriamo la morte, avvenuta il 5 aprile 1915.

Era Senatore del Regno dal 1905.

Dal 1908 egli aveva voluto abbandonare, aggravandosi l'età, la cattedra di Astronomia dell'Università di Napoli, e dal 1909 la direzione della Specola di Capodimonte; nei quali due ufficî era succeduto ad Annibale de Gasparis rispettivamente nel 1890 e nel 1884.

Prima di allora egli aveva coltivato con grande intensità e riputazione l'Astronomia e l'Analisi matematica. Infatti apparteneva alla Specola sin dal 1848; e nell'Università era stato assunto per l'insegnamento dell'Introduzione al Calcolo nel 1860, quando il Governo dittatoriale di Garibaldi ricostituì la Facoltà matematica, chiamandovi con lui Battaglini, Del Grosso, Rubini e confermando Padula, Trudi, De Gasparis.

Nel 1863 divenne ordinario della nuova cattedra di Analisi superiore. E fu appunto in quei primi anni della rinnovellata Università partenopea che io ebbi la ventura di esser discepolo del Fergola; e non posso ricordare senza un sempre vivo sentimento di gratitudine e di ammirazione quelle sue così perspicue e ben graduate lezioni sulle forme algebriche, sulle fun-

zioni ellittiche, sulla teoria dei numeri, ecc. Gentile nel tratto, bello di aspetto, di carattere esemplarmente retto, modesto malgrado la riconosciuta valentìa scientifica, egli possedeva tutte le doti atte a formare la mente e l'animo dei giovani che si avviavano alla carriera dell'insegnamento.

L'opera lunga e feconda di Emanuele Fergola come matematico, e specialmente come astronomo e geodeta e direttore di un importante Osservatorio, merita un'accurata disamina, che a mente pacata altri farà con adeguata competenza. Io ho voluto soltanto, non appena avuta notizia della sua dipartita, dare sfogo al mio profondo cordoglio di antico discepolo ed amico devoto, e rendermi sollecito interprete del rimpianto della nostra Accademia, alla quale l'eminente scienziato fu ascritto, prima nel 1880 come Corrispondente e poscia nel 1896 come Socio nazionale non residente.

Sopravvive il suo nome negli annali della scienza, la sua memoria in chiunque lo conobbe.

E. D'Ovidio.

Ricerca del jodo nei jododerivati organici e nelle miscele con bromo e cloroderivati mediante il bromuro di ammonio.

Nota III del Socio ICILIO GUARESCHI.

In due note precedenti [1] ho già dimostrato che per riscaldamento con bromuro di ammonio si può riconoscere una traccia di un ioduro metallico qualunque anche quando è mescolato con molto bromuro e talora anche con molto cloruro.

Qualche cosa di analogo avviene con i joduri alcolici e coi jododerivati organici in generale.

Vi sono molti composti organici jodurati pei quali non vi è bisogno di reazioni o di procedimenti speciali per riconoscervi il jodo, essendochè già per la sola azione del calore si decompongono e sviluppano i vapori violetti del jodo; tali sono il sozojodolo, il jodoaseptolo, il jodolo, l'aristolo e tanti altri. Ma ve ne sono molti altri, quali il joduro di metile, il joduro di etile e tanti joduri alcolici, poi il jodobenzene, il jodonitrobenzene orto, meta, para, ecc., i quali per la sola azione del calore non lasciano sviluppare il jodo e per riconoscere questo elemento bisogna ricorrere ai metodi indicati per la ricerca degli alogeni nelle sostanze organiche, come si fa per i derivati bromurati e clorurati.

---

[1] *Azione dei sali ammoniacali sul joduro mercurico.* Nota I (" Atti R. Accad. delle Scienze di Torino, 1914-15, 231. 50, p. 231).

Azione del bromuro di ammonio sui joduri metallici. Nota II (" Atti R. Accad. delle Scienze di Torino, 1914-15, vol. 50, p. 354).

Io ho osservato che il bromuro di ammonio, e talora anche il cloruro di ammonio, per via secca possono servire non solamente a svelare il jodo nei derivati jodurati organici, ma anche quando questi sono allo stato di jodonitroderivati o mescolati con bromo o cloroderivati e con cloro e bromonitroderivati. I jododerivati anche più stabili quando sono scaldati in un lungo e stretto tubo di vetro con del bromuro di ammonio sviluppano dei vapori violetti di jodo e dopo raffreddamento si ha netta la reazione coll'amido. Coi soliti metodi si richiede molto tempo e non troppo piccola quantità di sostanza.

Joduro di metile CH^3J. — Il joduro di metile anche in piccolissima quantità mescolato con del bromuro di ammonio e riscaldato in tubo lungo e stretto, manifesta la presenza del jodo coi vapori violetti, e poi coll'amido. Anche col cloruro di ammonio si ha intensa la reazione del jodo. Una miscela di poco CH^3J con molto *bromobenzene* C^6H^5Br boll. 156°-158°, scaldata con bromuro di ammonio dà intensissima la reazione del jodo.

Joduro di metile e bromuro d'etile. — Il joduro di metile bolle a 43°, il *bromuro di etile* a 38,5. Una miscela di molto bromuro di etile e poco joduro di metile scaldata col bromuro di ammonio lascia subito svelare il jodo; si osservano vapori violetti e dopo raffreddamento trattando il contenuto del tubo con acqua si ottiene colorazione giallognola che si colora intensamente in azzurro coll'amido. Basta una traccia di joduro di metile.

Svelare in una piccola quantità di questa miscela il jodo con un altro processo non sarebbe facile e occorrerebbe molto tempo.

Joduro di etile. — Questo joduro, bollente a 72°,5, scaldato rapidamente con poco bromuro di ammonio dà vapori violetti e un anello bruno-rosso. Intensa la reazione del iodo coll'amido.

In tal modo si può svelare una traccia di joduro di etile nel *bromuro di etile.*

Anche il *cloruro di ammonio* agisce bene. Una traccia di joduro d'etile scaldata rapidamente con poco cloruro di ammonio dà intensi vapori violetti e diluendo con acqua e poi coll'amido, intensa colorazione azzurra.

Joduro d'etile e cloroformio con cloruro di ammonio. — Una traccia di joduro d'etile mista con molto *cloroformio* e scaldata con un poco di *cloruro di ammonio* dà intensa la reazione del jodo sia coi vapori violetti, sia poi coll'amido.

Così pure si ha bene la reazione quando il joduro di etile anche in piccola quantità è misto coll'*alcol*.

Joduro di etile e cloruro di etilene. — Una mescolanza di *bicloruro di etilene* bollente a 41°-42° con pochissimo *joduro di etile* (boll. 72°,5) scaldata col bromuro di ammonio dà netta e intensa la reazione del jodo.

Joduro di etile e cloruro di metilene. — Una traccia di joduro di etile mista a *cloruro di metilene* (boll. 41°-42°) si riconosce benissimo.

Joduro di etile e bromoformio. — Quando si scalda poco bromoformio (boll. 149°-150°) con del bromuro di ammonio si producono dei vapori rossi di bromo, insieme ad altri prodotti, e si ha un residuo nerastro splendente. Il bromoformio col cloruro di ammonio dà pure vapori di bromo e residuo carbonoso. Dovrò occuparmi di questa reazione.

In una miscela di poco joduro di etile con del bromoformio si svela bene il jodo per riscaldamento con bromuro di ammonio, si osservano i vapori violetti, ed il prodotto della reazione, trattato, invece che coll'amido, con poco cloroformio, lascia svelare il jodo alla colorazione violetta del cloroformio. Si può così comodamente svelare 1 a 2 $^0/_0$ di joduro di etile nel bromoformio.

Joduro di etile e cloroformio. — Anche il cloroformio scaldato rapidamente col bromuro di ammonio sviluppa dei vapori di bromo e lascia un anello o velo metallico splendente. Se il cloroformio è mescolato con poco *joduro di etile,* si sviluppano e si osservano bene i vapori violetti del jodo, insieme a bromo. Trattando il prodotto con acqua non si ha bene la reazione del jodo coll'amido, ma il jodo si svela benissimo dibattendo il liquido acquoso con poche goccie di cloroformio, che si colorano in violetto. Si riconosce così anche 1 a 2 $^0/_0$ di joduro di etile nel cloroformio.

Joduro di etile e bromclormetano $CHClBr^2$. — La reazione del jodo riesce bene anche in questo caso non solo coi vapori violetti, ma estraendo il jodo dal prodotto della reazione con acqua e poco cloroformio.

Anche da un miscuglio di poco joduro di etile con cloroformio, bromoformio e bromclormetano, si ottiene netta la reazione del jodo dopo riscaldamento con bromuro di ammonio.

Joduro di isoamile. — Una traccia di joduro di isoamile bollente 148°-149° $(CH^3)^2CH.CH^2CH^2.J$ scaldata con bromuro di ammonio dà intensa la reazione del jodo.

Joduro di isoamile e bromuro di amile terziario. — Una traccia di joduro di isoamile si può svelare nel bromuro di amile terziario $\begin{matrix}(CH^3)^2\\C^2H^5\end{matrix}\Big\rangle C.Br$ bollente a 108°-109°.

Anche in questo caso sarebbe difficile in altro modo svelare poco joduro nel bromuro.

Ho pure ricercato in questo modo il *joduro di propile* (bollente 102°) nel *bromuro di propile* (boll. 71°).

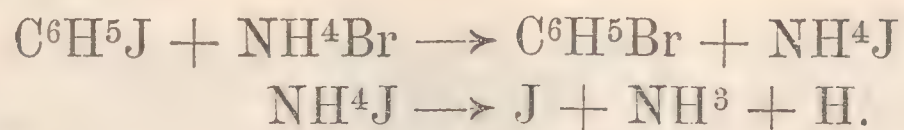
In tutti questi casi dunque, dei joduri alcolici, si svela benissimo il jodo anche quando sono mescolati con bromuri e cloruri alcolici.

Jodobenzene C^6H^5J. — Il jodobenzene fatto bollire con circa parti eguali di bromuro di ammonio, meglio scaldando rapidamente, tenendo il tubo lungo, in modo che il joduro possa ricadere, si ha subito nella parte superiore del tubo un anello rosso-violaceo e nella parte inferiore i vapori violetti. Si diluisce il prodotto della reazione con acqua e si saggia coll'amido; si avrà intensa reazione azzurra.

È un mezzo sicuro per riconoscere subito il jodo in una traccia di sostanza organica. Bisogna adoperare poco bromuro di ammonio, circa parti eguali e anche meno. Un eccesso di bromuro nuoce alla reazione.

La reazione avviene bene adoperando anche poco cloruro di ammonio.

La reazione tra il jodobenzene ed il bromuro di ammonio deve avvenire molto probabilmente nel senso della equazione seguente:

$$C^6H^5J + NH^4Br \longrightarrow C^6H^5Br + NH^4J$$
$$NH^4J \longrightarrow J + NH^3 + H.$$

Non ho fatto delle esperienze per dimostrare se si produce o no dell'idrogeno.

Jodobenzene e bromobenzene. — Il bromobenzene (boll. 156°-158°) contenente anche delle traccie di jodobenzene, trattato nel modo sovraindicato per il jodobenzene, lascia svelare il jodo. È una reazione bella, semplice, sensibile.

In questo modo si riconosce pure una piccola quantità di jodobenzene quando è mescolato con molto *clorobenzene.*

Miscuglio di jodobenzene con cloro e bromobenzene. — Feci una miscela di circa 0,50 di bromobenzene con 0,50 di clorobenzene e vi aggiunsi circa 10 mmgr. di jodobenzene. Una goccilina di questo miscuglio fu scaldata rapidamente con quattro a cinque volte il suo peso di bromuro di ammonio e alla parte superiore del tubo si manifestarono i vapori violetti di jodo che si condensarono insieme alle goccie del cloro e bromobenzene colorandole in roseo. Dibattendo, dopo raffreddamento, il prodotto con acqua e poco amido si ha netta la reazione del jodo.

In altro modo occorreva un procedimento lungo e non sicuro per trovare il jodo in questo miscuglio e sarebbe stato necessario impiegare molto maggiore quantità di sostanza.

Jodobenzene e α monobromonaftalina. — Il *jodobenzene* mescolato anche in traccie con molta α-monobromonaftalina e scaldato con poco bromuro di ammonio dà intensa la reazione del jodo. Lieve invece se si scalda con cloruro di ammonio.

Se si scaldano anche rapidamente il jodobenzene e la α bromonaftalina, mescolati, ma senza bromuro di ammonio, non si ha sviluppo di jodo.

Jodobenzene e cloruro di etilene. — Il jodobenzene mescolato con *cloruro di etilene* e scaldato con bromuro di ammonio, dà i vapori violetti, con sublimato rosso-violaceo, ma coll'amido si ha poi colorazione violacea e non azzurra.

Il **p.jodonitrobenzene** $C^6H^4NO^2.J$ anche in piccola quantità (es.: 0,001 gr. e anche meno), quando si scalda con bromuro di ammonio emana vapori violetti di jodo, e poi dopo raffreddamento, coll'amido si ha intensa la colorazione azzurra.

Invece 0,001 gr. di p.jodonitrobenzene solo, scaldato dà lievi vapori violetti e dopo raffreddamento con acqua e amido non dà la colorazione azzurra.

La mia reazione dunque può servire a riconoscere facilmente il jodo in questo jodonitroderivato.

Si può riconoscere anche quando è mescolato con molto p.bromonitrobenzene.

p.jodonitrobenzene e p.bromonitrobenzene. — Una miscela di parajodo (fus. 171°,4) e di parabromonitrobenzene (fus. 126°) (o anche di orto e metajodonitrobenzene) per l'azione del calore non dà jodo libero oppure in quantità minima non riconoscibile coll'amido; ma se si scalda, anche lentamente, con del bromuro di ammonio, si ha subito il jodo libero facilmente riconoscibile al colore violetto e coll'amido.

Una piccola quantità di una miscela di 1 p. di p.jodonitrobenzene e 100 p. di p.bromonitrobenzene, scaldata con poco bromuro di ammonio lascia svelare facilmente il jodo.

In altro modo sarebbe non facile e lungo il procedimento per riconoscere il jodo in questo caso.

Anche con una miscela di poco C^6H^5J misto con *bromobenzene, clorobenzene* e *m. nitrobromobenzene*, dà col bromuro di ammonio intensa la reazione del jodo.

Jodobenzene e p.bromotoluene. — Un miscuglio di p.bromotoluene con pochissimo jodobenzene scaldato con bromuro di ammonio dà subito i vapori violetti del jodo che colorano in rosso-violaceo le goccioline di liquido condensato nell'alto del tubo, e poi coll'acqua amidata si ha intensa la reazione del jodo.

Si ottiene la reazione anche col cloruro di ammonio, ma meno bene.

Jodobenzene e dinitrobenzene. — Anche con questo miscuglio si ha netta la reazione del jodo.

Jodobenzene e fenolo. — Una miscela di fenolo con poco jodobenzene dà bene col bromuro di ammonio la reazione del jodo.

Molti altri composti jodurati, quali le jodoaniline, l'acido jodobenzoico, ecc., sviluppano già il jodo pel solo riscaldamento e non è il caso di applicare la mia reazione per svelarvi il jodo.

Torino, R. Università, Laboratorio di chimica farmac. e tossicol.
Gennaio, 1915.

Relazione fra il punto d'ebollizione e la costituzione.

Nota del D[r] L. CASALE.

Nel 1842 Kopp credette d'aver costretti i punti di ebollizione — pochi dati e spesso inesatti — delle sostanze organiche allora note, entro i limiti di una legge semplice e generale: *ad uguali differenze nella composizione chimica delle sostanze organiche corrispondono uguali differenze nei punti di ebollizione.* E, considerando le temperature come grandezze puramente additive, stabilì che in una serie omologa qualunque l'aumento di temperatura dovuto all'addizione di un $-CH_2-$ ha un valore costante di 19°. Ma alle forti obiezioni de' suoi contemporanei e specialmente di W. Schröder, il quale gli faceva osservare come secondo la sua affermazione l'acido butirrico e l'acetato di etile, composti metameri, avrebbero dovuto avere lo stesso punto di ebollizione, mentre in realtà il primo bolliva ad una temperatura superiore di 80° a quella del secondo, egli non seppe rispondere in modo esauriente, e, pur difendendo vigorosamente la maggior parte delle sue conclusioni, fu costretto a limitare il campo della loro validità.

La scoperta di numerose nuove sostanze organiche e quindi l'aggiunta di altri termini a ciascuna serie delineò con maggior precisione le regolarità notate nei punti di ebollizione. Dopo varî tentativi di formole (Goldstein, Mills, Hinrichs . . . . .) di limitatissima applicazione, J. Walker (1) propose la seguente relazione fra la temperatura assoluta — T — di ebollizione ed il peso molecolare — M — del composto

$$T = a M^b$$

(1) " Journ. Chem. Soc. „, 1894, p. 193.

dove a e b sono costanti arbitrarie. Questa formola applicata a diverse serie omologhe si dimostra troppo insufficiente per molti termini ed in ispecie pei primi.

Nell'anno 1899 E. Boggio-Lera (1) modificò nel seguente modo la formola di Walker

$$T = K\sqrt{M + C}$$

in cui K e C sono costanti scelte per ciascuna serie, ma, mentre K pur variando per ciascuna serie s'aggira sempre intorno al valore della costante a di Walker, C assume valori assai diversi, da — 78 a + 81. Questa formola rappresenta meglio di quella di Walker le temperature di ebollizione di molte serie omologhe, ma anch'essa esclude i primi termini di tutte le serie.

H. Ramage (2) (1904) introdusse nella formula di Walker un concetto nuovo e correttivo, il numero n degli atomi di carbonio. La sua formola

$$T = a\sqrt{M(1 - 2^{-n})}$$

dà infatti le paraffine con maggiore esattezza di quella di Walker per i termini inferiori, ma come quest'ultima si innalza troppo per quelli superiori.

Lo scorso anno (1914) S. Sugden (3) elaborò a sua volta la formola di E. Boggio-Lera e la rese valida per tutti i termini di molte serie omologhe, introducendo la somma algebrica di due rapporti in luogo della costante C, facendo variare la prima costante entro limiti più vasti e dando alla seconda oscillazioni amplissime, da — 2038 a + 890. La sua formola

$$T = a\sqrt{M} + \frac{b}{\sqrt{M}} + \frac{a}{b} M$$

risultato di puri calcoli, non apporta nessuna luce alla risolu-

(1) " Gazz. Chim. ", XXIX [1], 441.
(2) " Cambridge Philos. Soc. Proc. " (1904), *12*, 445.
(3) " Chem. News ", 110 (1914), 152.

zione del problema. E nessuna luce potrà mai apportare qualunque altra formula esprimente il punto di ebollizione solo in funzione del peso molecolare. Per le quattro formole sopra esposte vale ancora l'appunto che già fu mosso a Kopp da' suoi contemporanei: una formola che sia solo funzione del peso molecolare e non dipenda affatto dal modo con cui i gruppi atomici sono collegati, non potrà mai spiegare alcuna specie di isomeria, nè lasciar sperare che a tale spiegazione conduca mediante opportune correzioni. E se si pensa al grande numero degli isomeri che possono corrispondere allo stesso peso molecolare, numero, che per l'idrocarburo $C_{35}H_{72}$ una teoria non ancora smentita prevede superiore ai quattro miliardi, si vede facilmente come sia pure limitato il campo compreso dalle suddette formole.

Su criteri affatto diversi si basa la formola che S. Young (1) propose nel 1905

$$\Delta = \frac{144,86}{T^{0,0148\sqrt{T}}}$$

in cui Δ indica la differenza fra i punti di ebollizione di due termini adiacenti, in funzione della temperatura assoluta di ebollizione T del termine che precede. L'autore assume poi come punto d'ebollizione del metano 106,75, temperatura alquanto inferiore a quella osservata. Questa formola, stabilita partendo dalle paraffine, prevede i punti d'ebollizione dei composti di questa serie con esattezza meravigliosa, ma malgrado i tentativi dell'autore la sua applicazione non è più sicura per le altre serie, nè tanto meno corrisponde, nella forma data, alle esigenze dell'isomeria. Essa però, malgrado il numero elevato delle costanti (106,75; 144,86; 0,0148; $\sqrt[2]{\;}$), presenta sulle altre formole, dal punto di vista delle teorie chimiche, innegabili vantaggi.

Mi pare tuttavia che ad essa si possa sostituire la seguente

$$\Delta = \frac{109,2}{n^{a}}$$

dove l'innalzamento della temperatura d'ebollizione dovuto alla

---

(1) " Journ. Chem. Phys. ", III (1905), 250.

sostituzione di un —H— con un —CH_3— è dato in funzione della temperatura del metano 109,2 e del numero n degli atomi di carbonio. Unica costante arbitraria sarebbe a. Questa formola, al vantaggio d'un'estrema semplicità, accoppierebbe quello di poter comprendere nel campo della sua validità anche i punti di ebollizione dei composti isomeri.

Ramage ritiene che i termini inferiori degl'idrocarburi saturi non si debbano considerare come veramente omologhi, e Young, accogliendo l'opinione di Ramage, distingue le serie omologhe in due gruppi. Nelle paraffine il propano sarebbe l'ultimo termine del primo gruppo ed il primo del secondo. Mi pare che queste considerazioni abbiano un certo peso e meritino di essere alquanto sviluppate.

Se si considerano i composti CH_4, $CH_3.CH_3$, $CH_2(CH_3)_2$, $CH(CH_3)_3$, $C(CH_3)_4$ si vede che essi costituiscono una serie continua, in cui da un termine si passa all'altro sostituendo successivamente un gruppo metilico ad un atomo d'idrogeno del metano. In quest'altra serie invece $CH_3.CH_2.CH_3$, $CH_3.(CH_2)_2.CH_3$, $CH_3.(CH_2)_3.CH_3$, ... ciascun termine si differenzia dal precedente di un gruppo metenico centrale ed il propano, che è *uno* dei termini della prima serie, costituisce il primo termine della seconda serie. È lecito supporre che l'innalzamento del punto di ebollizione nel passaggio ad un omologo superiore sia in qualche modo proporzionale alla forza con cui il gruppo aggiunto viene attirato all'atomo o agli atomi di carbonio cui si lega. E questa forza si manterrà pressochè costante per tutta la seconda serie, mentre varierà in modo continuo per ciascun termine della prima a cominciare dall'etano. In questa infatti i metili sostituenti si legano successivamente ad un —CH_3, ad un —CH_2—, ad un =CH—, ad un =C=. Nella formola ora proposta a sarebbe proporzionale a questa forza ed i valori da me calcolati sono rispettivamente 0,61; 0,675; 0,74; 0,805. Il valore di $a = 0,675$, calcolato per il propano nella prima serie, vale poi anche per tutti i termini della seconda, cosicchè la temperatura di ebollizione di un termine qualunque di questa, C_nH_{2n+2}, è data senz'altro dalla formola

$$\sum \frac{109,2}{n^{0,675}}.$$

Per un termine della prima serie invece, ad esempio per il tetrametilmetano, il punto d'ebollizione sarà dato dalla formola $\sum \frac{109,2}{n^{0,805}}$ dove è $n = 5$, numero degli atomi di carbonio. Per $n = 1$, sia dall'una serie che dall'altra, rimane determinato il punto d'ebollizione del metano (109°,2). Quando invece si tratti di un idrocarburo saturo, che appartenga contemporaneamente all'una ed all'altra serie, come ad esempio il composto:

$$CH_3.CH_2.CH_2.CH(CH_3)_2$$

il punto d'ebollizione si può calcolare partendo dall'idrocarburo fondamentale, nel caso nostro dal butano, cui s'aggiungono successivamente gli aumenti dovuti ai metili sostituenti colla costante sopra stabilita. Nel nostro esempio il punto d'ebollizione sarebbe dato da

$$\frac{109,2}{1^{0,675}} + \frac{109,2}{2^{0,675}} + \frac{109,2}{3^{0,675}} + \frac{109,2}{4^{0,675}} + \frac{109,2}{5^{0,74}} + \frac{109,2}{6^{0,74}}$$

dove la somma dei primi quattro termini ci dà il punto d'ebollizione del butano e la somma degli altri due, l'innalzamento dovuto ai due gruppi metilici legati ad un =CH—.

Nella seguente tabella (N. I) sono dati i punti d'ebollizione degli idrocarburi saturi a catena normale, calcolati col criterio suesposto, accanto ai punti di ebollizione, calcolati per la stessa serie, da Young e da Sugden in base alle loro formole.

Osservazioni alla tabella N. I.

Per la scelta dei punti di ebollizione io ho accettati integralmente i criteri di Young, fatta eccezione di qualche piccola modificazione tratta da ricerche posteriori all'articolo di questo autore. Per i due primi termini ho quindi scelti i valori di Olszewski; per il propano, il valore trovato da Lebeau; per il butano, la media dei valori trovati da Lebeau e Kuenen; per gli altri, ho mantenuti i valori riportati da Young.

Tabella N. I.

	T osservata	YOUNG		SUGDEN		CASALE	
		T calcolata	Differenze	T calcolata	Differenze	T calcolata	Differenze
CH_4	109,0	106,75	+2,25	109,5	+0,5	109,2	+0,2
C_2H_6	180,0	177,7	−2,3	181,4	+1,4	180,75	+0,75
C_3H_8	228,5	229,8	+1,3	232,2	+3,7	229,6	+1,1
C_4H_{10}	272,5	272,6	+0,1	274,0	+1,5	272,45	−0,05
C_5H_{12}	309,3	309,4	+0,1	309,2	−0,1	309,3	—
C_6H_{14}	341,95	341,95	—	340,9	−0,05	341,9	−0,05
C_7H_{16}	371,4	371,3	−0,1	369,5	−1,9	371,3	−0,1
C_8H_{18}	398,5	398,1	−0,4	395,9	−2,6	398,15	−0,35
C_9H_{20}	422,5	422,8	+0,3	420,3	−2,2	422,9	+0,4
$C_{10}H_{22}$	446,0	445,8	−0,2	443,2	−2,8	446,0	—
$C_{11}H_{24}$	467,5	467,4	−0,1	464,6	−2,9	467,6	+0,1
$C_{12}H_{26}$	487,5	487,6	+0,1	485,1	−2,4	488,0	+0,5
$C_{13}H_{28}$	507,0	506,8	−0,2	504,5	−2,5	507,35	+0,35
$C_{14}H_{30}$	525,5	525,0	−0,5	522,9	−2,6	525,75	+0,25
$C_{15}H_{32}$	543,5	542,3	−1,2	540,5	−3,0	543,35	−0,15
$C_{16}H_{34}$	560,5	558,8	−1,7	557,5	−3,0	560,10	−0,4
$C_{17}H_{36}$	576,0	574,7	−1,3	574,1	−1,9	576,25	+0,25
$C_{18}H_{38}$	590,0	589,9	−0,1	590,9	+0,9	591,75	+1,75
$C_{19}H_{40}$	603,0	604,5	+1,5	605,4	+2,4	606,7	+3,7
		Differ. m. = 0,72		Differ. m. = 2,01		Differ. m. = 0,55	

Si veda come il punto d'ebollizione del nonadecano, calcolato colla mia formola, differisce sensibilmente da quello osservato. Ma può sorgere il dubbio che quest'ultimo, data l'alta temperatura sotto la pressione atmosferica, non abbia l'attendibilità dei valori trovati da Kraft stesso per i termini precedenti, dubbio, che riceve una conferma teorica dalla legge di Ramsay e Young, secondo la quale, per sostanze chimicamente affini, il quoziente $\frac{T_1}{T_2}$ (in cui T_1 e T_2 indicano le temperature assolute di ebollizione di una sostanza a due diverse pressioni) si mantiene costante. Infatti, confrontando i punti d'ebollizione del pentadecano, dell'esadecano, dell'eptadecano, dell'octadecano, del nonadecano, osservati alla pressione di 760 mm. ed alla pressione di 15 mm. si hanno i seguenti rapporti:

	T_1	T_2	$\frac{T_1}{T_2}$
$C_{15}H_{32}$	543,5	418,0	1,3003
$C_{16}H_{34}$	560,5	430,0	1,3020
$C_{17}H_{36}$	576,0	443,0	1,3002
$C_{18}H_{38}$	590,0	454,5	1,2982
$C_{19}H_{40}$	603,0	466,0	1,2940

Il decrescere degli ultimi rapporti e dell'ultimo in ispecie indica evidentemente che i punti d'ebollizione di quei composti, quali furono osservati alla pressione atmosferica, sono più bassi di quelli che si dovrebbero trovare in assenza di cause perturbatrici. Possiamo calcolare questi ultimi moltiplicando le temperature di ebollizione osservate alla pressione di 15 mm. per il rapporto medio di 1,3: otteniamo 591° per il $C_{18}H_{38}$ e 606° per il $C_{19}H_{40}$, valori in accordo con quelli da me calcolati.

Nella tabella che segue (N. II) sono raccolti i punti d'ebollizione di quasi tutti gli idrocarburi saturi a catena ramificata finora studiati. Sebbene in questo campo la scarsità dei dati, che si limitano sovente ad una sola osservazione, non permettano la selezione resa possibile nelle paraffine normali, si veda tuttavia l'esattezza con cui la maggior parte dei valori osservati sono previsti dalla formola data.

TABELLA N. II.

	T osserv.	T calcol.	Differenze
$CH(CH_3)_3$	262,5	262,35	—0,15
$CH_3 . CH_2 . CH(CH_3)_2$	300,95	301,95	+1,00
$C(CH_3)_4$	282,5	282,5	—
$CH_3 . CH_2 . CH . CH_2 . CH_3$ $\mid$ CH_3	337,0	338,3	+1,3
$CH_3 . CH_2 . CH_2 . CH(CH_3)_2$	335,0	334,65	—0,35
$CH_3 . CH_2 . C(CH_3)_3$	322,0	321,4	—0,60
$(CH_3)_2 . CH . CH(CH_3)_2$	331,0	330,65	—0,35
$CH_3 . CH_2 . CH_2 . CH_2 . CH(CH_3)_2$	364,15	364,15	—
$CH_3 . CH_2 . CH_2 . CH . CH_2 CH_3$ $\mid$ CH_3	367,5	367,75	+0,25
$(CH_3 CH_2)_2 . CH . CH_2 . CH_3$	367,0	367,6	+0,6
$(CH_3)_3 C . CH_2 . CH_2 . CH_3$	351,0	351,2	+0,2
$(CH_3)_2 . CH . CH_2 . CH . (CH_3)_2$	356,0	356,8	+0,8
$CH_3 . CH_2 . C(CH_3)_2 . CH_2 . CH_3$	359,5	358,15	—1,35
$(CH_3)_2 . CH . CH_2 . CH_2 . CH_2 . CH_2 . CH_3$	391,0	391,15	+0,15
$CH_3 . CH_2 . CH . CH_2 . CH_2 . CH . CH_3$ $\mid$ CH_3	393,6	394,6	+1,0
$(CH_3)_2 . CH . CH_2 CH . CH_2 CH_3$ $\mid$ CH_3	386,75	387,55	+0,8
$(CH_3)_2 . CH . CH_2 . CH_2 . CH(CH_3)_2$	381,5	383,9	+2,4
$CH_3 . CH_2 . CH . CH . CH_2 . CH_3$ $\mid \quad \mid$ $CH_3 \; CH_3$	389,5	391,15	+1,65
$(CH_3)_2 . CH . CH . CH_2 . CH_2 . CH_3$ $\mid$ CH_3	386,9	387,5	+0,6
$(CH_3)_2 . CH . CH . CH_2 . CH_3$ $\mid$ C_2H_5	387,0	387,6	+0,6
$(CH_3)_2 . CH(CH_2)_4 . CH . (CH_3)_2$	432,5	432,6	+0,1
$(CH_3)_2 . CH . CH_2 . CH_2 . CH_2 . CH . CH_2 . CH_3$ $\mid$ CH_3	433,5	435,9	+2,4

Errore m. = 0,75

La formola ora proposta, tenendo conto delle proprietà costitutive dei composti, estende la sua validità anche agli idrocarburi della serie etilenica. Quando nell'etilene $CH_2{=}CH_2$ si sostituisca un atomo di idrogeno con un metile, questo verrà attirato dal residuo $—CH{=}$ con una forza assai maggiore che non in assenza del doppio legame; e ciò si spiega colla diversità della carica elettrica esistente nei due gruppi metenici. Il valore della costante a è in questo caso 0,615. Se anche il secondo atomo di idrogeno viene sostituito da un metile, allora a avrà per tutti e due i gruppi metilici il valore immediatamente superiore, cioè di 0,675; analogamente alla norma seguìta nelle paraffine. Per le sostituzioni nei gruppi che non posseggono legame etilenico valgono naturalmente le regole date a proposito degli idrocarburi saturi. Così ad esempio la temperatura d'ebollizione del propilene $CH_3.CH{=}CH_2$ sarà data dal punto d'ebollizione dell'etilene, più $\frac{109,2}{3^{0,615}}$. Per passare da quello all'α-butilene si aggiunge un CH_2 centrale e perciò l'aumento di temperatura sarà determinato secondo quanto si è detto a pag. 4. Se poi nell'etilene si sostituiscono tutti e due gli atomi di idrogeno di un $CH_2{=}$ con gruppi metilici, per entrambe le sostituzioni la costante a avrà il valore di 0,675 ed il composto $(CH_3)_2C{=}CH_2$ bollirà ad una temperatura uguale a $\left(170,5+\frac{109.2}{3^{0,675}}+\frac{109.2}{4^{0,675}}\right)$.

Nella tavola che segue (N. III) sono in tal modo calcolati i punti d'ebollizione della maggior parte delle olefine conosciute.

I punti di ebollizione degli idrocarburi saturi a catena normale trovati dai diversi esperimentatori sono abbastanza concordanti a partire dal secondo termine ed in generale la media dei valori trovati si discosta poco dai valori adottati da Young. Può però sorgere il dubbio a proposito del metano per il quale i valori osservati da Wroblewski, Olszewsky, Lademburg e Krügel dànno una media di 114,3: nel dubbio ho quindi cercato se la formola sopra proposta potesse con opportune modificazioni adattarsi a questa esigenza. Mi pare che il tentativo m'abbia portato ad una risoluzione più semplice del problema.

Tabella N. III.

	T osservata	T calcolata	Differenze
$CH_2 = CH_2$	170,5	—	—
$CH_3 . CH = CH_2$	226,0	226,35	+ 0,35
$CH_3 . CH_2 . CH = CH_2$	268,0	269,15	+ 1,15
$CH_3 . CH = CH . CH_3$	274,0	273,25	— 0,75
$(CH_3)_2 . C = CH_2$	267,0	269,15	+ 2,15
$CH_3 . CH_2 . CH_2 . CH = CH_2$	310,0	306,10	— 3,9
$CH_3 . CH_2 . CH = CH . CH_3$	311,0	310,15	— 0,85
$(CH_3)_2 . CH . CH = CH_2$	295,0	298,7	+ 3,7
$CH_3 . CH_2 . C(CH_3) = CH_2$	304,5	302,35	— 2,15
$(CH_3)_2 . C = CH . CH_3$	309,8	306,1	— 3,7
$CH_3 (CH_2)_3 . CH = CH_2$	340,0	338,7	— 1,3
$CH_3 (CH_2)_2 . CH = CH . CH_3$	341,0	342,7	+ 1,7
$CH_3 . CH_2 . CH = C (CH_3)_2$	339,0	338,7	— 0,3
$(CH_3)_2 . CH . C(CH_3) = CH_2$	329,5	327,7	— 1,8
$CH_3(CH_2)_4 . CH = CH_2$	368,0	368,0	—
$CH_3(CH_2)_3 . CH = CH . CH_3$	371,5	372,0	+ 0,5
$CH_3(CH_2)_3 . C(CH_3) = CH_2$	364,0	364,5	+ 0,5
$CH_3 . CH_2 . C(CH_3) = C(CH_3)_2$	365,0	364,5	— 0,5
$(CH_3)_3 . C — C(CH_3) = CH_2$	352,0	348,4	— 3,6
$CH_3(CH_2)_5 . CH = CH_2$	394,8	394,8	—
$CH_3(CH_2)_4 . CH = CH . CH_3$	395,5	398,0	+ 2,5
$(CH_3)_3 . C . CH = C(CH_3)_2$	375,5	375,4	— 0,1
$CH_3(CH_2)_5 . CH = CH . CH_3$	422,5	423,4	+ 0,9
$CH_3(CH_2)_7 . CH = CH_2$	445,0	442,65	— 2,35
$CH_3(CH_2)_8 . CH = CH_2$	468,0	464,3	— 3,7

Diff. m. = 1,6

La temperatura di ebollizione di un idrocarburo saturo normale è funzione del numero degli atomi di carbonio: d'altra parte i varî isomeri che corrispondono ad una stessa formula greggia, in massima, bollono a temperatura tanto più bassa quanto più grande è il numero dei metili presenti nella molecola. È facile infine constatare che nella sostituzione di un H con un CH_3 la presenza di altri gruppi metilici legato allo stesso atomo di carbonio diminuisce l'aumento della temperatura di ebollizione che si osserva nella sostituzione stessa in assenza di quei gruppi. Possiamo dunque considerare in modo affatto generale la temperatura di ebollizione di un idrocarburo C_nH_{2n+2} come una somma in cui i gruppi centrali (CH_2; CH; C) contribuiscono collo stesso valore, mentre i gruppi terminali (CH_3) contribuiscono con valori differenti a seconda che essi si trovano ad uno ad uno od in parecchi attorno ad uno stesso atomo di carbonio.

Se, d'un idrocarburo saturo qualunque C_nH_{2n+2}, indichiamo con a il numero dei gruppi centrali, con b il numero dei metili isolati, con c il numero dei metili riuniti in due allo stesso atomo di carbonio, con d quelli in tre, con e quelli in quattro, la sua temperatura assoluta d'ebollizione è data dalla somma:

$$T = \frac{114}{1^{0,7}} + \frac{114}{2^{0,7}} + \ldots + \frac{114}{a^{0,7}} + \frac{114}{(a+1)^{0,77}} + \frac{114}{(a+2)^{0,77}} + \ldots +$$

$$+ \frac{114}{(a+b)^{0,77}} + \frac{114}{(a+b+1)^{0,8033}} + \frac{114}{(a+b+2)^{0,8033}} + \ldots +$$

$$+ \frac{114}{(a+b+c)^{0,8033}} + \frac{114}{(a+b+c+1)^{0,8366}} + \ldots + \frac{114}{(n-e)^{0,8366}} +$$

$$+ \frac{114}{(n-e+1)^{0,87}} + \frac{114}{(n-e+2)^{0,87}} + \ldots + \frac{114}{n^{0,87}}.$$

Come si vede, la costante arbitraria 0,77 del gruppo metilico s'accresce di 0,0333... per la presenza di un altro CH_3 legato allo stesso atomo di carbonio, di 0,0666... per la presenza di due altri CH_3, di 0,0999... per la presenza di tre altri.

Nel caso delle paraffine normali questa somma assume la forma:

$$T = \sum^{(n-2)} \frac{114}{(n-2)^{0,7}} + \frac{114}{(n-1)^{0,77}} + \frac{114}{n^{0,77}}.$$

TABELLA N. IV.

	P = 760 mm.			P = 15 mm.		
	T osserv.	T calcolata	Differenze	T osserv.	T calcolata	Differenze
CH_4	114,3	114,0	—0,30	—	87,69	—
C_2H_6	180,00	180,85	+0,85	—	139,12	—
C_3H_8	228,5	229,77	+1,27	—	176,75	—
C_4H_{10}	272,5	272,30	—0,20	—	209,45	—
C_5H_{12}	309,3	309,24	—0,06	—	237,86	—
C_6H_{14}	341,95	341,94	—0,01	—	263,01	—
C_7H_{16}	371,4	371,35	—0,05	—	285,63	—
C_8H_{18}	398,5	398,18	—0,32	—	306,26	—
C_9H_{20}	422,5	422,90	+0,40	—	325,28	—
$C_{10}H_{22}$	446,0	445,81	—0,19	—	342,96	—
$C_{11}H_{24}$	467,5	467,31	—0,19	—	359,49	—
$C_{12}H_{26}$	487,5	487,56	+0,06	—	375,03	—
$C_{13}H_{28}$	507,0	506,65	—0,35	388,0	389,72	+1,72
$C_{14}H_{30}$	525,5	524,80	—0,70	—	403,68	—
$C_{15}H_{32}$	543,5	542,08	—1,42	418,0	416,97	—1,03
$C_{16}H_{34}$	560,5	558,60	—1,90	430,5	429,67	—0,83
$C_{17}H_{36}$	576,0	574,41	—1,59	443,0	441,85	—1,15
$C_{18}H_{38}$	590,0	589,61	—0,39	454,5	453,55	—0,95
$C_{19}H_{40}$	603,0	604,22	+1,22	466,0	464,82	—1,18
$C_{20}H_{42}$	—	—	—	477,5	475,69	—1,81
$C_{21}H_{44}$	—	—	—	488,0	486,13	—1,87
$C_{22}H_{46}$	—	—	—	497,5	496,31	—1,19
$C_{23}H_{48}$	—	—	—	507,0	506,15	—0,85
$C_{24}H_{50}$	—	—	—	516,0	515,43	—0,57
$C_{25}H_{52}$	—	—	—	—	524,98	—
$C_{26}H_{54}$	—	—	—	—	534,0	—
$C_{27}H_{56}$	—	—	—	543,0	542,80	—0,20
$C_{28}H_{58}$	—	—	—	—	551,37	—
$C_{29}H_{60}$	—	—	—	—	559,72	—
$C_{31}H_{64}$	—	—	—	575,0	575,85	+0,85
$C_{32}H_{66}$	—	—	—	583,0	583,64	+0,64
$C_{35}H_{72}$	—	—	—	604,00	606,04	+2,04
			Diff. m. = 0,60			Diff. m. = 1,18

TABELLA N. V.

	T osserv.	T calcol.	Differenze
$CH(CH_3)_3$	259,25	259,1	—0,15
$C(CH_3)_4$	282,5	282,6	+0,1
$CH_3 . CH_2\ CH(CH_3)_2$	300,95	301,7	+0,75
$CH_3 . CH_2 . CH . CH_2 . CH_3$ $\mid$ CH_3	337,0	337,9	+0,9
$CH_3 . CH_2 . CH_2 . CH(CH_3)_2$	335,0	334,45	—0,55
$(CH_3)_2\ CH . CH(CH_3)_2$	331,0	328,2	—2,8
$CH_3 . CH_2 . C(CH_3)_3$	322,5	323,95	+1,45
$(CH_3)_2 . CH . CH_2 . CH_2 . CH_2 . CH_3$	364,15	364,15	—
$CH_3 . CH_2 . CH_2 . CH(CH_3) . CH_2 . CH_3$	367,5	367,5	—
$CH_3 . CH_2 . CH_2 . C(CH_3)_3$	352,0	353,7	+1,7
$(CH_3)_2 . CH . CH_2\ CH(CH_3)_2$	356,0	356,5	+0,5
CH_3 $\mid$ $CH_3 . CH_2 . C . CH_2 . CH_3$ $\mid$ CH_3	359,5	360,1	+0,6
$(CH_3)_2 . CH(CH_2)_4 . CH_3$	391,0	391,25	+0,25
$CH_3 . CH_2 . CH . CH_2 . CH_2 . CH_2 . CH_3$ $\mid$ CH_3	393,6	394,35	+0,75
$(CH_3)_2 . CH . CH_2 . CH . CH_2 . CH_3$ $\mid$ CH_3	386,75	387,3	+0,55
$(CH_3)_2 . CH . CH_2 . CH_2 . CH(CH_3)_2$	381,5	383,8	+2,3
$CH_3 . CH_2 . CH . CH . CH_2 . CH_3$ $\mid \quad \mid$ $CH_3\ CH_3$	389,5	390,4	+0,9
$(CH_3)_2 . CH . CH . CH_2 . CH_2 . CH_3$ $\mid$ CH_3	386,9	387,3	+0,4
$(CH_3)_2 . CH . CH . CH_2 . CH_3$ $\mid$ C_2H_5	387,0	387,3	+0,3
$(CH_3)_2 . CH(CH_2)_4 . CH(CH_3)_2$	432,5	432,5	—
$(CH_3)_2 . CH(CH_2)_3 . CH . CH_2 . CH_3$ $\mid$ CH_3	433,5	435,55	+2,05

Diff. m. = 0,71

Nelle tabelle N. IV e N. V sono messi a confronto i valori calcolati mediante questa formola con quelli osservati. Questi ultimi sono identici a quelli già riportati nelle altre tabelle, ad eccezione del metano per le ragioni esposte e dell'isobutano per il quale è stato pure adottato il valore medio. Nella tabella n° IV si trovano calcolati anche i punti d'ebollizione delle paraffine normali alla pressione di 15 mm. in confronto coi dati di Kraft. Essi furono ottenuti sostituendo nella formola precedente a 114, punto di ebollizione del metano alla pressione ordinaria, 87,69, punto d'ebollizione del metano a 15 mm. di mercurio, ottenuto, secondo la regola di Ramsay e Young, dividendo 114 per il rapporto medio 1,3 trovato a pag. 815.

Conclusione.

1° Le formole proposte da Walker, Ramage, Boggio-Lera, Sugden, che dànno il punto d'ebollizione di un composto puramente in funzione del peso molecolare, non possono risolvere il problema tentato per la prima volta da Kopp, giacchè tali formole sono incompatibili coll'isomeria.

2° La formola data da Young, sebbene basata su altri principî, è valida solo per le paraffine normali e non corrisponde alle esigenze dell'isomeria, come dimostrano del resto i pochi tentativi dell'autore.

3° La formola da me proposta, sia nella prima che nella seconda espressione, più semplice di tutte le precedenti, essendo basata sulla costituzione chimica, prevede i punti d'ebollizione di tutte le paraffine (anche a pressioni diverse) e vale pure per gli idrocarburi non saturi, come mostra l'applicazione da me fatta alle olefine.

4° Il campo della validità di questa formola, sebbene non ancora applicata ad altre classi di composti, è già fin d'ora più vasto di quello compreso da qualunque altra formola precedente.

Torino, Istituto Chimico della R. Università.
Marzo 1915.

Sull'equilibrio delle piastre elastiche piane appoggiate lungo il contorno.

Nota di MATTEO BOTTASSO.

Consideriamo una piastra elastica isotropa, che, per fissar le idee, supporremo orizzontale. Se Z è la componente verticale della risultante delle forze esterne, riferita all'unità di volume, in ogni punto della piastra, e w è lo spostamento verticale di un punto qualunque di essa; assunto come piano ξ, η quello della superficie media della piastra, nell'equilibrio di elasticità di quest'ultima si ha (*):

$$(1) \qquad \Delta'\Delta' w = kZ, \qquad \left(\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)$$

in ogni punto dell'area Σ della piastra, essendo k una costante della piastra stessa.

Inoltre, nell' ipotesi in cui il contorno S della piastra sia semplicemente appoggiato, nei punti di tale contorno debbono essere soddisfatte le condizioni:

$$(2) \qquad w = 0, \qquad a\Delta' w + \frac{\partial^2 w}{\partial N^2} = 0,$$

essendo a una nuova costante per la piastra considerata, ed N la normale interna del contorno S (nel piano ξ, η).

L'equazione (1) è stata integrata dal Poisson (**) per un'area

(*) Lord J. Rayleigh, *The theory of sound*, 2d edit., vol. I (London, Macmillan and Co., 1894), Ch. X, §§ 215-216; od anche: G. Kirchhoff, *Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe* (" Journal f. d. reine u. angew. Mathematik ", Bd. 40, 1850), § 3.

(**) Poisson, *Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques* (" Mémoires de l'Acad. des Sciences de l'Institut de France ", t. VIII, 1829, pp. 357-570), § VII.

circolare e nel caso speciale in cui la funzione Z (e quindi anche w) è costante su circonferenze concentriche al contorno.

Supponendo, nel caso generale, che la funzione Z verifichi soltanto le condizioni richieste per la validità del teorema di Poisson, è facile vedere che la funzione

$$v(\xi, \eta) = \frac{k}{8\pi} \int_{\Sigma} \rho^2 \log \rho \, Z(\xi', \eta') \, d\xi' d\eta',$$

$$[\rho^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2],$$

soddisfa, nei punti di Σ all'equazione $\Delta'\Delta' v = kZ$. Di qui si deduce agevolmente che l'integrazione dell'equazione (1) si può ridurre all'integrazione della seguente:

$$\Delta'\Delta' u_0 = 0, \tag{1'}$$

e le condizioni (2) si mutano in altre della forma:

$$u_0 = \gamma_0, \qquad a\Delta u_0 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial N^2} = \lambda_0, \tag{2'}$$

ove γ_0 e λ_0 sono funzioni conosciute in ogni punto del contorno.

Nell'ipotesi della piastra a contorno incastrato, la seconda delle (2′) viene sostituita semplicemente dalla $\frac{\partial u_0}{\partial N} = \lambda_1$, ed in tal caso l'integrazione della (1′) è stata eseguita per varie classi di aree (*).

(*) Vedi, per es., E. Almansi, *Sull' integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^2\Delta^2 = 0$ [" Atti della R. Accad. di Torino ", vol. XXXI ", (1895-96), pp. 881-888].

G. Lauricella, *Integrazione dell'equazione* $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ *in un campo di forma circolare* [" Ibid. ", pp. 1010-1018].

V. Volterra, *Osservazioni alla Nota del Prof. Lauricella* [" Ibidem ", pp. 1018-1021].

T. Levi-Civita, *Sull' integrazione dell'equazione* $\Delta_2\Delta_2 u = 0$ [" Ibid. ", vol. XXXIII (1897-98), pp. 932-956].

E. Almansi, *Sulla ricerca delle funzioni poliarmoniche in un'area piana*

Il Prof. Boggio ha poi determinato la funzione u_0 che soddisfa alle equazioni (1'), (2'), quando la piastra sia circolare, oppure una corona circolare (*), esprimendo la u_0 mediante soli integrali definiti.

In questa nota si risolve lo stesso *problema nel caso in cui l'area data si può rappresentare conformemente sopra un cerchio mediante funzioni razionali.*

La soluzione, anche in tal caso, si può ottenere espressa mediante integrali definiti, poichè la questione proposta si riduce a determinare:

1° alcune funzioni di variabile complessa, regolari nel cerchio trasformato di Σ, di ciascuna delle quali si conoscono i valori assunti dalla parte reale in ogni punto della circonferenza contorno;

2° un numero finito di costanti.

Perchè il problema ammetta soluzioni occorre che le condizioni a cui debbono soddisfare queste costanti siano compatibili: e ciò accade certamente, perchè il problema fisico ammette sempre una soluzione determinata.

Il metodo seguìto è analogo a quello variamente applicato

---

semplicemente connessa per date condizioni al contorno [" Rendic. del Circolo Matem. di Palermo ", t. XIII (1899), pp. 225-262].

Id., *Integrazione della doppia equazione di Laplace* [" Rendiconti della R. Acc. dei Lincei " (5ª), vol. IX (1° sem. 1900), pp. 298-304].

T. Boggio, *Integrazione dell'equazione* $\Delta^2\Delta^2 = 0$ *in un'area ellittica* [" Atti del R. Istituto Veneto ", t. 52, parte 2ª (1901)].

J. Hadamard, *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées* [" Mém. des savants étrangers de l'Institut de France ", t. 33 (1908), n. 4, pp. 128].

(*) T. Boggio, *Sull'equilibrio delle piastre elastiche piane* [" Rendic. del R. Istit. Lombardo " (2ª), vol. 34 (1901), pp. 793-808]. In questo lavoro è pure risolto lo stesso problema e per le medesime aree nel caso che il contorno della piastra sia libero: allora le condizioni al contorno sono costituite dalla seconda delle (2') e dalla $(a+1)\frac{\partial \Delta' u}{\partial N} + \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial N \partial S}\right) = \lambda_2$.

Vedi pure: J. Hadamard, *Sur l'équilibre des plaques élastiques circulaires libres, ou appuyées*, etc. [" Annales de l'École Normale Sup. " (3ª), t. 18 (1901), pp. 313-342].

dal Prof. Boggio (*) nelle sue ricerche sulle membrane elastiche, e che deriva sostanzialmente dal geniale procedimento d'integrazione proposto dal Prof. Almansi (**) per la doppia equazione di Laplace, quando si conoscono sul contorno i valori dell'integrale e della sua derivata normale.

Peraltro io ho qui fatto largo uso delle funzioni di variabile complessa, il che giova non poco a semplificare il procedimento ed i risultati, com'è stato messo in evidenza anche nella mia recente nota presentata a quest'Accademia (***). Ciò del resto deriva dal fatto che l'uso delle funzioni di variabile complessa equivale all'uso, nel piano, del calcolo vettoriale assoluto, il quale si distingue, com'è ben noto, dagli ordinari procedimenti per la semplicità ed eleganza apportate nella trattazione delle questioni, perchè opera direttamente sugli enti fisico-meccanici, o geometrici.

Così, premesse nel § 1 alcune proprietà sulle funzioni di una variabile complessa, me ne valgo nel § 2 per la ricerca della soluzione generale del problema.

§ 1. — Proprietà delle funzioni di variabile complessa.

1. — Premettiamo alcune proprietà di cui avremo bisogno nel seguito.

Indichiamo con σ un'area circolare, di raggio unitario, nel piano della variabile complessa $z = x + iy$, avente come centro l'origine $z = 0$.

(*) T. Boggio, *Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane* [" Atti della R. Accad. di Torino ", vol. XXXV (1899-900), pp. 219-239].

Id., *id.* [" Nuovo Cimento " (4°), vol. VI (1900); e (5ª), vol. I (1901)].

Id., *id.* [" Atti del R. Istituto Ven. ", t. LXI (1901-902].

(**) E. Almansi, *Sulla ricerca delle funzioni poliarmoniche*, ecc. [" Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo ", t. XIII, 1899].

(***) M. Bottasso, *Sopra un nuovo problema al contorno per un cerchio* [Seduta del 7 marzo 1915].

Se $F(z)$ è una funzione di z regolare, nel cerchio σ, allora si ha evidentemente:

$$(3)\qquad F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m F_m(z),$$

ove $F_m(z)$ è una funzione di z, regolare in σ, e le a_s sono delle costanti complesse date dalle

$$(4)\qquad a_s = \frac{1}{s!}\left[\frac{d^s F(z)}{dz^s}\right]_{z=0}, \qquad (s = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Quindi, indicando con

$$E(z) = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \dots + e_n z^n$$

un qualsiasi polinomio di z (a coefficienti complessi), si ha sempre, quale prodotto

$$(5)\qquad E(z)\,F(z) = E(z)\sum_{0}^{m-1}{}_s a_s z^s + z^m E(z)\,F_m(z),$$

una nuova funzione di z, regolare in σ.

Conveniamo poi, anche per tutto il seguito, di indicare (per brevità) la *coniugata* d'una quantità complessa, rappresentata da una sola lettera, con quella stessa lettera in carattere *grassetto*. Invece, per indicare la coniugata d'una qualsivoglia funzione $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, della variabile complessa z, premetteremo al segno di funzione il simbolo K; cioè porremo:

$$\mathrm{K}F(z) = u(x,y) - iv(x,y);$$

e questa sarà ovviamente una funzione della variabile complessa $\mathbf{z}$ (coniugata di z).

Allora ponendo:

$$(6)\qquad z\mathbf{z} = x^2 + y^2 = r^2,$$

ed osservando che per n, ν, s, t numeri interi positivi, risulta:

$$(7)\qquad r^{2\nu} = \sum_{0}^{\nu}{}_t \binom{\nu}{t} (r^2 - 1)^t,$$

$$(8)\qquad \sum_{0}^{n}{}_s \sum_{0}^{s}{}_t\, \chi(s,t) = \sum_{0}^{n}{}_t \sum_{t}^{n}{}_s\, \chi(s,t),$$

per $0 < \nu < m$, si ha:

$$z^\nu F(z) = \sum_{0}^{\nu-1}{}_t (r^2-1)^t \sum_{t}^{\nu-1}{}_s \binom{s}{t} a_s z^{\nu-s} +$$

$$+ \sum_{0}^{\nu}{}_t \binom{\nu}{t} (r^2-1)^t \left[\sum_{\nu}^{m-1}{}_s a_s z^{s-\nu} + z^{m-\nu} F_m(z)\right].$$

Questa stessa formula, come risulta subito dalla (3), vale pure per $\nu = 0$ e per $\nu = m$, purchè si ritengano nulle le a con indice negativo, cioè si supponga $a_{-1} = 0$.

Perciò, per $n \leq m$, ricordando pure la (8), si ottiene:

$$(9) \qquad F(z)\,\mathrm{K}E(z) = \sum_{1}^{n}{}_\nu \sum_{0}^{\nu-1}{}_t (r^2-1)^t e_\nu \sum_{t}^{\nu-1}{}_s \binom{s}{t} a_s z^{\nu-s} +$$

$$+ \sum_{0}^{n}{}_\nu \sum_{0}^{\nu}{}_t \binom{\nu}{t} (r^2-1)^t e_\nu \left[\sum_{\nu}^{m-1}{}_s a_s z^{s-\nu} + z^{m-\nu} F_m(z)\right]$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_t (r^2-1)^{t-1} \sum_{t}^{n}{}_\nu \sum_{t-1}^{\nu-1}{}_s \binom{s}{t} a_s e_\nu z^{\nu-s} +$$

$$+ \sum_{0}^{n}{}_t (r^2-1)^t \sum_{t}^{n}{}_\nu \binom{\nu}{t} e_\nu \left[\sum_{\nu}^{m-1}{}_s a_s z^{s-\nu} + z^{m-\nu} F_m(z)\right],$$

ossia:

$$F(z)\,\mathrm{K}E(z) = \sum (r^2-1)^t \left[\mathrm{K}E_t'(z) + E_t''(z) + E_t'''(z) F_m(z)\right],$$

ove $\mathrm{K}E_t'(z)$ sono polinomi in z, di grado n per $t < n$, mentre $\mathrm{K}E_n' = 0$; ed E_t'', E_t''' sono polinomi in z, rispettivamente di grado $m-1$ ed m. I polinomi E_t''' non contengono alcuna delle costanti a_s e contengono linearmente le e_ν; gli altri polinomi $\mathrm{K}E_t'$, E_t'' sono bilineari rispetto ai due gruppi di lettere $a_0, a_1 \ldots, a_{m-1}$, ed e_a, $e_1, \ldots, e_n$ (cioè sono lineari tanto nel primo gruppo di lettere, quanto nel secondo gruppo).

2. — Se conveniamo ancora di indicare la parte reale di una qualsivoglia quantità complessa premettendo a questa la lettera $\mathcal{R}$, si ha, com'è ovvio:

$$(10)\quad \mathcal{R}[F(z)\,\mathrm{K}E(z)] = \sum_0^n {}_t (r^2-1)^t \mathcal{R}[E_t'(z) + E_t''(z) + E_t'''(z)\,F_m(z)],$$
$$= \sum_0^n {}_t (r^2-1)^t \mathcal{R}[G_t(z) + E_t'''(z)\,F_m(z)],$$

ove $G_t(z)$ è un polinomio che contiene bilinearmente i due gruppi di lettere, e_ν, $\boldsymbol{e}_\nu$ ed a_s, $\boldsymbol{a}_s$. Il grado di G_n è $m-1$ ed il grado di G_t, per $t < n$, è il massimo dei numeri n ed $m-1$.

Infine, per le (5) e (10), si ha immediatamente:

$$(11)\quad 2\mathcal{R}F(z)\,.\,\mathcal{R}E(z) = \mathcal{R}\{F(z)[E(z) + \mathrm{K}E(z)]\} =$$
$$= \sum_0^n {}_t (r^2-1)^t \mathcal{R}[G_t'(z) + G_t''(z)\,F_m(z)],$$

ove G_t', G_t'' sono dei polinomi in z, dei quali solo i primi, G_t', contengono linearmente $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{m-1}$, oltre ad $e_0, e_1, \ldots, e_n, \boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, mentre in G_t'' compaiono soltanto le e_ν ed $\boldsymbol{e}_\nu$. Inoltre, il grado di G_t' e G_t'' è rispettivamente $\max(n, m-1)$ ed m per $n > t > 0$, mentre il grado di G_0', G_0'', G_n', G_n'' è rispettivamente $m+n-1$, $m+n$, $m-1$, m.

È utile notare che nella (11), com'è ovvio, del complesso e_0 compare soltanto la parte reale, $(e_0 + \boldsymbol{e}_0)/2$, e non il coefficiente della parte immaginaria.

§ 2. — Risoluzione del problema.

3. — Supponiamo ora che l'area Σ (semplicemente connessa) della piastra considerata sia tale da poterne eseguire la rappresentazione conforme sul cerchio σ (di raggio unitario e centro l'origine), indicato nel n. 1, mediante la formula:

$$(12)\quad \zeta = \frac{P(z)}{Q(z)}, \qquad (\zeta = \xi + i\eta),$$

ove P e Q sono polinomi rispettivamente di grado m, n; e supponiamo, per fissar le idee, $m \geq n$. Dobbiamo inoltre supporre

che la derivata $\frac{d\zeta}{dz}$, o, ciò che è lo stesso, che il determinante funzionale della trasformazione (12), cioè:

$$H^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

sia diverso da zero nel cerchio σ sulla circonferenza-contorno s.

Per determinare la funzione $u_0(\xi, \eta)$ che soddisfa alle (1′), (2′), alle quali è stata ricondotta la ricerca delle deformazioni della nostra piastra elastica Σ, osserviamo che la soluzione generale della (1′) può mettersi, com'è noto (*), sotto la forma:

$$u_0(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2)\, \varphi_0(\xi, \eta) + \psi_0(\xi, \eta), \tag{13}$$

essendo φ_0, ψ_0 due funzioni armoniche arbitrarie, nell'area semplicemente connessa Σ, che si suppone pure contenere l'origine.

Se facciamo la rappresentazione conforme dell'area Σ sul cerchio σ mediante la (12), si deduce immediatamente per $\xi^2 + \eta^2$ un'espressione della forma:

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{p_m + r^2 p_{m-1} + r^4 p_{m-2} + \dots + r^{2m-2} p_1 + r^{2m} p_0}{q_n + r^2 q_{n-1} + r^4 q_{n-2} + \dots + r^{2n-2} q_1 + r^{2n} q_0},$$

ove p_s, q_s sono polinomi armonici in x ed y, di grado s. Perciò, dalla (13), si ha:

$$u\,(x, y) = \frac{p_m + r^2 p_{m-1} + \dots + r^{2m} p_0}{q_n + r^2 q_{n-1} + \dots + r^{2n} q_0}\, \varphi\,(x, y) + \psi\,(x, y)\,, \tag{14}$$

ove u, φ, ψ sono le funzioni u_0, φ_0, ψ_0 espresse mediante le variabili x, y.

(*) Per una semplice dimostrazione (con le funzioni di variabile complessa) di questa formula, vedi T. Boggio, *Sulla deformazione delle piastre elastiche soggette al calore* [" Atti della R. Accademia di Torino ", vol. XL (1904 905), pp. 219-240], n. 5 (nella nota a piè di pag.). La formula è dovuta all'Almansi, il quale però l'ha dimostrata con ipotesi assai più restrittiva circa il campo Σ. Cfr. E. Almansi, *Sulla ricerca delle funzioni poliarmoniche*, ecc. [" Rendic. Circ. Matem. di Palermo ", t. 13], cit., p. 229; oppure: *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$ [" Annali di Matematica pura ed applicata " (3ª), t. II, 1898, pp. 1-51].

Riducendo a forma intera, e ponendo:

$$\Omega = (q_n + r^2 q_{n-1} + \dots + r^{2n} q_0)\, u, \tag{15}$$

dalla (14) si ha:

$$\Omega = \varphi \sum_0^m {}_s\, r^{2s} p_{m-s} + \psi \sum_0^n {}_s\, r^{2s} q_{n-s}\,;$$

la quale, in virtù della (7), può pure scriversi:

$$\Omega = \varphi \sum_0^m {}_s\, (r^2 - 1)^{m-s} p_s' + \psi \sum_0^n {}_s\, (r^2 - 1)^{n-s} q_s', \tag{16}$$

essendo p_s', q_s' polinomi armonici conosciuti, espressi per mezzo dei polinomi noti p_s e q_s con le formule:

$$p_s' = \sum_{m-s}^m {}_t \binom{t}{m-s} p_{m-t}\,, \qquad q_s' = \sum_{n-s}^n {}_t \binom{t}{n-s} q_{n-t}\,.$$

4. — Vediamo ora come si mutano le condizioni al contorno (2′).

Se n è la normale alla circonferenza s di σ, rivolta verso l'interno di σ, si ha:

$$\Delta' = \frac{1}{H^2}\Delta, \qquad \frac{\partial}{\partial N} = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial n}, \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial N^2} = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial N}\right) = -\frac{1}{2H^4}\frac{\partial H^2}{\partial n}\frac{\partial}{\partial n} + \frac{1}{H^2}\frac{\partial^2}{\partial n^2}\,;$$

onde, le (2′) si trasformano nelle seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} & u = \Upsilon\,, \\ & aH^2\Delta u - \frac{1}{2}\frac{\partial H^2}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial n} + H^2\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = H^4\lambda\,, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Υ, λ essendo le funzioni in x, y, trasformate di Υ_0, λ_0, e che perciò saranno conosciute in ogni punto della circonferenza s di σ.

Se introduciamo la funzione Ω definita dalle (15), e poniamo

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

osservando che H^2 è una funzione razionale di x, y, e che:

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}\,, \qquad \Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\,,$$

è facile vedere che le (17) si mutano nelle:

$$(17')\quad \begin{cases} \Omega = \gamma_1 \\ p' \dfrac{\partial \Omega}{\partial r} + p'' \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + q' \dfrac{\partial \Omega}{\partial \theta} + q'' \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} = \lambda_1, \end{cases} \qquad (r = 1)$$

in cui p', p'', q', q'' sono polinomi noti (non armonici, in generale), e γ_1, λ_1 sono funzioni conosciute nei punti della circonferenza s, cioè per $r = 1$.

5. — Ricordiamo ora che se $f(x, y)$ è una funzione armonica e regolare nel cerchio σ e sul contorno, si può scrivere:

$$(18)\qquad f(x, y) = \mathcal{R}[F(z) + ia],$$

essendo $F(z)$ una determinata funzione di z, regolare nello stesso campo, ed a una costante reale arbitraria.

Potremo così porre:

$$(19)\quad \begin{cases} \varphi = \mathcal{R}\Phi(z), & \psi = \mathcal{R}\Psi(z), \\ p_s' = \mathcal{R} P_s'(z), & q_t' = \mathcal{R} Q_t'(z), \end{cases}$$
$$(s = 0, 1, 2, \ldots, m;\ t = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

ed in ciascuna di queste $m + n + 4$ secondi membri compare una costante reale indeterminata; e cioè rispettivamente le costanti h_0'', k_0'', p_{0s}', q_{0t}', coefficienti delle parti immaginarie di $\Phi(0)$, $\Psi(0)$, $P_s'(0)$, $Q_t'(0)$. Va notato che $P_s'(z)$ e $Q_t'(z)$ risultano polinomi in z, rispettivamente di grado s e t.

Dopo ciò, essendo r^2 reale, dalla (16) si ha:

$$\Omega = \mathcal{R}\Phi(z) \,.\, \mathcal{R}\sum_0^m {}_s (r^2 - 1)^{m-s} P_s'(z) +$$
$$+ \mathcal{R}\Psi(z) \,.\, \mathcal{R}\sum_0^n {}_s (r^2 - 1)^{n-s} Q_s'(z),$$

od anche:

$$2\Omega = \mathcal{R}\Big\{ \sum_0^m {}_s (r^2 - 1)^{m-s} [P_s'(z) + \mathrm{K}P_s'(z)]\, \Phi(z) +$$
$$+ \sum_0^n {}_s (r^2 - 1)^{n-s} [Q_s'(z) + \mathrm{K}Q_s'(z)]\, \Psi(z)] \Big\},$$

da cui, in virtù della (11), si ricava:

$$(20)\quad \Omega = \mathcal{R} \sum_0^m{}_t (r^2 - 1)^t [P_t''(z)\, \Phi_m(z) + Q_t''(z)\, \Psi_n(z) + H_t(z)],$$

ove Φ_m, Ψ_n sono funzioni di z, regolari in σ, e P_t'', Q_t'', H_t sono polinomi in z, fra i quali P_0'', Q_0'', H_0 sono rispettivamente di grado $2m$, $2n$, $2m - 1$; per t maggiore di zero, P_t'', H_t sono di grado m, invece i polinomi Q_t'' sono di grado n se $0 < t \leq n$, mentre per $t > n$ si ha $Q_t'' = 0$.

Si riconosce poi facilmente che nei polinomi P_t'', Q_t'', H_t compaiono linearmente i coefficienti dei polinomi $P(z)$, $Q(z)$ della (12), e non compaiono più (n. 2) le $m + n + 2$ costanti reali indeterminate:

$$(21)\qquad p_{00}', p_{01}', p_{02}', \ldots, p_{0m}'; \qquad q_{00}', q_{01}', q_{02}', \ldots q_{0n}'.$$

Inoltre, nei polinomi H_t figura linearmente il gruppo formato dalle $2(m + n)$ costanti reali:

$$(22)\qquad \begin{cases} h_0', h_1', \ldots, h'_{m-1}; & h_0'', h_1'', \ldots, h''_{m-1}; \\ k_0', k_1', \ldots, k'_{n-1}; & k_0'', k_1'', \ldots, k''_{n-1}; \end{cases}$$

definite dalle:

$$h_s' + ih_s'' = \left[\frac{d^s\Phi(z)}{dz^s}\right]_{z=0}, \qquad k_t' + ik_t'' = \left[\frac{d^t\Psi(z)}{dz^t}\right]_{z=0},$$
$$(s = 0, 1, 2, \ldots, m - 1;\ t = 0, 1, 2, \ldots, n - 1).$$

6. — Possiamo ancora scrivere la (20) sotto la forma:

$$(20')\qquad \Omega = \mathcal{R} \{ w_0(z) + (r^2 - 1)\, w_1(z) + \\ + (r^2 - 1)^2\, w_2(z) + (r^2 - 1)^3\, T(z, z\bar{z}) \},$$

ove le

$$(23)\qquad w_t = P_t''(z)\, \Phi_m(z) + Q_t''(z)\, \Psi_n(z) + H_t(z), \quad (t = 0, 1, 2),$$

sono funzioni regolari in σ della variabile complessa z; T è una funzione di z e di $r^2 = z\bar{z}$, finita e continua in σ.

La questione proposta è ricondotta così alla determinazione delle funzioni $\Phi_m(z)$, $\Psi_n(z)$, nonchè delle varie costanti indeterminate (22), che figurano nelle funzioni w_0, w_1, w_2, T.

Sostituendo l'espressione della (20′) di Ω nella prima delle (17′), nei punti della circonferenza s ($r=1$), si ha:

$$\mathcal{R} w_0(z) = \Upsilon_1,$$

dal che si deduce che la funzione $w_0(z)$ è conosciuta in ogni punto del cerchio σ, e si sa determinarla (*) a meno di una costante reale c_0'. Così dalle (23), si ha:

$$P_0''(z)\,\Phi_m(z) + Q_0''(z)\Psi_n(z) + H_0(z) = w_0(z) + ic_0', \tag{24}$$

ed essendo noto (a meno della costante c_0') il secondo membro, si ha così una prima relazione fra le funzioni $\Phi_m(z)$ e $\Psi_n(z)$.

7. — Per tener conto della seconda delle (17′), osserviamo dapprima che se $U(z)$ è una funzione della variabile complessa $z = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$, si ha ovviamente:

$$\frac{\partial^s \mathcal{R}\, U(z)}{\partial r^s} = \mathcal{R}\frac{\partial^s U(z)}{\partial r^s}, \qquad \frac{\partial^s \mathcal{R}\, U(z)}{\partial \theta^s} = \mathcal{R}\frac{\partial^s U}{\partial \theta^s},$$

per ogni valore intero e positivo di s, ed anche:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{z}{r}\,\frac{dU}{dz}, && \frac{\partial U}{d\theta} = iz\,\frac{dU}{dz}, \\ &\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{z^2}{r^2}\,\frac{d^2U}{dz^2}, && \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -z^2\,\frac{d^2U}{dz^2} - z\,\frac{dU}{dz}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Allora, dalla (20′) si ha:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \mathcal{R}\left[\frac{z}{r}\,\frac{dw_0}{dz} + 2rw_1 + \frac{z}{r}\,(r^2-1)\,\frac{dw_1}{dz} + 4r\,(r^2-1)\,w_2 + \ldots\right], \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} = \mathcal{R}\left(\frac{z^2}{r^2}\,\frac{d^2w_0}{dz^2} + 2w_1 + 4z\,\frac{dw_1}{dz} + 8rw_2 + \ldots\right), \tag{27}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} = \mathcal{R}\left(iz\,\frac{dw_0}{dz} + \ldots\right), \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\theta^2} = \mathcal{R}\left(-z^2\,\frac{d^2w_0}{dz^2} - z\,\frac{dw_0}{dz} + \ldots\right),$$

(*) Per i metodi relativi alla costruzione di questa funzione, vedi T. Boggio, *Sulle funzioni di variabile complessa in un'area circolare* [" Atti della R. Accad. di Torino ", vol. XLVII (1911-12), pp. 22–37].

ove i puntini stanno ad indicare dei termini finiti in σ, che contengono il fattore $r^2 - 1$ almeno alla prima potenza. Perciò, sostituendo nella seconda delle (17′), siccome la $w_0(z)$ è già nota, si ha che per $r = 1$ dev'essere:

$$2(p' + p'')\mathcal{R}w_1 + 4p''\mathcal{R}\left(z\frac{dw_1}{dz}\right) + 8p''\mathcal{R}w_2 = \lambda_2 \quad (r = 1), \tag{29}$$

essendo λ_2 una funzione nota in tutti i punti di s.

8. — Indichiamo ora con $L(z)$ ed $N(z)$ i polinomi della variabile complessa z, la cui parte reale in ogni punto della circonferenza s (cioè per $r = 1$) assume rispettivamente i valori di $p' + p''$, p''. In questi polinomi tutti i coefficienti saranno determinati, salvo i due primi coefficienti $L(0)$, $N(0)$, le cui parti imaginarie $[L(0) - \mathrm{K}L(0)]/2 = -ia_0'$, $[N(0) - \mathrm{K}N(0)]/2 = -ib_0'$ sono indeterminate.

Sia ν il massimo grado di questi due polinomi, e poniamo allora [analogamente a quanto si è fatto nel n. 1, per la $F(z)$]:

$$\left\{\begin{aligned} w_1(z) &= \sum_0^{\nu-1}{}_s\, g_s z^s + z^\nu W_1(z), \\ w_2(z) &= \sum_0^{\nu-1}{}_s\, l_s z^s + z^\nu W_2(z), \end{aligned}\right. \tag{30}$$

ove W_1 e W_2 sono delle funzioni di z, regolari in σ, e

$$g_s = g_s' + ig_s'', \quad l_s = l_s' + il_s'', \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1), \tag{31}$$

sono delle costanti complesse; s'avrà così:

$$z\frac{dw_1}{dz} = \sum_0^{\nu-1}{}_s\, s g_s z^s + z^\nu\left[\nu W_1(z) + z\frac{dW_1}{dz}\right].$$

Quindi, trasformando ciascuno dei prodotti:

$$2\mathcal{R}L(z) \,.\, \mathcal{R}w_1(z), \qquad 2\mathcal{R}N(z) \,.\, \mathcal{R}\left(z\frac{dw_1}{dz}\right),$$
$$2\mathcal{R}N(z) \,.\, \mathcal{R}w_2(z),$$

mediante la (11), la condizione (29) potrà scriversi:

$$\mathcal{R}\left[M + M'W_1 + M''W_2 + M'''z\frac{dW_1}{dz}\right] = \gamma_2,$$

ove M, M', M'', M''' sono polinomi in z, il primo dei quali è di grado $2\nu - 1$, gli altri sono al più di grado 2ν, ed almeno uno di essi raggiunge tale grado. Inoltre, i coefficienti di M', M'', M''' sono completamente noti, perchè in essi non compaiono più le indeterminate a_0', b_0', mentre in M compaiono linearmente le 4ν costanti reali, da determinarsi:

$$(31') \qquad g_0', g_1', \ldots, g'_{\nu-1}, g_0'', g_1'' \ldots, g''_{\nu-1}; l_0', l_1', \ldots, l'_{\nu-1}, l_0', l_1', \ldots, l''_{\nu-1}.$$

Perciò, se indichiamo ancora con $\Gamma(z)$ la funzione di z, regolare in σ, la cui parte reale assume in ogni punto della circonferenza di σ lo stesso valore ivi assunto da γ_2, e con c_1' una nuova costante reale, da determinarsi, si ha:

$$(32) \qquad M(z) + M'(z) W_1(z) + M''(z) W_2(z) + \\ + M'''(z) \,.\, z \frac{d W_1(z)}{dz} = \Gamma(z) + i c_1'.$$

9. — Dalle (23) e (30) si ha pure:

$$(33) \quad P_t''(z) \Phi_m(z) + Q_t''(z) \Psi_n(z) + H_t'(z) = z^\nu W_t(z), \quad (t = 1, 2),$$

ove nei polinomi H_t' figurano le costanti (22), (31').

Inoltre, dalla (24), e per $Q_0''(z) \neq 0$, si ha:

$$(34) \qquad \Psi_n(z) = \frac{w_0 + i c_0' - H_0 - P_0'' \Phi_m}{Q_0''};$$

e sostituendo questo valore nelle (33), si ottengono le equazioni:

$$(33') \quad (Q_0'' P_t'' - Q_t'' P_0'') \Phi_m + Q_0'' H_t' + Q_t'' (w_0 + i c_0' - H_0) = \\ = z^\nu Q_0'' W_t, \qquad (t = 1, 2).$$

Se ricaviamo da queste le funzioni W_1, W_2, sostituendole nella (32), si ottiene un'equazione differenziale lineare del primo ordine in $\Phi_m(z)$, la quale, nell'ipotesi di $z M' Q_0'' (P_1'' Q_0'' - P_0'' Q_1'') \neq 0$, può mettersi sotto la forma:

$$(35) \qquad \frac{d\Phi_m}{dz} = \frac{A_0 \Phi_m + B_0}{z M''' Q_0'' (P_1'' Q_0'' - P_0'' Q_1'')},$$

ove A_0, B_0 sono polinomi in z contenenti le costanti reali (22), (31'), c_0', c_1', il cui numero totale è $2m + 2n + 4\nu + 2$.

Quest'equazione, com'è noto, si integra facilmente e nel suo integrale generale compare una nuova costante complessa arbitraria, cioè due nuove costanti reali c_2', c_2'', da determinare.

Poichè la funzione $\frac{d\Phi_m}{dz}$, al pari di Φ_m, deve essere regolare in σ, dalla (35) si deduce che in quei punti di σ in cui è verificata una delle equazioni:

$$(36)\qquad z=0,\quad M'''=0,\quad Q_0''=0,\quad P_1''\,Q_0''-P_1''\,Q_0''=0,$$

dovrà pure essere soddisfatta la

$$A_0\,\Phi_m+B_0=0,$$

la quale, per $A_0 \neq 0$, permette di ricavare il valore di Φ_m in ogni punto z, di σ, prima escluso. Tale valore di Φ_m lo si ottiene anche negli eventuali punti z di σ che soddisfano contemporaneamente alle (36) ed alla $A_0(z)=0$, non appena si imponga a $B_0(z)$ di possedere pure in detto punto uno zero con molteplicità eguale a quella di A_0; dopo ciò la funzione Φ_m sarà completamente determinata in ogni punto dell'area σ.

Ottenuta così la funzione $\Phi_m(z)$, dalla (34) si ricaverà $\Psi_n(z)$, e sostituendo tali espressioni nella (20), avremo Ω; e poi, dalla (15) si ottiene la funzione u che fornisce la soluzione del problema proposto.

10. — Occorre ora vedere come si procede alla *determinazione delle costanti* che compariscono nella soluzione indicata del nostro problema. In tale soluzione compariranno in generale tutte le costanti (22), (31') oltre alle c_1', c_2', c_2'', cioè complessivamente $2m+2n+4\nu+3$ costanti reali (da determinarsi), mentre, come appare dalle (20), (24), non entrerà in Ω (e neppure in u) la c_0'.

Per determinare queste costanti, osserviamo anzitutto che la funzione $\Psi_n(z)$ dev'essere finita in ogni punto del cerchio σ; perciò in ogni punto z per cui è soddisfatta l'equazione, di grado $2n$ (vedi il n. 5):

$$(37)\qquad Q_0''(z)=0,$$

dovrà pure essere soddisfatta la condizione:

$$(38) \qquad W_0(z) + ic_0' - H_0(z) - P_0''(z)\,\Phi_m(z) = 0;$$

anzi, ognuno dei punti indicati dev'essere uno zero della stessa molteplicità per i due primi membri delle (37), (38). In tal modo si ricava un primo gruppo di (al più $4n$) equazioni reali fra le costanti ricordate.

Basterà ora osservare che, come risulta ancora dalla (35), in ogni punto z di σ che verifica l'equazione:

$$A_0(z) = 0,$$

(il cui grado non è maggiore di $2m + 3n + 2\nu$), dev'essere:

$$zM'''Q_0''(P_1''Q_0'' - P_0''Q_1'')\frac{d\Phi_m}{dz} - B_0 = 0;$$

e si ha così un nuovo gruppo (con al più $6n + 4m + 4\nu$) equazioni reali fra le costanti che si debbono determinare.

Risulta così che il numero totale delle relazioni a cui debbono soddisfare le $2m + 2n + 4\nu + 3$ costanti reali da determinarsi non può superare $4m + 10n + 4\nu$. E siccome dal punto di vista fisico il problema ammette sempre una soluzione determinata, dobbiamo concludere che le condizioni indicate devono permettere sempre di determinare le costanti menzionate.

Per ottenere almeno in parte le costanti cercate, potrà spesso tornare utile l'osservare che essendo $W_1(z)$, $W_2(z)$ regolari in σ, dalle (33') segue che, nell'origine $z = 0$, debbono essere verificate le relazioni:

$$\frac{d^s}{dz^s}\left[P_t''\Phi_m + \frac{Q_t''}{Q_0''}(w_0 + ic_0' - H_0 - P_0''\Phi_m) + H_t'\right] = 0,$$
$$(s = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1;\ t = 1, 2),$$

le quali forniscono così 4ν relazioni reali fra le costanti da determinare.

Torino, Marzo 1915.

Relazione intorno alla Memoria del Dott. Ettore Del Vecchio:
Sulle equazioni $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(xy)$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi(xy)$.

Il sig. H. Block in alcuni recenti lavori aveva considerato, per le equazioni

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

quelle particolari soluzioni che egli chiamò " fondamentali ". Il Dott. Del Vecchio, nella sua Memoria, dopo d'aver approfondite le proprietà di quelle soluzioni, si serve di esse per ottenere l'integrazione delle equazioni

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi_1(x, y)$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi_2(x, y).$$

Si può dire che si tratta di ricerche analoghe a quelle che, per l'equazione di Laplace-Poisson, si son fatte intorno agl'integrali di strato, o di doppio strato, ... che compaiono nella ordinaria formola di Green. Un altro raffronto si può fare, cioè con un noto studio di E. E. Levi su un'equazione parabolica del 2° ordine: la così detta equazione del calore.

Ma l'estensione dei metodi noti alle suddette equazioni del 3° ordine non è immediata. Le difficoltà da superare sono molteplici, perchè le funzioni di cui si devon studiare gl'integrali hanno singolarità di un tipo complicato. Queste difficoltà sono state superate con un lavoro paziente e metodico, che dimostra nell'Autore una buona padronanza della tecnica del calcolo integrale.

La ricerca fatta era necessaria per poter poi affrontare lo studio dei teoremi d'esistenza. Essa risolve questioni importanti, in un campo ben poco conosciuto dell'Analisi: quello delle equazioni paraboliche. In conseguenza noi proponiamo che la Memoria sia accolta nei volumi accademici.

E. D'Ovidio.
C. Segre, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 18 Aprile 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: Chironi, Direttore della Classe, Carle, Pizzi, Ruffini, D'Ercole, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Prato, Stampini Segretario della Classe. — È scusata l'assenza dei Socii De Sanctis e Vidari per pubblico ufficio.

Si legge e si approva l'atto verbale della adunanza precedente del 28 marzo.

Il Presidente comunica una lettera del Senatore Francesco D'Ovidio, che ringrazia per la sua nomina a Socio nazionale non residente della nostra Accademia. Dà pure comunicazione di un opuscolo e di una circolare della " Società Leonardo da Vinci „ di Firenze, riguardanti le adesioni all'ordine del giorno cui si è associata anche la nostra Accademia.

Il Presidente prende occasione dal recente lutto, che ha colpito duramente la famiglia di Quintino Sella con la morte della esimia donna che di lui fu fedele e diletta compagna, per rievocare la nobilissima figura del grande statista e scienziato che fu della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della nostra Accademia ornamento insigne e che dall'ordinamento della nostra Accademia trasse l'idea di quella riforma

della Reale Accademia dei Lincei, la quale, appunto per iniziativa di lui, fu sancita col decreto reale del 14 febbraio 1875. Ma la memoria venerata di Quintino Sella è pur sempre fresca nella nostra Classe di Scienze morali, storiche e filologiche per l'altissima benemerenza, sopra tutto, che degli studi storici acquistò il Sella con l'opera da lui spesa per il ricupero e la pubblicazione del *Codex Astensis*. Propone pertanto che alla famiglia Sella sia spedita una parola di condoglianza, la quale esprima il ricordo costante della nostra Accademia per i meriti straordinari che ebbe il grande Biellese nella scienza e nella vita politica italiana. La Classe unanime approva la proposta del Presidente.

Il Socio Ruffini presenta, a nome dell'autore, una serie di volumi pubblicati dal Prof. Michele Scherillo della R. Accademia Scientifico-letteraria di Milano per mezzo dell'editore Ulrico Hoepli, il quale non solo ha voluto che quei volumi fossero alla nostra Accademia presentati in una distinta legatura, ma si è pur compiaciuto di aggiungere, da parte sua, il dono dei volumi comprendenti le opere di Gaetano Negri. Il Socio Ruffini rileva l'importanza del duplice dono, e, a proposito dei lavori dello Scherillo, in particolar guisa si sofferma a parlare del poderoso volume intitolato *La Vita Nuova di Dante*. E la Classe delibera di esprimere il suo gradimento e i suoi ringraziamenti ai due egregi donatori.

Il Socio Brondi presenta, a nome dell'autore, il secondo volume, che riguarda il *Diritto moderno,* dell'opera del Prof. Gaspare Ambrosini intitolata *Trasformazione delle persone giuridiche*, e ne mette in rilievo l'importanza.

Il Socio Einaudi, anche a nome del collega Prato, presenta il volume XXV, anno 1914, di *La Riforma Sociale, rivista critica di economia e di finanza* con due volumi di supplemento, dei quali illustra l'importanza, uno di Riccardo Bachi dal titolo *L'Italia economica nel 1913*, e l'altro, che è la prima traduzione

italiana, condotta sull' ultima edizione inglese, dell' opera *La nuova Irlanda* di Horace Plunkett, alla quale il traduttore Gino Borgatta ha fatto precedere una introduzione su *Il problema della rinascenza irlandese e la nostra questione meridionale.*

Il Socio Stampini presenta, a nome degli eredi del compianto Socio Bernardino Peyron, il volume di lui intitolato *Codices Italici manu exarati qui in Bibliotheca Taurinensis Athenaei ante diem XXVI Ianuarii M.CM.IV asservabantur*, pubblicato in Torino appunto nell'anno in cui la nostra Biblioteca Nazionale Universitaria fu irreparabilmente privata di tanti cimeli da un immane incendio.

Il Socio Chironi presenta una Nota manoscritta dell'Avvocato Prof. Valerio A. Cottino, *Del sistema ipotecario germanico.* Sarà inserita negli *Atti* accademici.

Sarà pure inserita negli *Atti* accademici la Nota del Professore G. Rotondi, presentata dal Socio Ruffini, che è intitolata *Problemi giuridici in alcuni Scolii di Teodoro Balsamone.*

Costituitasi quindi la Classe in seduta privata, procede alla nomina della Commissione per il premio Gautieri riservato alla Filosofia, triennio 1912-1914, e riescono eletti i Soci Vidari, D'Ercole e Carle.

LETTURE

Del sistema ipotecario germanico (*).

Nota dell'Avv. Prof. VALERIO A. COTTINO.

L' ipoteca, concepita quale diritto accessorio di garanzia, quale diritto che ripete l'esistenza sua dall'esistenza di un diritto di credito, così come si mostra nel Codice patrio (articoli 1964 seg.), assume in quello germanico importanza secondaria (1): di contro ad essa primeggia invece il diritto autonomo di garanzia. Studiarlo a traverso a quegli istituti che rivelano le linee-base del sistema straniero sì da far di questo palesi pregi e virtù, vuol essere il modesto compito mio.

§ 1.

L'ipoteca normale ed il debito fondiario.

Diritti autonomi di garanzia sono, per legge germanica, sostanzialmente: la ipoteca normale (*Verkehrshypothek*) ed il debito fondiario (*Grundschuld*).

a) A giudicare dalla definizione che della ipoteca detta il legislatore, parrebbero far difetto gli elementi a conforto della asserita autonomia. " L'ipoteca, si legge, è il peso gravante su di un fondo in virtù del quale la persona, in cui favore è tolta,

(*) Prolusione al Corso libero di diritto civile, detta nella R. Università di Torino addì 28 novembre 1914.

(1) Le parti contraenti sono libere di accogliere, quando il consigli l'interesse loro, questa forma di garanzia. Il legislatore dal canto suo la prescrive: *a)* per l'ipoteca a servigio di titoli all'ordine od al portatore (§ 1187) o di un debito, non ancora esistente, ma che potrà sorgere fino ad un importo massimo prestabilito (§ 1190), *b)* per l'ipoteca che spetta al costruttore sull'edificio da lui allestito ed a copertura del suo credito (§ 648).

ha diritto di realizzare, colla vendita del fondo, *una certa somma a causa di un credito che gli compete* (1) „. Definizione che non rende per sè veruna caratteristica che non sia della ipoteca tradizionale. Son posti in evidenza la natura reale del diritto di pegno, il nesso suo col diritto di credito, il potere infine *del creditore e non del titolare della ipoteca*, di ottenere, colla liquidazione forzosa del valore della cosa, l'importo del suo credito.

Eppure uno è il regolamento della ipoteca normale, uno quello della ipoteca di sicurtà o tradizionale, una la virtù della ipoteca normale, una quella della ipoteca di sicurtà.

Per il legislatore germanico ipoteca di sicurtà è “ l'ipoteca costituita in tal guisa che l'efficacia sua *solo si misura dal diritto di credito* ed al creditore non è lecito far richiamo alle risultanze della iscrizione ipotecaria a dimostrazione del suo credito „ (2).

Gli è che il carattere accessorio che il Codice conserva alla ipoteca normale, anzi in più punti decisamente rileva, è soprafatto da una serie di provvidenze che fanno della ipoteca un diritto autonomo, perchè moventesi in un'orbita che non è quella del diritto di credito.

Il Codice dispone bensì doversi il pagamento effettuare a mani di chi, giusta l'iscrizione ipotecaria, risulta investito della ipoteca *a causa di un credito che gli compete* (§ 1113), non potersi cedere il credito senza l'ipoteca e l'ipoteca senza il credito, esser lecito al proprietario opporre al creditore tutte le eccezioni che sono in facoltà del debitore (§ 1137), ma, di fatto, avviene che il pagamento è valido anche a mani di chi non è il creditore, che può aversi cessione della ipoteca, senza la cessione del credito. E come, eccoci a dimostrarlo.

L' iscrizione ipotecaria, che è ricevuta nel libro fondiario

---

(1) § 1113: “ Ein Grundstück kann in der Weise belastet werden, dass “ an denjenigen, zu dessen Gunsten die Belastung erfolgt, eine bestimmte “ Geldsumme zur Befriedigung wegen einer ihm zustehenden Forderung aus “ dem Grundstücke zu zahlen ist „.

(2) § 1184: “ Eine Hypothek kann in der Weise bestellt werden, dass “ das Recht des Gläubigers aus der Hypothek sich nur nach der Forderung “ bestimmt und der Gläubiger sich zum Beweise der Forderung nicht auf “ die Eintragung berufen kann „. A spiegare il secondo punto della definizione varrà quanto dirò in seguito sul valore del libro fondiario o catastrale.

(*Grundbuch*) (§ 873), lascia presumere non solo l'esistenza del diritto d'ipoteca, ma l'esistenza dello stesso diritto di credito (1).

Il creditore non è perciò tenuto, quando agisce in via ipotecaria, a provare l'esistenza del suo credito, come dovrebbe per legge italiana, ma a lui basterà richiamarsi puramente e semplicemente alla fede del libro fondiario.

In quanto al debitore, questi può contrastare l'azione ipotecaria, a motivo, ad esempio, che il credito più non esiste o non è mai venuto ad esistenza, ma solo quando a procedere sia il creditore originario.

Nei confronti del terzo acquirente il debitore non può far valere che le eccezioni di cui il terzo fosse a conoscenza al momento dell'acquisto della ipoteca (ed a lui incombe provarlo) e tutte quelle altre derivanti dalla dizione stessa del libro fondiario (2).

V' è di più. L' ipoteca acquista, colla iscrizione nel libro fondiario, il dono della perpetuità: non va cioè soggetta a prescrizione (§ 902), contrariamente al disposto della legge patria (3). Ne consegue che la prescrizione del diritto di credito non influisce sulla esistenza della ipoteca.

Precisiamo però. Se il debitore od il proprietario gravato non ha diritto di opporsi all' azione ipotecaria, promossa dal terzo acquirente di buona fede, se bene il credito, a garanzia del quale è sorta l' ipoteca, sia prescritto, ha bensì diritto di opporsi all'azione ipotecaria quando procedente sia lo stesso creditore originario ed opporsi nel senso di costringerlo a rinunciare all'ipoteca (§ 1169). E s' intende. La prescrizione del rapporto obbligatorio è lecito influisca sulla ipoteca nei confronti di chi, come il creditore originario, del medesimo è a conoscenza e, perciò, in condizione di arrestarne la prescrizione, non nei

---

(1) V. i §§ 891 seg. richiamati dal § 1138.

(2) V. sul punto: Crome, *System des deuts. bürg. Rechts*, vol. III, 1905, p. 652. Naturalmente distinzione non ha più ragione di essere quando le eccezioni riflettono non il diritto di credito, ma lo stesso diritto ipotecario (v. § 1157).

(3) Art. 2030: Le ipoteche si estinguono parimente colla prescrizione, la quale, riguardo ai beni posseduti dal debitore, si compie con la prescrizione del credito, e riguardo ai beni posseduti dai terzi si compie anche col decorso di trent'anni, secondo le regole stabilite nel titolo *Della prescrizione*.

confronti del terzo acquirente, al quale non si può domandare di interrompere la prescrizione di un rapporto, cui è rimasto estraneo.

L'ordinamento mostra adunque che la natura accessoria del diritto d'ipoteca è stata dal legislatore semplicemente presupposta (1); in realtà il creditore ipotecario esplica non un diritto di credito, ma un puro diritto d'ipoteca e, conseguentemente, trae il suo diritto ad agire non dall'esistenza del credito, ma dalla esistenza della ipoteca.

b) L'autonomia del diritto di pegno, già sì evidente nella ipoteca ordinaria germanica, trova tutta l'interezza sua nel " *debito fondiario* „: locuzione non felice che par voglia fare del fondo gravato un soggetto, anzichè un oggetto di diritti, mentre più correttamente l'avrebbe sostituita, come del resto la stessa dottrina germanica avverte (2), quella pura e semplice di " ipoteca autonoma „.

L'idea di plasmare il diritto d'ipoteca a somiglianza di un diritto per sè stante non è nuova negli annali della storia. La legge francese 9 messidoro, anno III, autorizzava ogni proprietario ad emettere — fino al limite di tre quarti del valore del fondo — cartelle ipotecarie, trasmissibili per girata, ma, non essendo i titoli produttivi d'interesse, l'istituzione rimase lettera morta.

Vizio dal quale è immune l'istituto germanico. Il " *debito fondiario* „ è il peso gravante su di un fondo, in virtù del quale la persona, in cui favore è costituito, ha diritto di procurarsi — con la vendita forzata del fondo — una determinata somma e, con essa, gli interessi nella misura convenuta, qualora detta somma non gli sia altrimenti pagata (3).

---

(1) V. Dernburg, *Sachenrecht des deutschen Reichs*, 1904, § 222; Endemann, *Einführung in das Studium des bürg. Gesetzbuches*, Berlino, vol. II, p. II (1900), § 115 b. pag. 453.

(2) V. Horn R., *Die Eigentümerhypothek*, Breslau, 1906, p. 16, dagli: " Studien zur Erläuterung des bürg. Rechts „, pubblicati per cura di Rudolf Leonhard, puntata 19.

(3) Questa, a un dipresso, la definizione dell'Horn (op. cit., p. 27): definizione che si desume dal combinato disposto dei §§ 1191 e 1192 del Codice.

§ 1191: " Ein Grundstück kann in der Weise belastet werden, dass an

Qui il distacco del pegno, inteso in senso generico, dal credito è assoluto. La causa che ha indotto il proprietario a gravare il suo fondo non appare, il debito, in sicurtà del quale l'ipoteca fosse stata costituita, non trova menzione nel libro fondiario, nè al credito è lecito in qualsiasi modo fare richiamo nelle eventuali contestazioni giudiziali sul " *debito fondiario* „: l'esistenza insomma del diritto di credito, l'esercizio suo, il suo estinguersi sono fatti indifferenti alla esistenza, all'esercizio, all'estinzione dell'ipoteca (§ 1192).

Indipendenza che fa del " *debito fondiario* „ un diritto che sta *ad laterem* della proprietà: diritto che, colle caratteristiche dei diritti reali, ha tutti gli scopi del diritto di credito: di qui la locuzione germanica di " *debito fondiario* „, giuridicamente imperfetta, ma rappresentativa di molto.

Il " *debito fondiario* „ si risolve infatti in un diritto ad una determinata somma, così come un diritto di credito (1) gode invece, come diritto reale, della disciplina dei diritti reali. Può essere costituito senza limiti di tempo: non di meno — previo congruo termine — è facoltà del proprietario di veder liberato il suo fondo, come del creditore di indurre la liquidazione del valore del fondo gravato (§ 1193): così la finalità del credito si sposa a maraviglia alla natura reale del diritto.

" dengenigen, zu dessen Gunsten die Belastung erfolgt, eine bestimmte " Geldsumme aus dem Grundstücke zu zahlen ist „.

§ 1192: " Auf die Grundschuld finden die Vorschriften über die Hy- " pothek entsprechende Anwendung, soweit sich nicht daraus ein Anderes " ergiebt, dass die Grundschuld nicht eine Forderung voraussetzt. Für Zinsen " der Grundschuld gelten die Vorschriften über die Zinsen einer Hypothe- " kenforderung „.

(1) Diritto a realizzarlo però nei limiti segnati dal grado ipotecario e dallo stato del fondo gravato. Di modo che, qualora il creditore abbia ad uscire, in tutto o in parte, perdente dal giudizio di subasta, non per ciò egli avrà diritto di procedere, come il nostro creditore ipotecario, in via chirografaria sugli altri beni del possessore del fondo, anche se questi è l'originario costituente l'ipoteca. E la dottrina germanica, a porre in evidenza la localizzazione del credito, designa il titolare del " *debito fondiario* „ (o della " ipoteca normale „, se terzo acquirente), " *creditore reale* „ in conspetto del " *creditore* '*personale*' „, avente il primo " *facultas in rem competens, sine respectu ad certam personam* „ (Grozio), il secondo " *facultas competens in personam ut haec aliquid dare vel fruere teneatur* „ (Ubero) (V. fra gli altri, Crome, op. cit., § 641, pag. 653).

§ 2.

La cartella ipotecaria.

Ma l'autonomia del diritto ipotecario non poteva essere voluta e creata dal legislatore germanico in sè e per sè, quanto piuttosto per riuscire, a mezzo suo, a quella materializzazione astratta cui la scienza è pervenuta per il diritto di credito e la stessa garanzia personale.

Poichè può costituirsi valevolmente una fideiussione per cambiale ed il fideiussore è tenuto verso chi risulti legittimamente investito dell'effetto, senza riguardo ai rapporti che lo uniscono al creditore originario, perchè non sarà lecito giungere ai medesimi risultati per la garanzia immobiliare?

Ed ecco come il problema è stato risolto dal legistatore germanico.

Stando alla legge italiana, il processo formativo della ipoteca consta di due momenti: preparatorio l'uno, creativo l'altro, il primo si consuma coll' intervenuto accordo fra debitore e creditore in virtù del quale il debitore si obbliga di concedere ipoteca sul suo fondo in favore del creditore, il secondo colla iscrizione ipotecaria (§ 1965 Cod. civ.).

Ed a questi due momenti fa capo, secondo la legge germanica, il processo formativo della ipoteca di sicurtà. Altrimenti avviene, od almeno può avvenire, per l' ipoteca normale ed il " *debito fondiario* ".

Se le parti non hanno altrimenti disposto, l'Ufficio fondiario o catastrale rilascia, ad ogni iscrizione, una cartella o lettera: *Briefshypothek* (§ 1116). La lettera riproduce i termini della avvenuta iscrizione: indica cioè le persone del debitore e creditore, e tutti gli altri estremi della ipoteca, così come risultano dal libro fondiario (1). Essa ripete perciò la sua autorità dalla autorità della iscrizione, sì che, nel conflitto fra la

---

(1) V. §§ 56, 57 dell'Ordinamento del libro fondiario 24 marzo 1897 e sull'argomento: Siméon, *Die Reichsgrundbuchordnung*, Berlin, 1897.

locuzione della cartella e la locuzione del libro fondiario, questa prevale su quella (1).

La cartella, emessa che sia, è pure idonea per sè ad attestare fatti successivi alla iscrizione, quali: acconti parziali, rinuncie, ecc.; fatti cui il terzo acquisitore è tenuto anche se li medesimi non figurano nel libro fondiario (2).

Ciò non basta però a fare della cartella un titolo indipendente nello stretto senso della parola: essa è piuttosto un documento che sta a specificare il titolare della ipoteca, un documento che del titolo autonomo, e precisamente del titolo nominativo, gode tutta la disciplina (3).

Il creditore ipotecario infatti non acquista l'ipoteca che colla rimessione che gli venga fatta della cartella relativa (§ 1117); egli, a sua volta, opera il trasferimento della ipoteca colla semplice cessione o girata della cartella e conseguente sua dismessione: cessione che deve però essere sanzionata da un pubblico ufficiale, se vuole aver l'efficacia della iscrizione nel libro fondiario (§§ 1154, 1155). Di modo che, autorizzato ad esercitare l'azione ipotecaria è non solo il possessore della lettera, iscritto nel libro fondiario, ma pure il possessore che tale risulti per una serie ininterrotta di girate o cessioni a partire dal creditore iscritto nel libro fondiario (4).

Quanto ho detto per la ipoteca normale vale per il " *debito fondiario* ", con un'avvertenza però e di rilievo. La legge, avuto riguardo alla decisa autonomia del " *debito fondiario* ", consente, previa determinate cautele, l'emissione di cartelle al portatore (§ 1195). Ogni formalismo è così tolto di mezzo: la consegna della cartella induce senz'altro il trasferimento del " *debito fondiario* ", il possesso materiale della cartella è titolo che per sè abilita all'azione ipotecaria.

Agilissima forma di trapasso di cui le parti possono profittare anche se dapprima hanno costituito un'ipoteca normale: basterà loro tramutarla in " *debito fondiario* ": chè lo consente la legge al § 1198.

---

(1) Endemann, op. cit., § 118, pag. 467.

(2) V. § 1140 Cod. civ.

(3) Endemann, op. cit., § 119, pag. 468.

(4) V. § 40 Ord. libro fondiario e § 1155 Codice.

Questa la struttura della lettera ipotecaria germanica, la cui portata trascende il fatto puramente formale per assurgere ad una importanza economico-sociale. La lettera ipotecaria infatti, mentre, per un verso, fa della espropriazione forzata un epilogo assolutamente eccezionale: trovando il creditore nella dismessione della lettera il mezzo più semplice e celere per il ricupero del suo credito, realizza, per altro, in pro ed a servigio del proprietario, un titolo-valore per eccellenza: vero surrogato della moneta.

§ 3.

L'ipoteca del proprietario.

Per diritto germanico un creditore ipotecario non può assumere un grado ipotecario anteriore, rimasto vacante. Non si tratta qui del diritto del creditore ipotecario di essere surrogato nella ipoteca di grado anteriore, per aver egli soddisfatto il debito a cui garanzia serviva l'ipoteca anteriore, ma del diritto che può avere il creditore di assumere il grado della ipoteca anteriore, rimasta estinta e non per fatto suo.

Secondo il diritto romano e la legge italiana il progredire delle ipoteche posteriori, in seguito all'estinguersi di quelle anteriori, avviene indipendentemente dal voler del creditore, per virtù intima della ipoteca che, qual peso che insiste sul fondo e su tutto il fondo, si allarga *naturaliter* con l'estendersi della capienza del fondo (1).

Eccezionalmente la progressione è arrestata, quando l'ipoteca anteriore, più che estinta, nello stretto senso della parola, è impedita nell'esercizio suo, come quando nella persona del creditore ipotecario anteriore fa pure capo la qualità di proprietario. Questi può allora, nel concorso coi creditori ipotecari successivi, escluderli nei limiti segnati dal valore della sua ipoteca (2).

---

(1) Per il diritto Romano v.: L. 15, § 2, D. 20. 1; l. 9, § 3, D. 20. 4 e per la legge Italiana: art.[i] 1964. 2032 del Codice civile.

(2) " In proposita autem quaestione magis me illud movet, numquid pignoris jus exstinctum sit dominio acquisito: neque enim potest pignus

E tanto autorizza pure la legge italiana, dove, non a caso, non figura fra i modi di estinzione della ipoteca la confusione nella stessa persona delle qualità di proprietario e creditore ipotecario (1).

Si ha così nel potere del proprietario, in certa guisa, una ipoteca sul fondo proprio.

Ma il diritto germanico assai più oltre si è spinto, facendo della ipoteca sul fondo proprio, anzichè una figura di ripiego e secondaria, una ipoteca che sta di contro alla ipoteca vera e propria.

Sorge, per legge germanica, l'ipoteca sul fondo proprio, non solo per il confondersi nella stessa persona delle qualità di proprietario e creditore ipotecario (§ 1177), non solo per l'estinguersi di una ipoteca (§§ 1163, 1168), ma pure indipendentemente dal venir meno di una ipoteca:

a) Ogni ipoteca, per cui le parti non abbiano esclusa l'emissione di una lettera ipotecaria, esiste anzitutto quale ipoteca del proprietario.

L'ufficio catastale deve infatti consegnare la cartella ipotecaria al proprietario e non al creditore (2). Sta al proprietario rimetterla al creditore, prima di che l'ipoteca esiste in favore del proprietario: preziosa cautela, a sue mani, contro la eventuale inadempienza del creditore (§ 1117);

b) Se il credito, per cui l'ipoteca è stata costituita, non è venuto ad esistenza, l'ipoteca non cade nel nulla, come dovrebbe, ma passa al proprietario, trasformata in *debito fondiario* (§§ 1163, 1177).

L'ipoteca sul fondo proprio è adunque un diritto autonomo per eccellenza, tanto autonomo che non può esistere se esiste un diritto di credito.

Diritto autonomo che, per esistere, deve concorrere con

---

perseverare domino constituto creditore. Actio tamen pignoraticia competit: verum est enim, et pignori datum et satisfactum non esse „. L. 30 § 1, *De exceptione rei jud.*, 44. 2.

(1) Art. 2029 e Processi verbali Commissione di Coordin. del Cod. civ., n. 43 (20 maggio 1865). V. pure, sul punto: Chironi, *Trattato dei privilegi, delle ipoteche e del pegno,* vol. I (1894), n. 1864, p. 546.

(2) § 60 del Regolamento del libro fondiario.

altri diritti di garanzia: chè l'esercizio di un diritto di prelazione (in cui pur consiste l'ipoteca del proprietario) è materialmente possibile solo nell'incontro con altri diritti di prelazione.

Diritto autonomo d'ipoteca che, se non consente al proprietario di provocare la liquidazione forzata del valore del suo fondo, non conciliandosi nella stessa persona il contemporaneo esercizio attivo e passivo di un diritto, gli dà facoltà, qualora la vendita si effettui ad istanza dei terzi, di vedersi soddisfatta la sua ipoteca, secondo l'ammontare ed il grado suo e cioè in preferenza delle ipoteche successive, con esclusione, ben inteso, degli interessi per tutto il tempo in cui egli, nella sua qualità di proprietario, è stato al godimento del fondo.

Il proprietario può però, alla stregua di qualunque creditore ipotecario, realizzare il valore della sua ipoteca anche prima della vendita del fondo, sia destinandola a servigio di un credito, sia cedendola puramente e semplicemente. Nel primo caso avrà vita una ipoteca, nel secondo caso un “ *debito fondiario* „.

§ 4.

I difetti del sistema.

Questi gli istituti in cui l'autonomia del diritto ipotecario trova la sua più saliente espressione. Ma dovrà dirsi che il principio s'è estrinsecato pure nella forma più corretta, giuridica e pratica ad un tempo?

Ragioni varie ci consigliano di dubitarne: se da censura va esente la lettera ipotecaria, non così è della ipoteca normale e della ipoteca del proprietario:

a) Il legislatore meglio avrebbe provvisto a porre l'una di contro all'altra, senza istituti, senza linee intermedie l'ipoteca tradizionale romana e l'ipoteca autonoma. A che infatti si riduce il divario fra l'ipoteca normale ed il “ *debito fondiario* „? Ad un mero presupposto che, nell'un caso, l'ipoteca nasca sposata ad un diritto di credito ed alla sua garanzia intenda, mentre da tale presupposto prescinde la legge nell'altro caso. Ed infatti, il regolamento della ipoteca sostanzialmente a quello del “ *debito fondiario* „ si equivale, se si prescinde — per l'ipoteca —

dalle eccezioni spettanti al debitore contro il creditore originario e dalle formalità richieste per il trapasso della lettera ipotecaria: intoppi cui le parti possono ovviare tramutando l' ipoteca in " *debito fondiario* ";

b) Ma se l'ipoteca normale rappresenta un istituto destinato a vivere nel mondo della teoria, la figura della ipoteca del proprietario risente di difetti d'altra natura e più gravi.

Perchè se persuadono le ragioni che hanno determinato ad accoglierla, intendendosi con essa impedire ai creditori ipotecari posteriori di veder aumentata, pel venir meno delle ipoteche di grado anteriore, la loro garanzia immobiliare, senza sacrificio corrispondente (1), doveva però contenersi una siffatta ipoteca in quegli angusti confini dettati dallo scopo, cui è legata la vita sua. S'ebbe invece un istituto che male si giustifica ai lumi del diritto: vero tormento della dottrina germanica (2).

Non si regge l'opinione che considera l' ipoteca del proprietario come una facoltà pura e semplice di disporre di una quota-valore del fondo (3), presupponendo essa una nozione della ipoteca che non è propria del legislatore germanico. L' ipoteca non ha per obbietto una quota-valore del fondo, preventivamente specificata, come parrebbe significare la sanzionata fissità del grado ipotecario, essa è ben più ed unicamente (per diritto germanico ed italiano) un peso gravante su di un fondo e su tutto il fondo, tanto che si possono costituire ipoteche su di un fondo anche se ne è esaurito il valore da precedenti iscrizioni, tanto che il creditore, in terzo o quarto grado, ha diritto di promuovere la liquidazione del valore del fondo, se bene alla sua ipoteca non competa che parte dell' anzidetto valore.

La stessa legge della fissità del grado ipotecario non è assoluta. Il proprietario può rinunciare alla ipoteca a lui toccata, come può obbligarsi a rinunciarvi (§ 1179), con l'effetto di permettere l'avanzarsi delle ipoteche successive, mentre ciò

---

(1) Il divieto dell' illecito arricchimento è posto nei §§ 812 seg. del Codice germanico.

(2) V. per tutti l'ottimo libro dell'Horn citato.

(3) La tesi è dell'Oberneck, *Das Hypothekenrecht des B. G. B.*, 1897, pag. 40 seg.

non sarebbe possibile se ad ogni ipoteca fosse *a priori* assegnata una quota-valore.

Infine se l' ipoteca del proprietario dovesse riassumere un diritto di proprietà, limitato ad una quota-valore del fondo, questo diritto si estinguerebbe colla dismessione del fondo da parte del proprietario, anzichè tramutarsi in ipoteca vera e propria, come avviene per diritto germanico.

Più valida è invece ed accoglibile la dottrina che vede nella ipoteca del proprietario una ipoteca anormale con effetti parziali: ma neppure questa concezione spiega la stranezza di un ordinamento che permette il sorgere di una ipoteca sul fondo proprio, quando non ha potuto sorgere una ipoteca vera e propria, per non essere venuto ad esistenza il credito, a guarentigia del quale è stata costituita.

Vero che la legge tramuta siffatta ipoteca in " *debito fondiario* ", ma innegabile del pari che, se guari s'intende la trasformazione di una ipoteca che non è mai esistita, meno si giustifica una trasformazione che il proprietario non ha voluto (1);

c) Delle denunciate mende si è reso conto il legislatore svizzero del 1907.

Di contro alla ipoteca: diritto accessorio di garanzia, ha posto senz'altro l'ipoteca autonoma, materializzabile in una cartella all'ordine od al portatore, la quale corrisponde pienamente alla cartella del " *debito fondiario* " (2).

E, quale effetto della estinzione di una ipoteca vera e propria, ha riconosciuto al proprietario il diritto di costituire altra ipoteca in luogo e grado di quella estinta. In difetto, i creditori ipotecari concorrono sull'intero prodotto della vendita del fondo, ad esclusione del proprietario (3).

---

(1) V. in proposito e diffusamente il libro dell'Horn a pag. 30 seg.

(2) La cartella ipotecaria lascia presumere *juris et de jure* l'avvento di una novazione sulla obbligazione originale. " La constitution d'une cédule hypothécaire — dispone l'art. 855 del Codice — ou d'une lettre de rente éteint par novation l'obligation dont elle résulte. Toute convention contraire n'a d'effet qu'entre parties et à l'égard des tiers de mauvaise foi ".

(3) Art. 814: " Lorsque des gages de rang différent sont constitués sur un immeuble, la radiation de l'un d'eux ne fait pas avancer le créancier postérieur dans le cas libre. Le propriétaire a la faculté de constituer un nouveau droit de gage en lieu et place de celui qui a été radié. Les con-

§ 5.

Conclusione.

Difetti adunque non lievi si riscontrano nel sistema ipotecario germanico, ma difetti che non sminuiscono la virtù grande del principio informatore: l'autonomia del diritto ipotecario; principio che, per sè solo, è tutta una rivoluzione sul passato, tutta una promessa per l'avvenire.

E la riforma, a tal concetto ispirata, non coglie alla sprovvista il legislatore nostro che, colla creazione degli istituti di credito fondiario, ha mostrato da tempo (1) di sentire la necessità di un più evoluto ed agile assetto ipotecario.

Grazie all'accoglimento del principio germanico, la iniziata riforma attingerebbe la compiutezza sua. Si mantenga pure in vita l'ipoteca tradizionale; anzi sia essa imposta ovunque intende servire, più che al proprietario, al terzo contro il proprietario, ma di contro ad essa, mobilissima, benvenuta la cartella ipotecaria, emanazione non più di speciali enti, intermediari fittizi fra debitore e creditore, quale si rivela nelle nostre leggi sul credito fondiario, ma emanazione diretta dello stesso proprietario: piccolo o grande. Così, mentre un nuovo poderoso strumento di credito verrà acquisito alla economia nostra, facile e spontaneo fluirà il risparmio nazionale alla proprietà terriera, fatta per tal modo più prospera e feconda.

---

ventions donnant aux créanciers postérieurs le droit de profiter des cas libres n'ont d'effet réel que si elles sont annotées au registre foncier „.

Art. 815: " Lorsqu'un droit de gage a été constitué en rang postérieur et qu'il n'en existe pas d'autre qui le prime, ou que le débiteur n'a pas disposé d'un titre de gage antérieur, ou que la créance antérieure n'atteint pas le montant inscrit, le prix de l'immeuble est en cas de réalisation attribué aux créanciers garantis, selon leur rang et sans égard aux cas libres „.

(1) V. T. U. 22 febbraio 1885 e legge 8 agosto 1895.

Problemi giuridici in alcuni scolii di Teodoro Balsamone.

Nota del Prof. G. ROTONDI.

1. S. Gregorio, soprannominato il Taumaturgo, vescovo di Neocesarea nel Ponto, nel 254 indirizzava a un ignoto vescovo della sua provincia ecclesiastica una lettera in risposta ad alcuni dubbi sulla condotta tenuta dai cristiani nelle recenti invasioni dei barbari. Questa " *epistola canonica* ", la cui genuinità è fuori discussione, si trova nelle varie edizioni delle opere del Taumaturgo e, per la sua importanza canonistica, nelle raccolte di fonti canoniche greche, come, ad esempio, in quella più nota del Pitra (*Iuris ecclesiastici graeci historia et monumenta*, I. 562 sg.). L'epistola fu corredata di scolii da Zonara e da Balsamone: scolii i quali peraltro figurano in alcune soltanto delle edizioni (1).

Mentre gli studiosi di letteratura patristica si sono più volte occupati di questa epistola (2), che è di fondamentale im-

(1) Nella edizione principe di VOSS, Magonza 1604 p. 123 sg., figurano anche gli scolii di Balsamone, non quelli di Zonara; una versione latina era già apparsa nel 1565 per opera di GENTIANUS HERVETUS. Nell'edizione di Parigi 1622 l'epistola è edita senza scolii, e in fine al volume sono riprodotti gli scolii alle epistole canoniche del solo Zonara. Nella *Maxima bibliotheca patrum* di Lione 1677, v. 3° f. 316, lettera e scolii esistono nella sola versione latina: versione e testo dell'epistola e di tutti gli scolii nel *Synodikon* di BEVERIDGE, Oxford 1672, v. 2 p. 1ª p. 24 sg.; nella *Biblioth. veterum patrum* di GALLANDI, Venezia 1767, v. 3 p. 400 sg.; e in MIGNE, *Patr. graec.* X. 1019 sg., da cui cito. Non potei vedere il *Σύνταγμα* di RHALLIS.

(2) Cfr. BARDENHEWER, *Patrologia*, § 47, tr. it. I p. 210 e la bibliografia ivi: v. anche ID. in WETZER und WELTE *Kirchenlexicon*, 5. 1184; CHRIST, *Gesch. der griech. Liter.*[5] p. 1028; BENJAMIN, in PAULY-WISSOWA 7. 1857 sg.: per i codici, sia del testo che degli scolii, HARNACK, *Gesch. der Altchrist. Liter.* I. 429.

portanza per conoscere le condizioni della chiesa nel Ponto in quei tempi burrascosi, nè il testo dell'epistola, nè gli scolii relativi, hanno attratta l'attenzione dei giuristi (1): è quindi opportuno prenderla in breve esame, tanto più che essa presenta un interesse non lieve per alcuni problemi di cui anche recentemente la dottrina romanistica si è dovuta occupare.

2. Il testo dell'epistola non presenta di per sè un diretto interesse giuridico, perchè le singole questioni vi sono formulate e decise con esclusivo riguardo al punto di vista morale e disciplinare, sebbene fra i singoli problemi toccati alcuni possano interessare anche al giurista (2). L'assenza, in quel testo, di ogni rilievo di carattere giuridico, deve riuscire tanto più dolorosa se si pensa che Gregorio era tutt'altro che privo di coltura giuridica: lui stesso ci informa che nella sua giovinezza si era applicato in patria allo studio delle leggi romane, delle quali, con parole assai degne di nota, esalta la perfezione e al tempo

---

(1) Il testo non fu ignoto al Fabroto che vi accenna due volte nelle note all'edizione di Teofilo del 1638 (p. 212: al § 46 Th. 2. 1 e 214 al § 48: cfr. anche Reitz, *Teophili paraphr.* 1. 258 n. *u*, 259 n. *a*), ma non ne fa menzione nell'apparato dei suoi Basilici: come ne tace l'Heimbach. Che a tutti i moderni sia sfuggito, si spiega colla poca familiarità dei romanisti con le fonti canoniche in genere e le greche in particolare, e ancora per il fatto che gli scolii in questione furono omessi nella collezione, più recente e più comunemente nota, del Pitra: come anche in quella di Routh, *Reliquiae sacrae*[2]. 3. 251 sg. e di Dräseke, in *Jahrb. f. prot. Theol.* 7 (1881) 724 sg., importante per la revisione del testo, il largo commento storico e la definitiva fissazione della data.

(2) Ecco sommariamente l'oggetto, secondo la divisione — tradizionale ma non originaria — in capitoli. 1: sull'aver mangiato cibi impuri; 2-3: su coloro che avevan depredato le proprietà sfuggite alla devastazione dei barbari (Goti e Borani o Boradi); 4: sulla scusa, da alcuni addotta, di non aver rapito ma d'essersi semplicemente appropriate cose trovate disperse; 5: su coloro che s'erano appropriate cose spettanti ai captivi per rifarsi di quelle rapite a loro; 6: su coloro che catturarono i captivi sfuggiti ai barbari; 7: su coloro che, fatti prigionieri, si unirono ai barbari e porsero loro aiuto; 8: su coloro che invasero le case altrui durante l'invasione; 9: su coloro che trovarono nella propria casa o nel proprio campo oggetti lasciati dai barbari e non li denunziarono; 10: sul dovere, in caso di denuncia, di non pretendere compensi; 11: sul luogo ove deve compiersi la penitenza canonica.

stesso rileva le difficoltà (1), e che si sarebbe portato a Berito (2) a perfezionarsi in quegli studi se, trovatosi con Origene, non si fosse indirizzato per altra via.

Quanto agli scolii, se quelli di Zonara (3) non offrono nessun interesse giuridico, diversamente stanno le cose per quelli di Balsamone. Il grande canonista del XIII secolo († 1204) è noto agli studiosi del diritto greco-romano per la sua elaborazione

---

(1) Cfr. *Oratio panegyrica in Origenem*, in Migne cit., p. 1052 sgg. Nell'esordio l'A. vuol scusarsi che lo studio del latino e delle leggi romane gli abbia fatto trascurare quello dell'eloquenza: *οὐ μὴν ἀλλὰ καί γε τὸν νοῦν ἕτερόν τι μάθημα δεινῶς ἐπιλαμβάνει καὶ τὸ στῶμα συνδεῖ τὴν γλῶτταν, εἴ τι καὶ μικρὸν εἰπεῖν τῇ Ἑλλήνων ἐθελήσαιμι φωνῇ· οἱ θαυμαστοὶ ἡμῶν τῶν σοφῶν νόμοι, οἷς νῦν τὰ πάντων τῶν ὑπὸ τὴν Ῥωμαίων ἀρχὴν ἀνθρώπων κατευθύνεται πράγματα, οἱ μὲν οὔτε συγκείμενοι οὔτε καὶ ἐκμανθανόμενοι ἀταλαιπώρως· ὄντες μὲν αὐτοὶ σοφοί τε καὶ ἀκριβεῖς καὶ ποικίλοι καὶ θαυμαστοὶ καί, συνελόντι εἰπεῖν, Ἑλληνικώτατοι, ἐκφρασθέντες δὲ καὶ παραδοθέντες τῇ Ῥομαίων φωνῇ, καταπληκτικῇ μὲν καὶ ἀλαζόνι καὶ συσχηματιζομένῃ τῇ ἐξουσίᾳ τῇ βασιλικῇ, φορτικῇ δὲ ὅμως ἐμοί.* Queste parole acquistano un particolare rilievo se si pensa che Gregorio nacque nel 213 e che quindi gli anni in cui studiava erano i primi in cui, dopo la *constitutio antoniniana*, il diritto romano poteva veramente dirsi legge generale per tutto l'impero. La costituzione di Caracalla deve infatti aver dato, nei centri di coltura provinciali, un immediato impulso agli studi di diritto romano e, come necessario presupposto, della lingua latina. Per questo rapporto cfr. Hahn, *Zum Sprachenkampf in röm. Reiche*, in *Philologus, Suppl. B.* X (1907) 699 e le fonti ivi citate: ancora per il periodo immediatamente anteriore a Giustiniano v. De Francisci, *Vita e studi a Berito* ecc. [1912] p. 5.

(2) *Ep. paneg.* c. 5 (p. 1065): *πόλις Ῥωμαικωτέρα πως, καὶ τῶν νόμων τούτων εἶναι πιστευθεῖσα παιδευτήριον.* Berito aveva quindi già allora ben formata quella fama che un secolo più tardi attestano Libanio, *epist.* 566 (B. *τῶν νόμων μητέρα*) e l'*Anon. totius orbis descriptio* (in Müller, *Geogr. gr. min.* 2. 517: versione da un originale greco del 350-353) § 25, che la considera come l'unico centro di istruzione giuridica superiore. V. altri testi in Benzinger, s. v. *Berytus* in Pauly-Wissowa 3. 321: *adde* — ancora per la metà del 4° secolo — Eunap. *vitae* p. 490 ed. Boissonade per Didot, ove parla di un Anatolio che ebbe fama nell'eloquenza, *καὶ τῆς τε νομικῆς καλουμένης παιδείας εἰς ἄκρον ἀφικόμενος, ὡςὰν πατρίδα ἔχων τὴν Βηρυτὸν ἢ τοῖς τοιούτοις μήτηρ ὑποκάθηται παιδεύμασι.*

(3) V. l'edizione a parte, con largo commento storico, di Dräseke, in *Z. für wiss. Theol.* 1894. 246 sg.

del *Nomocanon XIV Capitulorum* (1), la cui importanza non è venuta a scemare se non in seguito alla scoperta dell'altra recensione, più antica (1090) e più direttamente dipendente dalle fonti prime, di Teodoro Besta (2). Delle citazioni dei testi dei Basilici nel nomocanone di Balsamone tiene largo conto anche l'Heimbach nel *Manuale basilicorum* (3).

Negli scolii all'epistola canonica di Gregorio il Taumaturgo, Balsamone segue lo stesso sistema proprio della elaborazione del *Nomocanon*, riferendo, ad ogni singolo capitolo, prima le norme canoniche e poi quelle civili. Credo opportuno dare anzitutto l'indicazione dei testi dei Basilici che vi si trovano citati e delle rispettive sedi nell'edizione dell'Heimbach.

sch. al c. 1° [Migne, *cit.*, p. 1023] B. 60. 38. 12 (4) = *Hb.* 5. 724 (5). (13 § 7 D. 48. 5 = B. 60. 37. 15. 6)

c. 3° [p. 1028 sg.] B. 60. 20. 1 cf. *Hb.* 5. 610 (1 pr. D. 47. 9)
B. 60. 20. 3 = *Hb.* 5. 611 (3 § 2 *eod.*)

---

(1) Cfr. Voell e Justell, *Bibl. jur. can. graeci*, 2, 781 sg. Su Balsamone v. Mortreuil, *Hist. du droit byzantin*, 3. 481 sg. per la vita, 432 sg. per il nomocanone; Krumbacher, *Gesch. der byz. Liter.*[2] p. 607; Zachariae, *Delineatio* p. 83; *Gesch. der Griech. röm. R.* p. 37; Siciliano-Villanueva, *Dir. bizantino*, p. 134 n. 4. Di Balsamone vi sono anche alcune *μελέται* e *ἀποκρίσεις* in Rhallis, *cit.* 4. 448 seg.: di commentari inediti, giacenti nei monasteri del M. Athos e in altre biblioteche d'Oriente, diede notizia Zachariae, *Ἀνέκδοτα*, p. xi e sgg. passim. Per la mediocre attività poetica v. Horna, in *Wien. Stud.* 25 (1903) 165: per altre indicazioni bibliografiche v. anche Chevalier, *Répert.* 1, 417.

(2) Ed. Pitra, 2, 445.

(3) Cfr. specialm. p. 111: per il metodo tenuto da Balsamone nel riferire le leggi v. *ibid.* p. 115.

(4) La citazione è manifestamente scorretta. Nello stesso sch. è pur citata la Nov. Leonis 103, che abroga la Nov. Just. 117, riferita in B. 28. 7: alla stessa novella, diversamente citata, allude B. nel *νομοκάνων* (Voell *cit.* p. 1033 sg.; cfr. Heimbach, *Manuale* p. 116 n. 56).

(5) Lo scolio di Gregorio Taumaturgo in Heimbach, *ibid.* non è altro che la seconda parte del c. 1° dell'epistola canonica (Migne, *cit.* p. 1020) assunto — dall'Anonimo? — a far parte della " catena ".

c. 4° [p. 1036] B. 60. 12. 43. 5 = *Hb.* 5. 486 (43 § 4 D. 47. 2)
B. 50. 3. 61 = *Hb.* 5. 63 (11 C. 8. 4 = B. 50. 3. *59*)
B. 34. 1. 17 = *Hb.* 3. 537 (20 § 1 D. 49. 15)
c. 7° [p. 1041] B. 60. 36. 1 = *Hb.* 5. 705 (1 pr. D. 48. 4)
B. 60. 36. 3 = *Hb.* 5. 707 (3 *eod.*)
c. 8° [p. 1044] B. 60. 17. 6 = *Hb.* 5. 572 (5 D. 47. 8)
B. 60. 17. 2. 7 = *Hb.* 5. 564 (2 § 13 *eod.*)
B. 10. 2. 13. 5 = *Hb.* 1. 493 (14 § 4 D. 4. 2).

I testi sono riferiti letteralmente e sia le citazioni — salvo le due indicate — che le lezioni coincidono con quelle delle edizioni dei Basilici (1): ciò costituisce una riprova dell'affermazione dell'Heimbach (2) che il testo dei Basilici usato da Balsamone non era diverso da quello a noi noto (3).

---

(1) In B. 50. 3. 59 (in Balsamone erroneamente citato 61) invece di *praedona* Bals. ha la lezione *νομέα*, che c'è pure nella *Synopsis*: di questo inciso mi occupo più oltre nel testo. L'inciso successivo *περὶ βίας*, che c'è in Bals. e nella *Synopsis*, manca nella lezione seguita dall'Heimbach ma l'omissione non rileva.

(2) *Manuale* p. 115; cfr. Mortreuil, *op. cit.* 3 p. 434.

(3) Anche nei suoi scolii ad altre epistole canoniche Balsamone cita le leggi civili: credo non inutile darne qui il semplice elenco. Cito dal *Synodikon* di Beveridge (v. 2 p. 1[a]), giacchè anche qui il Pitra ha omesso gli scolii. *Sch.* a Dionys. Alexandrin. *can.* 2 (p. 5 *l. cit.*): *Nov. Leonis* 17; a S. Basilii c. 6 (p. 57): B. 28. 4. 6; 4. 1. 5; 60. 37. 78; c. 8 (p. 61): B. 60 tit. 39; 60. 51. 16; 60, 39, 5; 60. 36. 12; c. 9 (p. 64) *Nov. Eman. Comneni*; *Nov.* 117 in B. 28 tit. 7; *Nov.* 111; c. 10 (p. 67) *Nov. Leonis* 76; c. 22 (p. 80) B. 28. 4. 2; c. 24 (p. 82) B. 28 tit. 14; c. 25 (p. 83) B. 28. 4. 12–13; 27. 6. 37; c. 26 (p. 84) B. 60. 17. 3; c. 27 (p. 85) B. 28 tit. 16; c. 30 (p. 89) B. 60. 58. 1; c. 32 (p. 91) B. 60 tit. 36; c. 33 (p. 92–93) B. 31. 6. 4; 33 tit. 2; c. 34 (p. 94) B. 60. 37. 26-27. 49; c. 36 (p. 95) *Nov.* 117 in B. 28 tit. 7; B. 60. 37. 82; *Nov. Leonis* 32; c. 39 (p. 97) B. 60. 37. 61; 60. 42. 13; 28. 5. 10 § 3; c. 41 (p. 99) B. 28. 4. 1; c. 42 (p. 100-101) B. 60. 39. 1 § ult.; 60 tit. 17; 60. 39. 14; c. 48 (p. 106) *Nov.* 34 c. 4 in B. 28. 7. 4; B. 28. 8. 63 § 6; c. 50 (p. 108) B. 28. 14. 4; c. 55 (p. 113) B. 60. 39. 14. 2; c. 61 (p. 117) B. 60. 12. 66; c. 63 (p. 117) B. 60. 37 ult.; c. 68 (p. 119) B. 60. 37. 77; c. 69 (p. 121) B. 60. 58. 2; 60. 37. 12 § 3; c. 71 (p. 123) B. 60. 11. 49. 2. 11. 63; c. 74 (p. 127) *Nov. imperatoris nostri de homicidiis*; c. 79 (p. 129) B. 60. 37 ult. § antepaenult.; sch. a S. Greg. Nyssen. *can.* 7 (p. 163) B. 60 tit. 23; *sch.* a Resp. canon. Timothei (p. 169) *Nov. Leonis de divortiis.*

3. Queste citazioni non presentano, quindi, nessuna novità sostanziale (1). Ma il punto più interessante di tutto il commento è rappresentato da una parte dell'ampio scolio al c. 4°, in cui Balsamone svolge un problema giuridico in modo autonomo.

Dopo aver illustrata la decisione del c. 4° col riferimento dei testi biblici (*Deuter.* 22. 1. 3; *Exod.* 23. 4) e delle leggi civili (B. 60. 12. 43. 5; 50. 3. 61; 34. 1. 17) prosegue:

Σημείωσαι οὖν, ὅτι καὶ ἀπὸ τῶν κανόνων καὶ ἀπὸ τῶν νόμων οἱ τὰ τῶν αἰχμαλωτισθέντων ἀποσυλῶντες ἢ ἁρπάζοντες κολάζονται καὶ ἐνέχονται, ἀλλὰ καὶ οἱ εὕρημά τι ἢ ἀκίνητον σχολάζον λέγοντες ἐφευρεῖν, καὶ μὴ αὐτίκα τὸ πρᾶγμα κατάδηλον ποιούμενοι, καὶ φυλάττοντες αὐτὸ εἰς ὄνομα τοῦ δεσπότου, κατὰ μὲν τὸν ἐκκλησιαστικὸν νόμον ἐπιτιμηθήσονται, κατὰ δὲ τὸν πολιτικὸν ἢ ὡς κλέπται τιμωρηθήσονται, ἐάν ἐστι τὸ πρᾶγμα κινητόν, ἢ τῷ περὶ βίας παραγγέλματι, ἐάν ἐστιν ἀκίνητον. ὅταν δὲ ἀπρονόητόν ἐστι τὸ εὑρεθέν, τὸ παρὰ τοῖς νόμοις καλούμενον προδερέλικτον, οὐ κολάζεται παρομοίως ὁ τοῦτο κατασχών· ἀλλ' εἰ μὲν κινητόν ἐστιν, ἀναγκάζεται αὐτὸ ἀποδοῦναι, καὶ μόνον εἰ μὴ ἐδέσποσεν αὐτό, ὡς καλῇ πίστει νομεὺς, ἐντὸς τριετίας. εἰ δὲ ἀκίνητον αὐτὸ ἐπεῖνο τὸ κατασχεθὲν ὡς προδερέλικτον, εἰ μὴ γέγονε τούτου δεσπότης, ἐντὸς δεκαετίας. Σχολάζοντος δὲ καὶ ἀπρονοήτου μεγάλη διαφορά. Τὸ μὲν γὰρ σχολάζον ψυχῇ νεμόμεθα, κἂν φυσικῶς αὐτὸ οὐ κατέχομεν· τὸ δὲ προδερέλικτον οὐδὲ νομίμως οὐδὲ φυσικῶς κατέχομεν· καὶ διὰ τοῦτο δεσπόζεται παρὰ τοῦ καλῇ πίστει

---

(1) Nello sch. al c. 9 (p. 1045) v'è una definizione del furto che non è direttamente richiamata a testi legislativi: *κλέπτης ἐστὶν ὁ τὸ ἀλλότριον πρᾶγμα ψηλαφῶν κατὰ γνώμην τοῦ δεσπότου ἐν εἰδήσει τοῦ λυπῆσαι αὐτόν* (identica definizione nello sch. al canone 61 di S. Basilio: cfr. Beveridge, *Synodicon*, v. 2 p. 1ª p. 116). Al requisito dell'*animus lucri faciendi* della definizione tradizionale (l. 1 § 3 D. 47. 2 = B. 60-12. 1, Hb. 5. 451) è sostituito l'*animus nocendi*, accostandosi quindi al punto di vista più arcaico, rappresentato dalla nota definizione di Sabino (Gell. XI, 18. 20: cfr. 46 § 7 D. 47. 2; 225 D. 50-16). Su questa definizione e sull'elemento dell' "*invito domino*" cfr. ora Huvelin, *Études sur le furtum* (Lyon, 1915) p. 682 sg.; 705 sg.; 782 sg.: il quale, in un articolo di prossima pubblicazione (negli *Studi in onore di Perozzi*) ritiene che l'*animus lucri faciendi*, come requisito generale, sia frutto di interpolazione.

νεμηθέντος αὐτό. Ταῦτα δὲ χώραν οὐκ ἔχουσιν ἐπὶ τῶν ἀνηκόντων τοῖς αἰχμαλωτισθεῖσι· καὶ διὰ τοῦτο οἱ κατέχοντες αὐτὰ καὶ μὴ ἀποκαθιστῶντες, ὡς ἄνωθεν εἴρηται, ἀδιαστίκτως καὶ ἐνέχονται καὶ κολάζονται.

4. Partendo da una distinzione tra beni vacanti (*σχολάζοντα*) e beni derelitti (*ἀπρονόητα*) sono accennate in questo scolio alcune questioni interessanti e per se stesse e per il modo con cui sono impostate e risolte. Riguardano la materia del possesso, e se si pensa da un lato alle controversie di cui questa materia è sempre particolarmente feconda, e dall'altro alla scarsità con cui essa è rappresentata nelle fonti bizantine (1), aumenta l'interesse di questa, per quanto breve e tarda, trattazione.

Vediamo anzitutto la terminologia. Balsamone pone una netta antitesi tra il possesso *ψυχῇ* e quello *φυσικῶς*: *ψυχῇ νεμόμεθα* — *φυσικῶς κατέχομεν* (2). Dei beni vacanti, os-

(1) Nei Basilici i titoli del l. 50, in materia possessoria, sono tutti sforniti di scolii: pochi scolii di qualche interesse forniscono le altre sedi e in particolare il Supplemento di Zachariae. Nelle fonti bizantine minori la teoria del possesso è quasi completamente lasciata da parte, cosa del resto ben naturale: per l'usucapione la trattazione forse più notevole, ma pur sempre priva di elementi interessanti, è nella *πεῖρα* di Eustazio, tit. 8 *περὶ χρόνων καὶ δεσποτείας*. Larga è bensì la trattazione dei rimedi contro la *vis* (v. l'esame dei testi in Ruffini, *A. spolii*, p. 75 sg.: in particolare v. M. Attaliate, tit. 59, su cui già Bruns, *Das Recht des Besitzes*, p. 97), ma, come il Ruffini stesso ha ottimamente mostrato (p. 78 sg.), questi rimedi speciali che datano dalle costituzioni postclassiche (su cui v. anche Kniep, *Vacua possessio*, p. 412 sg.), acquistano sempre maggiore prevalenza — di sostanza se non di nome — sull'*interdictum unde vi*, a base schiettamente possessoria. E nei Basilici l'*unde vi* trova posto nella trattazione dei delitti, accanto all'*a. vi bonorum raptorum* (B. 60. 17).

(2) Tra *νέμεσθαι* e *κατέχεσθαι* la distinzione non è sempre nettamente osservata dai bizantini, ma *νέμεσθαι* (*νομή*) è — di solito — più tecnico, pur non bastando da solo a rendere completamente la " *possessio* „ romana: *κατέχεσθαι* (*κατοχή*) non indica per lo più che la detenzione: la *πεῖρα* di Eustazio, § 8, trattando dell'usucapione, usa sempre esclusivamente *νομή, νέμεσθαι*; e in Teofilo 3. 39. 2 si fa proprio l'antitesi tra *κρατεῖν* (= *φυσικῶς κατέχειν*) e *νέμεσθαι* (= *ψυχῇ δεσπόζοντος κατέχεσθαι*). Balsamone si dimostra quindi felice anche nella scelta dei verbi, sebbene, come appare dal seguito, anche un solo verbo possa bastare per i due membri dell'antitesi, sufficientemente caratterizzati dagli avverbi rispettivi.

serva, si mantiene il possesso *animo* pur avendone perduto la disponibilità materiale, mentre per i beni derelitti entrambi gli elementi del possesso vengono meno: *φυσικῶς κατέχεσθαι* = *naturaliter possidere* denota dunque, in questa antitesi, il semplice elemento materiale della detenzione (1). La *possessio* vera e propria, quella in cui all'elemento materiale si aggiunge l'*animus possidendi*, è dallo scoliaste qualificata come *νομίμως κατέχεσθαι*, appunto in antitesi al *κατ. φυσικῶς*: delle cose derelitte — egli scrive — non abbiamo nè il possesso vero e proprio nè la detenzione materiale: " *οὐδὲ νομίμως οὐδὲ φυσικῶς κατέχομεν* ". E anche questo è in conformità colle altre fonti le quali, nella necessità che i Greci sentono di aggiungere una qualifica al loro sostantivo troppo incolore (2), parlano appunto di *ἔννομος νομή*, o *κατὰ τοὺς νόμους νομή* o *κυρίως νομή*: ed è precisamente sempre la *ψυχῇ δεσπόζοντος* quella che trasforma la *φυσικὴ νομή* in *νομή* vera e propria (3).

Lo scolio considera il problema del possesso delle cose vacanti o derelitte dal punto di vista del precedente titolare, non di chi acquista il possesso in seguito: per costui si discute se possa o no usucapire, ma non si designa con speciale qualifica il suo possesso in quanto sia atto all'usucapione: non ci possiamo quindi meravigliare se non è fatta menzione di quella che in una tricotomia completa sarebbe la terza figura, ossia della *πολιτικὴ νομή* = *possessio civilis* (4).

---

(1) Nelle fonti giustinianee il valore dell'espressione " *p. naturalis* " è vivamente discusso: v. Riccobono, in *ZSSt.* 1910. 321 sg.; Albertario in *Filangieri* 1912, 380; 511; cfr. Mitteis, *ZSSt.* 1912, 638; Riccobono, in *St. per Chironi* 1. 378-391. Le fonti bizantine poi presentano frequenti oscillazioni, e non sempre le classificazioni sono formulate in modo completo.

(2) Cfr. Bonfante, in *St. per Moriani* 1, 179; *Istit.*[5] p. 337.

(3) Cfr. B. 50. 2. 61 (= 10 C. 7. 32; Hb. 5. 54): ... *κατὰ δὲ τοὺς νόμους νομή ἐστι ψυχῇ δεσπόζοντος κατοχή*; Suppl. Zach. p. 53, *sch. τοῦ Ἀνων. κυρίως γὰρ νομή ἐστι ψυχῇ δεσπόζοντος κατοχή*: *ibid.* p. 7, sch. 28 [Steph.]: *νομὴ δέ ἐστι κυρίως ψυχῇ δεσπόζοντος κατοχή*.

(4) V. la tricotomia completa in Suppl. Zach. *l. cit.*: *νομαὶ ἔννομοι καὶ πολιτικαί* (= *ἐπὶ οὐσουκαπίονι*): *μόνον ἔννομοι* (= *ἐπὶ τῶν ἰντερδίκτων*): *φυσικαί*. E cfr. anche *ibid.* p. 6 (B. 15. 1. 9 = 9 D. 6. 1) *sch.* 25: *οὐ πολιτικῶς ἀλλὰ φυσικῶς ἢ καὶ πραιτωρίως ἔχουσι τὴν νομήν, οὐδὲ δύνανται αὐτοὶ οὐσουκαπιτεύειν*; B. 60. 17. 7 *sch.* 13, *εἴτε ἐννόμως, εἴτε πολιτικῶς, εἴτε φυσικῶς*.

5. Tutto il contenuto dello scolio è imperniato sulla distinzione tra beni *σχολάζοντα* e beni *ἀπρονόητα*. Dei primi non si perde il possesso giacchè lo si conserva *animo*, quindi chi se ne impadronisce non li può usucapire ed è soggetto all'*actio furti* o all'*interdictum unde vi*, secondo che si tratti di mobili o di immobili: dei secondi il possesso è perduto, e quindi la presa di possesso non costituisce nè furto nè violenza ma, concorrendo i necessari requisiti, e in particolare la buona fede, porta all'acquisto della proprietà mediante usucapione.

Entrambe queste affermazioni presentano un interesse assai notevole.

Riguardo ai beni vacanti, lo scoliaste cita per l'*a. furti* il testo dei Basilici corrispondente alla l. 43 § 4 D. 47. 2; per l'*int. unde vi* quello corrispondente alla l. 11 C. 8. 4. È questa la nota costituzione di Giustiniano in cui, con esplicita innovazione di fronte al regime della *veteres leges*, e al solito scopo di tutelare più energicamente la condizione degli assenti, viene stabilito che chi occupa di suo arbitrio (1) la *vacua possessio absentis* è tenuto coll'*unde vi* (2): " sancimus talem possessorem ut praedonem intellegi et generali jurisdictione ea teneri quae pro restituenda possessione veteribus declarata est legibus ". Il testo è riferito da Balsamone integralmente, salvo che, invece di *ὡς praedona*, come hanno le edizioni dei Basilici, porta *ὡς νομέα ὄντα*, come la Sinossi. Non è da escludere che si tratti di un semplice errore, generato dalla frase " talem *possessorem* ut *praedonem*... ", ma certo è inaccettabile l'ipotesi del Reitz (3), accolta dall'Heimbach (4), che la versione vada rico-

---

(1) Il regime dell'*immissio* nella *vacua possessio absentis* mediante decreto, onde sfuggire all'*int. unde vi*, fu regolato da una serie di editti dei prefetti del pretorio. Cf. Zachariae, *Ἀνέκδοτα*, 3 p. 270 n. XII Ed. Eustathii p. p. *a*. 506; p. 276 n. XXIX, ed. Archelai p. p.; p. 278 n. XXXIII, ed. Basilii (o Basilidis).

(2) Il riferimento all'*unde vi* è per vero contestato dal Ruffini, *A. Spolii*, p. 44 n. 1. Ma i bizantini pensano al *γενικὸν περὶ βίας παράγγελμα*, come mostra questo scolio, e il riferimento della cost. in esso fatto: vero è che in esso è omai svanito e il carattere interdittale e il presupposto strettamente possessorio. Lo Stefano (*Brev. Codic.* l. 8°, *ad h. l.*, in *App. Eclogae*, XVI; Zachariae, *Ἀνεκδ.*, p. 188) parla di *γενικὴ δικαιολογία*.

(3) In Meermann, *Thesaur.* 5, p. 1ª p. 58.

(4) *Basil.* v. 5, p. 63 n. *u*.

struita: " οὐχ ὡς νομέα ἀλλὰ ὡς *praedona* ", giacchè anche il predone è possessore.

Ma, anche di fronte ai gravi dispareri a cui questa costituzione diede origine (1), è interessante rilevare come lo scoliaste bizantino metta in rapporto l'esperibilità dell'*int. unde vi* col rilievo che il possesso del fondo σχολάζον non è perduto ma si conserva *animo*: solo attraverso questa concezione egli può trovar naturale che l'occupazione da parte di un terzo possa costituire una *vis* (2). Ed in realtà io credo assai probabile che proprio questo fosse già il punto di vista giustinianeo. Quantunque, trattandosi di un'esplicita innovazione legislativa, essa trovi in se stessa la sua giustificazione, pure io credo che non sia possibile armonizzarla, per così dire, col sistema possessorio del *Corpus Juris* se non attraverso la doppia finzione del possesso (*animo*) da parte del titolare, e della *vis* da parte dell'occupante (3). Certo non è tutto classico quel regime che le fonti giustinianee ci espongono, in tema di conservazione del possesso, in applicazione della nota massima secondo cui " *possessio solo animo retinetur* "; ed io confido che un completo esame delle fonti mi permetta di dimostrare in altra occasione come anche in questa materia i classici non abbiano mai perduto di vista quelli che sono i presupposti materialistici di tutto quanto il regime possessorio. Comunque, la conservazione del possesso " *solo animo* " va intesa *cum grano salis*: giacchè l'*animus possidendi* è un elemento non tanto antitetico quanto piuttosto in-

---

(1) V. larga bibliografia in Windscheid, § 160 (tr. it. 1. 2. 86 n. 1): e v. anche Ruffini, *l. cit.*; Bonfante, *Corso di d. rom.* 1906-07, 1. 167.

(2) L'ὡς νομέα della lezione di Balsamone vuol forse alludere a questo concetto, che il titolare del fondo σχολάζον è ancora ψυχῇ νομεὺς? Ma una corruzione il testo l'ha certo subìta, perchè grammaticalmente l'inciso non può ora riferirsi che a colui che è tenuto coll'*unde vi*, non a chi lo può esperire.

(3) I *veteres*, invece, non potevano dissimularsi nè che la *possessio* era realmente *vacua*, nè che violenza non c'era (violentia in ablatam possessionem minime praecedente): cfr. l. 37 § 1 D. 41. 3. Anche Kniep, *op. cit.*, p. 465, ammette che qui il possesso deve ritenersi perduto coll'occupazione. Ha però torto nel ritenere che con questa legge Giustiniano abbia creato quel rimedio contro l'occupazione clandestina a cui si allude nella l. 7 § 6 D. 10. 3.

tegrativo della *possessio corpore*: non è tanto la mera intenzione di possedere, che può concepirsi anche disgiunta dalla possibilità di realizzarla, quanto la volontà di essere e rimanere colla cosa in quel rapporto di fatto che il comune apprezzamento economico-sociale riconosce esistente. E certo ad ammettere che il possesso si conservi *solo animo* anche nel caso di un fondo abbandonato dal proprietario assente in modo definitivo (1) solo i bizantini potevano arrivare. E per vero in Giustiniano si rivela sotto più aspetti la tendenza ad applicare in tema di perdita del possesso criterî restrittivi e in particolare ad assoggettare questa materia agli stessi criterî che vigono per la perdita dei diritti; confusione già rilevata e illustrata in talune applicazioni, e dovuta in ultima analisi all'incapacità dei bizantini di comprendere adeguatamente la genuina struttura della *possessio* romana. Basterebbe ricordare la famosa l. 12 C. 7. 32 di Giustiniano che, per tutelare il possessore contro gli abusid ei suoi rappresentanti, non si perita di calpestare i più elementari principî in materia di possesso; giacchè col Savigny e col Bonfante io credo impossibile dare a quel famoso testo una più limitata

(1) Dovendo tornar presto, e più largamente, sul tema, sarò scusato se mi limito qui a degli accenni. Per ora la trattazione più completa, per quanto a mio avviso accettabile in assai scarsa misura, è quella del Kniep, *Vacua possessio*. Nei testi classici in cui si parla di conservazione del possesso all'assente si allude — più o meno esplicitamente — a assenza temporanea (cfr. p. es. Gai. 4. 153 *postea reversuri*); e quando si discute della fuga per timore d'invasioni, i dubbi sono sull'esserci o no la *vis* (Ferrini, *Pandette* p. 332 n. 3: per la l. 4 C. 7. 32 v. *ibid.*: v. anche, per tutti i testi relativi, Kniep, *op. cit.*, p. 50 seg.), non sulla perdita del possesso, che è pacifica: il fatto che l'abbandono non è volontario, anzi coll'animo di tornare al più presto, non rileva in tema di possesso, dal momento che si è posta in essere una situazione socialmente incompatibile colla persistenza del possesso. In tema di mobili la struttura degli istituti possessorii ci appare più netta: riguardo allo *jactus levandae navis causa* le discussioni sull'*animus* interessano per la proprietà, non per il possesso: cfr. in un senso Javol. 21 § 2 D. 41. 2; Jul. 8 D. 14. 2; 7 D. 41. 7 (in nota a Minicio che era d'avviso contrario: cfr. Riccobono, BIDR. 7. 264; o forse è interpolato tutto l'inciso finale); Gai. 9 § 8 D. 41. 1; Paul. 2 § 8 D. 14. 2; § 48 l. 2. 1; nell'altro Cels. in Ulp. 43 § 11 D. 47. 2, su cui v. Perozzi, in Czyhlarz, *Cont. di* Glück, 41. 1, tr. it. p. 105 n. *h*, e i recenti sospetti di Berger, in Pauly-Wissowa, s. v. *jactus*.

e — dal punto di vista classico — più ragionevole interpretazione (1).

6. Il rilievo che chi occupa i beni *σχολάζοντα* non li può usucapire è conforme, per riguardo ai beni degli assenti, alle norme del diritto giustinianeo. Non tanto la fusione solita delle norme dell'*usucapio* con quelle della *longi temporis praescriptio* quanto la coesistenza di norme genuine con norme interpolate giustifica le oscillazioni delle costruzioni dogmatiche al riguardo. Ma io credo che per Giustiniano la *l. t. p.* contro gli assenti non corra affatto: di fronte ai testi, rappresentanti il punto di vista classico, che alludono al rimedio della *restitutio in integrum* (2), la l. 4 C. 7. 35 mi pare troppo esplicita, e tanto più significativa se, come io penso, interpolata.

> Diocletianus et Maximianus AA. et C. C. Crispino (3). Si possessio inconcussa sine controversia perseveraverit, firmitatem suam teneat obiecta praescriptio, ⟨quam contra absentes vel reipublicae causa vel maxime fortuito casu nequaquam valere praecipimus⟩.

Dal punto di vista formale si noti il caratteristico " vel maxime fortuito casu „ (4) e il " nequaquam „ (5): da quello

(1) Ricordo anche le itp. in tema d'acquisto e perdita del possesso per parte del pupillo. L'Albertario (*Corso di d. rom.*, Camerino 1912-13, p. 285 sg.; 1913-14, p. 24 sg.) ha reso assai verosimile la tesi che l'importanza decisiva data in materia alla *tutoris auctoritas* sia giustinianea: già il Perozzi (*Istit.* 1, 556 n. 1) aveva notato che in questa materia l'*auct. tutoris* è o superflua o inconcepibile. Anche qui i giustinianei hanno disconosciuta la natura di fatto del possesso, e gli hanno forzatamente applicato i criteri che vigono per l'acquisto e l'alienazione dei diritti.

(2) L. 6 e 7 C. *h. t.*, pure di Diocleziano.

(3) *Pr. prov. Phoenice?*: cfr. i miei *Studi sulle fonti del C. Giustinianeo*, in BIDR. XXVI (1914) p. 29 n. 4 dell'estr. Il rescritto appartiene al gruppo dei pochi, emanati tra il maggio 291 e il 293, di cui rimane incerta la derivazione, dal C. Gregoriano o dall'Ermogeniano (cfr. *Studi cit.* p. 27 sg.).

(4) L'inciso tanto più rafforza il sospetto su tutta la frase in quanto, isolatamente preso, non sembra rappresentare una specifica innovazione sostanziale, di fronte alla larga portata riconosciuta, almeno pei casi d'assenza, alla *generalis clausula* dell'editto della *rest. in integrum*: cfr. Glück, 4. 6, tr. it. Landucci p. 239 e n. *a*; Savigny, *System* § 325, VII. 166; Vangerow § 188, 1, 325; Windscheid § 119, tr. it. 1. 1. 467 sg. V. anche Lenel,

(V. nota (5) a pag. seg.).

sostanziale l'assoluta mancanza di nesso tra questa seconda parte, che è praticamente la più importante (1), e la prima: se l'imperatore avesse voluto dire, come intendono il Windscheid e il Vangerow (2), che la *l. t. p.* corre contro l'assente, salvo la *rest. in integrum*, avrebbe dato alla decisione una forma ben diversa. Tanto più che il riferire il testo alla *restitutio*, come per diritto dioclezianeo sarebbe necessario, urta contro l'espressione generalissima " *nequaquam valere* „: questa, invece, e l'antitesi tra le due parti del testo si spiegano agevolmente ammettendo l'intervento compilatorio, diretto a sostituire al regime classico uno nuovo e più semplice.

Del resto, oltre alla possibilità di ragionare sull'assenza della *bona fides*, gioverebbe, per escludere l'usucapione nel caso in esame, il semplice rilievo che per i bizantini, i quali ravvisano nell'occupazione del fondo *σχολάζον* una *vis*, esso è inusucapibile, sia dal primo che da qualsiasi successivo possessore, come *vi possessum*: nell'ipotesi concreta i requisiti dei due concetti, infatti, coincidono, giacchè il possesso del fondo è effettivamente appreso da colui che la legge considera come *vi deiciens* (3).

7. Il caso a cui allude l'autore dell'epistola canonica e che dà occasione a questa esposizione dello scoliaste è quello del-

---

E.P.[2] p. 117. Sulla l. 26 § 9 D. 4. 6 v. però i rilievi di Bortolucci, *Studi romanistici* [1906], p. 50; BIDR. XX. 38, e Beseler, *Beiträge* 2. 95, che vi ravvisa in gran parte " *Paraphrastenwerk* „. Altri testi in sede di *l. t. p.* alludono per verità solo all'assenza per pubblica necessità: cfr. 1 *h. t.* (a un soldato); 2 (a un archiatra addetto al *comitatus* del principe: cfr. Wellmann in Pauly-Wissowa 2. 465; Seek, *ibid.* 4. 622) e 8, di Giustiniano (a. 529).

(5) Beseler, *Beitr.* 3. 139.

(1) Nei Basilici (B. 50. 12. 9; Hb. 5. 74) questa seconda parte è la sola che sopravvive: e anche questo è significativo.

(2) Windscheid, § 182, tr. it. 1. 2. 183 n. 11; Vangerow, § 317, 1. § 584: per più copiosa letteratura v. Partsch, *Die longi temp. praescr.* p. 57 n. 3. Egli ben rilevò la portata assoluta della l. in esame ma, non scorgendo l'interpolazione, deve forzare l'interpretazione degli altri testi.

(3) Cfr. — per i diversi presupposti della *vi deiectio* e della *vi possessio* — l. 4 § 22; 33 § 2 D. 41. 3. Del resto la Nov. 119 c. 7 sembra avere escluso l'usucapione di fondi alienati dal possessore di mala fede.

l'occupazione di cose appartenenti a cittadini caduti in potere dei barbari.

È precisamente a questo fine che Balsamone vuol fissare la responsabilità degli occupanti, concludendo che costoro " *ἀδιαστίκτως καὶ ἐνέχονται καὶ κολάζονται* „. Questa espressione generica, formulata nella fine dello scolio, non mette in luce diretta la giustificazione logica che lo scoliaste intenda dare alla massima (1); ma pare che tutto ciò sia per lui conseguenza del fatto che i beni del prigioniero sono semplicemente *σχολάζοντα*, avendone egli conservato il possesso *animo* (2). Il principio è prettamente antiromano: ma vale la pena di rilevare come esso si fosse introdotto, sia pure di straforo, almeno in un testo del *Corpus juris*.

> l. 23 § 1 D. 41. 2 Iavolen. *l.* 3 *epist.* In his, qui in hostium potestatem pervenerunt, in retinendo jura rerum suarum singulare ius est: ⟨ corporaliter ⟩ tamen possessionem amittunt: neque enim possunt videri aliquid possidere, cum ipsi ab alio possideantur: sequitur ergo ut reversis his nova possessione opus sit...

Dalla seconda parte del testo risulta ben chiaro che il possesso è completamente perduto: il ⟨ *corporaliter* ⟩ dovrebbe quindi intendersi come un semplice ' di fatto '. Ma che l'avverbio non sia così innocuo, e assai verosimilmente interpolato, risulta dal modo con cui l'intendono i bizantini, che esprimono chiaramente l'antitesi da esso sottintesa:

> B. 50. 2. 22. 1 (Hb. 5, 21) ... *νομίμως, ἀλλ' οὐχὶ σωματικῶς τὰ οἰκεῖα νέμονται* (3).

Il punto di vista è identico a quello di Balsamone.

---

(1) Il " *ταῦτα χώραν οὐκ ἔχουσιν ... καὶ διὰ τοῦτο ἀδιαστίκτως ...* „ potrebbe intendersi riferito sia a entrambi i membri dell'antitesi (*σχολάζον* e *ἀπρονόητον*) che al solo secondo membro di essa. Credo convenga decidersi per la seconda ipotesi, giacchè diversamente tutta la discussione antecedente diventerebbe superflua.

(2) Il richiamo, fatto nello scolio, alla l. 20 § 1 D. 49. 15 = B. 34. 1. 17, non ha interesse, perchè allude a fondi occupati dai nemici e poi ricuperati, ma non dice affatto che i *priores domini* fossero stati fatti prigionieri.

(3) Per un'interpretazione che cerca ridurre il testo a concetti romani, vedi Riccobono, in *St. cit.*, p. 400.

Noi non ci dobbiamo meravigliare che il tardo commentatore non si dia pensiero del regime che per i *captivi* vigeva nel diritto classico e ancora — sia pure per forza d'inerzia — nel diritto giustinianeo: essi, cadendo in poter del nemico, subiscono la *capitis deminutio maxima* (1), perdendo la capacità di essere titolari, nonchè del possesso, anche della proprietà dei loro beni: salvo per la proprietà e gli altri diritti — non per il possesso (2) — l'istituto del postliminio, e quindi la *restitutio in integrum* contro l'usucapione eventualmente compiuta da altri durante la prigionia (3). È fuor di dubbio che queste norme dovevano applicarsi non solo ai soldati ma a qualunque cittadino caduto in potere del nemico; e “ *hostes* „ (4) sono anche i barbari che invadono il territorio romano, sia in guerra guerreggiata che in incursioni di confine: giacchè anche in questo caso, e a differenza della cattura per parte di ladroni o pirati (5), i *captivi* sono portati fuori della sfera giuridica romana. — Tutto questo sistema, colle sue rigorose applicazioni, non poteva costituire nel mondo bizantino più che un ricordo storico, ed è quindi naturale cbe il tardo canonista, facendo una cosa sola dei prigionieri di guerra e degli assenti, applichi ad entrambe le categorie il medesimo regime.

8. Assai più singolari sono le attestazioni dello scolio relative alle *res derelictae* (*ἀπρονόητα*). Di queste — scrive Balsamone — si è perduto il possesso sia *animo* che *corpore*: perciò chi le occupa non commette furto o, rispettivamente, non è tenuto coll'*unde vi*, anzi ne può acquistare la proprietà per usu-

---

(1) Almeno secondo l'opinione dominante. Diversamente Dessertaux, *Études sur la formation histor. de la cap. dem.* (1909), p. 135, movendo dal rilievo che non si tratta di *justa servitus*: comunque egli non disconosce (p. 142, n. 2) l'analogia degli effetti.

(2) Cfr. 12 § 2 itp., 29 D. 49. 15; 19 D. 4. 6 (itp. Faber, *Rat. ad h. l.*); 118 D. 50. 17; 15 pr. D. 41. 3 (itp. Di Marzo, *St. per Scialoja* 2. 55).

(3) Se, per mancanza di uno dei requisiti, l'usucapione non potè avvenire, il *postliminio reversus* ha la *rei vindicatio* senz'altro (24 C. 3. 32).

(4) *Hostes* è l'espressione tecnica nella *sedes materiae* (D. 49. 15; C. 8. 50); *extranei* in 19 pr. D. *h. t.* pare interpolato (Beseler, *Beitr.* 2. 49). Tutto il tema del *postliminium* ha bisogno d'una revisione.

(5) 19 § 2, 21 § 1 D. 49. 15.

capione se le possiede in buona fede per il periodo dovuto, ossia tre anni se la cosa è mobile, dieci se è immobile.

Questa generale necessità dell'usucapione è singolarmente strana: ed io credo impossibile spiegarla alla stregua dei principî a cui, in questa controversa materia, si sarebbe tentati di far ricorso dal punto di vista del diritto classico o anche giustinianeo.

È noto che di questo istituto dell'*usucapio pro derelicto* non è pacifica la costruzione fra i romanisti. L'opinione sempre più diffusa (1) è che i testi in materia vogliano sempre alludere alla derelizione compiuta da chi non era proprietario (*derelictio a non domino*): solo così si spiegherebbe perchè occorra usucapire la cosa e non basti, come per qualunque *res nullius*, l'occupazione (2). — Ma qualunque sia il valore di questa dottrina di fronte ai testi del *Corpus Juris* — nei quali per vero è sintomatico che non venga mai una volta rilevato che il *derelinquens* non era domino (3) — essa non può certo invocarsi di fronte al testo in esame. La distinzione tra lo *σχολάζον* e l'*ἀπρονόητον* è fatta consistere unicamente nell'essersi o no perduto l'*animus possidendi* e, nel secondo caso, in tanto l'occupante *può* usucapire in quanto il titolare ha perduto il possesso (4): ma sia per lo *σχολάζον* che per l'*ἀπρονόητον*, il precedente possessore era anche proprietario, tant'è vero che può rivendicare la cosa — sempre, nel primo caso; entro il triennio o il decennio, nel secondo.

Col Bonfante (5) io credo assai probabile che il caso tipico del-

---

(1) Cfr. CUIAC., *Opp.* 1. 1145 D; WINDSCHEID § 179, tr. it. 1. 2. 173 n. 5; PEROZZI, *Istit.* 1. 414 n. 1 ecc.

(2) La nota controversia tra Sabiniani e Proculeiani (su cui v. spec. CZYHLARZ in GLÜCK, 41. 1. tr. it. p. 148; KARLOWA, *RRG.* 2. 113) riguardava solo il momento in cui il derelinquente perde la proprietà.

(3) Così BONFANTE, *R. It. Sc. giur.* XVII. 128.

(4) *οὐδὲ νομίμως οὐδὲ φυσικῶς κατέχομεν, καὶ διὰ τοῦτο δεσπόζεται κ. τ. λ.*

(5) *L. cit.* p. 127 sg.: v. ivi p. 129 la critica agli autori (PUCHTA, BÖCKING, KUNTZE) che richiesero l'usucapione anche per *res nec mancipi*. Al BONFANTE aderiscono FERRINI, *Pand.* p. 414 n. 4; COSTA, *St. del d. rom. privato*, p. 196; 232 n. 1: in senso conforme ACCARIAS, 1. 503; CUQ, *Inst. jur.* 2. 552 n. 1; LEIST e MEYER cit. da BONFANTE *ivi*.

l'usucapione *pro derelicto* fosse per diritto classico la derelizione di *res mancipi*. L'apprensione di *res derelictae*, che vien considerata in stretto rapporto colla *traditio in incertam personam*, non può generare l'acquisto della proprietà se non entro i limiti in cui basta all'acquisto della proprietà l'acquisto del possesso: diversamente non lo può generare se non attraverso l'usucapione. Ammessa questa tesi, acquista un interesse pratico assai maggiore la controversia dianzi ricordata (1) e solo con essa trovano adeguata spiegazione il regime classico della *missio in possessionem damni infecti nomine* e quello postclassico dell'*ager desertus* (2). Sostituita alla distinzione tra *res mancipi* e *nec mancipi* quella tra immobili e mobili, sembra per lo meno verosimile che per gli immobili derelitti il diritto giustinianeo richieda pure l'usucapione, sebbene i testi — in cui ogni traccia dell'antitesi classica fu soppressa senza sostituirla — non offrano veruno spunto. — Ma questa teoria non giova a spiegare il testo in esame, perchè l'usucapione vi è richiesta *sempre*, specificando anche nettamente il diverso periodo di 3 o 10 anni, che, secondo la nota riforma giustinianea, occorre a seconda della qualità dell'oggetto. Mentre è pur certo che, per diritto giustinianeo come per diritto classico, vi erano pure dei casi in cui la semplice apprensione della *res derelicta* bastava ad acquistarne la proprietà.

9. La spiegazione dell'enigma va quindi tentata per altra via. Si potrebbe pensare che Balsamone alluda non alla *derelictio* effettiva ma all'apprensione di cose falsamente credute derelitte: che si tratti cioè di un'usucapione in base a titolo putativo. Dal punto di vista classico la tesi sarebbe insostenibile: il titolo *pro derelicto* è precisamente uno di quelli in cui i testi esigono espressamente la *justa causa* reale (3): la semplice credenza che si tratti di *res derelicta* basta unicamente ai fini d'escludere il

---

(1) E anche (Bonfante, *l. cit.* p. 130) l'opinione di Proculo nel caso della l. 38 § 1 D. 9. 4.

(2) Per la *missio* v. Bonfante, *l. cit.* p. 137: per l'*ager desertus* Id., *Corso di d. romano* 1905-06, 2 p. 43; *Istit.*[5] p. 263 n. 1.

(3) Cfr. l. 4, 6 D. 41. 7: cf. Ferrini, *Pand.* p. 414; Bonfante *l. cit.* p. 128; Perozzi, *Ist.* 1. 416 n. 1. Strana è la conseguenza che dalla l. 4 *h. t.* crede poter trarre il Karlowa (*RRG.* 2. 416).

furto (1). Però già nel diritto giustinianeo è innegabile la tendenza di dare al titolo putativo un'efficacia generale (2), e questa tendenza si accentua nelle fonti bizantine, le quali anzi offrono tracce abbastanza evidenti di un'applicazione anche al titolo *pro derelicto*. Si potrebbe anzi sospettare che i bizantini, interpretando il " *pro derelicto* „ nel senso di " come se fosse derelitto, mentre in realtà non è „, vi ravvisino un titolo essenzialmente putativo. Certo l'esame dei testi è molto significativo. Nella l. 6 D. 41. 7 è espressamente negato il titolo putativo: quindi la credenza, per quanto seria e ragionevole, non basta se non corrisponde a realtà. Nei Basilici (B. 50. 7. 7) il testo è reso: " *ἐξ ὑπονοίας μόνης οὐ κτᾶται τις ὡς ἐγκαταλελειμμένον* „: che non basti " il solo sospetto „ è poca cosa, e lascia adito al dubbio che un'opinione, falsa ma seriamente fondata, possa bastare. Di analoga interpretazione appare suscettibile B. 50. 3. 27 che corrisponde alla l. 27 D. 41. 3, un testo che è fra i più espliciti nel senso restrittivo. La l. 4 D. 41. 7 esige per l'usucapione *pro derelicto* la derelizione effettiva *e* la scienza di essa da parte di chi si impossessa della cosa (3): nei Basilici (50. 7. 4) la forma congiuntiva si muta in disgiuntiva: *τὸ ἐγκαταλειφθὲν ἢ καὶ νομιζόμενον καταλειφθῆναι διὰ τῆς χρονίας νομῆς δεσπόζομεν*. Anche in altre sedi, del resto, il requisito della *justa causa* è dai bizantini o omesso o frainteso. Così nella l. 1. D. 41. 9 si richiede per l'usuc. *pro dote* la *j. causa* reale: in B. 50. 8. 1 l'accenno è soppresso. In B. 50. 4. 11 (= 11 D. 41. 4) il testo dato dall'Heimbach legge " *ὁ εὐλόγως πλανόμενος* „: altri (4) " *ἀλόγως* „: inversione interessante. In B. 50. 5. 8 (= 4 C. 7. 29 [30]), finalmente, al requisito della realtà del titolo (*vero titulo*) si sostituisce semplicemente la realtà del possesso: " *οὐ*

(1) Ulp. 43 § 6 e 10 D. 47. 2; Paul, *Sent.* 2. 31. 27.

(2) L'aver accolto promiscuamente i testi pro e contro fa sì che il principio più blando prevalga: i testi restrittivi o hanno valore eccezionale o hanno implicita la riserva dell'errore scusabile. L'*usuc. pro herede* dell'erede apparente, configurata da Giustiniano come affatto regolare, è poi un titolo tipicamente putativo. Cfr. Bonfante, *R. It. Sc. giur.* XVII. 404; Windscheid § 178, tr. it. 1. 2. 170 n. 6; Ferrini, *Pand.* p. 426.

(3) La scienza costituisce il presupposto necessario per l'*animus* del possessore: cfr. anche la l. 5 C. 7. 34, la cui esegesi si complica, a mio avviso, per la necessità di tener conto di norme speciali.

(4) Cfr. Heimbach, 5. 66. n. *r*, citando Reitz.

δύναται προβαίνειν διὰ τῆς χρήσεως δεσποτεία μὴ προηγησαμένης νομῆς „!

Questi passi dimostrano all'evidenza che la dottrina del titolo putativo trionfa nelle scuole bizantine, alle quali non poteva più apparir chiaro il concetto della *justa causa*. Ma, purtroppo, nemmeno per questa via lo scolio di Balsamone può essere chiarito. La derelizione a cui egli allude non può, infatti, essere se non effettiva: infatti se la derelizione fosse solo creduta, si dovrebbe ammettere, dal punto di vista dello scoliaste, che il *dominus* non ha perduto la *possessio animo*, laddove è precisamente in ciò che si fa da lui consistere la diversità col caso precedente.

10. Io penso che convenga rinunciare a cercare una spiegazione su basi romanistiche, e che Balsamone — o, per meglio dire, i testi e le scuole a cui egli attinge questi principî — si siano formati un concetto di *derelictio* che colla *derelictio* romana non ha quasi più che una corrispondenza verbale.

Per i bizantini, l'istituto della *derelictio* e della relativa *usucapio pro derelicto* doveva essere non solo poco comprensibile, ma anche poco pratico. Gli oggetti di *derelictio* più importanti economicamente erano in diritto romano gli schiavi ed i fondi. Agli schiavi, dal diritto delle Novelle in avanti, la derelizione fa acquistare omai senz'altro la libertà (1) e non può quindi farsi questione d'occupazione o d'usucapione. Quanto ai fondi, il caso meno infrequente doveva esser quello dell'abbandono per timore d'incursioni o per la gravezza dei pesi fiscali: e qui, nel diritto postclassico, vige il regime particolare dell'*ager desertus* (*ἔρημος ἀγρός*) (2). Pur non ritenendo che nel caso dell'*ager de-*

(1) Ciò fu già vagamente sospettato: io conto darne fra breve la piena dimostrazione.

(2) Si è voluto negare (Humbert, in Daremberg 2. 1. 109 *s. h. v.*) che, prima delle costituzioni speciali in materia, l'*ager desertus*, in quanto fosse derelitto, potesse venir occupato od usucapito. Ma i testi da cui si argomenta alludono a casi affatto speciali: 4 C. 10. 1 Diocl. et Max. (fondi di *metoeci*); 19 C. 8. 50 = Th. 5. 7. 1, Valentinian. (fondi di *transfugae*); mentre le l. 8 e 11 C. 11. 59 sull'*ager desertus* alludono a fondi di proprietà privata (cfr. Czyhlarz *l. cit.* p. 99; Kniep, *op. cit.*, p. 481). A puri scopi fiscali è diretto l'istituto della *ἐπιβολή*: cfr. Zachariae, *Gesch. des griech. röm. Rechts* p. 228; Seek in Pauly-Wissowa 6. 30.

sertus sia *sempre* da ravvisare una derelizione, certo è che in molti casi i requisiti della derelizione ci sono: e, viceversa, sarà difficile trovare dei casi di derelizione di fondi a cui, se c'è chi se ne impossessa, non deva applicarsi il regime dell'*a. desertus*. Ed io credo che questo regime positivo ed eccezionale abbia contribuito ad offuscare quello che avrebbe ad essere il regime normale. Giova infatti tener presente che se l'acquisto dell'*ager desertus* dopo il biennio avviene indipendentemente dall'*animus derelinquendi* del *dominus*, riducendosi così, come fu ben visto (1), a una sorta d'espropriazione, dall'altro lato entro il biennio è riconosciuto al *dominus* il diritto di ricuperare il fondo, dietro rifusione delle spese, senza che — a giudicare dalla generalità della norma — sia ammessa indagine sull'esistenza dell'*animus derelinquendi* che dovrebbe portare perdita della proprietà immediata e definitiva (2).

L'applicabilità del regime normale della *derelictio* rimane così assai ridotta. E non è senza una ragione se i Basilici, mentre conservano, per rispetto al sistema (3), il titolo *pro derelicto* coi testi relativi, omettono sistematicamente la quasi totalità dei testi sull'argomento sparsi in sedi diverse (4). La stessa

---

(1) Perozzi, *Ist.* 1. 449. Lo scopo pratico è appunto di garantire contro eventuali pretese del titolare l'occupante che diversamente — trattandosi per lo più di fondi non italici — doveva attendere il lungo decorso della *l. t. p.*

(2) Nelle fonti bizantine non trovo espressioni da cui risulti se concepissero l'istituto come un'espropriazione o come un'usucapione qualificata, nonostante che il fondo sia divenuto *nullius*. Nel Nomocanone della chiesa Sira d'Antiochia, redatto — su fonti anteriori — nel 13° secolo da Abu 'l Faragi Bar Hebraeus, trovo che, pur conservandosi per l'acquisto della proprietà la necessità della coltura, l'*ager desertus* si considera esplicitamente come senza padrone (c. 28 sect. 1: tr. lat. di Assemani in Mai, *Script. vet. nova collectio*, v. 1 p. 2ª p. 186). Nonostante la assai probabile dipendenza di questi testi dalla dottrina dei maestri bizantini, io non voglio naturalmente insistervi.

(3) Che nei Basilici molta parte sia diritto storico, senza efficacia pratica, è noto: cf. da ultimo Riccobono, *ZSSt.*, 1914, 219; *St. per Chironi*, l. 391.

(4) I seguenti testi, in cui si trattano problemi sulla *derelictio*, non hanno corrispondenti nei Basilici, pur avendone gli altri testi delle medesime sedi: D. 41. 1. 58; 14. 2. 2 § 8; 14. 2. 8; 39. 2. 7 § 2; 39. 2. 15 § 21; 43. 8. 2 § 39-40; 41. 2. 21 § 2 cf. anche 41. 1. 9 § 8; 47. 2. 43 § 10-11; 39. 2. 6 (per questi due però v. *Suppl.* Ferrini, p. 183 e 147); 5 C. 7. 34 ove è omesso il presupposto della derelizione.

terminologia è ben lungi dall'essere costante: talora infatti si conserva la terminologia latina (*προ δερέλικτον*: p. es. B. 28. 4. 45): talvolta si usa *ἐγκαταλείπω* (*ἐγκαταλελειμμένον*: B. 50. 7 R.; 50. 7. 7; o *ἐγκαταλειφθέν*: B. 50. 7. 4 (1)): talvolta invece l'aggettivo *ἀπρονόητος* (B. 60. 5. 38; 48. 6. 4 e lo scolio in esame) il quale mette in luce la esteriorità, la materialità dell'abbandono (2), ma non l'intenzione che è, per il regime giuridico, l'elemento decisivo (3). Balsamone usa " *ἀπρονόητος* " come corrispondente al " *pro derelicto* " latino, ma la condizione giuridica della cosa *ἀπρονόητος* è per lui ben diversa da quella che dovrebb'essere nel caso di vera *derelictio*. Infatti egli riconosce non solo che occorre sempre l'usucapione perchè chi la possiede divenga proprietario, ma altresì che fino a usucapione compiuta il proprietario può rivendicare: segno che la proprietà non s'era perduta, e che quindi derelizione in senso tecnico non c'è stata. Il *dominus* non ha perduto in realtà altro che il possesso: in ciò — e in ciò solo — sta qui l'antitesi colle cose vacanti.

Questa concezione, che risulta dall'analisi spassionata del testo, è certo, dal punto di vista romanistico, mostruosa. Ma si noti che essa è in intimo nesso coll'altra che s'è veduta in ordine ai beni vacanti, la cui falsità è forse meno appariscente ma non meno grave. Un'antitesi tra queste due categorie (b. vacanti e b. derelitti) esisteva senza dubbio anche per diritto romano classico: dei beni vacanti è perduto il possesso ma non la proprietà; dei beni derelitti si è perduto proprietà e possesso. Per la teoria rappresentata dal nostro scolio la proprietà è fuori questione: sia della *σχολάζον* che dell'*ἀπρονόητον* si è sempre proprietari, e lo si rimane fino a che sia compiuta l'usucapione a favore del possessore, ove sia possibile. Il problema

---

(1) Cfr. anche le glosse di LABBÉ in OTTO, *Thes.* 3. 1789-90: *προδερέλικτον*] *τὸ ἀπολελειμένον πρᾶγμα, ὃ καταλείψει ὁ δεσπότης οἰκείᾳ γνώμῃ; π.*] *ὅπερ ὁ δεσπότης ταύτην ἔχων διάνοιαν ἀφίησιν ἀπρονόητον; π.*] *ἐγκαταλελειμμένον*. Cfr. *Synopsis Maior* E. 2. 1. 2 = *Proch. auct. paratitl.* 17 = (nella 1ª parte) *Syn. Minor* E. 88.

(2) TEOFILO, 2. 6. 7, usa *ἀπρονόητος* nel senso di *vacans*.

(3) Si avverta che l'espressione tecnica romana non è " *derelinquere* " ma " *pro derelicto habere* ", con cui appunto si insiste sull'elemento intenzionale.

è portato tutto quanto sul campo del possesso: la *possessio corpore* si riconosce perduta nei due casi, ma nel primo, a differenza del secondo, si dice che la *possessio animo* perdura.

11. La estrema scarsità delle nostre cognizioni al riguardo, e in particolare la mancata conservazione dell'apparato di scolii dei Basilici in materia di possesso, non ci permette di determinare a quali fonti attinga Balsamone il quale, pur non citando alcun testo nel brano direttamente interessante, indubbiamente espone concetti correnti al suo tempo e dottrine elaborate nelle scuole intorno ai testi legislativi. A me basta per ora aver richiamato l'attenzione su questo gruppo di scolii che, nell'attuale revisione delle dottrine classiche e postclassiche sul possesso, non meritano di venire trascurati.

Gorla Minore, gennaio 1915.

Postilla. — La presente Nota era già stata presentata quando è uscito lo scritto di Berger, *In tema di derelizione*, estr. dal " Bull. dell'Ist. di dir. romano ". Esso si occupa esclusivamente delle fonti giuridiche latine: un esame di quelle bizantine avrebbe giovato a confermare e precisare alcuni punti: in particolare il nuovo significato di *pro derel. habere*, inteso non più dal punto di vista del derelinquente ma da quello del pubblico, e in particolare dell'apprensore; dal che può derivare quella falsa interpretazione del titolo *pro derelicto* che ho sospettato: e avrebbe anche mostrato come, se anche per l'influenza del greco *κατα-* o *ἀπολείπειν* i compilatori tendono a rinforzare il *relinquere* in *derelinquere*, in realtà dell'istituto della derelizione essi capiscono poco. La dimostrazione del B., sempre molto fine, sembra particolarmente riuscita per ciò che riguarda lo *jactus mercium* (p. 46 sg.) e i rilievi sull'*animus* (p. 56, n. 3), che anticipano in certo modo i risultati promessi dall'Huvelin: punto decisiva, invece, mi sembra la parte centrale, in antitesi alla tesi del Bonfante sulla funzione classica dell'*usuc. pro derelicto*: su ciò spero poter tornare. *Pro domo mea* osservo che nel luogo indicato da B., p. 54, n. 6, non ho punto inteso applicare il noto criterio del Collinet alla forma " *furti teneri* " che ritengo classicissima, bensì — nella l. 7 § 7, D. 4. 3 — ho rilevato la patente sconcordanza ⟨*furti teneris* – *dari debere*⟩.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di C. Frati, A. Baudi di Vesme e C. Cipolla.

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di C. Cipolla, G. De Sanctis e P. Fedele.

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. L, Disp. **12a**, **1914-1915**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Aprile 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti: il Vice-Presidente CAMERANO, il Direttore della Classe D'OVIDIO, e i Soci SALVADORI, NACCARI, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, PARONA, MATTIROLO, FUSARI, PANETTI, e SEGRE, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio PEANO.

Letto e approvato il verbale della precedente adunanza, il Presidente, comunica una lettera di ringraziamento del nuovo Socio nazionale non residente Prof. ROITI.

Sono state inviate in omaggio, dal Socio corrispondente ISSEL, una sua Commemorazione del Marchese Giacomo DORIA, e dal Socio corrispondente BASSANI una Memoria su *La Ittiofauna della pietra Leccese*, e altre due Note paleontologiche.

Vengono presentate, per l'inserzione negli *Atti*, le seguenti Note:

I. GUARESCHI, *Ricerche sull'acqua di cristallizzazione. Composti con* $2H^2O$. Nota II.

L. CASALE e MARIA CASALE-SACCHI, *Sui sali di alcuni aminoazocomposti*, dal Socio GUARESCHI.

G. Albenga, *Sul profilo teorico delle funicolari,* dal Socio Guidi.

A. Tanturri, *Prodotto di due numeri approssimati. Error relativo o errore assoluto?* dal Socio D'Ovidio, per incarico del Socio Peano.

G. Boccardi, *Saggio sulla costante di aberrazione,* dal Socio Segre.

Sulle tre Memorie di L. Colomba, G. Sannia, G. Colosi, presentate nell'ultima adunanza, leggono le relazioni, favorevoli alla stampa, il Socio Parona (anche a nome del Collega Somigliana), il Socio D'Ovidio (anche a nome del Collega Peano, relatore), ed il Socio Camerano (anche a nome del Collega Salvadori). Con tre successive votazioni unanimi vengono accolte quelle Memorie nei volumi accademici.

Infine il Socio Fusari presenta una Memoria di L. Loredan, *Intorno al processo dell'atresia follicolare dell'ovaia nei mammiferi.* Riferiranno intorno ad essa i Soci Foà e Fusari.

LETTURE

Ricerche sull'acqua di cristallizzazione. Composti con $2H^2O$.

Nota IIa del Socio I. GUARESCHI.

In seguito alla mia Nota I sull'acqua di cristallizzazione dei sali [1], ho fatto altre ricerche sull'acqua di cristallizzazione di molti sali con $2H^2O$, per stabilire quale sia il loro punto o temperatura di disidratazione e vedere quali sono quelli che seguono la cosidetta regola di Rosenstiehl, cioè se l'acqua ($2H^2O$) si elimina tutta contemporaneamente. Osservazioni simili ho fatto pei sali con 3, 4, $5H^2O$, $7H^2O$, ecc.

Molte delle esperienze che ora io esporrò furono fatte già da alcuni anni. Non voglio attendere più lungo tempo a pubblicarle, perchè, come si vedrà discorrendo del solfato di calcio, già altri si occupano di ricerche analoghe.

La presente Nota comprende le esperienze che ho fatto con:

I. Solfato di calcio $CaSO^4 + 2H^2O$.
II. Nitroprussiato di sodio $Na^2[Fe(NO)(CN)^5] + 2H^2O$.
III. Cloruro rameico $CuCl^2 + 2H^2O$.
IV. Bromuro di sodio $NaBr + 2H^2O$.
V. Joduro di sodio $NaJ + 2H^2O$.
VI. Acetato di cadmio $Cd(C^2H^3O^2)^2 + 2H^2O$.
VII. Etilidendisolfato potassico $C^2H^4(SO^3K)^2 + 2H^2O$.
VIII. Ditionato di sodio $Na^2S^2O^6 + 2H^2O$.
IX. Ditionato di bario $BaS^2O^6 + 2H^2O$.

---

(1) *Ricerche sull'acqua di cristallizzazione. Composti con $2H^2O$*, Nota I, "Atti R. Acc. delle Scienze", 1914, vol. XLIX.

I.

Solfato di calcio $CaSO^4.2H^2O$.

Numerosissime sono le ricerche fatte sul solfato di calcio, per stabilire la temperatura alla quale questo sale diventa anidro. Questa sostanza ha un grande interesse anche come materiale da costruzione. Io ricorderò qui solamente le principali delle ricerche fatte.

Plessy (¹) dimostrò che il gesso naturale e il solfato di calcio cristallizzato artificiale, perdono tutta la loro acqua di cristallizzazione (20.9 %) in una corrente di gas idrogeno secco, e alla temperatura di 110°-115°. Il gesso scaldato a 110°-115° all'aria libera perde facilmente 15 % di acqua e si nota un tempo d'arresto; ma a 130°-140° perde ancora 2 % (in breve tempo) e a 200°-250° perde totalmente l'acqua.

Già da queste ricerche risulta che in corrente di gas secco il gesso perde di continuo tutta l'acqua a 110°-115°, mentre scaldato all'aria libera perde prima $1^1/_2H^2O$ e poi $^1/_2H^2O$.

Millon (²) nel 1847 ha dimostrato inesatto quanto affermava il Graham, che cioè il gesso non perde nulla del proprio peso a 100° e diventa anidro a 130°. Secondo Millon il solfato di calcio preparato artificialmente perde dal 15 al 17 % del proprio peso a 80°-85° oppure a 105°, il che corrisponde alla eliminazione di $1^1/_2H^2O$; il resto lo perde a temperatura più alta. I solfati di calcio naturali non perdono l'acqua a 80°-85° ma bensì a 105°-110°. Secondo Millon dunque il solfato di calcio artificiale $CaSO^4.H^2O$ a 80°-85° darebbe il solfato con $^1/_2H^2O$, il quale diventerebbe poi anidro a 105°-110°, mentre il solfato naturale diventerebbe anidro solamente a 200°-300°.

Anche queste ricerche non sono in tutto esatte.

Secondo Le Chatelier (³) il gesso non si disidrata comple-

(¹) " C. R. ", 1847, t. 24, pp. 658 e 812.

(²) "A. Ch. ", 1847 (3), t. 19, p. 222.

(³) " C. R. ", 1883, t. 96, p. 1668. Le Chatelier (*Recherches expérimentales sur la constitution des mortiers hydrauliques,* 1887) ha dimostrato che prima si elimina $1\,^1/_2\,H^2O$ e poi in seguito il semidrato $CaSO^4.0,5H^2O$ perde tutta l'acqua.

tamente che a 200°. Il gesso comune dei muratori secondo Berthier (1), il gesso cotto comune, contiene ancora 3 a 8 % di acqua e Landrin confermò questa asserzione (2); egli trovò in varî campioni 7-8 % di acqua. Così pure molti campioni di gesso cotto analizzati nella Scuola *des Ponts et Chaussées*, contenevano da 4 a 9 % d'acqua (Le Chatelier). Secondo Le Chatelier questo gesso potrebbe essere un miscuglio di *gesso anidro* con gesso imperfettamente cotto, oppure un idrato definito con una frazione di molecola d'acqua. Dalle esperienze di Le Chatelier risulterebbe essere un idrato $CaSO^4 + 0.5 H^2O$, contenente circa 6.2 % di acqua (3). Questo idrato era già stato ottenuto da Johnson (4) nel 1848.

L'anidride così ottenuta, secondo Gaudefroy (5), è solubile più dell'anidride naturale.

Ma a me pare che non si possano confrontare le esperienze fatte in grande sulla cottura del gesso con quelle che si fanno in piccolo nei laboratori. È naturale, che riscaldando delle grandi masse di gesso, possa avvenire che se ne disidrati completamente una parte e ne resti una parte con $1H^2O$ oppure $^1/_2H^2O$, e da ciò la quantità variabile di acqua nei gessi cotti, da 4 a 9 %.

Naturalmente, come era da prevedere, il gesso scaldato anche a 150° in ambiente saturo di vapore d'acqua, non perde che $1^1/_2H^2O$ e non $2H^2O$ (Gaudefroy, " C. R. ", 1914, t. 158, p. 2006).

Già secondo Kraut e Gunning, il gesso in polvere perde assai lentamente tutta la sua acqua già a 100° e più rapidamente, ma sempre però richiedendo lungo tempo, a 150°-160°. Tanto nell'un caso come nell'altro si sviluppano prima $1^1/_2H^2O$; la mezza molecola ultima si elimina molto lentamente.

---

(1) "Ann. d. Mines ", 1840 (3), t. 19, p. 655.

(2) "A. Ch. ", (5), t. III, p. 440.

(3) Avevo incominciato alcune ricerche anche sul cosidetto *gesso cotto* ordinariamente usato; ma le ho tralasciate perchè uscivano dal piano del mio lavoro. Ne esaminai due campioni: uno conteneva 2,9 % di acqua e l'altro scaldato a 93°-94° in corrente di aria secca perdette 6,03 %, il che corrisponderebbe a $CaSO^4.^1/_2H^2O$.

(4) " Sill. Am. Journ. of Sc. ", (2), vol. VI, p. 112.

(5) " C. R. ", 1914, t. 158, p. 2006.

Sulla perdita di $^3/_4$ dell'acqua a 100° si vegga anche un lavoro del Prof. A. CAVAZZI, *Osservazioni e proposte intorno ai saggi chimici del gesso* (1).

Nel *Diction. de chimique* del WURTZ, I, p. 705, è asserito senz'altro che il solfato di calcio scaldato a 80° in corrente di aria perde tutta la sua acqua. Questa asserzione si riferisce probabilmente al lavoro di Shenstone.

Altri scrivono: " on sait que le gypse chauffé au-dessus de 100° perd rapidement son eau de cristallisation „. Ma ciò è inesatto, perchè non la perde rapidamente in tutte le condizioni.

" Per riscaldamento a 107°, e più rapidamente a 120°, il getto perde $^3/_4$ della sua acqua di cristallizzazione e dà il semiidrato $2CaSO^4.H^2O$; a 130°-170° fornisce il cosidetto *anidride solubile*, e dalla miscela dei due si ha il cosidetto *stuckgips* che coll' acqua indurisce rapidamente „ (*Richter's Lehrb. d. anorg. Chem.*, v. KLINGER, 1910, pp. 455-456).

Secondo Shenstone e Cundall (2) l'acqua di cristallizzazione del gesso comincia ad eliminarsi a 40° e scompare totalmente a 70°. In una corrente d'aria secca perde tutta l'acqua a 70° dopo 48 ore ed anche a 40° comincia a sfiorire lievemente. La velocità di disidratazione non è uniforme.

	Gesso artificiale $CaSO^4.2H^2O$	
A 70°	20,67 %	calc. 20,9.
„ 100°	20,89 „	
„ 150°	21,07 „	

Secondo Cloez (3) 20 gr. di gesso possono essere interamente disidratati a 145° in 4 ore.

Secondo Krafft (4) il solfato di calcio scaldato 2 ore a 100° perde $1^1/_2H^2O$ e dopo 2 ore a 150° perde $2H^2O$.

Secondo dunque le ricerche di varî chimici, e special-

(1) " Gazz. Chim. Ital. „, 1913, vol. 43 (II), p. 77.

(2) " J. Chem. Soc. „, 1888, t. 53, p. 550; e " Bull. Soc. Chim. „ (3), 1888, t. 50, p. 531.

(3) " Bull. Soc. Chim. „, 1903 (3), t. 29, p. 169.

(4) " Berichte „, 1907, t. 40, p. 4770; e " Ch. Cent. „, 1908, I, p. 340.

mente quelle di Le Chatelier, esistono due idrati $CaSO^4.2H^2O$ e $CaSO^4.^1/_2H^2O$ (1).

Riguardo ai prodotti della disidratazione del gesso si può consultare un recente lavoro di R. Grengg (2), il quale anch'egli ammette per il semiidrato la formola $CaSO^4.^1/_2H^2O$.

Il *gesso* è dunque una sostanza assai curiosa sulla quale si hanno dei dati molto discordanti. La temperatura alla quale si elimina tutta o parte della sua acqua varia assai secondo le condizioni.

Anch'io ho voluto vedere quali erano le condizioni per la più facile eliminazione dell'acqua dal solfato di calcio, tanto più perchè dal Rosenstiehl si assegna quale temperatura di disidratazione del gesso 130°.

I. *Sul cloruro di calcio e sull'acido solforico a 40 mm. di pressione, poi a 99°-108°-157° e 195°-200°.* — Gr. 0.8252 di solfato di calcio ottenuto per precipitazione, nulla perdettero sul

---

(1) Si vegga anche Lescœur, "A. Ch. „ (6), 1890, XXI, p. 560.

Sulla formazione del gesso anidro e dell'idrato $CaSO^4.^1/_2H^2O$ si trova la bibliografia quasi completa nelle quattro memorie seguenti:

I. *Einige Versuche über die Bildung des marinen Anhydrites*, di Heinrich Vater, in " Sitzungsberichte d. K. Preuss. Akad. d. Wissensch. „, 2, Berlin, 1900, pp. 269-294.

II. *Gips und Anhydrit. Das Halbhydrat von Schwefelsaurem Kalk* $CaSO^4.^1/_2H^2O$, di van't Hoff e E. F. Armstrong, in loc. cit., pp. 559-576.

Sono descritte le varie condizioni in cui si forma l'idrato $CaSO^4\,^1/_2H^2O$.

III. *Der hydraulische oder sogenannte Estrich gips*, di van't Hoff e G. Fast, in loc. cit., 1903, pp. 249-258.

IV. *Gips und Anhydrit. Der lösliche Anhydrit* $CaSO^4$, di van't Hoff, W. Hinrichsen u. F. Weigert, in loc. cit., 1901, p. 570.

Secondo van't Hoff e Armstrong, alla temperatura di 107° il gesso si trasforma in $CaSO^4.^1/_2H^2O$, in tubi chiusi e alla pressione di 970 mm.

Per il gesso $CaSO^4.2H^2O$ si può inoltre vedere:

Spezia, *Intorno all'influenza della pressione sulla formazione dell'anidride*, "Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, 1888.

Le Chatelier, *Sur la cuisson du plâtre*, " C. R. „, 1883, t. 96, p. 1668.

Poggiale, "A. Ch. „ (3), 1843, VIII, p. 471.

A. Lacroix, *Sur le sulfate anhydre, etc.*, " C. R. „, 1898, t. 126, pp. 360 e 553.

(2) R. Grengg, *Die Entwasserungsprodukte des Gypses*, in " Zeits. f. analyt. Chem. „, 1914, vol. 90, p. 327.

cloruro di calcio, come pure nulla perdettero in macchina pneumatica alla pressione di 40 mm. (temp. 22°-23°) e sull'acido solforico. Dopo circa 3 ore in stufa scaldata col vapor d'acqua a 99°, perdettero 0.0026 e dopo 16 ore a 108° (in stufa a vapore di toluene) 0.1624, in totale cioè 19.72 %; e dopo 3 ore in stufa ad alcol amilico nulla perdettero. Dopo 5 ore a 195°-205° in stufa ordinaria di Bunsen perdettero ancora 0.0076, cioè in totale 0.1700 cioè 20.6 %; mentre per $2H^2O$ si calcola 20.9 %.

Dunque in queste condizioni la disidratazione avviene in gran parte a 108° e completa a 195°-205°.

Non si è formato il composto $CaSO^4.{}^1/_2H^2O$.

Differenza fra il solfato naturale e quello ottenuto per precipitazione. — Gr. 0.7162 di gesso di Caltanisetta in magnifici cristalli aghiformi, argentini, regalatimi dal Prof. G. Piolti, che ringrazio vivamente, non disseccati sul cloruro di calcio, ma scaldati direttamente a 99° in stufa di vetro a vapor d'acqua, perdettero dopo 2 ore e mezzo 0.1160 cioè 16.15 %, e per l'eliminazione di $1^1/_2H^2O$ si calcola 15.69 %. Dopo ancora 10 ore alla stessa temperatura perdettero 0.0252, cioè in totale 0.1412 cioè 19.7 %. Per la eliminazione di $1^3/_4H^2O$ si calcola 18.4 %.

Gr. 0.6625 di un bel campione di solfato di calcio naturale in lamine trasparenti (speculare di Moncucco), scaldati per 2 ore e mezzo a 98°.5 in istufa a vapor d'acqua, perdettero 0.0980 cioè 14.8 %; dopo ancora 2 ore e mezzo perdettero 0.003 cioè in totale 15.36 %; e dopo altre 8 ore perdettero in totale 0.1254 cioè 18.8 %.

Per la eliminazione di $1^3/_4H^2O$ si calcola 18.4 %.

Nelle stesse condizioni, identiche, ho scaldato a 98°.5 in stufa di vetro a vapor d'acqua gr. 0.6056 di solfato di calcio ottenuto *per precipitazione*; dopo 2.30 ore perdettero 0,0025, e dopo 19 ore a 108° (in stufa a vapore di toluene) perdettero 0.1205 cioè 18.9 %.

Gr. 0.7070 di solfato di calcio naturale cristallizzato (*Marienglas*), scaldati per 1 ora a 98°-99° (in stufa a vapor d'acqua) perdettero 0.0647 cioè 9.1 %, mentre per 1 molecola si calcola 10.45 %; dopo altre 2 ore e mezzo perdettero in tutto 0.1131 cioè 15.99 %, e per $-1^1/_2H^2O$ si calcola 15.69 %. Dopo altre 10 ore perdettero ancora 0.0280 ossia in totale 0.1411 ossia 19.98 %. Dopo 2-3 ore a 108° non perdettero più di peso.

Non si nota un vero punto di arresto, ma dopo perdute $1^1/_2H^2O$ si nota un punto di grande rallentamento.

Gr. 0.7152 di gesso speculare di Moncucco scaldati direttamente a 108° in stufa a vapore di toluene, perdettero in 18 ore gr. 0.1420 cioè 19.85 $^0/_0$ e poi non più.

Gr. 0.6902 di solfato di calcio *per precipitazione* scaldati a 99° in stufa a vapore d'acqua, perdettero nelle prime 2 ore solamente 0.0017; nelle 3 ore successive perdettero 6.1 $^0/_0$, poi 16.8 $^0/_0$, ecc. E nelle stesse condizioni col solfato speculare di Moncucco gr. 0.6445 perdettero nelle prime *due* ore 0,0821 cioè 12.7 $^0/_0$.

Come si scorge, tra i due gessi vi sarebbe questa differenza, che nelle prime ore il solfato di calcio naturale perde subito gran parte della sua acqua, mentre non la perde quello artificiale per precipitazione e comincia a perderla dopo 2 a 3 ore di riscaldamento. E perciò ora ho rifatto questa esperienza.

Gr. 0.7494 di solfato di calcio naturale in belle lamine trasparenti di Moncucco, furono scaldati per 3 ore in stufa di vetro a vapor d'acqua (98°,5-99) e perdettero 0.1112 pari al 14.83 $^0/_0$. Dopo ancora 2 ore e mezzo perdettero 0.010 ossia 16.1 $^0/_0$ e per $1^1/_2H^2O$ si calcola 15.7 $^0/_0$. In altra esperienza dopo 2 ore perdette $1H^2O$ e altre 8 a 10 ore perdette il resto.

Gr. 0.7484 di solfato di calcio ottenuto *per precipitazione*, della collezione Kahlbaum, dopo 3 ore nelle stesse condizioni del primo perdettero appena 0.0043, pari al 0.5 $^0/_0$. Nelle susseguenti 2 ore e mezzo perdettero 0.0397 ossia 5.8 $^0/_0$, dopo 6 ore sino 16.4 $^0/_0$, ecc.

II. *In stufa a vapore di eptano cioè a 93°-94°.* — Gr. 0.7633 di solfato di calcio in belle lamine trasparenti (*Marienglas*) furono scaldati in stufa di vetro a vapore di eptano; dopo 1 ora e mezzo perdettero 0.0437 cioè 5.7 $^0/_0$; dopo ancora 6 ore 0,0760 cioè in totale 15.68 $^0/_0$ cioè — $1^1/_2H^2O$. Dopo ancora 14 ore di riscaldamento perdettero ancora 0.0314 cioè in totale 0,1511 pari a 19.8 $^0/_0$. A questa temperatura non perdeva più di peso.

Dunque il gesso naturale già a 93°-94° in stufa perde quasi tutta la sua acqua. Non si nota un vero punto di arresto, ma un punto di grande rallentamento.

III. *In corrente di aria disseccata.* — Ho fatto anche molte determinazioni sul solfato di calcio scaldato in una stufa orizzontale di vetro e in corrente di aria completamente disseccata.

Gr. 0.9932 di solfato di calcio preparato per *precipitazione* furono scaldati a 98°-99° (vapore d'acqua); dopo 3 ore perdettero gr. 0.1262 cioè 12.7 %, e dopo ancora 3 ore perdettero gr. 0.067 cioè in totale 19.3 %, e finalmente dopo 3 ore e mezzo ancora 0.0080 cioè in totale 20.25 %.

Un altro campione di solfato di calcio purissimo, per *precipitazione* e cristallizzazione, nelle stesse condizioni dopo 5 ore perdette gr. 0.1242 cioè 19.5 % e dopo molte altre ore non perdette più del 20.3 %.

Dunque in corrente d'aria e a 98°-99° perde quasi tutta l'acqua.

Gr. 0.6823 di solfato di calcio per precipitazione scaldati a 99° in corrente di aria secca, perdettero nelle prime 2 ore 0.0037 cioè 0.54 %, e nelle 3 ore successive 0.0568 cioè in totale 0.0605 ossia 9.7 % e successivamente in 14 ore perdettero in totale 0.1392 cioè 20.4 %.

Nelle stesse condizioni si fece l'esperimento seguente col gesso specolare di Moncucco.

Gr. 0.6765 dopo 2 ore a 99° in corrente di aria secca perdettero 0,0642 cioè 9.49 % e nelle 16 ore susseguenti perdettero in totale 0.1380 cioè 20.39 %.

Gr. 0.6512 di solfato di calcio naturale scaldati a 98°-99° (vapor d'acqua) in corrente d'aria disseccata completamente, attraverso cloruro di calcio, acido solforico, calce sodata, ecc., dopo 1 ora e 15 minuti perdettero 0.0971 cioè 14.9 %; per la eliminazione di $1^1/_2 H^2O$ si calcola 15.69 %; dopo ancora 2 ore perdettero 0.0339 cioè in totale 0.1310 vale a dire 20.57 %, e dopo altre 4 ore solamente 0.0018 cioè in totale 20.88 %. Dunque nelle prime 3 ore perde tutta l'acqua e solamente 0.3 % la perde dopo circa 3-4 ore di riscaldamento proseguito. Nella prima ora perde quasi $1^1/_2 H^2O$ e dopo 4-5 ore l'altra mezza molecola.

Questo solfato di calcio anidro lasciato all'aria riassorbe in 24 ore 7.95 % di acqua e per $^1/_2 H^2O$ si calcola 6.6 %; lasciato all'aria ancora varî giorni non aumenta più di peso (dopo 6 giorni 0.0008).

Gr. 0.6948 di solfato di calcio per precipitazione furono scaldati in corrente di aria disseccata; a 42°, a 60°, a 64° e a 72° non perdettero di peso. Dopo 6 ore a 81°-82° (vapore

di cloruro di etilene) perdettero 0.0342 cioè 4.8 %; per — $^1/_2H^2O$ si calcola 5.25 %. Dopo ancora 14 ore la perdita totale salì a 0.1409 cioè 20.26 %, e dopo ancora 4 ore a 125° (vapore d'alcol amilico) perdettero totalmente ancora 0.0029 cioè in totale 20.58 %.

In queste condizioni non si è osservato un vero punto di arresto; ma si può dire che perde quasi tutta l'acqua a 81°-82° in corrente di aria secca.

In queste condizioni dunque, cioè in corrente di aria secca, non si nota un punto di arresto, tutta l'acqua si elimina, ma indubbiamente l'ultima mezza molecola viene via molto più lentamente. Il *punto di disidratazione* sarebbe di 81°-82°.

Quasi nessuna differenza fra il solfato di calcio naturale e l'artificiale.

IV. *In termostato e ambiente secco.* — In ambiente secco, con disseccatore ad acido solforico o meglio con anidride fosforica, il solfato di calcio perde *tutta* la sua acqua di cristallizzazione anche a 80°.

Gr. 1.0022 di solfato artificiale preparato per precipitazione posti in termostato, entro un disseccatore, a temperature crescenti da 30° a 40°, 50°, 60° e 70°, e per 24 ore ad ogni temperatura, perdettero appena gr. 0.004; ma a 80° dopo 20 ore perdettero gr. 0.1136 cioè 11.3 %, vale a dire un poco più di $1H^2O$ per la quale si calcola 10.45 %; dopo altre 20 ore perdettero ancora 0.0877 cioè in totale 20.08 %, e dopo altre 24 ore non perdettero più che gr. 0,002 cioè in totale 20.3 %.

La temperatura di disidratazione del gesso nelle condizioni indicate sarebbe dunque 80°.

In queste condizioni a 80° perde tutte due le molecole di acqua successivamente, senza un punto di arresto.

Gr. 1.2515 di solfato di calcio naturale in belle lamine (speculare), scaldati in termostato a 72° per 65 ore, e dentro disseccatore, perdettero gr. 0.2235 cioè 17.9 %; dopo ancora 48 ore 0.0273 cioè in totale 20.04 %, e dopo ancora 48 ore solamente gr. 0.0017 cioè 20.25 %. Come si scorge, in queste condizioni, anche il gesso naturale perde tutta l'acqua senza passare per l'intermezzo del composto $CaSO^4.^1/_2H^2O$.

Anche qui si nota un differente modo di comportarsi del solfato artificiale e di quello naturale.

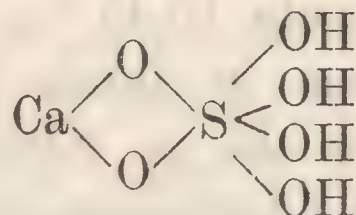
Queste esperienze dimostrano che il solfato di calcio già 81°-82° perde *quasi tutta* la sua acqua di cristallizzazione e meglio la perde a 98°-99°. Sono in aperta contraddizione colla affermazione che il gesso anche sopra 130° trattenga ancora $^1/_2H^2O$ e possa invece rappresentarsi con $(2CaSO^4+3H^2O+1H^2O)$ come vorrebbero alcuni. È certo che le ultime particelle d'acqua si eliminano molto lentamente, ma circa 20-20.5 $^0/_0$ si possono far eliminare dopo 3 a 4 ore di riscaldamento, nelle condizioni da me indicate.

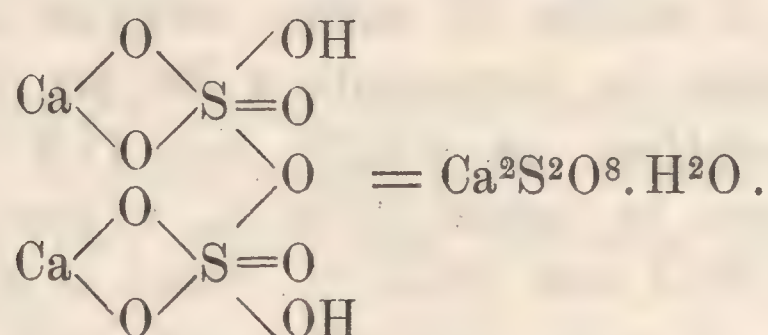
In fondo queste mie ricerche concordano con quelle vecchie del Plessy, il quale aveva visto che il gesso in corrente di idrogeno secco perde tutta l'acqua a 110°-115°; io ho trovato che la temperatura di disidratazione è anche più bassa.

Non ho fatto esperienze di confronto adoperando l'idrogeno anzichè l'aria.

Non abbiamo ancora dei dati di fatto sicuri per affermare che il cosidetto semiidrato sia veramente $CaSO^4.^1/_2H^2O$ oppure $2CaSO^4.H^2O$ ossia $Ca^2S^2O^8.H^2O$.

Io sono più propenso ad ammettere quest'ultima formola, perchè in realtà spesso dal gesso si eliminano $1^1/_2H^2O$ e rimane $^1/_2H^2O$. Ora l'esistenza di $^1/_2H^2O$, come esporrò a suo tempo, io la ritengo assai poco probabile. Si può invece ammettere per il gesso cristallizzato la formola:

$$\mathrm{Ca}\begin{array}{c}\diagup O \diagdown\\ \diagdown O \diagup\end{array}\mathrm{S}\begin{array}{l}\diagup OH\\ < OH\\ \phantom{<} OH\\ \diagdown OH\end{array}$$

da due molecole del quale si eliminerebbero prima $3H^2O$ e rimarrebbe il composto con $1H^2O$ che si rappresenterebbe con:

$$\begin{array}{l}\mathrm{Ca}\begin{array}{c}\diagup O \diagdown\\ \diagdown O \diagup\end{array}\mathrm{S}\begin{array}{l}\diagup OH\\ =O\\ \diagdown \end{array}\\ \qquad\qquad\quad O\\ \mathrm{Ca}\begin{array}{c}\diagup O \diagdown\\ \diagdown O \diagup\end{array}\mathrm{S}\begin{array}{l}\diagup\\ =O\\ \diagdown OH\end{array}\end{array} = Ca^2S^2O^8.H^2O.$$

Cioè una formola analoga a quella che io ammetto pel solfato di rame con $^1/_2H^2O$, ossia $Cu^2S^2O^8.H^2O$.

Ma forse già per il solfato di calcio cristallizzato o gesso si potrebbe ammettere la formola doppia $Ca^2S^2O^8.4H^2O$.

Conclusioni. — 1° La temperatura di disidratazione del solfato di calcio cristallizzato non è 130° come afferma Rosenstiehl, ma molto più bassa e diversa secondo le condizioni.

2° In stufa a vapore d'acqua (98°.5-99°) il gesso naturale o speculare perde quasi tutta la sua acqua. E ciò avviene già a 93°-94° (vapore di eptano). Questo sarebbe un punto di disidratazione.

Nelle stesse condizioni il gesso ottenuto per precipitazione, nelle prime ore non perde quasi nulla del proprio peso e solamente in seguito, ed anche più lentamente, perde la propria acqua.

3° In corrente di aria secca la temperatura di disidratazione sarebbe già a 81°-82°. E ciò tanto pel solfato di calcio naturale quanto per quello per precipitazione. Plessy aveva trovato 110°-115° in corrente di idrogeno.

Anche operando in corrente di aria secca, si nota che il solfato di calcio preparato per precipitazione, nelle prime ore di riscaldamento non perde quasi di peso, mentre quello naturale perde *subito* buona parte della sua acqua.

4° Il *semiidrato* $CaSO^4.{}^1/_2H^2O$ con molto maggiore probabilità, secondo me, deve riguardarsi invece come $Ca^2S^2O^8.H^2O$, cioè come avente una formola doppia.

Sulla questione delle mezze molecole d'acqua tornerò in altri lavori e anche prossimamente parlando del solfato di rame e di altri sali.

II.

Nitroprussiato di sodio $Na^2[Fe(NO)(CN)^5].2H^2O$.

Sir Lyon Playfair nella sua Memoria: *Ueber die Nitroprussidverbindungen, eine neue Klasse von Salzen* (1), afferma che il nitroprussiato di sodio a 100° non perde acqua.

---

(1) " Roy. Soc. London ,, 21 Juni 1849; A. 1850, t. 74, p. 328.

Ciò è pure affermato da J. Kyd [1]. Però altri nitroprussiati quali quello di bario, di rame, di ammonio, ecc., a 100° perdono l'acqua di cristallizzazione. L'affermazione del Playfair e del Kid trovasi registrata in varî Trattati, oppure in altri Trattati non è accennato affatto se perde o non perde facilmente l'acqua.

Io ho fatto diverse esperienze con un sale molto puro.

I. *Sull'acido solforico.* — Gr. 0.9776 di nitroprussiato dopo 18 ore in disseccatore ad acido solforico, non ha perduto di peso.

II. *A 108° in stufa mia di vetro a vapore di toluene.* — Gr. 0.9776 dopo circa 3 ore e mezzo perdettero 0,0802 cioè 8.2 %; dopo altre 3 ore perdettero ancora 0,0338 cioè in totale 0.1140 vale a dire 11.66 %, e dopo ancora 8 ore perdettero 0.001; dunque in totale 11.75 % mentre per — $2H^2O$ si calcola 12.05 %.

III. *A 98°-99° in stufa mia di vetro ed a vapore d'acqua.* — Gr. 0.7968 dopo 2 ore perdettero 0.0208 cioè 2.6 %, dopo 5 ore ancora 0.0390 cioè 7.48 % (e per — $1H^2O$ si calcola 6.04 %), dopo ancora 3 ore, ancora 0.0115 cioè 8.94 % (e per — $1^1/_2H^2O$ si calcola 9.06 %); dopo ancora 9 ore e mezzo 0,0215 cioè in totale 0.0928 pari a 11.6 % e dopo ancora 10 ore e mezzo 0.0020 cioè in totale 11.89 %.

Dunque a 98°-99° perde tutte due le molecole d'acqua, ma in tempi assai diversi; la *prima* molecola in 5-6 ore e la *seconda* in circa 20 ore. Anzi se si guarda bene l'andamento della perdita si vede che $1^1/_2H^2O$ si eliminano in circa 10 ore, mentre l'ultima mezza richiede più di 10 ore.

Il sale ottenuto *anidro* fu lasciato all'aria e alla temperatura di circa 15°-17° e dopo 4 ore riassorbì le due molecole d'acqua.

Il sale che ha così riassorbita l'acqua, scaldato 1.15 h. a 108° perdette 9.2 % di acqua cioè un poco più di $1^1/_2H^2O$, e dopo 1 altra ora perdette 12.03 % H^2O cioè tutta l'acqua in poco più di 2 ore

Ho ripetuto l'esperimento su altro campione di sale anidro.

---

(1) A. 1850, t. 74, p. 340.

che aveva riassorbita l'acqua e dopo meno di 4 ore a 98° perdette 12.05 % di acqua.

Dunque si può concludere:

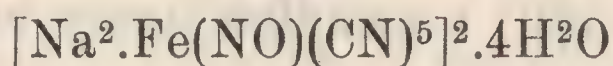
1° Il sale $Na^2[Fe(NO)(CN^5)].2H^2O$ perde abbastanza facilmente la sua acqua già a 98°-99° e più rapidamente a 108°. Più rapidamente la prima molecola e molto più lentamente la seconda.

2° Il sale anidro riassorbe all'aria rapidamente le sue $2H^2O$ e il composto così idrato perde molto più facilmente tutta la sua acqua a 108° e a 98°-99° che non il sale primitivo.

Questo fatto deve dipendere probabilmente dal maggiore stato di divisione del composto.

La *temperatura di disidratazione* sarebbe dunque a 98°-99°.

L'osservazione che anche in questo caso l'ultima mezza molecola di acqua si elimina molto più difficilmente e lentamente che non le altre $1^1/_2H^2O$, mi farebbe dubitare trattarsi anche qui di un sale con formola doppia, cioè:

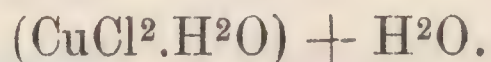
$$[Na^2.Fe(NO)(CN)^5]^2.4H^2O$$

per cui si eliminerebbero prima $3H^2O$ e poi l'ultima $1H^2O$. Per la perdita di $3H^2O$ si calcola 9.06 % e per l'ultima molecola 3 %.

III.

Cloruro rameico $CuCl^2.2H^2O$.

Secondo E. Feytis [1], in base alle sue ricerche sulle proprietà magnetiche di alcuni idrati solidi di rame e di cromo, il cloruro rameico anidro ha un coefficiente di magnetizzazione specifica molto inferiore a quello che si calcola partendo dal sale $CuCl^2.2H^2O$ ed è vicinissimo a quello che si calcola per il sale $CuCl^2.H^2O$. Quindi ammette che il cloruro cristallizzato sia da rappresentarsi con:

$$(CuCl^2.H^2O) + H^2O.$$

---

[1] M.lle E. Feytis, "C. R.", 1913, t. 156, p. 886. Così pure pel solfato ammette $(CuSO^4.H^2O) + 4H^2O$, in "C. R.", 9 ott. 1911.

Le due molecole avrebbero dunque una funzione e un modo di combinazione diversi.

Ma intorno all'azione del calore sul cloruro rameico si hanno dei dati assai discordanti. I trattati, i dizionari di chimica, riportano dei dati molto erronei; secondo il *Dictionnaire de Chim.* del Wurtz, il cloruro rameico perde tutta la sua acqua sotto 200°.

Invece secondo Ley (1) il cloruro di rame perderebbe tutta l'acqua stando sull'acido solforico circa 8 giorni (a quale temperatura?) e la perderebbe tutta anche sul cloruro di calcio dopo più mesi.

Lescœur (2) aveva già notato che questo sale sfiorisce nell'aria disseccata con barite, oppure con acido solforico o con anidride fosforica.

Secondo le vecchie determinazioni di Graham in 1 ora a 135° perde tutta l'acqua (21.53 $^0/_0$).

Secondo altre ricerche più recenti il cloruro rameico fonde a 100° nella sua acqua di cristallizzazione (3). Invece Bödtker (4) afferma che già a 110° è completamente anidro senza formare dei sali basici.

Io ho fatto delle esperienze in condizioni variate.

I. *In macchina pneumatica a 10 mm. su acido solforico e a temp. di 23°-24°.* — Gr. 0.6988 di cloruro di rame cristallizzato dopo 15 ore perdettero 0.1310 cioè 18.9 $^0/_0$, e dopo ancora circa 30 ore perdettero ancora 0.0141, poi più nulla:

	trovato	calcolato per — $2H^2O$
H^2O $^0/_0$	20,76	21,11

Il prodotto anidro era perfettamente solubile nell'acqua, e pare non avere perduto dell'acido cloridrico.

Ripetei l'esperienza alla temperatura di 15 e alla pressione di 10 mm.

(1) " Zeits. f. physik. Chem. „, 1897, t. 22, p. 78.
(2) "A. Ch. „, 1894 (7), t. 2, p. 96.
(3) " C. R. „, 1890, t. 110, p. 1262.
(4) " Zeits. f. physik. Chem. „, 1897, t. 22, p. 506.

Gr. 1.3508 di cloruro $CuCl^2.2H^2O$ dopo 27 ore perdettero 10.21 $^0/_0$ e per $-1H^2O$ si calcola 10.55 $^0/_0$; dopo ancora 87 ore si eliminò la seconda molecola cioè in totale 21.24 $^0/_0$.

In ogni caso si nota una differenza notevole fra il tempo di eliminazione della *prima* molecola e quello della *seconda* molecola.

II. *In corrente di aria secca e a 60°-61°.* — Gr. 1.0655 di cloruro rameico puro in bei cristalli e polverizzato scaldati a 60°-61° (vapore di cloroformio) in corrente di aria secca perdettero dopo circa 7 ore gr. 0.0710 cioè 6.66 $^0/_0$. La sostanza è tutta di colore caffè; nessuna traccia di azzurro-verde; dopo ancora 7 ore perdettero 0.0835 cioè in totale 0.1545 pari a 14.5 $^0/_0$ e per $1^1/_2H^2O$ si calcola 15.7 $^0/_0$; dopo altre 7 ore si arrivò a 20.85 $^0/_0$ e dopo ancora 7 ore sino a 21.35 $^0/_0$ e non più.

Per:

	trovato	calcolato per $-2H^2O$
$2H^2O$	21,35	21,11

Dunque in circa 14 ore perde quasi $1^1/_2H^2O$ e in altre 14 ore la seconda mezza molecola. In corrente di aria secca e a 60°-61° si nota dunque una differenza nel tempo dell'eliminazione delle due molecole d'acqua. La perdita di acido cloridrico è piccolissima. Non si forma un sale basico.

Il *sale anidro* lasciato all'aria riassume il suo colore verde-azzurro e ricupera totalmente la sua acqua. Non è deliquescente.

Questo cloruro che ha ricuperato l'acqua stando all'aria fu rimesso in un disseccatore ad acido solforico per vedere se perdeva l'acqua lentamente come prima o più o meno rapidamente.

Si trovò che dopo 684 ore aveva perduto di nuovo tutta l'acqua cioè 21.10 $^0/_0$; in 254 ore perdè la prima molecola e in 430 la seconda. All'aria ricuperò tutta l'acqua; dopo 2 ore era già in gran parte di colore verde.

III. *Stando sull'acido solforico.* — Gr. 1.0455 di cloruro $CuCl^2.2H^2O$ furono lasciati in disseccatore ad acido solforico durante 73 giorni; perdettero 0.2180 cioè 20.85 $^0/_0$ mentre per $2H^2O$ si calcola 21.11 $^0/_0$. La prima H^2O si eliminò in 540 ore e la seconda H^2O in circa 670 ore.

IV. *In corrente di aria secca e a 55°.* — Gr. 1.1504 di cloruro $CuCl^2.2H^2O$ furono scaldati a 55° in stufa di vetro a vapore di acetone e dopo 57 ore perdettero 0.2350 cioè 21.4 °/₀ insieme a traccie di acido. Anche qui non si osservò un punto di arresto, però nelle prime 9 ore perdette 11.6 °/₀ cioè un poco più di $1H^2O$ e nelle rimanenti 46 ore perdette la seconda molecola. A questa temperatura si nota dunque una differenza nel tempo di eliminazione delle due molecole.

Anche questo campione lasciato all'aria ricuperò completamente l'acqua ed il suo colore verde-azzurro.

Un poco più rapidamente perde l'acqua se si scalda alla temperatura di 61°-62° in corrente d'aria secca, non si elimina più che delle traccie di acido cloridrico.

V. *In stufa di vetro a vapore di metilale* (41°) *e corrente di aria secca.* — Il cloruro rameico $CuCl^2.2H^2O$ anche in queste condizioni perde l'acqua e traccie di acido ma non ho proseguito l'esperienza.

Dunque, a seconda delle condizioni, la temperatura di disidratazione del cloruro rameico $CuCl^2.2H^2O$ può essere:

	Temperatura
Sull'acido solforico e a 10 mm. di pressione a	24° e anche 15°
In corrente di aria secca	55°

IV.

Bromuro di sodio $NaBr.2H^2O$.

Questo sale perde tutta la sua acqua già a 30°, in termostato.

Gr. 1.1060 dopo 23 ore perdettero 0.1413 cioè 12.77 °/₀ e per — $1H^2O$ si calcola 12.95 °/₀. Dopo ancora 28 ore perdettero ancora 0.1530 e non più, cioè in totale 26.6 °/₀ e per — $2H^2O$ si calcola 25.9 °/₀.

Dunque perde tutte due le molecole d'acqua a 30° in termostato; più presto la prima molecola e più lentamente la seconda.

La temperatura di disidratazione è 30°.

V.

Joduro di sodio $NaJ.2H^2O$.

Il *joduro di sodio*, di recente ricristallizzato, dopo 72 ore in un disseccatore ad acido solforico perdette 11.91 $^0/_0$ e lasciatovi ancora per 113 ore sino a peso costante perdette in tutto 20.17.

Per l'eliminazione di $2H^2O$ si calcola 19.3 $^0/_0$. Si noterà che il sale analizzato forse era un poco umido ancora, e fu pesato nel timore che perdesse presto l'acqua. Per l'eliminazione di $1H^2O$ si calcola 9.6 $^0/_0$.

Dunque questo sale perde tutta l'acqua stando circa 7-8 giorni sull'acido solforico e alla temperatura di 15°-17°.

VI.

Acetato di cadmio $Cd(C^2H^3O^2)^2.2H^2O$.

Anche su questo composto si hanno alcuni dati discordanti. Haidinger (1) e C. v. Hauer (2) lo descrissero come un sale contenente $3H^2O$ in grossi cristalli monoclini che all'aria erano deliquescenti e sull'acido solforico sfiorivano (3).

Haidinger, per via indiretta aveva trovato 19.18 $^0/_0$ di acqua e per $3H^2O$ si calcolerebbe 18.98 $^0/_0$; ma egli dedusse la quantità di acqua solamente dopo il dosamento del cadmio.

Schroeder invece dimostrò che l'acetato di cadmio contiene solamente $2H^2O$. Questo sale cristallizza bene in soluzione un poco acida per acido acetico. Schroeder dosò l'acqua a 130°.

Come vedremo, anche il formiato di cadmio e l'acetato di zinco contengono $2H^2O$.

---

(1) " Wien. Akad. Ber. ", XVI, p. 131.
(2) " Wien. Akad. Ber. ", 1858, vol. 32, p. 253.
(3) In " Fehling Handwört. d. Chem. " III, p. 155.

L'acetato di cadmio fonde a 73°-75°, ma anidro fonde a temperatura alta e si scompone.

I. *In disseccatore ad acido solforico.* — Gr. 1.1016 lasciati in disseccatore ad acido solforico alla temp. di 12°-14° perdettero in 32 giorni 0.0730:

	trovato	calcolato per — $1H^2O$
H^2O %	6,62	6,68

e dopo ancora 56 giorni 0.1552 cioè in totale 14.08 %, e per — $2H^2O$ si calcola 13.4 %.

Dunque la *seconda* molecola si elimina molto più lentamente.

II. *In termostato.* — Gr. 1.0507 di acetato di cadmio scaldati a 30° in termostato perdettero appena 0.0070 cioè 0.66 %; a 50° perdettero 0.1485 cioè 13.41 % e si calcola 13.36.

Dunque a 50° perde tutta l'acqua di cristallizzazione, senza un punto di arresto.

III. *In disseccatore a cloruro di calcio e poi a 20 mm. sull'acido solforico.* — Gr. 1.0184 stando 24 ore sul cloruro di calcio perdettero appena 0.006 cioè 0.6 %; posti nel vuoto a 20 mm. sull'acido solforico e alla temperatura di 13°-14°, dopo circa 200 ore cioè circa 8 giorni perdettero 0.1351 cioè 13.32 %, mentre per $Cd(C^2H^3O^2)^2.2H^2O$ si calcola 13.51 %.

IV. *In stufa a vapor d'acqua, e in corrente d'aria secca.* — Gr. 1.0220 di acetato di cadmio scaldati a 99° perdettero già dopo 3 ore 0.0698 cioè 11.54 %, e dopo altre 15 ore in totale 0.1384 cioè 13.54 % e si calcola 13.56.

Come si scorge, nelle prime due o tre ore perde più di $1^3/_4H^2O$ ed il resto molto più lentamente. Per $1^3/_4H^2O$ si calcola 11.8 %.

La temperatura di disidratazione è 50°.

Anche questo sale probabilmente ha una formola multipla.

VII.

Etilidendisolfato potassico $CH^3CH(SO^3K)^2.2H^2O$.

Il sale analizzato era un bel campione del composto che io avevo preparato nel 1878 a Siena quando scoprii l'*acido etilidendisolfonico* (1).

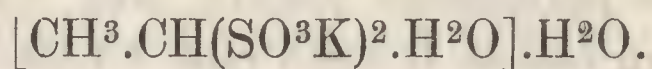
Gr. 1.2525 di sale furono scaldati a 30° in termostato per circa 10 ore e perdettero 0.1415 cioè 11.21 °/₀, e dopo altre 5 ore e mezzo perdettero in totale 0.1494 cioè 11.92 °/₀. Per la eliminazione di $2H^2O$ si calcola 11.91 °/₀. Però nelle prime 3 ore e mezzo aveva perduto 0.0659 cioè 5.27 °/₀ e per la eliminazione di $1H^2O$ si calcola 5.9 °/₀. La prima molecola si elimina molto più presto.

La temperatura di disidratazione sarebbe dunque 30°.

Sul cloruro di calcio in disseccatore. — Gr. 1.1414 dopo 21 ore perdettero 0.0843 cioè 7.38 °/₀, dopo ancora 7 ore si arriva a 8.81 °/₀, dopo altre 19 ore a 11.82 °/₀ e dopo ancora 23 ore non perde più.

Anche qui si nota che la prima molecola si elimina molto più presto.

Si potrebbe dunque scrivere il sale con

$$[CH^3.CH(SO^3K)^2.H^2O].H^2O.$$

VIII.

Ditionato di sodio $Na^2S^2O^6 + 2H^2O$.

È inalterabile all'aria. Secondo C. Pape (2) questo sale a 55° sfiorisce. A. Holst e Otto (3) dosarono l'acqua disseccando il sale a 100°.

---

(1) "Atti della R. Accad. dei Lincei „.

(2) Pogg., "Ann. „, 125, p. 513.

(3) "Arch. d. Ph. „, 1891, t. 229, p. 174. Vedi anche K. Klüss, in A. 246, p. 209: *Ueber Dithionsäuresalze.*

I. *In disseccatore ad acido solforico.* — Gr. 1.1213 dopo 12 giorni sull'acido solforico e a temperatura ordinaria perdettero 0.08750 cioè:

	trovato	calcolato per — $1H^2O$
H^2O %	7,8	7,4

Dopo ancora 35 giorni perdettero in totale 0,1637 cioè:

	trovato	calcolato per — $2H^2O$
H^2O %	14,60	14,87

Dunque la *seconda* molecola si elimina molto più lentamente. Il sale anidro lasciato all'aria ricupera tutta la sua acqua di cristallizzazione.

II. *In disseccatore a cloruro di calcio e a temperatura ordinaria.* — Gr. 1.0058 dopo circa 13 giorni perdettero 0.0688 cioè 6.8 %, e dopo ancora 38 a 40 giorni perdettero in totale 0.1458 cioè 14.5 %.

Dunque anche in questo caso la seconda molecola si elimina molto più lentamente.

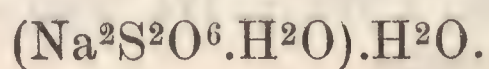
III. *In corrente di aria secca e a 42°.* — Gr. 0.8071 furono scaldati a 42° (vapore di metilale) e in corrente d'aria secca. Dopo 5 ore e mezzo perdettero 0.0676 cioè 8.3 % e dopo 10 ore ancora perdettero in totale 0.1065 cioè 13.19 %, e dopo ancora 2 ore e mezzo in totale 0.1170 cioè 14.47; infine dopo alcune altre ore 0.1198 cioè 15.16 %.

Dunque dopo circa 5 ore a 42° ha perduto $1H^2O$ (7.4 %) e dopo altre 14-15 ore la seconda molecola.

IV. *In termostato.* — Gr. 0.7754 di ditionato scaldati in termostato a 30° e a 40° per più ore non perdettero di peso, ma dopo 24 a 30 ore a 50° perdettero 0.1140, cioè 14.72 %, ossia tutta l'acqua. Non si osserva un punto di arresto o di rallentamento. Dunque in queste condizioni la temperatura di disidratazione è a 50°; e in corrente di aria secca è a 42°.

Anche questo sale potrebbe rappresentarsi con

$$(Na^2S^2O^6.H^2O).H^2O.$$

IX.

Ditionato di bario $BaS^2O^6.2H^2O$.

Questo sale secondo Heeren [1] sfiorisce rapidamente e perde *metà* dell'acqua.

Ho voluto fare alcune osservazioni anche su questo sale.

I. *A 98°-99° in stufa di vetro a vapor d'acqua.* — Gr. 1.6739 dopo 3 ore di riscaldamento perdettero 0.1804 cioè:

	trovato	calcolato per — $2H^2O$
H^2O %	10,78	10,81

II. *In disseccatore a cloruro di calcio e ad acido solforico, e nel vuoto.* — Gr. 1.0190 dopo 18 ore nel cloruro di calcio e dopo 23 ore in disseccatore ad acido solforico, nel vuoto a 20 mm. e sull'acido solforico dopo circa 4 giorni perdettero 0.0511 cioè 5.01 % e per la eliminazione di $1H^2O$ si calcola 5.4 %. Dopo ancora circa 12 giorni perdettero ancora 0.056 cioè in totale 0.1085 ossia 10.64 % e per — $2H^2O$ si calcola 10.81 %.

Dunque la *prima* molecola si elimina molto più rapidamente.

III. *Riscaldamento in termostato.* — Gr. 0.7488 scaldati successivamente a 30° (22 ore) e a 40° (4 ore) non perdettero di peso. Dopo 17 ore a 50° perdettero 0.0285 cioè 3.88 %, dopo ancora 9 ore in totale 0.0526 cioè 7.0 %; dopo altre 16 ore a 50° perdettero in totale 0.0776 cioè 10.30 %, ed infine dopo ancora 24 ore in totale 0.0807 cioè 10.77 % cioè — $2H^2O$.

Come si scorge, anche in questo caso la prima molecola si elimina molto più rapidamente della seconda.

---

[1] Pogg., "Ann. „, VII, p. 172; Marignac, in "Mém. Soc. Phys. et d'Hist. Nat. „. Genève, p. 226.

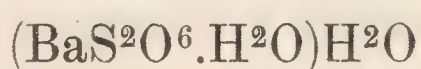
Il sale anidro (0.6681) lasciato all'aria alcuni giorni (dall'8 al 16 luglio 1914) riassorbì tutta l'acqua cioè 0.0821 ossia 12.28 %.

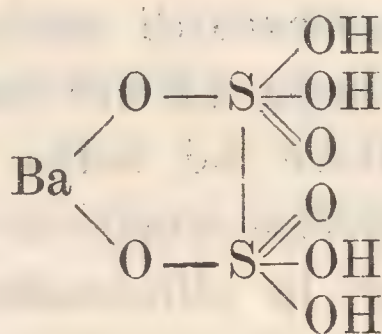
Dunque il *punto di disidratazione* del sale è 50°.

IV. *In termostato ed entro disseccatore ad acido solforico.* — Gr. 0.7377 di sale dopo 48 ore alla temperatura di 30° perdettero 0.0789 cioè 10.7 % ossia — $2H^2O$.

Dunque in queste condizioni la *temperatura di disidratazione* è solamente di 30°.

Anche questo sale potrebbe rappresentarsi con

$$(BaS^2O^6.H^2O)H^2O$$

benchè non vi sia un vero punto di arresto tra la prima e la seconda molecola; oppure meglio ancora con:

```
              OH
             /
      O — S ⟨— OH
     /      | \\
Ba          |   O
     \      |   O
      O — S ⟨— OH  (S=O)
             \
              OH
```

Ho fatto già molte esperienze con altri sali contenenti $2H^2O$ di cristallizzazione e queste ricerche esporrò in una prossima Nota. Ho pure già fatto da lungo tempo molte osservazioni ed esperienze sopra dei sali con $3H^2O$, $4H^2O$, $5H^2O$, $7H^2O$ e sugli *allumi* con $12H^2O$ oppure $24H^2O$. Queste ultime esperienze potranno forse servire a discutere la questione se gli allumi hanno la formola con $24H^2O$, più probabile secondo me, oppure quella più semplice con $12H^2O$ ma meno probabile.

Torino, R. Università. Laborat. di Chimica farm. e tossic., 24 aprile 1915.

Sui sali di alcuni aminoazocomposti.

Nota di L. CASALE e MARIA CASALE-SACCHI.

Lo studio di alcuni aminoazocomposti derivanti dall'α-naftilamina da noi preparati ([1]), ci condusse alla constatazione che i solfati di questi presentano una composizione chimica diversa dai solfati di composti analoghi studiati da P. Weselsky e R. Benedikt ([2]). Questo fatto ci persuase ad esaminare i sali di tutta la serie degli aminoazocomposti derivanti dall'α-naftilamina preparandoli da basi preventivamente purificate. E questo esame, limitato ai sali dell'acido solforico, cloridrico e nitrico, si può riassumere nelle seguenti conclusioni.

Tutti gli aminoazocomposti di questa serie formano con l'acido solforico dei sali stabili costituiti da una molecola di base con una di acido. Solo alcuni invece dànno un sale neutro, formato cioè da due molecole di base con una di acido.

Coll'acido cloridrico formano tutti due serie di sali: con uno e con due equivalenti di acido per ogni molecola di sostanza.

Ma mentre i primi sono stabili, i secondi sono molto instabili e all'aria si trasformano rapidamente nei primi. Fa eccezione l'α-naftalinazo-α-naftilamina, di cui è stabile anche il cloridrato doppio.

Coll'acido nitrico si possono pure preparare nitrati semplici e nitrati doppi, i primi stabili, i secondi instabili. Questi ultimi dànno inoltre per fusione caratteristiche scissioni che verranno descritte in un lavoro di prossima pubblicazione. Anche coll'acido nitrico l'α-naftalinazo-α-naftilamina dà un sale stabile con due equivalenti d'acido.

([1]) G. XLIV (2) 395.
([2]) B. XII. 228.

I solfati, i cloridrati, i nitrati stabili, cristallizzano tutti splendidamente in prismi verdi con riflessi cangianti dal rosso al violetto, sono solubili nei comuni solventi organici contenenti l'ossidrile, insolubili negli eteri e negli idrocarburi. Nell'acqua si idrolizzano.

L'analisi dei nitrati doppi mediante la determinazione di azoto per combustione, avrebbe dato quasi sempre risultati inattendibili a causa della loro facile decomponibilità all'aria e del conseguente raggrumarsi del prodotto, perciò abbiamo in essi determinato l'acido nitrico volumetricamente, usando come indicatore il *rosso di metile* (acido p-dimetilamidoazobenzol-o-carbonico).

I risultati furono ottimi in ogni caso, quando si ebbe cura di neutralizzare il sale in esame sospeso in acqua con un eccesso piccolissimo di alcali titolato. In queste condizioni la base liberata colora appena in giallo debole la soluzione, e questo colore ha pure l'indicatore in soluzione alcalina. Il passaggio poi dal giallo al rosso violetto è spiccato e l'azione colorante della piccolissima quantità di base disciolta è concomitante a quella dell'indicatore.

Sali della 4-fenilazo-1-naftilamina.

$C_{16}H_{13}N_3 . H_2SO_4$. — Tanto trattando una soluzione della base in etere anidro con una soluzione eterea di acido solforico, quanto scaldando all'ebollizione la base stessa polverizzata con acido solforico diluito a diverse concentrazioni (dal 2 $^0/_0$ fino a grandi concentrazioni) si ottiene sempre questo solfato. La sua solubilità nella soluzione di acido solforico aumenta colla concentrazione e colla temperatura. Ricristallizzandolo dall'acido acetico glaciale o dall'alcool si presenta in lunghi prismi di color verde a riflessi rossi od a riflessi azzurri. Si fonde a 214°-15°.

I. Gr. 0,5771 di solfato diedero gr. 0,394 di solfato di bario corrispondenti a gr. 0,1656 di acido solforico.

II. Gr. 0,8841 di sale fornirono gr. 0,5912 di solfato di bario corrispondenti a gr. 0,2484 di acido solforico.

Cioè su cento parti in peso di sostanza

	trovato I	trovato II	calcolato per $C_{16}H_{13}N_3.H_2SO_4$
Acido solforico	28,68	28,1	28,41

$C_{16}H_{13}N_3 . 2HCl$. — Si ottiene sotto forma di precipitato cristallino verde-violetto, unendo una soluzione di acido cloridrico gassoso in etere anidro ad una soluzione eterea della base. Il cloridrato va lavato con etere anidro e seccato rapidamente nel vuoto su acido solforico in presenza di acido cloridrico gassoso, perchè è molto instabile.

Gr. 0,9245 di sostanza fornirono gr. 0,8202 di cloruro d'argento corrispondenti a gr. 0,2087 di acido cloridrico.

Su cento parti in peso:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{13}N_3.2HCl$
Acido cloridrico	22,57	22,79

$C_{16}H_{13}N_3 . HCl$. — Il cloridrato con due equivalenti di acido si trasforma in quello stabile con un solo equivalente di acido, sia quando venga lasciato a sè per qualche tempo, sia per ricristallizzazione dall'acido acetico glaciale o dall'alcool. E questo stesso cloridrato si ottiene sempre facendo bollire l'azocomposto con soluzione acquosa di acido cloridrico.

Gr. 0,7938 di cloridrato diedero gr. 0,3879 di cloruro d'argento corrispondenti a gr. 0,0987 di acido cloridrico.

E per cento:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{13}N_3.HCl$
Acido cloridrico	12,44	12,85

Cristallizza in grossi prismi di color verde erba, che si fondono a 205°.

$C_{16}H_{13}N_3 . 2HNO_3$. — Ad una soluzione di due grammi di base in 200 cc. di etere anidro, s'aggiungono a 0° cc. 150 di soluzione eterea all'8,6 % di acido nitrico. Il nitrato, che si se-

para, è cristallino, di color rosso sangue e si può lavare ripetutamente con etere senza che si decomponga. Si secca nel vuoto su acido solforico e si pesa rapidamente.

Per gr. 0,7495 di nitrato occorsero cc. 4 di idrato sodico $\frac{N}{1}$ corrispondenti a gr. 0,2521 di acido nitrico.

Su cento parti :

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{13}N_3.2HNO_3$
Acido nitrico	33,64	33,77

Questo nitrato è instabile; lasciato all'aria umida si inumidisce rapidamente, odora d'acido nitrico, poi secca di nuovo e da rosso si fa verde brillante, trasformandosi nel nitrato con un solo equivalente di acido. La stessa trasformazione avviene se si cristallizza subito dall'alcool il nitrato sopra ottenuto.

$C_{16}H_{13}N_3 . HNO_3$. — Questo sale fu preparato e descritto da Griess [1]. Esso si fonde a 181°-82°.

Sali della 4-o-tolilazo-1-naftilamina.

$C_{17}H_{15}N_3 . H_2SO_4$. — Si forma trattando una soluzione eterea della base con una soluzione satura di acido solforico in etere, oppure scaldando la base finamente polverizzata con una soluzione acquosa di acido solforico, la cui concentrazione non sia inferiore al 10 $^0/_0$. Cristallizza dall'acido acetico glaciale in lunghi aghi prismatici verdi con splendore metallico e si fonde decomponendosi a 195°-96°.

I. Gr. 0,6549 di solfato fornirono gr. 0,4263 di solfato di bario corrispondenti a gr. 0,1791 di acido solforico.

II. Gr. 0,8327 di sostanza fornirono gr. 0,545 di solfato di bario corrispondenti a gr. 0,229 di acido solforico.

---

[1] A. *137*, 60-61.

Su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{17}H_{15}N_3.H_2SO_4$
	I	II	
Acido solforico	27,35	27,5	27,3

$(C_{17}H_{15}N_3)_2H_2SO_4$. — Il sale neutro si ottiene quando si sciolgano a caldo in alcool od acido acetico glaciale quantità uguali del solfato acido precedente e della base, lasciando poi cristallizzare per raffreddamento. Questo solfato si ottiene anche facendo bollire la base od il sale acido finamente polverizzati con acido solforico al 2,5 $^0/_0$.

Se invece si fa bollire la base oppure il sale acido con un eccesso d'acido solforico al 5 $^0/_0$, si può ottenere l'uno o l'altro solfato a seconda della temperatura alla quale il composto, poco solubile a questa diluizione, viene allontanato per filtrazione dalla presenza dell'acido. Infatti, filtrando alla temperatura ordinaria, si ottiene sempre il solfato acido; filtrando a 100° si ha sempre quello neutro. Quest'ultimo, cristallizzato dall'alcool o dall'acido acetico glaciale, dove è un po' più solubile del solfato acido, si presenta in fogliette dorate, insolubili in etere e negli idrocarburi, che si fondono a 163° con sviluppo di gas.

I. Gr. 0,6795 di sostanza fornirono gr. 0,2549 di solfato di bario corrispondenti a gr. 0,1071 di acido solforico.

II. Gr. 0,9328 di sostanza fornirono gr. 0,3554 di solfato di bario corrispondenti a gr. 0,1493 di acido solforico.

III. Gr. 0,598 di sostanza fornirono gr. 0,2274 di solfato di bario corrispondenti a gr. 0,09556 di acido solforico.

E su cento parti in peso:

	trovato			calc. per $(C_{17}H_{15}N_3)_2.H_2SO_4$
	I	II	III	
Acido solforico	15,76	16,01	15,98	15,81

$C_{17}H_{15}N_3 . 2HCl$. — Si prepara come quello della fenilazo-α-naftilamina e come quello si deve far asciugare nel vuoto secco in atmosfera di acido cloridrico. È di color verde scuro.

Gr. 0,8449 di cloridrato fornirono gr. 0,7123 di cloruro d'argento corrispondenti a gr. 0,1812 di acido cloridrico.

Su cento parti in peso:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3.2HCl$
Acido cloridrico	21,45	21,83

$C_{17}H_{15}N_3 . HCl$. — Si ottiene cristallizzando il precedente dall'acido acetico glaciale e si prepara facendo bollire la base finamente polverizzata con soluzione acquosa di acido cloridrico.

Gr. 1,6744 di cloridrato fornirono gr. 0,8116 di AgCl corrispondenti a gr. 0,2065 di HCl.

Su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3.HCl$
Acido cloridrico	12,34	12,25

$C_{17}H_{15}N_3 . 2HNO_3$. — Anche il nitrato acido della 4-o-tolil-azo-1-naftilamina si prepara trattando la soluzione dell'azocomposto in etere anidro con soluzione eterea di acido nitrico all'8,6 %.

Si separa così una massa cristallina di color caffè scuro, che filtrata e lavata con etere anidro, si fa asciugare nel vuoto su acido solforico. Questo sale si mantiene solo poco tempo inalterato e specialmente all'aria libera incomincia tosto lungo i bordi una fusione, che a poco a poco si propaga a tutta la massa. La sostanza fusa, odorante di vapori nitrici, scaldata a b. m., esplode a circa 80° con viva fiamma.

Per gr. 1,515 di nitrato occorsero cc. 7,7 di NaOH $\frac{N}{1}$ corrispondenti a gr. 0,4853 di acido nitrico.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3 2HNO_3$
Acido nitrico	32,03	32,55

$C_{17}H_{15}N_3 . HNO_3$. — Il nitrato precedente, ancor umido di etere per evitare che si fonda, sciolto a caldo nell'alcool, perde un equivalente di acido e si deposita per raffreddamento della soluzione in splendidi prismi verde smeraldo che si fondono a 170°.

Gr. 0,1213 di nitrato diedero cc. 18,2 di azoto (H = 728, t° = 16,5).

Su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3.HNO_3$
Azoto	16,96	17,28

Sali della 4-m-tolilazo-1-naftilamina.

$C_{17}H_{15}N_3 . H_2SO_4$. — Facendo agire sulla base una soluzione di acido solforico a qualunque concentrazione e temperatura, si ottiene sempre questo solfato che cristallizza bene dall'acido acetico glaciale in lunghe laminette rettangolari di color verde bronzo. Si fonde a 189°.

Gr. 1,3151 di sale fornirono gr. 0,8456 di solfato di bario corrispondenti a gr. 0,3553 di acido solforico.

Su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3.H_2SO_4$
Acido solforico	27,02	27,3

$C_{17}H_{15}N_3 . HCl$. — Dalla base sciolta in etere anidro e trattata con soluzione eterea satura d'acido cloridrico, non si forma il cloridrato con due equivalenti di acido. Si ha in ogni caso quello stabile con un solo equivalente d'acido, in bei prismetti di color verde chiaro a riflessi azzurri, la cui costituzione non varia anche quando lo si ricristallizzi dall'acido acetico o dall'alcool.

Per gr. 0,5304 di cloridrato occorsero cc. 17,9 di NaOH $\frac{N}{10}$ corrispondenti a gr. 0,06528 di acido cloridrico.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3.HCl$
Acido cloridrico	12,31	12,25

$C_{17}H_{15}N_3 . HNO_3$. — Si ottiene questo nitrato con un solo equivalente d'acido, quando si opera con soluzione eterea al-

l'8,6 % d'acido nitrico. Aumentando la concentrazione in acido nitrico (per es. operando con soluzione al 17,2 %), si vede depositarsi un nitrato di aspetto diverso dal precedente, che ha tutti i caratteri del nitrato con due equivalenti d'acido, ma è instabilissimo, e, appena raccolto, mentre si lava pare si decomponga, perchè diminuisce assai di volume e assume la colorazione verde-violetto del nitrato semplice. Questo cristallizza bene dall'alcool e si fonde a 172°.

Per gr. 0,952 di sostanza occorsero cc. 2,9 di idrato sodico $\frac{N}{1}$ corrispondenti a gr. 0,1828 di acido nitrico.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3.HNO_3$
Acido nitrico	19,2	19,44

Sali della 4-p-tolilazo-1-naftilamina.

$C_{17}H_{15}N_3 . H_2SO_4$. — Come gli altri solfati acidi, anche questo si prepara facendo bollire la base polverizzata con soluzione acquosa di acido solforico, oppure versando nella soluzione eterea dell'azocomposto una soluzione eterea di acido solforico.

Cristallizzato da acido acetico glaciale o da alcool, si presenta in aghi prismatici verdi a riflessi rossi, che si fondono a 211°.

Gr. 1,203 di solfato diedero gr. 0,7736 di solfato di bario corrispondenti a gr. 0,3251 di acido solforico.

E per cento:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3.H_2SO_4$
Acido solforico	27,01	27,3

$C_{17}H_{15}N_3 . 2HCl$. — Si ottiene come i precedenti cloridrati acidi, versando in una soluzione eterea dell'aminoazocomposto una soluzione eterea satura d'acido cloridrico, sotto forma di voluminoso precipitato cristallino di color violetto a riflessi verde

cupo. Lasciato a sè si trasforma nel cloridrato con un solo equivalente d'acido, assumendo spiccata colorazione verde erba.

Per gr. 1,0578 di sostanza occorsero cc. 6,25 d'idrato $\frac{N}{1}$ corrispondenti a gr. 0,2279 di acido cloridrico.

Cioè per cento:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3.2HCl$
Acido cloridrico	21,55	21,83

$C_{17}H_{15}N_3 . HCl$. — Si può preparare scaldando la base con soluzione d'acido cloridrico, oppure ricristallizzando il cloridrato doppio instabile dall'acido acetico. Brevi prismi verde erba, che si fondono a 211° con decomposizione.

Gr. 1,005 di sostanza fornirono gr. 0,4761 di cloruro d'argento corrispondenti a gr. 0,1211 di acido cloridrico.

Su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3.HCl$
Acido cloridrico	12,05	12,25

$C_{17}H_{15}N_3 . 2HNO_3$. — Fu preparato come i nitrati doppi già descritti, vale a dire per azione di acido nitrico sciolto in etere sulla 4-p-tolilago-1-naftilamina nello stesso solvente. Esso costituisce un precipitato cristallino di color caffè verdastro scuro, che, seccato nel vuoto, si decompone a poco a poco, mentre il suo colore passa al verde violaceo caratteristico del nitrato con una sola molecola d'acido.

Per gr. 1,129 di nitrato occorsero cc. 57,6 di idrato sodico $\frac{N}{10}$ corrispondenti a gr. 0,363 d'acido nitrico.

Su cento parti in peso:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3.2HNO_3$
Acido nitrico	32,15	32,55

$C_{17}H_{15}N_3 . HNO_3$. — Questo sale si forma quando si lasci a sè il nitrato doppio e si ottiene pure quando si cerchi di cri-

stallizzare questo da qualche solvente. Esso però si può pure preparare come tutti gli altri nitrati semplici trattando a freddo una soluzione dell'azocomposto con una soluzione acquosa di acido nitrico. Cristallizzato dall'alcool, si presenta in begli aghi prismatici color violetto a riflessi verdi, che si fondono a 163°.

Per gr. 0,8952 di sale occorsero cc. 24,4 di idrato sodico $\frac{N}{10}$ corrispondenti a 0,15377 di acido nitrico.

Cioè per cento parti in peso:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3.HNO_3$
Acido nitrico	17,27	17,28

Sali della 4-o-anisilazo-1-naftilamina.

$C_{17}H_{15}N_3.O.H_2SO_4$. — Gr. 2 dell'aminoazocomposto si sciolgono completamente a caldo in 200 cc. di acido solforico al 5 $^0/_0$; per raffreddamento cristallizza il solfato in brevi aghi di color verde oliva, che si differenzia dagli altri solfati finora descritti solo per la sua maggiore solubilità in acido acetico, alcool, acetone.

Dalla soluzione acetica cristallizza bene aggiungendo a poco a poco etere. Si fonde a 173°.

Si può preparare aggiungendo una soluzione eterea satura d'acido solforico ad una soluzione cloroformica dell'azocomposto.

Gr. 0,7234 di solfato fornirono gr. 0,4452 di solfato di bario corrispondenti a gr. 0,1871 di acido solforico.

Per cento:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3O.H_2SO_4$
Acido solforico	25,86	26,14

$C_{17}H_{15}N_3O.2HCl$. — Si può preparare come i precedenti. Si separa cristallino, di color caffè a riflessi verdi.

Gr. 0,9069 di sostanza diedero gr. 0,7311 di cloruro d'argento corrispondenti a gr. 0,186 di acido cloridrico.

Su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3O.2HCl$
Acido cloridrico	20,51	20,83

$C_{17}H_{15}N_3O . HCl$. — È di color verde cupo con lucentezza metallica. Si fonde a 194°-195° ed è in tutto analogo ai cloridrati semplici precedenti.

Gr. 0,8513 di sostanza fornirono gr. 0,3781 di cloruro d'argento corrispondenti a gr. 0,0962 di acido cloridrico.

Per cento parti in peso:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3O.HCl$
Acido cloridrico	11,3	11,63

$C_{17}H_{15}N_3O . 2HNO_3$. — Preparato analogamente ai nitrati doppi precedenti, costituisce una polvere cristallina di color verde cupo, che seccata e lasciata a sè, si decompone lentamente assumendo alla superficie una bella colorazione verde erba propria del sale, con una sola molecola d'acido nitrico.

Per gr. 1,1864 di nitrato occorsero cc. 58,3 di idrato sodico $\frac{N}{10}$ corrispondenti a gr. 0,3675 di acido nitrico.

Su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3O.2HNO_3$
Acido nitrico	30,98	31,26

$C_{17}H_{15}N_3O . HNO_3$. — Cristallizzato dall'alcool, forma grossi aggregati di prismi color verde smeraldo fondentisi a 173°.

Per gr. 1,521 di nitrato occorsero cc. 44,3 di NaOH $\frac{N}{10}$ corrispondenti a gr. 0,2794 di acido nitrico.

Su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3O.HNO_3$
Acido nitrico	18,37	18,53

Sali della 4-o-fenetilazo-1-naftilamina.

$C_{18}H_{17}N_3O . H_2SO_4$. — Gr. 2 di 4-o-fenetilazo-1-naftilamina, fatti bollire con 200 gr. di acido solforico al 5 %, vi si sciolgono facilmente con intensa colorazione violetta e per raffreddamento si rapprende il sale in una massa cristallina, che, ricristallizzata dall'alcool, assume la forma prismatica d'un bel verde erba. Questo sale scaldato verso 155° perde la sua lucentezza, imbrunisce e si fonde a 182°. Lo stesso solfato si ottiene mescolando soluzioni eteree dell'acido e della base.

Gr. 0,6932 di sale fornirono gr. 0,4215 di solfato di bario corrispondenti a gr. 0,1771 di acido solforico.

E su cento parti in peso:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{17}N_3O.H_2SO_4$
Acido solforico	25,55	25,2

$C_{18}H_{17}N_3O . 2HCl$. — Si prepara come i cloridrati doppi descritti innanzi, dei quali possiede l'aspetto e la facile decomponibilità.

Per gr. 1,258 di cloridrato occorsero cc. 69,1 di idrato sodico $\frac{N}{10}$ corrrispondente a gr. 0,2499 di acido cloridrico.

Su cento parti in peso:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{17}N_3O.2HCl$
Acido cloridrico	19,41	20,03

$C_{18}H_{17}N_3O . HCl$. — Questo sale, che costituisce il prodotto della decomposizione del cloridrato doppio precedente, si prepara nel miglior modo sciogliendo a caldo la base nell'acido cloridrico diluito e lasciando cristallizzare per raffreddamento. Si presenta in aghi prismatici color verde chiaro, che si fondono a 195°.

Gr. 1,4461 di sostanza fornirono gr. 0,640 di cloruro d'argento corrispondenti a gr. 0,1628 di acido cloridrico.

Su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{17}N_3O.HCl$
Acido cloridrico	11,26	11,13

$C_{18}H_{17}N_3O . 2HNO_3$. — È identico nell'aspetto e nel comportamento al nitrato doppio della 4-o-anisilazo-1-naftilamina.

Per gr. 0,9867 di nitrato occorsero cc. 4,7 di idrato sodico $\frac{N}{1}$ corrispondenti a gr. 0,2962 di acido nitrico.

Cioè per cento parti in peso:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{17}N_3O.2HNO_3$
Acido nitrico	30,03	30,2

Lasciato a sè, si trasforma nel nitrato semplice.

$C_{18}H_{17}N_3O . HNO_3$. — Si prepara cristallizzando dall'alcool il precedente appena formato, oppure con soluzione acquosa di acido nitrico a freddo nel modo già esposto. Si fonde a 158°-59°.

Gr. 0,1551 di sostanza diedero cc. 21 di azoto (H = 732; t° = 14).

Su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{17}N_3O.HNO_3$
Azoto	15,52	15,82

Sali della 4-naftalinazo-1-naftilamina.

$C_{20}H_{15}N_3 . H_2SO_4$. — Si prepara come i solfati analoghi già descritti facendo bollire la base polverizzata con acido solforico diluito, nel quale è poco solubile, oppure mescolando le soluzioni eteree dei due componenti. Cristallizzato dall'alcool, si presenta in aghi prismatici verdi a riflessi rossi; cristallizzato dall'acido acetico glaciale, in prismetti splendenti color verde cupo, che si fondono a 163°.

Gr. 0,9568 di solfato fornirono gr. 0,5572 di solfato di bario corrispondenti a gr. 0,2341 di acido solforico.

Su cento parti in peso:

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{15}N_3.H_2SO_4$
Acido solforico	24,47	24,82

$C_{20}H_{15}N_3 . 2HCl$. — Questo cloridrato, preparato nel solito modo, a differenza degli altri cloridrati doppi finora descritti, è stabilissimo e si può ricristallizzare inalterato da una soluzione alcoolica od acetica contenente l'1 $^0/_0$ di acido cloridrico. È in prismetti ben sviluppati di color verde. Scaldato a 140°, diventa improvvisamente di color rosso, imbrunisce verso 190° e si fonde a 201°-202°.

Per gr. 0,625 di cloridrato si richiesero cc. 34,5 di idrato sodico $\frac{N}{10}$, corrispondenti a gr. 0,1258 di acido cloridrico.

Su cento parti in peso:

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{15}N_3.2HCl$
Acido cloridrico	20,12	19,7

$C_{20}H_{15}N_3 . HCl$. — Il cloridrato doppio precedente, sciolto in acido acetico od in alcool, perde una molecola di acido cloridrico, trasformandosi in questo semplice. Per cristallizzazione si deposita in brevi aghi di color verde-nero opaco, i quali, riscaldati al disopra di 230°, imbruniscono senza fondere.

Gr. 1,859 di sostanza fornirono gr. 0,7825 di cloruro d'argento corrispondenti a gr. 0,1991 di acido cloridrico.

Cioè su cento parti in peso:

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{15}N_3.HCl$
Acido cloridrico	10,71	10,93

$C_{20}H_{15}N_3 . 2HNO_3$. — È stabile quanto il cloridrato doppio; si deposita formandosi già in bei cristalli verde-scuro a riflessi di color bronzo, che esplodono a 139°-140°.

Per grammi 0,9897 di sale occorsero cc. 46,45 di idrato sodico $\frac{N}{10}$ corrispondenti a gr. 0,2928 di acido nitrico.

Su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{15}N_3.2HNO_3$
Acido nitrico	29,59	29,78

Sali della 4-o-nitrofenilazo-1-naftilamina.

$C_{16}H_{12}N_4O_2 . H_2SO_4$. — Si prepara, come gli altri solfati acidi, facendo bollire l'aminoazocomposto con acido solforico diluito (per es. al 10 %). Esso però non ha la stabilità dei sali analoghi sopra studiati e lo si può cristallizzare inalterato solo da solventi (acido acetico, alcool) contenenti l'1 % di acido solforico. Cristallizza in bei prismi di color caffè a riflessi verdi e si fonde a 217°-18°.

Gr. 0,4792 di solfato diedero gr. 0,2882 di solfato di bario, corrispondenti a gr. 0,1211 di acido solforico.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{12}N_4O_2.H_2SO$
Acido solforico	25,26	25,15

$(C_{16}H_{12}N_4O_2)_2 . H_2SO_4)$. — Da una soluzione del solfato acido precedente in alcool od in acido acetico glaciale puri, si deposita questo solfato neutro in aghi di color rosso mattone scuro, fondentisi a 200°.

Gr. 0,5236 di solfato diedero gr. 0,1744 di solfato di bario, corrispondenti a gr. 0,07468 di acido solforico.

Cioè su cento parti in peso:

	trovato	calcolato per $(C_{16}H_{12}N_4O_2)_2.H_2SO_4$
Acido solforico	14,26	14,37

$C_{16}H_{12}N_4O_2 . HCl$. — Quando sulla soluzione eterea dell'aminoazocomposto si fa agire una soluzione satura d'acido cloridrico in etere, si separa un cloridrato cristallino, bruno, che non cambia aspetto nè volume seccando, ed è costituito da una molecola di acido per ciascuna di base. Pare dunque che in questo caso il cloridrato doppio non si formi.

Gr. 0,608 di cloridrato fornirono gr. 0,2617 di cloruro d'argento, corrispondenti a gr. 0,06658 di acido cloridrico.

Su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{12}N_4O_2.HCl$
Acido cloridrico	10,95	11,1

Esso è stabile, e dall'acido acetico o dall'alcool cristallizza inalterato in grossi prismi d'un verde puro brillante. Si fonde a 187°.

$C_{16}H_{12}N_4O_2 . HNO_3$. — Trattando una soluzione eterea della 4-o-nitrofenilazo-1-naftilamina con una soluzione eterea di acido nitrico all'8,6 °/₀, si ottiene un precipitato cristallino d'un bel verde erba, che, lavato con etere e seccato nel vuoto, non cambia aspetto, nè mostra segno alcuno d'alterazione. Ricristallizzato dall'alcool, assume la forma di grossi prismi verde-smeraldo che si fondono a 165°-66°. Questo sale, analizzato prima e dopo la ricristallizzazione, ha la composizione del nitrato semplice.

I. Gr. 0,9941 di nitrato richiesero cc. 27,8 di idrato sodico $\frac{N}{10}$, corrispondenti a gr. 0,17516 di acido nitrico.

II. Gr. 0,8142 di nitrato richiesero cc. 23,1 di idrato sodico $\frac{N}{10}$, corrispondenti a gr. 0,1457 di acido nitrico.

Cioè su cento parti in peso:

	trovato		calcolato per $C_{16}H_{12}N_4O_2.HNO_3$
	I	II	
Acido nitrico	17,62	17,9	17,75

Torino, Istituto Chimico della R. Università,
Aprile 1915.

Sul profilo teorico delle funicolari.

Nota di GIUSEPPE ALBENGA.

Il profilo longitudinale di una ferrovia funicolare dev'essere molto prossimo a quel profilo di equilibrio o profilo teorico, per il quale, sotto l'azione della gravità o per il combinato effetto della gravità e di un'altra forza motrice costante, i veicoli si muovono di moto uniforme.

Julius v. Hauer (1), studiando i piani inclinati delle miniere, trovò per il primo che, trascurando alcune resistenze, il profilo di equilibrio d'una funicolare a moto alternativo è una cicloide; allo stesso risultato giunsero più tardi Haton de la Goupillière (2) e Giuseppe Zoppi (3), e con un'analisi più accurata delle resistenze, Chénaux (4) e R. v. Reckenschuss (5). La cicloide teorica ebbe qualche applicazione nelle miniere; gl'ingegneri ferroviari adottarono invece di preferenza la parabola suggerita da Vautier (6), ma gli studi di Reckenschuss mostrano come essa si allontani sensibilmente dal profilo di equilibrio.

Una via semplice e rapida per determinare il profilo teorico è indicata in questa Nota.

---

(1) J. v. Hauer, *Seilausgleichung durch veränderliches Bahngefälle*, in " Jahrbuch d. k. k. Bergakademie zu Leoben ", 1883.

(2) Haton de la Goupillière, *Note sur le profil d'équilibre des tractions mécaniques en rampe*, in "Annales des Mines ", I, 1883, pag. 422.

(3) G. Zoppi, *Sulla curva di equilibrio nel trasporto per piani inclinati*, " Giornale del Genio Civile ", 1886, pag. 92.

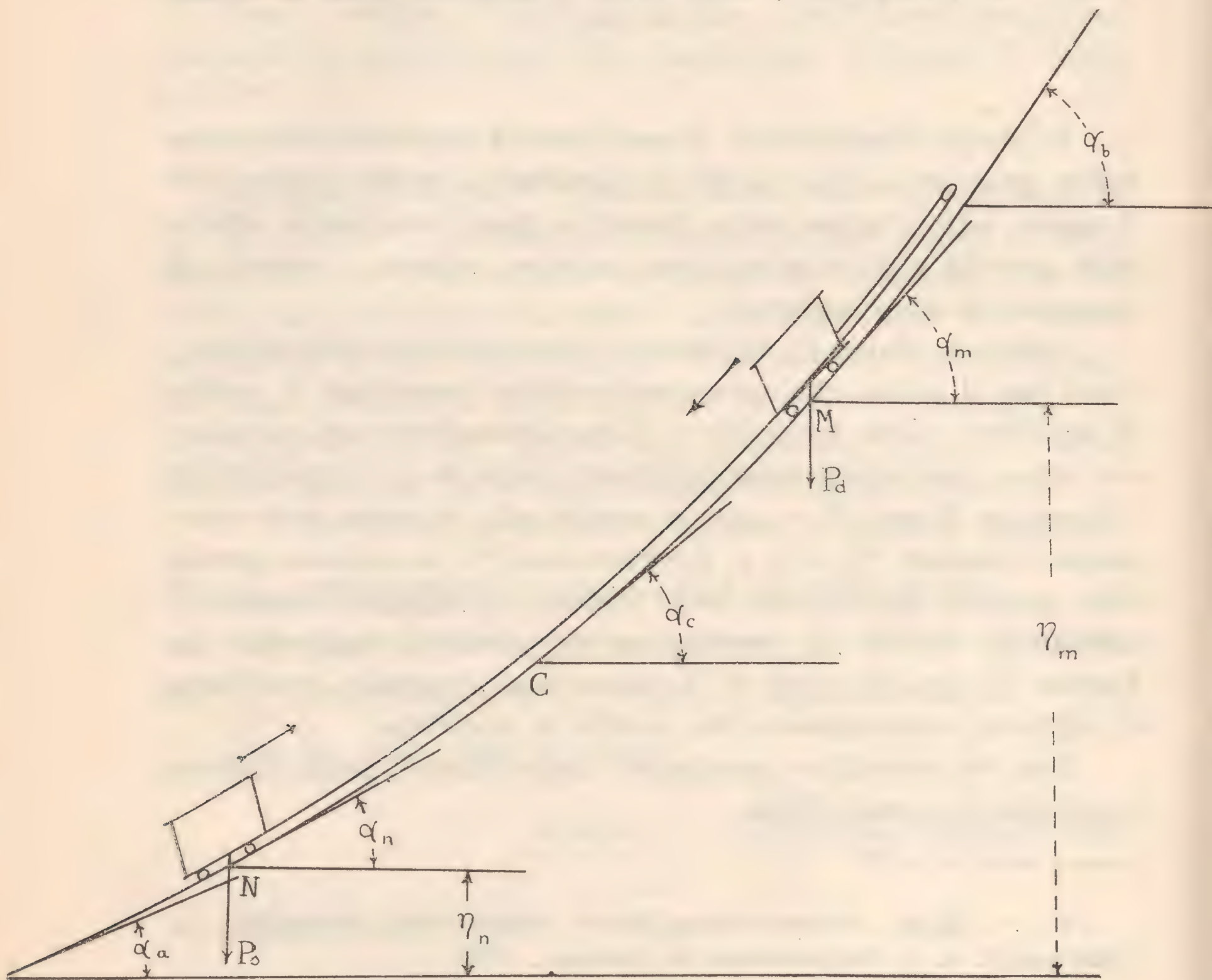
(4) Chénaux, *Note sur le profil d'équilibre des chemins de fer funiculaires*, in " Bulletin technique de la Suisse Romande ", 1913, p. 49.

(5) v. Reckenschuss, *Die theoretische Längenschnitt von Drahtseilbahnen*, in " Organ f. d. Fortschritte d. Eisenbahnwesens ", 1913.

(6) Alphonse Vautier, *Étude des chemins de fer funiculaires*, in " Nouvelles Annales de la Construction ", 1891 e 1892.

*
* *

Consideriamo il caso delle funicolari automotrici; è ovvia la estensione alle funicolari azionate da un motore.

Quando la vettura motrice si trova nel punto M a distanza s_m dalla mezzeria C della linea (vedi figura), la vettura condotta si troverà in N, punto che diremo coniugato di M, a distanza $-s_m$ dalla mezzeria.

Sia P_d il peso del veicolo che discende, compreso l'eventuale carico utile e l'eventuale zavorra; la componente

$$P_d \operatorname{sen} \alpha_m$$

di esso, tende a produrre il movimento verso il basso.

Al moto si oppongono:

la componente parallela alla via

$$P_s \operatorname{sen} \alpha_n$$

del veicolo che sale;

la resistenza d'attrito della fune sulle puleggie portanti e di queste puleggie sui loro perni, indipendente dalla posizione dei veicoli, che indicheremo con

$$K_1;$$

le resistenze alla trazione delle due vetture, cioè il complesso delle resistenze dovute all'aria, all'attrito volvente ed all'attrito degli assi nelle boccole, che potremo ritenere costanti anch'esse ed eguali a

$$K_2.$$

Rimane ancora da computare l'influenza del peso proprio della fune, che agisce come resistenza nella prima parte della corsa, come forza motrice nella parte inferiore. Se p è il peso per unità di lunghezza della fune, ed η_m ed η_n sono le ordinate dei punti coniugati M ed N, la resistenza dovuta al peso proprio della fune vale in grandezza e segno

$$p(\eta_m - \eta_n).$$

*
* *

Perchè il moto della funicolare sia uniforme deve essere nullo il lavoro delle forze precedenti per ogni spostamento virtuale ds lungo la funicolare; ciò importa che sia

$$P_d \operatorname{sen} \alpha_m = P_s \operatorname{sen} \alpha_n + K_1 + K_2 + p(\eta_m - \eta_n). \tag{1}$$

Nel punto di incrocio dei veicoli è

$$\alpha_m = \alpha_n = \alpha_c$$

ed

$$\eta_m = \eta_n$$

e quindi per la (1)

$$P_d \operatorname{sen} \alpha_c = P_s \operatorname{sen} \alpha_c + K_1 + K_2. \tag{2}$$

Introducendo nella (1) il valore di

$$K_1 + K_2$$

ottenuto dalla (2) ed ordinando risulta:

$$P_d (\operatorname{sen} \alpha_m - \operatorname{sen} \alpha_c) - p\eta_m = P_s (\operatorname{sen} \alpha_n - \operatorname{sen} \alpha_c) - p\eta_n. \tag{3}$$

La (3) è l'equazione funzionale della curva di equilibrio cercata, e si può trasformare col solito procedimento in una ordinaria equazione differenziale.

Quando la vettura motrice si trova nel punto N coniugato di M l'equazione d'equilibrio dinamico sarà quella che si ottiene dalla (3) scambiando fra loro gli indici m ed n: sarà cioè

$$P_d (\operatorname{sen} \alpha_n - \operatorname{sen} \alpha_c) - p\eta_n = P_s (\operatorname{sen} \alpha_m - \operatorname{sen} \alpha_c) - p\eta_m. \tag{4}$$

Ricaviamo $\operatorname{sen} \alpha_n$ ed η_n in funzione di $\operatorname{sen} \alpha_m$ e di η_m dalla (3) e dalla (4), avremo

$$\operatorname{sen} \alpha_n = 2 \operatorname{sen} \alpha_c - \operatorname{sen} \alpha_m \tag{5}$$

e

$$\eta_n = \eta_m - \frac{P_d + P_s}{p} (\operatorname{sen} \alpha_m - \operatorname{sen} \alpha_c). \tag{6}$$

Osserviamo che è

$$\operatorname{sen} \alpha_m = \frac{d\eta_m}{ds} \tag{7}$$

e

$$\operatorname{sen} \alpha_n = -\frac{d\eta_n}{ds} \tag{8}$$

(η_m ed η_n hanno per un dato movimento elementare dei veicoli incrementi di segno opposto).

Avremo perciò derivando la (6) rispetto ad s

$$\frac{d\eta_n}{ds} = -\operatorname{sen}\alpha_n = \operatorname{sen}\alpha_m - \frac{P_d + P_s}{p}\frac{d\operatorname{sen}\alpha_m}{ds} \tag{9}$$

ed eguagliando fra loro le espressioni di $\operatorname{sen}\alpha_n$ date dalla (5) e dalla (9)

$$\frac{d\operatorname{sen}\alpha_m}{ds} = \frac{2p}{P_d + P_s}\operatorname{sen}\alpha_c = \text{costante}. \tag{10}$$

Ma è

$$d\operatorname{sen}\alpha_m = \cos\alpha\, d\alpha_m$$

e

$$ds = \rho_m\, d\alpha_m$$

se con ρ_m si rappresenta il raggio di curvatura del profilo nel punto M. La (10) può quindi scriversi anche

$$\frac{\cos\alpha_m}{\rho_m} = \frac{2p}{P_d + P_s}\operatorname{sen}\alpha_c = \text{costante}, \tag{11}$$

ed esprime allora una nota proprietà caratteristica della cicloide generata dal circolo di raggio

$$r = \frac{1}{8}\,\frac{P_d + P_s}{p\operatorname{sen}\alpha_c}\,. \tag{12}$$

Si sarebbe potuto anche scrivere la (10) sotto la forma

$$d\operatorname{sen}\alpha_m = \frac{2p}{P_d + P_s}\operatorname{sen}\alpha_c\, ds$$

che integrata con l'avvertenza che per $s_m = 0$ è $\operatorname{sen}\alpha_m = \operatorname{sen}\alpha_o$, ci dà con la relazione

$$\operatorname{sen}\alpha_m - \operatorname{sen}\alpha_c = s_m \frac{2p}{P_d + P_s}\operatorname{sen}\alpha_c \tag{13}$$

un'altra nota proprietà della cicloide.

La (13) conduce, come è facile dimostrare, ad una semplice costruzione grafica approssimata della cicloide.

***

Se nella (11) sostituiamo a $\cos\alpha_m$ il valore approssimato $\cos\alpha_c$, otteniamo come profilo di equilibrio il circolo di raggio

$$\frac{P_d + P_s}{2p} \operatorname{ctg} \alpha_c \tag{14}$$

applicato in qualche caso.

Se invece poniamo nella (10)

$$\frac{d \operatorname{sen} \alpha_m}{ds} = \frac{d^2 \eta_m}{ds^2}$$

e riteniamo per approssimazione

$$ds = \frac{dx}{\cos \alpha_c}$$

la (10) si trasforma nella

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{2p}{P_d + P_s} \frac{\operatorname{sen} \alpha_c}{\cos^2 \alpha_c} \tag{15}$$

che integrata due volte conduce ad un profilo parabolico.

Nei casi pratici è possibile determinare assai facilmente se le approssimazioni che si ottengono con la (14) e con la (15) sono accettabili o se invece siano troppo grossolane.

***

Le considerazioni precedenti cadono in difetto quando le resistenze $K_1 + K_2$ siano trascurabili di fronte alle altre forze. La (2) diviene allora

$$P_d \operatorname{sen} \alpha_c = P_s \operatorname{sen} \alpha_c \tag{16}$$

che per α_c diverso da zero, cioè per i casi della pratica, richiede che sia

$$P_d = P_s = P.$$

La (3) si riduce con questa sostituzione alla

$$P \operatorname{sen} \alpha_m - p\eta_m = P \operatorname{sen} \alpha_n - p\eta_n, \tag{17}$$

equazione funzionale che non definisce più una curva di equilibrio, ma lega soltanto ordinata ed inclinazione di un punto con ordinata ed inclinazione del punto coniugato in modo che, entro certi limiti, è lecito di fissare ad arbitrio una metà del profilo e dedurne l'andamento del tratto coniugato.

Lo studio di questo caso particolare ha fatto oggetto di una diligente ricerca di Meissner [1]: il profilo a trattrice di Huygens che si ottiene facendo

$$P \operatorname{sen} \alpha_m - p\eta_m = P \operatorname{sen} \alpha_n - p\eta_n = \text{costante}$$

era però già stato proposto fin dal 1897 dagl'ingegneri Ciampa e Colamonico [2].

Bologna, Aprile 1915.

---

[1] MEISSNER, *Bestimmung d. Profils einer Seilbahn u. s. w.* "Schweizerische Bauzeitung", II, 1909, pag. 96.

[2] CIAMPA e COLAMONICO, *Studio di un profilo teorico per ferrovia funicolare.* Napoli, 1897.

Prodotto di due numeri approssimati. Error relativo o errore assoluto?

Nota di ALBERTO TANTURRI.

In questo scritto, premesse alcune definizioni, con esempi, ed enunciati di proprietà che serviranno appresso, tratto, brevemente, del prodotto di due numeri approssimati; e sostengo poi la convenienza di bandire l'error relativo dalla teoria delle approssimazioni numeriche.

***

1. Siano a e y numeri reali positivi o nulli; e sia n un numero intero (: 0, 1, 2, 3, ...).

·1 Def. 1ª. — y *è un valore approssimato di* a *a meno di* $1/10^n$ significa che $y \leq a < y + 1/10^n$. Possiamo, per brevità, tacer l'*approssimato*. Son, per es., valori di 2/3 a meno di $1/10^3$: 0·6657, 0·6658, 0·66567; 0·666; 0·6664; 0·66657, che è, anzi, un valore di 2/3 a meno di $1/10^4$; 0·666658, che è un valore di 2/3 a meno di $1/10^5$; 2/3, che è un valore di 2/3 a meno di $1/10^n$, qualunque sia n; ecc.

·2 Se y è un valore di a a meno di $1/10^n$, $y/10$ lo è di $a/10$ a meno di $1/10^{n+1}$; e, quando $n \geq 1$, $10\,y$ lo è di $10\,a$ a meno di $1/10^{n-1}$.

·3 Tra i valori di 2/3 a meno di $1/10^3$ ce n'è uno solo il cui prodotto per 10^3 = un numero intero: ed è 0·666; che chiameremo *parte di* a *a meno di* $1/10^3$ (*). In generale, facendo uso del simbolo E della parte intera:

Def. 2ª. — *Parte di* a *a meno di* $1/10^n = E\,10^n\,a/10^n$.

(*) Secondo il senso volgare della parola *esatto*, potremmo chiamare *valore di* 2/3 *con 3 cifre decimali esatte* ogni valore approssimato di 2/3 avente la parte intera uguale a 0 e le prime 3 cifre decimali uguali a 6; come fanno il Mehmke e il D'Ocagne nell'art. *Calculs numériques* dell' " Encyclopédie des sc. math. „ (t. I, vol. 4°, fasc. 2, pag. 272); come fa, senza definizione, il Vieille nelle due proposizioni fondamentali della sua *Théorie*

·4 Se y è un valore di a a meno di $1/10^n$,

---

générale des approximations numériques (n[i] 5 e 7 della 2[a] ediz.); come, pure senza definizione, fa il Bertrand, riproducendo, letteralmente, le ora dette proposizioni fondamentali nel suo " Trattato d'Aritmetica " (ved. n[i] 477 e 479, nella 1[a] traduz. di G. Novi). Chi adottasse tale nomenclatura (la quale non è costante; perchè, per es., nel " Trattato d'Aritmetica " del Serret — ved. a principio del n° 160, e, meglio, nei righi 9 e 10 di pag. 176 della traduz. del Dr. R. Nicodemi, 9[a] ediz.: che citeremo anche appresso — è valore di 2/3 con 3 cifre decimali esatte ogni valore di 2/3 a meno di $1/10^3$) potrebbe fissare per 0·666 il nome di *valore di* 2/3 *con 3 cifre decimali tutte esatte*; nome che (a meno del *tutte*, sottinteso) è usato, senza definizione, in molte pubblicazioni: tra le quali cito gli *Elementi di Geometria* del Pensa (Torino, Petrini, 1912) e una Nota del Palatini nel " Pitagora " (anno XX, fasc. 1°). Ho tuttavia creduto conveniente d'introdurre un nome nuovo, affine a quello di parte intera, perchè la locuzione delle cifre (tutte) esatte è già troppo variamente intesa; come qui aggiungo.

Nel Vieille, a partire dal n° 8, ha due sensi; secondochè si riferisce a *dati* o a *risultati*. Per l'appunto: dare a con n cifre decimali esatte significa dare la parte di a a meno di $1/10^n$. E ottenere un risultato, a, con n cifre decimali esatte significa trovarne un valore, y, a meno di $1/10^n$, nel senso della nostra Def. 1[a]: e poi scrivere il numero $E\,10^n y/10^n + 1/10^n$, che gode di una proprietà di cui diremo in ·4; sicchè, se, per es., $= 2/3$ il risultato di un calcolo, come valore di 2/3 con 3 cifre esatte potrà comparire 0·666 o 0·667, a seconda della via che si segue. Ciò risulta dalle tre righe che seguono l'enunciato in corsivo di quel n° 8; righe male omesse dal Bertrand, che pur riproduce tanta parte della trattazione del Vieille. E perciò, chi legge il Bertrand, e continua ad attribuire alla frase delle cifre esatte l'ovvio significato dei n[i] 477 e 479, trova subito delle difficoltà; perchè trova proposizioni alle quali è facile muovere appunto.

E le difficoltà crescerebbero se il lettore credesse di potere, insieme o no, appoggiarsi alla def. del n° 475: *valore di un numero,* a, *con* n *decimali* è quel numero con n cifre decimali che differisce da a, in più o in meno, di meno d'una mezza unità dell'n^{mo} ordine decimale; nella quale, in verità, è così facile sottintendere, dopo la parola *decimali,* la parola *esatte,* che il Gazzaniga (*Aritm. generale e Alg. elem.*, ved. a pag. 150 della 3[a] ediz.), derivando e precisando dal Bertrand, scrive, senz'altro, *decimali esatte.* Per chi adotti tal nomenclatura (e tra quei che l'adottano si può, a rigor di termini, porre anche il Serret, per quanto egli scrive alla fine del n° 160) il valore di 2/3 con 3 cifre decimali esatte è 0·667: e, come è noto, se non si fa una piccola modificazione d'enunciato, manca, per es., il valore di 1/4 con una cifra decimale esatta.

Per altri, infine (per es., A. e C., Fassbinder, ecc.) un numero è approssimato con n cifre esatte, se l'errore, per eccesso o per difetto, $<$ una unità dell'ordine della n^{ma} cifra. E, per conseguenza, tanto 0·666 che 0·667 son valori di 2/3 con 3 cifre esatte.

la parte di a a meno di $1/10^n$, o $=$ quella di y, che è $E\,10^n y/10^n$,
o $=$ „ , $+1/10^n$ (*);

ma *sempre* $E\,10^n y/10^n + 1/10^n$ differisce da a, in più o in meno, di meno di $1/10^n$. *Sempre*; tranne, manifestamente, in un caso, *che va rilevato*: quando $10^n y = 10^n a =$ un numero intero; nel qual caso quella differenza non $<$, ma $= 1/10^n$.

Da un generico valore di a a meno di $1/10^n$ sappiam dunque dedurre, sia, *ma con ambiguità*, la parte di a a meno di $1/10^n$, sia un numero che differisce da a, in più o in meno, di meno di $1/10^n$.

·5 Faremo anche uso di scritture come questa:

$$2/3 = 0 \cdot 666 \ldots$$

Volendo scrivere la definizione generale, bisogna parlar di *forme decimali*.

$1/2 = 0 \cdot 5 = 0 \cdot 50$. E $1/2$, o $0 \cdot 5$, o $0 \cdot 50$, è un numero (decimale) con una cifra decimale (**); ma $1/2$ non è una forma decimale, e $0 \cdot 5$ è una forma (decimale) con una cifra decimale, e $0 \cdot 50$ una forma con 2 cifre decimali. Premessa questa spiegazione:

Def. 3ª. — Se f_n è una forma con n cifre decimali, dire che $a = f_n \ldots$ è come dire che $f_n \leq a < f_n + 1/10^n$; cioè, come subito si riconosce, che la parte di a a meno di $1/10^n = f_n$ (***).

(*) Per es., se $a = 20 \cdot 00027$, e $y = 20 \cdot 0001$, e $y' = 19 \cdot 99931$, y e y' son valori di a a meno di $1/10^3$, e la parte di a a meno di $1/10^3$, che è $20 \cdot 000$, $=$ quella di y: ed $=$ quella di y', $+1/10^3$. Si noti che y' è un valore di a a meno di $1/10^3$, con nessuna cifra esatta, nel senso volgare di questa parola; e, in generale, brevemente, un valore di a può essere molto approssimato, e aver poche, e anche nessuna cifra esatta.

(**) La frase: y *è un numero decimale*, significa che esiste qualche intero, p, tale che $10^p y$ è un intero; e il minimo di quegl'interi p è il *grado*, o *numero delle cifre decimali di* y. Per es.: ogni intero è un numero decimale di grado 0; 1/2, 103/50 e 38/80 son numeri decimali di grado 1, 2 e 3; ecc.

I numeri decimali formano una *classe* di razionali positivi o nulli. E, invece, le forme decimali una *pseudoclasse*. Così, dalle: $0 \cdot 5$ è una forma decimale, e $0 \cdot 5 = 1/2$, non si deduce che 1/2 è una forma decimale.

(***) Il simbolo ... con tal significato è d'uso pressochè comune: e ved., per far qualche esempio, il Vieille a pag. 11, gli *Elementi di Geometria* di A. Sannia ed E. D'Ovidio a pag. 408 del vol. II (11ª ediz.), ecc.; ma qualche autore aggiunge indicazioni verbali; e i due ultimi nominati stessi, a pagina 414, scrivono: $\pi = 3 \cdot 141593 \ldots$, aggiungendo: con un errore minore di $1/10^6$ in eccesso.

Per es., la $a = 3 \cdot 141 \ldots$ significa che $3 \cdot 141 \leq a < 3 \cdot 142$; e la $a = 3 \cdot 1410 \ldots$ che $3 \cdot 1410 \leq a < 3 \cdot 1411$: sicchè dalla 2ª si deduce la 1ª, ma non viceversa (*). È lecito, cioè, discendere, per es., dalla $a = 3 \cdot 1410 \ldots$, alla $a = 3 \cdot 141 \ldots$: e alla $a = 3 \cdot 14 \ldots$, alla $a = 3 \cdot 1 \ldots$, alla $a = 3 \cdot \ldots$ Ma se $a = 3 \cdot \ldots$, e vogliamo ascendere alla parte di a a meno di $1/10$, potremo dir solo che, o $a = 3 \cdot 0 \ldots$, o $a = 3 \cdot 1 \ldots$, ecc., o $a = 3 \cdot 9 \ldots$ (**).

·6 Dalla $a = 3 \cdot 141 \ldots$ segue che $a/10 = 0 \cdot 3141 \ldots$, che $a/10^2 = 0 \cdot 03141 \ldots$, ecc. Segue pure che $10\,a = 31 \cdot 41 \ldots$, che $10^2\,a = 314 \cdot 1 \ldots$, e che $10^3\,a = 3141 \cdot \ldots$

***

2. Prodotto. — a e a' son numeri reali positivi, e n, n' e r numeri interi, e f_n e $f_{n'}'$ son forme rispettivamente con n e n' cifre decimali. E $a = f_n \ldots$, e $a' = f_{n'}' \ldots$

·1 Che cosa si deduce da queste due relazioni?

Che $$f_n \times f_{n'}' \leq a \times a' < (f_n + 1/10^n) \times (f_{n'}' + 1/10^{n'});$$

e, senza ulteriori ipotesi (***), nulla di più. Il 3° membro

$$= f_n \times f_{n'}' + (10^n f_n + 10^{n'} f_{n'}' + 1)\,/10^{n+n'}.$$

(*) Si suol dire che nelle forme decimali delle parti di a è lecito sopprimere, ma non aggiungere, zeri di destra. Osservo, tuttavia, che se $a = 3 \cdot 141$, $a = 3 \cdot 141 \ldots$, ed $= 3 \cdot 1410 \ldots$, ed $= 3 \cdot 14100 \ldots$, ecc.

Come si vede, scriviamo solo le cifre *certe*. Alcuni, nei risultati, scrivono tutte le cifre che ottengono; sia che non voglian studiare da quale cifra cominci l'incertezza: sia che temano, accorciando eccessivamente, di perder troppo del lavoro già fatto. E altri, come, per es., il Pesci (ved. *Appendice al Trattato elementare di Trigonom.*), consigliano di conservar la prima o le prime due delle cifre incerte.

(**) Questa proposizione dice che, se $Ea = 3$, $E10a$, o $= 30$, o $= 31$, ecc., o $= 39$; ed è considerata come evidente da vari autori; i quali dimostran poi, per via spesso lunga, che, per es., se $E\sqrt{12}$, e quindi, poniamo, $E\sqrt{12 \cdot 34}$, $= 3$, $E\sqrt{1234}$ è uno degl'interi 30, 31, ecc., 39.

(***) Ulteriori ipotesi si hanno, per es., quando $a = f_n$, cioè, come suol dirsi, quando uno dei fattori è esatto. Questo caso rientra nel generale, perchè dalla $a = f_n$ segue la $a = f_n \ldots$; ma converrebbe trattarlo a parte, per aver migliori risultati: un piccolo saggio dei quali do nella nota di ·5.

Così (v. VIEILLE, n. 19), se $a = 7850 \cdot 34 \ldots$, e $a' = 3 \cdot 4567 \ldots$,

$$27136 \cdot 270278 \leq a \times a' < 27136 \cdot 270278 + 785034 + 34568;$$

e perciò (v. **1** ·1) il 1° membro è un valore di $a \times a'$ a meno di 1: dal che (**1** · 4) segue che $a \times a'$, o $= 27136 \cdot \ldots$, o $= 27137 \cdot \ldots$, e che 27137 differisce da $a \times a'$, in più o in meno, di meno di 1.

·2 *Prima quistione.* Che cosa si può dire, *a priori,* dell'approssimazione di $f_n \times f_{n'}'$ rispetto ad $a \times a'$?

Per semplicità suppongo che f_n e $f_{n'}'$ abbiano il punto decimale dopo la 1ª cifra significativa (*); cioè fo le ipotesi:

$$1 \leq f_n < 10 \quad \text{e} \quad 1 \leq f_{n'}' < 10,$$

alle quali unisco l'altra:

$$n \geq n'.$$

Osservo che sempre

$$\frac{10^n f_n + 10^{n'} f'_{n'} + 1}{10^{n+n'}} > \frac{1}{10^{n'}}\,; \text{ perchè } > \frac{10^n f_n}{10^{n+n'}}, \text{ e } f_n \geq 1.$$

E che " $\leq \frac{10}{10^{n'}}$, solo se $10^n f_n + 10^{n'} f_{n'}' + 1 \leq 10^{n+1}$,

o, che è lo stesso, se $f_n + \frac{10^{n'} f'_{n'}}{10^n} < 10$.

E che sempre " $< \frac{10^2}{10^{n'}}$; perchè, anzi, $< \frac{10^n.10 + 10^n.10 + 1}{10^{n+n'}}$,

o, che è lo stesso, $\leq \frac{2.10}{10^{n'}}$.

E concludo che, nelle ipotesi fatte:

non si può dire, *a priori,* che $f_n \times f_{n'}'$ sia un valore di $a \times a'$ a meno di $1/10^{n'}$;

(*) Si esclude dunque il caso nel quale una delle due forme $= 0$. Allora è immediata l'applicazione di **2** ·1. Così, se $a = 3 \cdot 141 \ldots$, e $a' = 0 \cdot 00 \ldots$, $a \times a' < 0 \cdot 03142$; e, se $a = 0 \cdot 000 \ldots$, e $a' = 0 \cdot 00 \ldots$, $a \times a' < 0 \cdot 00001$.

si può dire, *a priori*, che $f_n \times f_{n'}'$ è un valore di $a \times a'$ a meno di $1/10^{n'-1}$, solo se $n' \geq 1$ e $f_n + 10^{n'} f_{n'}'/10^n < 10$;

e si può dire, *a priori*, che $f_n \times f_{n'}'$ è un valore di $a \times a'$ a meno di $1/10^{n'-2}$, solo se $n' \geq 2$.

Enunciamo brevemente, tacendo le naturali restrizioni per n'.

Nelle ipotesi: $1 \leq \mathrm{f}_n < 10$, $1 \leq \mathrm{f}_{n'}' < 10$, *e* $\mathrm{n} \geq \mathrm{n}'$, *sempre* $\mathrm{f}_n \times \mathrm{f}_{n'}'$ *è un valore di* $\mathrm{a} \times \mathrm{a}'$ *a meno di* $1/10^{n'-2}$; *e spesso, anzi, lo è a meno di* $1/10^{n'-1}$: *e lo è certamente quando* f_n, $+$ *la forma che si ottiene dividendo per* 10^n *l'intero* $10^{n'}\mathrm{f}_{n'}'$, < 10. Questa condizione, sufficiente per la maggiore approssimazione visibile *a priori*, si semplifica quando $n = n'$; e diventa: $f_n + f_n' < 10$ (*).

·3 Facciamo gli esempi del VIEILLE.

1° $a = 7850 \cdot 34 \ldots$, e $a' = 3 \cdot 4567 \ldots$

(*) In questo enunciato v'è sovrabbondanza di ipotesi. Evidentemente, senza ipotesi alcuna sul punto decimale di f_n e $f'_{n'}$:

se $n' \geq 1$, e $f_n + 10^{n'} f'_{n'}/10^n < 10$,

$$f_n \times f'_{n'} \leq a \times a' < f_n \times f'_{n'} + 1/10^{n'-1};$$

e, con le sole ipotesi: $1 \leq f_n < 10$, e $n \geq n'$:

se $n' \geq 1$, e $f'_{n'} \leq 10$, $\quad f_n \times f'_{n'} \leq a \times a' < f_n \times f'_{n'} + 2/10^{n'-1}$;

e se $n' \geq 2$, e $f'_{n'} \leq 90$, $\quad$ „ $\leq$ „ $<$ „ $+ 1/10^{n'-2}$.

Abbiam così scritto tre proposizioni: delle quali la 1ª e la 3ª darebbero regole sostituibili a quelle enunciate sopra. Ma si può dimostrare che tal sostituzione non è vantaggiosa: e qui ci restringiamo a verificarlo su qualche esempio.

Se $a = 0 \cdot 00785 \ldots$, e $a' = 0 \cdot 351 \ldots$, $0 \cdot 00785 \times 0 \cdot 351$ sarebbe, secondo la nuova regola, un valore di $a \times a'$ a meno di $1/10^{3-1}$. Con l'enunciato del testo, parto, invece, dalle: $10^3 a = 7 \cdot 85 \ldots$, e $10a' = 3 \cdot 51 \ldots$ (ved. 1·6); e dico che $7 \cdot 85 \times 3 \cdot 51$ è un valore di $10^3 a \times 10a'$ a meno di $1/10^{2-2}$, e quindi (ved. 1·2) che $0 \cdot 00785 \times 0 \cdot 351$ è un valore di $a \times a'$ a meno di $1/10^4$. Così, guadagno.

E se $a = 3 \cdot 75812 \ldots$, e $a' = 0 \cdot 00835 \ldots$, la nuova regola darebbe che $3 \cdot 75812 \times 0 \cdot 00835$ è un valore di $a \times a'$ a meno di $1/10^{5-1}$; e quella del testo, con la $a = 3 \cdot 758 \ldots$ (ved. 1·5), dà che tale è $3 \cdot 758 \times 8 \cdot 35/10^3$, cioè $3 \cdot 758 \times 0 \cdot 00835$. E si guadagna dunque.

Infine, se $a = 9 \cdot 999 \ldots$, e $a' = 90 \cdot 000 \ldots$, secondo questa nota $9 \cdot 999 \times 90 \cdot 000$ è un valore di $a \times a'$ a meno di $1/10^{3-2}$. Col testo, dirò che $9 \cdot 0000 \times 9 \cdot 999$ è un valore di $a'/10 \times a$ a meno di $1/10^{3-1}$, e quindi che $9 \cdot 999 \times 90 \cdot 000$ è un valore di $a \times a'$ a meno di $1/10$. Sicchè, siam pari.

Anche nella trattazione del prodotto abbreviato v'è sovrabbondanza di ipotesi.

Poichè $a/10^3 = 7 \cdot 85034 \ldots$ (v. **1** ·6), e $7 \cdot 85034 + 0 \cdot 34567 < 10$, $7 \cdot 85034 \times 3 \cdot 4567$ è un valore di $a/10^3 \times a'$ a meno di $1/10^{4-1}$; e quindi (v. **1** ·2) il prodotto $7850 \cdot 34 \times 3 \cdot 4567$ è un valore di $a \times a'$ a meno di 1. Il VIEILLE dà solo che $a \times a'$ è compreso tra quel prodotto e quel prodotto $+ 10$.

2° $\quad a = 1850 \cdot 34 \ldots$, e $a' = 3 \cdot 4567 \ldots$

Ragionando come sopra, trovo che $1850 \cdot 34 \times 3 \cdot 4567$ è un valore di $a \times a'$ a meno di 1. Tale è, anzi, già $1850 \cdot 3 \times 3 \cdot 4567$; perchè $a/10^3 = 1 \cdot 8503 \ldots$ (v. **1** ·6 ·5) e $1 \cdot 8503 + 3 \cdot 4567 < 10$. Il VIEILLE giunge solo al 1° di questi due risultati; e con un ragionamento particolare. La sua regola generale darebbe solo che $a \times a'$ sta tra $1850 \cdot 34 \times 3 \cdot 4567$ e tal prodotto $+ 10$.

3° $\quad a = 9 \cdot 087 \ldots$, e $a' = 1 \cdot 000 \ldots$

$9 \cdot 087 \times 1 \cdot 000$, cioè $9 \cdot 087$, è un valore di $a \times a'$ a meno di $1/10^2$; sicchè (**1** ·4) $a \times a'$, o $= 9 \cdot 08 \ldots$, o $= 9 \cdot 09 \ldots$, e $9 \cdot 09$ differisce da $a \times a'$, in più o in meno, di meno di $1/10^2$. Lo stesso risultato dà il VIEILLE, ma con un ragionamento particolare.

·4 *Seconda quistione.* Quali *parti* di a e di a' dovrò prendere perchè il prodotto di esse sia un valore di $a \times a'$ a meno di $1/10^r$?

La risposta si deduce subito da ·2, se supponiamo che a e a', e quindi ogni loro parte, abbiano il punto decimale dopo la 1ª cifra significativa.

Ed è questa:

Basta prendere le parti di a e di a' a meno di $1/10^{r+2}$. Spesso, anzi, basta prendere la parte a meno di $1/10^{r+2}$ di uno solo dei fattori, e dell'altro quella a meno di $1/10^{r+1}$; per es., quando: quella 1ª parte, + questa 2ª /10, < 10. E spesso, infine, basta prendere le parti dei fattori a meno di $1/10^{r+1}$; per es., quando la somma di esse < 10.

·5 *Prodotto abbreviato.* Tornando all'esempio di ·1, dalle $a = 7 \cdot 85034 \ldots$, e $a' = 3 \cdot 4567 \ldots$, si può, come lì si vede, dedurre solo che $a \times a'$, o $= 27 \cdot 136 \ldots$, o $= 27 \cdot 137 \ldots$; sicchè il lavoro per esprimere in cifre il prodotto $7 \cdot 85034 \times 3 \cdot 4567$

va, in buona parte, perduto: non potendosi delle 9 cifre decimali conservar che le prime 3, delle quali, anzi, la 3ª è pur ambigua.

Ma osservo che

$$\left.\begin{matrix}7{\cdot}8503\ \times\\ 3\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}850\ \times\\ 4/10\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}85\ \times\\ 5/10^2\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}8\ \times\\ 6/10^3\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7\ \times\\ 7/10^4\end{matrix}\right|,$$

che indicherò con s, $\leq$

$$\left.\begin{matrix}7{\cdot}85034\times\\ 3\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}85034\times\\ 4/10\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}85034\times\\ 5/10^2\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}85034\times\\ 6/10^3\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}85034\times\\ 7/10^4\end{matrix}\right|,$$

cioè rispetto a $7\cdot 85034 \times 3\cdot 4507$; e quindi $\leq a \times a'$. E che $a \times a' < 7\cdot 85035 \times (3\cdot 4567 + 1/10^4)$, cioè di

$$\left.\begin{matrix}7{\cdot}85035\times\\ 3\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}85035\times\\ 4/10\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}85035\times\\ 5/10^2\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}85035\times\\ 6/10^3\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}85035\times\\ 7/10^4\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}85035\times\\ 1/10^4\end{matrix}\right|;$$

e quindi $<$

$$\left.\begin{matrix}7{\cdot}8504\ \times\\ 3\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}851\ \times\\ 4/10\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}86\ \times\\ 5/10^2\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}7{\cdot}9\ \times\\ 6/10^3\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}8\ \times\\ 7/10^4\end{matrix}\right| + \left.\begin{matrix}(7+1)\ \times\\ 1/10^4\end{matrix}\right|,$$

cioè di $s + 1/10^4\,(3+4+5+6+7+7+1)$. Sicchè concludo che

$$s \leq a \times a' < s + 33/10^4;$$

$$\begin{array}{r} 7{\cdot}8503\\ \underline{76543}\\ 235509\\ 31400\\ 3925\\ 468\\ \underline{49}\\ 27{\cdot}1351 \end{array}$$

cioè, esprimendo s in cifre, per esempio con la disposizione qui a fronte, che $27{\cdot}1351 \leq a \times a' < 27{\cdot}1384$ (*). Dunque: $a \times a' = 27\cdot 13\ldots$; e, con un lavoro molto minore, giungo così a un risultato pari quasi a quello ottenuto sopra.

·6 In generale, facciamo le ipotesi seguenti: come in ·2, $1 \leq f_n < 10$, e $1 \leq f_{n'}' < 10$, e $n \geq n'$; e, per ogni intero, i, da 0 ad n', $a_i =$ cifra decimale

(*) Se scambio i fattori, posso anzi dire che $s \leq a \times a' < s + 27/10^4$. Noto che *il prodotto abbreviato di due forme con lo stesso numero di cifre decimali è commutativo*. Noto pure che se il 2° fattore fosse esatto (cioè se $a' = 3\cdot 4567$), potrei, nel ragionamento, scrivere che $a \times a' < 7\cdot 85035 \times 3\cdot 4567$, e quindi, nella conclusione, che $a \times a' < s + (3+4+5+6+7)/10^4$.

d'ordine i di f_n, e $a_i' =$ cifra decimale d'ordine i di $f_{n'}'$: dove, però, per cifra decimale d'ordine 0 si intende la parte intera.

Si dimostra allora, come sopra, che se

$$s = \sum_{0}^{n'}{}_k \left(\sum_{0}^{n'-k}{}_i \frac{a_i}{10^i} \times \frac{a_k'}{10^k} \right),$$

(I) $$s \leq a \times a' < s + (\sum_{0}^{n'}{}_k a_k' + a_0 + 1)/10^{n'}.$$

s si chiama *prodotto abbreviato della (forma)* f_n *per la (forma)* $f_{n'}'$, o, anche, di f_n e $f_{n'}'$. Per calcolarlo, accorcio f_n a n' cifre decimali, ottenendo così una forma, che, accorciata d'una cifra per volta, moltiplico per la parte intera e per le successive parti decimali di $f_{n'}'$; e sommo poi i prodotti ottenuti. Sempre $a \times a'$ è compreso tra il prodotto abbreviato e lo stesso prodotto aumentato di tante unità dell'ultimo ordine decimale quanta è la somma delle cifre di $f_{n'}'$, + la 1ª cifra di f_n, + 1 (*).

Osservo subito che tale aumento $\leq [(n'+1) \times 9 + 9 + 1]/10^{n'}$: e perciò, se $2 \leq n' \leq 9$, $\leq 1/10^{n'-2}$; e concludo: *se* $1 \leq f_n < 10$, *e* $1 \leq f_{n'}' < 10$, *e* $n \geq n'$, *e* $2 \leq n' \leq 9$, *il prodotto abbreviato di* f_n *e* $f_{n'}'$ *è un valore di* $a \times a'$ *a meno di* $1/10^{n'-2}$ (**).

·7 Sicchè, come conseguenza: *se* a *e* a' *hanno il punto decimale dopo la 1ª cifra significativa, e* r *è uno degli interi da* 0 *a* 7, *chi voglia un valore di* $a \times a'$ *a meno di* $1/10^r$ *scriva in forma decimale le parti di* a *e di* a' *a meno di* $1/10^{r+2}$, *e poi faccia il prodotto abbreviato delle due forme* (***).

(*) Ved. questo risultato in Peano, *Aritmetica generale e Alg. element.*; con, insieme, una regola che segue dalla nostra (II) di ·8. Si legga in tal libro (pagg. 96-103) una breve, chiara e completa teoria delle approssimazioni; dalla quale dovrebbero prender le mosse i trattatisti elementari, come ha già fatto il Catania (ved. a pag. 18 della parte 2ª dell'*Alg. element. per i Licei classici e moderni*).

(**) Se, nelle stesse ipotesi per f_n e $f'_{n'}$, $n \geq n'$, e $3 \leq n' \leq 109$, il prodotto abbreviato di f_n e $f'_{n'}$ è un valore di $a \times \alpha'$ a meno di $1/10^{n'-3}$.

(***) A chi non voglia consultare ogni volta le trattazioni speciali, basterà tener presente la conclusione di ·6 e questo ·7. E, insieme, si intende, il nº 1·4.

·8 Risultati più convenienti si possono ottenere con calcoli meno brevi.

Facciamo perciò le stesse ipotesi di ·6; e, in più, poniamo:

$n > 0$,

ed $a_{n'+1} = 0$, se $n = n'$,

ed $=$ cifra decimale d'ordine $n' + 1$ di f_n, se $n > n'$.

Si dimostra allora, come in ·5, che, se

$$s_1 = \sum_{0}^{n'}{}_k \left(\sum_{0}^{n'+1-k}{}_i \frac{a_i}{10^i} \times \frac{a_k'}{10^k} \right),$$

(II) sempre $s_1 \leq a \times a' < s_1 + \dfrac{\sum_0^{n'}{}_k a_k' + (10a_0 + a_1) + 1}{10^{n'+1}} + \dfrac{9a_0'}{10^{n'+1}}$;

(III) anzi " $\leq$ " $<$ " $+$ " , quando $n > n'$.

Si noti che s_1 è un prodotto abbreviato. Quando $n = n'$, delle forme che si ottengono prolungando f_n e $f_{n'}'$, con zeri, a $n' + 1$ cifre decimali; e, quando $n > n'$, di f_n per la forma che si ottiene allo stesso modo da $f_{n'}'$.

7·85034
76543
2355102
314012
39250
4710
546
27·13620

Così, nel solito esempio di $a = 7 \cdot 85034$..., e $a' = 3 \cdot 4567$..., col quadro di fronte e con la (III), ho subito che

$$27 \cdot 13620 \leq a \times a' < 27 \cdot 13620 + \\ + (3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 78 + 1)/10^5;$$

e, per conseguenza, che $a \times a'$, o $= 27 \cdot 136$..., o $= 27 \cdot 137$... Ho cioè lo stesso risultato ottenuto con la moltiplicazione completa.

Come nella fine di ·6, sempre l'aumento

$\leq [(n' + 1) \times 9 + 99 + 1 \quad + 9 \times 9]/10^{n'+1}$,

e anzi $\leq [$ " $]/10^{n'+1}$, quando $n > n'$:

e perciò, se $1 \leq n' \leq 9$, sempre $< 3/10^{n'-1}$; e, anzi, $< 2/10^{n'-1}$, quando $n > n'$.

9 Facciamo anche qui gli esempi del VIEILLE.

1° $a = 1850 \cdot 34 \ldots$, e $a' = 3 \cdot 4567 \ldots$

1·85034
76543
555102
74012
9250
1110
126
6·39600

La (III) dà subito che

$$6{\cdot}39600 \leq a/10^3 \times a' < 6{\cdot}39600 + (25 + 18 + 1)/10^5;$$

e quindi, come in VIEILLE, che $a \times a' = 6396 \cdot \ldots$ La (I), col prodotto abbreviato di 1·8503 per 3·4567, avrebbe dato solo che

$$6{\cdot}3949 \leq a/10^3 \times a' < 6{\cdot}3949 + (25 + 1 + 1)/10^4;$$

e quindi che $a/10^3 \times a' = 6 \cdot 39 \ldots$

2° Se, in metri, il raggio, r, d'un cerchio, $= 4 \cdot 72 \ldots$, che cosa si può dire dell'area di esso?

Indicando con π_n la parte di π a meno di $1/10^n$, si potrà dire che

$$\pi_n \times 4 \cdot 72^2 \leq \pi r^2 < (\pi_n + 1/10^n) \times (4 \cdot 72 + 0 \cdot 01)^2;$$

ossia, poichè $4 \cdot 72^2 = 22 \cdot 2784$, e quindi $(4 \cdot 72 + 0 \cdot 01)^2 = 22 \cdot 2784 + 0 \cdot 0945$, che

$$\pi_n \times 22 \cdot 2784 \leq \pi r^2 < \pi_n \times 22 \cdot 2784 + 22 \cdot 2784/10^n + \\ + (\pi_n + 1/10^n) \times 0 \cdot 0945.$$

Osservo che, comunque si prenda n, anche solo $(\pi_n + 1/10^n) \times 0 \cdot 0945$, che $> 3 \times 0 \cdot 09$, $> 1/10$; e che, se $n \geq 2$, $22 \cdot 2784/10^n + (\pi_n + 1/10^n) \times 0 \cdot 0945 < 0 \cdot 222784 + 3 \cdot 15 \times 0 \cdot 1$, e quindi < 1. Concludo che, senza ulteriori ipotesi, non si potrà dedurre dal dato valore di r un valore di πr^2 a meno di 1/10; ma che, per ogni n non minore di 2, $\pi_n \times 22 \cdot 2784$ è un valore di πr^2 a meno di 1 (*).

(*) Dalla $r = 4 \cdot 72 \ldots$ segue che r^2, o $= 22 \cdot 2 \ldots$, o $= 22 \cdot 3 \ldots$ Ed ecco dunque una *Terza quistione* da porsi accanto alle due di ·2 e ·4. Data una certa *parte* d'uno dei due fattori, che cosa si può dir del prodotto? (: per es., se $r^2 = 22 \cdot 2 \ldots$, che cosa si può dir di πr^2?). E quale *parte* si prenderà dell'altro fattore per avere il prodotto con la massima approssimazione possibile? La soluzione di tal quistione discende, è vero, immediatamente, da quella delle altre due; ma la soluzione della 2ª discende, non meno immediatamente, da quella della 1ª.

Tale è dunque $3 \cdot 14 \times 22 \cdot 2784$, cioè $69 \cdot 954176$; e perciò (1·4) πr^2, o $= 69 \cdot \ldots$, o $= 70 \cdot \ldots$: e, come in VIEILLE, quell'area differisce da 70 metri quadrati, in meno o in più, di meno di 1 metro quadrato.

Al calcolo del prodotto di $3 \cdot 14$ per $22 \cdot 2784$ si può sostituir quello più breve di $3 \cdot 14$ per $22 \cdot 2$. Quel 1° prodotto è infatti compreso fra $3 \cdot 14 \times 22 \cdot 2$ e $3 \cdot 14 \times 22 \cdot 3$; e scrivo perciò la

$$3 \cdot 14 \times 22 \cdot 2 < 3 \cdot 14 \times 22 \cdot 2784 < 3 \cdot 14 \times 22 \cdot 2 + 0 \cdot 314.$$

Ma (vedi sopra)

$$3 \cdot 14 \times 22 \cdot 2784 \leq \pi r^2 < 3 \cdot 14 \times 22 \cdot 2784 + 0 \cdot 222784 + 0 \cdot 315.$$

Sicchè, sommando, e sopprimendo il termine comune:

$$3 \cdot 14 \times 22 \cdot 2 < \pi r^2 < 3 \cdot 14 \times 22 \cdot 2 + 0.851784 ;$$

la quale dice che già $3 \cdot 14 \times 22 \cdot 2$, cioè $69 \cdot 708$, è un valore di πr^2 a meno di 1 (*).

3° Si vuole un valore di $\pi (\sqrt{5} + 1)$ a meno di $1/10^2$.

Poichè $\sqrt{5} = 2 \cdot 236 \ldots$, e quindi $\sqrt{5} + 1 = 3 \cdot 236 \ldots$, tale è $3 \cdot 141 \times 3 \cdot 236$: perchè $3 \cdot 141 + 3 \cdot 236 < 10$.

3·2360
1413
97080
3236
1292
32
10·1640

Col prodotto abbreviato di $3 \cdot 236$ per $3 \cdot 141$, e con la (I), troverei che $10 \cdot 162 \leq \pi < 10 \cdot 162 + (9 + 3 + 1)/10^3$: e perciò che $\pi (\sqrt{5} + 1)$, o $= 10 \cdot 16 \ldots$, o $= 10 \cdot 17 \ldots$; come trova il VIEILLE, partendo però dalle $\pi = 3 \cdot 1415 \ldots$, e $\sqrt{5} = 2 \cdot 2360 \ldots$ A noi bastano invece le $\pi = 3 \cdot 141 \ldots$, e $\sqrt{5} = 2 \cdot 2360 \ldots$, per trovare, con la (III), che $10 \cdot 1640 \leq \pi (\sqrt{5} + 1) < 10 \cdot 1640 + (9 + 32 + 1)/10^4$: e quindi che certamente $\pi (\sqrt{5} + 1) = 10 \cdot 16 \ldots$

(*) Come si vede, non si parla qui di prodotto abbreviato; al quale il VIEILLE ricorre per evitare la moltiplicazione completa di $3 \cdot 14$ per $22 \cdot 2784$. Volendo, potrei porre $a = 2 \cdot 22784$ e $a' = 3 \cdot 140$: e fare il prodotto abbreviato di $2 \cdot 227$ per $3 \cdot 140$: e (ved. la fine della nota di ·5) scrivere che $6 \cdot 991 \leq a \times a' < 6 \cdot 991 + 8/10^3$; sicchè $22 \cdot 2784 \times 3 \cdot 14 = 69 \cdot \ldots$: donde, con 1·4, lo stesso risultato ottenuto sopra.

4° In metri, a meno d'un centimetro, si vuole la lunghezza della circonferenza che ha per raggio la diagonale del metro quadrato.

$$\begin{array}{r} 2{\cdot}8280 \\ 1413 \\ \hline 84840 \\ 2828 \\ 1128 \\ 28 \\ \hline 8{\cdot}8824 \end{array}$$

Un valore di $\pi\sqrt{8}$ a meno di $1/10^2$ è $3{\cdot}141 \times 2{\cdot}828$; e con la (II) trovo subito che $8{\cdot}8824 \leq \pi\sqrt{8} < 8{\cdot}8824 + (9+28+27)/10^4$: e quindi che $\pi\sqrt{8} = 8{\cdot}88...$ Il VIEILLE, pur partendo dalle stesse $\pi = 3{\cdot}141...$, e $\sqrt{8} = 2{\cdot}828...$, trova solo che $\pi\sqrt{8}$ o $= 8{\cdot}88...$, o $= 8{\cdot}89...$

***

3. LA QUISTIONE DEI DUE ERRORI. — Dalla frase: conoscere un numero a con un error relativo e, si passa, con tanta facilità, all'equivalente: conoscere a con un errore assoluto $a \times e$, che, per voler adoperare la 1ª piuttosto che la 2ª, non mi sembra conveniente scrivere una speciale teoria, come, per il primo, fece il VIEILLE. Ciò può parere una veduta personale; ma, chi tenga presenti i due sensi *immediati* che ha in questo autore la locuzione delle cifre (tutte) esatte (ved. la nota al nostro n. **1**·1), dirà, con me, che il VIEILLE stesso, preferisce, *in sostanza*, la frase del tipo della 2ª; perchè, o *assegna* un numero con m cifre esatte, cioè con un errore *assoluto* minore di una unità dell'ordine dell'ultima cifra: o *perviene* a un numero con m cifre esatte, cercandone un valore con un errore *assoluto* minore di una unità dell'ordine dell'm^{ma} cifra. Dunque l'introduzione dell'error relativo è puramente artificiale (*).

E richiede i due teoremi fondamentali dei num. 5 e 7 del VIEILLE (ved. da pag. 4 a pag. 8) (**), e teoremi speciali per le

(*) Nel citato art. dell'*Encyclopédie* (a pag. 273) è detto che, nelle applicazioni usuali, si può, *quasi sempre*, considerar solo l'errore assoluto. Qui sosteniamo il *totale abbandono dell'error relativo nella costruzione della teoria.*

(**) Cioè i seguenti; qui semplicissimi perchè presentati come relazioni tra l'errore assoluto, $a - y$, e il relativo, $(a - y)/a$, di y rispetto ad a: che, per ipotesi, non è nullo, $\geq y$, e, inoltre, ha il punto decimale dopo la 1ª significativa.

1°. Se l'errore assoluto $< 1/10^n$, il relativo $< 1/(Ea \times 10^n)$: e quindi di $1/10^n$.

2°. E se il relativo $< 1/[(Ea + 1) \times 10^n]$, e, in particolare, di $1/10^{n+1}$, l'assoluto $< 1/10^n$.

Si deducono immediatamente dalla $Ea \leq a < Ea + 1$.

diverse operazioni (*). Sicchè potrebbe essere giustificata solo se conducesse a risultati più vantaggiosi di quelli che si ottengono con l'errore assoluto.

4. Ora ciò non accade.

Per la differenza, già il Vieille si restringe all'errore assoluto. Per la somma fan lo stesso alcuni suoi imitatori (Serret, A. e C., ecc.); ed egli stesso consiglia la regola che si deduce dall'error relativo solo quando gli addendi *ne diffèrent pas beaucoup les uns des autres*: nè noi ci fermeremo su tal consiglio, contentandoci di notare che, nell'unico esempio d'appoggio, partendo dalle: $\sqrt{3} = 1 \cdot 732 \ldots$, $\sqrt{45} = 6 \cdot 708 \ldots$, e $\sqrt{167} = 12 \cdot 92 \ldots$, trova solo che $\sqrt{3} + \sqrt{45} + \sqrt{167}$, o $= 21 \cdot 3 \ldots$, o $= 21 \cdot 4 \ldots$; quando invece le più elementari regole dell'errore assoluto (**), solo con le $\sqrt{3} = 1 \cdot 73 \ldots$, $\sqrt{45} = 6 \cdot 70 \ldots$, e $\sqrt{167} = 12 \cdot 92 \ldots$, dànno che quella somma $= 21 \cdot 3 \ldots$

5. Qui, per il prodotto, confronto la regola che il Vieille ottiene dall'error relativo con la nostra del n. **2**·2. Adopero ancora le notazioni di esso n.; ma, per economia di simboli, pongo $n' = 2$: dopo di che posso supporre che anche $n = 2$, perchè, altrimenti, accorcerei (ved. **1**·5) f_n a 2 cifre decimali. Ho dunque che:

$$a = a_0 \cdot a_1 a_2 \ldots \qquad \text{e} \qquad a' = a_0' \cdot a_1' a_2' \ldots;$$

dove le a con gl'indici son cifre, delle quali a_0 e a_0' significative; e $a_0 \cdot a_1 a_2$ sta per la forma con 2 cifre decimali che $= a_0 +$

(*) Esempio: l'error relativo del prodotto di due fattori approssimati è *sempre* minore della somma degli errori relativi dei fattori. Non riesco a scorgere i *rarissimi casi di eccezione* di cui parlano U. Amaldi e F. Enriques nelle *Nozioni di matem. ad uso dei Licei moderni* (ved. vol. I, pag. 183). Si intendono i due fattori non esatti, per difetto o per eccesso: e si attribuisce un segno all'errore. — Molti ricorrono a teoremi speciali per le operazioni, pur usando solo l'errore assoluto (ved., per es., un art. del Vannini nei n[i] 1 e 2 dell'anno VI del “ Bollett. di Matem. „).

(**) Ved., per es., nelle *Lezioni di Aritm. pratica* del Burali-Forti (Torino, Petrini).

$a_1/10 + a_2/10^2$, e pari significato ha $a_0' \cdot a_1' a_2'$. E, per brevità, scrivo:

$$P = a_0 \cdot a_1 a_2 \times a_0' \cdot a_1' a_2' \quad \text{e} \quad S = a_0 \cdot a_1 a_2 + a_0' \cdot a_1' a_2'.$$

Regola del VIEILLE. — Si può dire, *a priori*, che P è un valore di $a \times a'$ con 2 cifre esatte (cioè con un errore minore di una unità dell'ordine della 2ª cifra); *eccetto* quando uno solo dei numeri a_0 e $a_0' = 1$, e, insieme, la 1ª cifra di $P > 4$: nel quale caso, *a priori*, si può dir solo che P è un valore di $a \times a'$ con una cifra esatta.

Notiamo che già la parte intera di P ha una o due cifre. Certamente una nel caso *eccezionale*; perchè, allora, uno dei numeri $a_0 \cdot a_1 a_2$ e $a_0' \cdot a_1' a_2' < 2$, e perciò $P < 20$: anzi di 10, per il fatto che la sua 1ª cifra > 4. Dunque: nel caso eccezionale si può dire che P è un valore di $a \times a'$ a meno di 1; e, in ogni altro caso, che lo è a meno di 1/10 o di 1, secondochè $P < 10$ o ≥ 10.

Regola del n. 2·2. — Si può dire, *a priori*, che P è un valore di $a \times a'$ a meno di 1/10 o di 1, secondochè $S < 10$ o ≥ 10.

Ciò posto, distinguiamo vari casi.

1° CASO. — $a_0 = a_0' = 1$; cioè $a_0 \cdot a_1 a_2 < 2$ e $a_0' \cdot a_1' a_2' < 2$. Allora $P < 10$ e $S < 10$; e perciò tutt'e due le regole dànno che P è un valore di $a \times a'$ a meno di 1/10.

2° CASO. — $a_0 > 1$, e $a_0' > 1$; cioè $a_0 \cdot a_1 a_2 \geq 2$ e $a_0' \cdot a_1' a_2' \geq 2$. Traggo subito che $P \geq S$; perchè $= P \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$, che $\geq P \times \left(\frac{1}{a_0 \cdot a_1 a_2} + \frac{1}{a_0' \cdot a_1' a_2'}\right)$, cioè rispetto a S. Come conseguenza: se $P < 10$, lo è anche S; cioè se la 1ª regola dà che P è un valore di $a \times a'$ a meno di 1/10, lo stesso dà anche la 2ª. Può però la 2ª dare un tal risultato anche quando la 1ª dà solo che P è un valore di $a \times a'$ a meno di 1; e ciò accade ogni qual volta $S < 10$ senza che lo sia P (: per es., se $a = 2 \cdot 34 \ldots$, e $a' = 5 \cdot 67 \ldots$).

3° CASO. — a_0, per es., $= 1$, e $a_0' > 1$; e la 1ª cifra di $P \leq 4$. Se allora $P < 10$, e quindi di 5, S, che $= P \times \left(\frac{1}{a_0 \cdot a_1 a_2} + \frac{1}{a_0' \cdot a_1' a_2'}\right)$, $< 5 \times \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)$, e perciò di 10. Dunque,

come nel 2° caso, se la 1ª regola dà che P è un valore di $a \times a'$ a meno di 1/10, lo stesso dà anche la 2ª; ma può la 2ª dare tal miglior risultato senza che lo dia la 1ª (: per es., se $a = 1 \cdot 56 \ldots$, e $a' = 6 \cdot 78 \ldots$).

4° CASO. — a_0, per es., $= 1$, e $a_0' > 1$: e la 1ª cifra di $P > 4$. È il caso eccezionale del VIEILLE. Con la 1ª regola si può dir solo che P è un valore di $a \times a'$ a meno di 1; e con la 2ª, invece, che lo è, anzi, a meno di 1/10 ogni qual volta $S < 10$ (: per es., se $a = 1 . 00 \ldots$, e $a' = 8 \cdot 00 \ldots$).

In conclusione, *la nostra regola, per bontà di risultati, supera la regola del* VIEILLE. E poichè fu ottenuta per via certamente più semplice, ed è di applicazione non meno agevole, *è migliore di quella* (*).

*
* *

6. Non è molto, il CASTELNUOVO deplorò " il disprezzo per l'approssimazione sentito dai giovani migliori delle nostre scuole medie, mentre l'approssimazione è la realtà, e non vi è scienza ove l'approssimazione non abbia maggior valore della precisione „ (**). Ora io mi permetto di aggiungere che una delle cause di tal disprezzo sta, forse, nei silenzi, quasi generali, dei nostri libri di testo. Eccezion fatta per il già citato libro del PENSA,

---

(*) Non può esservi regola che, nella sostanza, sia migliore di quella del n° 2·2: avendo noi sempre dedotto dai dati tutto quanto si poteva dedurre, o, con frase moderna, avendo sfruttato i dati al massimo; quando invece il VIEILLE non tien conto che del numero delle cifre e della 1ª cifra dei dati.

Un'altra regola si potrebbe ricavare dalla già citata Nota del PALATINI; la quale risolve però altre quistioni. Con essa regola, dalle $a = 5 \cdot 5718 \ldots$, e $a' = 1 \cdot 4216 \ldots$, si deduce che $a \times a' = 7 \cdot 92 \ldots$: e la nostra regola dà che $a \times a'$, o $= 7 \cdot 920 \ldots$, o $= 7 \cdot 921 \ldots$ E, dalle $a = 7 \cdot 9219 \ldots$, e $a' = 8 \cdot 719 \ldots$, si deduce che $a \times a' = 69 \cdot \ldots$: e la nostra regola dà che $a \times a'$, o $= 69 \cdot 07 \ldots$, o $= 69 \cdot 08 \ldots$ E, dalle $a = 4 \cdot 75249 \ldots$, e $a' = 4 \cdot 92134 \ldots$, si deduce che $a \times a' = 23 \cdot 388 \ldots$: e la nostra regola dà che $a \times a'$, o $= 23 \cdot 3886 \ldots$, o $= 23 \cdot 3887 \ldots$ — Del resto, quando si voglia, col PALATINI, far la moltiplicazione completa, conviene applicar senz'altro 2·1; che, per es., nel 2° dei 3 esempi citati, dà: $a \times a' = 69 \cdot 07 \ldots$

(**) Ved. " Bollett. di Matem. „, 1913, nⁱ 10 e 11 e 12, pag. XIX.

non c'è, credo, testo di Geometria, nel quale, per la lunghezza della circonferenza di dato raggio, π non sia che $3 \cdot 14$ o $22/7$, o $3 \cdot 1416$, se, come è detto, si vuol maggiore approssimazione. Le Algebre mancano di tavole numeriche; sicchè i giovani sapran, per es., della $5x^2 - 8x - 3 = 0$, scriver le radici $\frac{4 + \sqrt{31}}{5}$ e $\frac{4 - \sqrt{31}}{5}$: ma, per mancato addestramento, non saran lesti a scrivere che la $1^a = 1 \cdot 9135 \ldots$, e la $2^a = -0 \cdot 3135 \ldots$ (*); e l'addestramento manca perchè l'insegnante non si trattiene a far trovare che $\sqrt{31} = 5 \cdot 5677 \ldots$, come si leggerebbe in una tavola di radici. Dirò, anzi, che in gran parte delle Algebre per i Licei non è rimasto che un solo accenno, e ben timido, ad approssimazioni: ed è per giustificare quella trasformazione che, *impropriamente*, si intitola *rendere razionale il denominatore d'un fratto*; con giustificazione, però, discutibile: perchè, se è preferibile calcolare, poniamo a meno di $1/10^3$, $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ piuttosto che $\frac{3}{\sqrt{2}}$, non può, per es., dirsi lo stesso di $\frac{7}{12}(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{15} - 3)$ rispetto a $\frac{7}{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

È difficile, e sarebbe qui, a ogni modo, fuor di posto, rintracciare le cause di tal congiura dei libri di testo contro il calcolo numerico; ma tra esse vi è certo l'opinione delle difficoltà delle quistioni alle quali si andrebbe incontro: opinione diffusa, e giustificata, almeno in parte, dalle asperità delle trattazioni speciali vecchie, o modellate su quelle.

(*) Ved. PINCHERLE, *Lezioni di Algebra elementare*, a pag. 274: dove c'è una inesattezza.

Saggio sulla Costante di Aberrazione.

Nota di GIOVANNI BOCCARDI.

I.

Gli astronomi sanno bene che, fra tutte le costanti da loro adoperate, quella che è men bene conosciuta è la costante della *aberrazione annua*. Tutte le stelle, pel combinarsi della velocità della luce da esse emessa e della velocità della Terra sulla sua orbita, descrivono ellissi intorno ad una posizione media come centro, con l'asse maggiore parallelo al piano della eclittica e di dimensione costante per tutte le stelle, in arco di circolo massimo. Si suole introdurre il Sole in questa definizione, in base alla formola

$$f = \frac{na}{V \cos \varphi \times 86400},$$

nella quale n è il moto medio angolare diurno del Sole, a la sua distanza media dalla Terra, V la velocità della luce in 1^s espressa nella stessa unità in cui lo è a, φ l'angolo di eccentricità dell'orbita terrestre ed 86400 è il numero di secondi contenuti in un giorno medio cui si riferisce n; e allora si dice: Supponiamo il Sole alla distanza media della Terra, e sia t il tempo che impiega la luce a percorrere questa distanza; l'arco che percorrerebbe il Sole sulla sua orbita nel tempo t, con una velocità pari al suo moto medio (nell'unità di tempo adottata) diviso pel coseno dell'angolo di eccentricità dell'orbita terrestre, esprime la costante di aberrazione.

Ora, mentre per la parallasse solare il valore $8'',806$ è noto con un errore probabile di 3 millesimi di $1''$, e quello della costante della nutazione ($9''21$) ha un errore probabile di $\pm 0'',01$, la costante di aberrazione, per cui la Conferenza internazionale

di Parigi, del 1896, adottò il valore 20″,47, è nota con sì poca precisione, che determinazioni anche recentissime discordano fra loro di 0″,10 e più (1). È noto pure che il valore 20″,47 fu adottato soltanto per avere anche per l'aberrazione quella uniformità nel calcolo delle Effemeridi che era nei voti di tutti; ma circa la scelta di quel numero anzichè di un altro non mancarono critiche ben fondate, per esempio da parte del Chandler, e si può dire, senza tema di errare, che quel valore è troppo piccolo, poichè le migliori determinazioni *dirette* (non già partendo dal valore della parallasse solare e da quello della velocità della luce *misurata sulla Terra*) dànno tutte valori superiori a 20″,47.

Se fra le circa cinquanta determinazioni antiche e moderne di detta costante se ne trovano che dànno 20″,20 (Main con osservazione al cannocchiale zenitale di Greenwich) oppure 20″,71 (Bessel dalla discussione delle ascensioni rette osservate da Bradley a Greenwich), è convinzione quasi generale degli astronomi che discordanze tanto notevoli sono dovute a gravi errori sistematici e non soltanto nelle antiche osservazioni. Quando infatti troviamo che Asaph Hall junior or sono tredici anni otteneva il valore 20″,68 ± 0″,03, da lunghe serie di distanze zenitali della Polare osservate nel *Detroit Observatory*, col cerchio meridiano di 18 centimetri, donato da Anna Arbor, dobbiamo pure riconoscere che un valore tanto più grande di quelli cui conducono, per esempio, le diligenti osservazioni del Doolittle o quelle eseguite in Pulkowo, deve essere certamente dovuto ad errori inerenti al metodo di osservazione, non ostante la perfezione dell'istrumento osservata e la diligenza messa nell'osservare, nel calcolare e nel discutere. Trattandosi di distanze zenitali della Polare, osservata a + 42° di latitudine, cioè quando la stella è alta appena da 40 ½ a 43° ½, non c'è da esitare in riconoscere una prima causa di errore sistematico nella incertezza della correzione di rifrazione, in osservazioni eseguite in condizioni atmosferiche così diverse, come quelle che possono aver luogo in tutte le date dei tre anni cui si estendono le osservazioni.

---

(1) Però quanto ad errore *relativo* si tenga presente che 0″,025 di errore sulla costante di aberrazione, valgono quanto 0″,01 sulla parallasse del Sole.

II.

Infatti nel determinare la detta costante si va incontro a due inconvenienti, più o meno gravi, secondo il metodo adottato e la posizione delle stelle osservate. Trattandosi di misurare *scostamenti* (chè questo vuol dire in latino *aberratio*) periodici che le stelle subiscono nel periodo di un anno, in causa del muoversi della Terra in direzioni diverse lungo l' anno nella sua orbita, e della combinazione delle componenti della sua velocità con quella della luce, è chiaro che più favorevoli saranno quelle osservazioni che daranno maggiori scostamenti. L'errore o incertezza inevitabile sulle misure avrà tanto minore valore relativo quanto maggiore sarà l'escursione della stella. Ne segue che le più favorevoli osservazioni, sotto questo riguardo, sono quelle che si fanno con sei mesi d'intervallo. Ma allora, nella maggior parte dei casi, bisogna combinare osservazioni fatte in diverse stagioni dell'anno e spessissimo osservazioni di giorno con quelle di notte. L'aspetto delle stelle (se si osservano senza le precauzioni e dispositivi adottati, per es., da sir David Gill e dagli astronomi di Pino Torinese) è essenzialmente diverso, di giorno o di notte; le misure, specialmente se si tratta di passaggi, possono essere affette da notevoli errori sistematici, il valore dell'aberrazione falsato. Se poi ci si limitasse alle osservazioni di notte, gli scostamenti sarebbero piccoli, i coefficienti delle equazioni di condizione lo sarebbero pure, la determinazione di quella costante avrebbe poca precisione per un altro verso.

Si può, per raccogliere molte osservazioni ed ottenere termini noti più grandi nelle equazioni di condizione, osservare le declinazioni di un gran numero di stelle a sei, sette, fino ad otto ore di intervallo, per esempio osservando per due o tre ore verso l'alba e due o tre ore verso il tramonto, ma allora interviene doppiamente l'altro inconveniente di cui vogliamo discorrere, quello della *variazione delle latitudini*. Infatti, se si osservano costantemente in distanza zenitale durante tutto l'anno le medesime poche stelle (naturalmente soltanto quelle delle prime grandezze) e ciò si fa per più anni, si può, con acconcia

disposizione, eliminare l'effetto della variazione delle latitudini; ma se si combinano stelle molto differenti in ascensione retta, osservate nella stessa epoca, ma a 6^h, 7^h, 8^h d'intervallo, l'effetto della variazione della latitudine (come si è da noi affermato e dimostrato teoricamente e con le osservazioni in Pino) è quasi sempre diverso per quelle stelle [1] e la variazione delle latitudini non viene eliminata. Aggiungiamo che se il lavoro si conduce in modo da dedurre in ogni data la latitudine del luogo mediante le declinazioni delle stelle, per esempio col metodo di Talcott-Horrebow, l'incertezza inevitabile sulle declinazioni (δ) delle stelle diverse che si osservano, lascia non piccola incertezza sulla latitudine (φ) dedotta con diverse coppie; donde una nuova incertezza sul valore della costante di aberrazione.

III.

Uno sguardo storico alle principali determinazioni della detta costante, servirà di utile introduzione alle ricerche di chi scrive.

Il valore

$$20'',4451 \pm 0'',0111$$

fu ottenuto da Guglielmo Struve con delicatissime osservazioni, da lui fatte in Pulkowo nel 1° verticale di stelle culminanti vicino allo zenit, assumendo un valore per φ e studiando le variazioni che risultavano per le declinazioni dedotte dalle osservazioni. Il grande astronomo osservò 7 stelle per due anni e mezzo (1840-42), ma non potè seguirle in tutto quel periodo (perchè nei pressi del mezzogiorno sparivano) e raccolse in tutto 298 osservazioni. Quantunque questo numero di osservazioni a lui sia sembrato sufficiente, *a posteriori*, si deve riconoscere che era troppo ristretto, ove si abbia riguardo alle difficoltà inerenti

---

[1] A scanso di equivoci, qui non si tratta di variazione *diurna* della latitudine, ma di spostamento del polo dalla posizione media P_0 all'altra P dell'istante di osservazione, mentre nella riduzione si adoperano declinazioni δ_0 riferite al polo medio P_0.

alla determinazione di quella costante. Col fatto egli partì dal valore approssimato

$$f = 20'',50$$

e dopo diligenti ricerche giunse al valore dato poc'anzi, il quale è molto più lontano dal vero che non il valore di partenza. G. Struve assunse per la latitudine un valore costante, perchè allora non si era dimostrata la variazione delle latitudini; ecco un motivo del cattivo risultato delle sue ricerche; ma forse esso non basta a spiegarlo.

Se Struve avesse potuto seguire costantemente le 7 stelle ed avesse riunito le loro osservazioni per più periodi di 429 giorni, quanti ne abbraccia il ciclo scoperto dal Chandler nella variazione della latitudine (periodo che è forse la sola cosa assodata molto bene in questo fenomeno), l'astronomo di Pulkowo avrebbe ottenuto nella combinazione dei termini noti delle equazioni di condizione una eliminazione delle variazioni di φ, e sarebbe giunto ad un miglior valore della costante di aberrazione. Ma a tempo di Struve il periodo di Chandler era ignorato.

Notiamo incidentalmente che per ognuna delle 7 stelle Struve formò le equazioni di condizione, dedusse un valore per la correzione a

$$f = 20'',50$$

e trovò 7 valori per Δf con errori *probabili* che vanno da $\pm 0'',022$ a $\pm 0'',046$. Ma quello che più mi convince di qualche altro errore sistematico introdottosi nelle osservazioni di Struve è che per 6 delle 7 stelle egli trovò valori negativi per Δf. Soltanto b *Draconis* gli dette $+ 0'',0036$. Dalla stella P. XIV. 371 egli ottenne nientemeno che $- 0'',1053$. Con quella sola stella si sarebbe andati al valore $20'',395$ assolutamente erroneo.

Il grande astronomo americano Simone Newcomb propose nel 1902 un metodo ingegnoso per depurare le osservazioni di Struve dalla variazione della latitudine di Pulkowo durante il periodo delle osservazioni, non ammettendo altro che il periodo di Chandler. Due giovani astronomi B. M. Roszel e B. S. Annis lo applicarono; ma, certamente per ispirazione del Maestro, esclusero dalle osservazioni di Struve quelle fatte a poca di-

stanza dal mezzogiorno, e così ridussero le 298 osservazioni a sole 101. Mentre Struve aveva da ogni osservazione dedotta una equazione di condizione, questi astronomi raggrupparono le osservazioni vicine fra loro in tempo, e fecero bene. Con una prima soluzione ottennero 20″,4843 e con una seconda 20″,4753.

Trovato il valore della costante f, procedettero a ricostruire le variazioni di φ nel periodo delle osservazioni, e trovarono 0″,068 per raggio della polodia, valore molto più piccolo di quelli ottenuti da Chandler, da Albrecht e da altri per le migrazioni del polo. Gli autori della Nota (" Astron. Journ. ", 266) concludono che dal loro lavoro si è condotti a negare una variazione della latitudine di Pulkowo durante le osservazioni di Struve. Poichè il fatto della variazione delle latitudini è oramai fuori di discussione, si dovrebbe concludere che il metodo proposto dal Newcomb non risponda allo scopo.

Nel suo pregevolissimo libro *Fundamental constants of astronomy*, Newcomb fa una discussione di tutti i valori ottenuti fino al 1894 e, dando pesi differenti alle diverse fonti, giunge al valore

$$A)\qquad 20'',493 \pm 0'',011,$$

con le diverse serie di osservazioni fatte in Pulkowo, ed all'altro

$$B)\qquad 20'',463 \pm 0'',013,$$

con tutte le altre. Egli stesso riconosce che la differenza fra i due valori è tanto superiore all'errore probabile da far sospettare un errore costante nell'uno o nell'altro. Mi sia però permesso di far osservare che fra i 10 valori del gruppo A) la massima divergenza è di 0″,12, mentre nei 20 che compongono il gruppo B) esistono differenze molto più grandi. Forse sarebbe più opportuno consiglio adottare addirittura il valore A). Intanto nella Conferenza del 1896 Newcomb sostenne il valore 20″,46, contro Gill che preconizzava l'altro 20″,48, quando Tisserand, per dividere la differenza, propose 20″,47.

L'illustre Küstner di Bonn eseguì diligenti determinazioni della latitudine di Berlino nel periodo 1884-85, e Newcomb, fatte a quelle osservazioni le correzioni per le variazioni di φ in

tre epoche, giunse al valore 20″,46. Però Chandler fece vedere che le correzioni $\Delta\varphi$ usate da Newcomb e date da Chandler stesso una prima volta erano soltanto provvisorie, mentre, fatte le correzioni definitive, si giungeva a 20″,61 („ Astronomical Journal „, 429).

Nell'istesso periodico americano (N. 306) Preston aveva pubblicato il risultato 20″,433 ± 0″,034 ottenuto con osservazioni di latitudine per conto della *U. S. Coast and Geodetic Survey*, applicando le formole date da Newcomb per avere riguardo alle variazioni della latitudine. Ma un errore probabile così notevole non depone certo in favore di quel valore, nè poi osservazioni non fatte con lo scopo speciale della determinazione di quella costante, potevano utilmente essere adoperate.

Anche nell'„ Astronomical Journal „, N. 428) Doolittle riferisce osservazioni eseguite col metodo proposto da Küstner nelle „ Astronomische Nachrichten „ (N. 3015), metodo di cui ora faremo cenno, paragonando le sole osservazioni della sera e della mattina di coppie di stelle (metodo di Talcott) intorno alle ore seguenti:

$$5^h \quad 12^h \quad 17^h \quad 21^h.$$

Il risultato cui giunse Doolittle è questo:

$$20'',572 \pm 0'',009.$$

Il metodo di Küstner poggia sul principio che, se si determina la latitudine φ di un luogo nell'istessa epoca con due stelle differenti assai per ascensioni rette e con declinazioni δ, δ' si si avranno le distanze zenitali

$$\varphi - \delta \qquad \varphi - \delta',$$

e sottraendo l'una dall'altra, si avrà la sola differenza

$$\delta - \delta'.$$

Ripetendo la stessa cosa per molte date lungo l'anno, si avrà una serie di valori della differenza $\delta - \delta'$, e poichè δ e δ' sono calcolate in base al valore adottato per la costante di

aberrazione, dall'insieme delle equazioni di condizioni aventi per termini noti le differenze $\delta - \delta'$ si dedurrà la correzione Δf alla detta costante.

Dopo ampia discussione, Küstner dichiarava che il metodo più al sicuro da errori sistematici è quello di differenze di distanze zenitali, cioè di Talcott, con numerose coppie di stelle.

Questo metodo sarebbe eccellente se, come pensava Küstner, le variazioni di φ si eliminassero col far la differenza fra $\varphi - \delta$ e $\varphi - \delta'$, cioè se φ fosse lo stesso, quando fosse determinato con stelle che differiscano molto in ascensione retta. Ma noi abbiamo dimostrato il contrario.

Un altro lavoro poggiato sul metodo di Küstner fu eseguito dal Fergola in Napoli negli anni 1893-94. Col metodo di Talcott egli fece 2271 osservazioni di coppie, determinando φ con gruppi di stelle intorno alle ore seguenti:

$$6^h \quad 14^h \quad 18^h \quad 22^h.$$

Dedusse φ da ogni gruppo con osservazioni comprese in un intervallo non maggiore di 10 giorni, e fece le differenze fra i valori di φ ottenuti coi diversi gruppi due a due in quegli intervalli (minori di 10 giorni). La media di queste differenze, riunite per tutto il periodo in cui furono osservati i due gruppi rispettivi formava il termine noto di una equazione, nella quale l'incognita era la frazione del valore $20'',4451$, di cui doveva essere corretta la costante di Struve. Essendovi quattro gruppi e chiudendosi *poligonalmente* o *in catena* le differenze, così:

II-III, III-IV, IV-I, I-II,

si avevano le equazioni siffatte. Giunse così al valore

$$20'',533.$$

Da ultimo egli determinò le correzioni alle declinazioni per ridurle ad un unico sistema e perfino le variazioni della latitudine. Credeva il Fergola che l'unica ipotesi, peraltro plausibilissima, da fare per la legittimità del metodo fosse che *le variazioni della latitudine nel giro di pochi giorni fossero proporzionali al*

tempo. Ma ben altre ipotesi, e non legittime, include quel metodo, cioè:

1° Che ai valori di φ dedotti con gruppi di stelle, diversissime e con declinazioni tutt'altro che di alta precisione, si possa applicare il metodo delle differenze in catena; sicchè contro questo metodo e le conseguenti determinazioni: *a*) delle correzioni alle declinazioni, *b*) delle variazioni della latitudine durante il periodo delle osservazioni, stanno tutte le obbiezioni fatte da Grossmann, da Schumann, da Buchwaldt, da Chelli, da Boccardi e da molti altri. Per dirne una, il valore di φ trovato pel gruppo II in maggio 1893 non si può ritenere identico a quello ottenuto in maggio 1894, non fosse altro perchè il periodo delle variazioni di φ è di 14 mesi non di 12;

2° Che i valori di φ dedotti con gruppi di stelle così differenti in ascensione retta sieno identici (entro i limiti degli errori di osservazione), per essere *identiche le variazioni di* φ; ora questo non è.

E per prova citerò i valori di $\varphi - \varphi_0$ ottenuti da Fergola per quel periodo, valori che per ogni mese rimangono al disotto del valore assoluto 0″,083, ed in media sono di appena 0″,05 (sempre in valore assoluto), quando sappiamo che di ben altra entità sono le variazioni di φ.

Per conferma riferisco qui la conclusione cui giunse il Contarino dopo la riduzione e discussione di tutte le osservazioni proseguite a Napoli col metodo suesposto (*Risultati delle osservazioni fatte per la novella determinazione della costante dell'aberrazione*).

“ *Valori della costante dell'aberrazione:*

	Napoli	New-York
1893-94	20″,533 ± 0″,012	20″,457 ± 0″,013
1894-95	20 ,466 ± 0 ,019	20 ,452 ± 0 ,014
1895-96	20 ,542 ± 0 ,016	20 ,470 ± 0 ,011
1896-97	20 ,467 ± 0 ,019	20 ,470 ± 0 ,010
1897-98	20 ,521 ± 0 ,018	
Medie	20″,514 ± 0″,007	20″,464 ± 0″,006

“ Dal paragone si vede che la differenza

$$\text{Napoli} - \text{New-York} = +0'',076 \pm 0'',018\,,$$

che davano le osservazioni del 1893-94, con l'aumento delle osservazioni, si è attenuata in $+0'',050 \pm 0'',009$; ma in sostanza, dentro i limiti degli errori probabili, rappresenta la stessa cosa; *dunque tanto a New York quanto a Napoli si sono ottenuti e confermati, osservando le stesse stelle con istrumenti identici, due valori della costante di aberrazione, che differiscono tra loro più di quanto è spiegabile con gli errori di osservazione.*

Con metodo analogo il Doolittle dette nel 1913 il valore

$$20'',525 \pm 0'',0043$$

dedotto da 18 anni di osservazioni, con diversi istrumenti.

Accennerò soltanto al metodo ingegnoso del Loewy. Per ovviare alla osservazione in meridiano in epoche diverse, di stelle molto diverse per ascensione retta, egli propose di porre un sistema di due specchi davanti all'obbiettivo, il che permette di avere nel campo simultaneamente le immagini di stelle molto lontane e studiare così il comportarsi delle variazioni delle loro coordinate. Ma contro questo metodo che elimina l'inconveniente delle diversità delle osservazioni di giorno e di notte, militano argomenti fisici circa il propagarsi della luce. Per esempio: le leggi della riflessione rimangono le stesse quando la superficie riflettente è in moto? Del resto i risultati $20'',43$ e $20'',45 \pm 0'',04$ indicano abbastanza, che con quel metodo non si è risolta la questione.

Riassumendo, il miglior metodo teoricamente sarebbe quello di osservare le variazioni delle ascensioni rette di circumpolari nel corso dell'anno, variazioni che sono notevoli, ma purtroppo qui interviene il modo differente con cui si osservano i passaggi di giorno e di notte. Però qui non entrerebbe la variazione delle latitudini.

Un metodo anche buono teoricamente sarebbe quello delle osservazioni delle distanze zenitali de' circumpolari, nel passaggio superiore e nell'inferiore pel meridiano. Con questo metodo si ovvierebbe alla variazione delle latitudini; ma (come abbiamo veduto per le osservazioni di A. Hall junior) vi entrano altri gravi errori sistematici. Per esempio aggiungeremo che la posizione e le condizioni fisiche dell' istrumento meridiano non possono essere le medesime a 12 ore d'intervallo.

Il metodo di Küstner poi poggia sopra un falso supposto.

Il metodo dei passaggi pel 1° verticale suppone: *a*) o che si ammetta invariabile φ, il che non è; *b*) oppure che si depurino prima le osservazioni dalle variazioni di φ. Così fu fatto a Pulkowo per le osservazioni di δ *Cassiopejae* protratte per più anni. Si credè di potervi applicare senz'altro le variazioni di φ dedotte dalla polodia data dall'Albrecht, ossia dai valori delle variabili x, y, z per ogni decimo di anno, e si formarono così le equazioni di condizione, per dedurre e la correzione a f e la parallasse e il moto proprio. Con una 1ª e con una 2ª soluzione si giunse ai valori seguenti:

1ª	$20'',47 + 0'',029 \pm 0'',022$
2ª	$20'',47 + 0'',039 \pm 0'',021.$

La grandezza dell'errore probabile che è presso a poco dello stesso ordine delle correzioni trovate pel valore 20",47, deve, se non altro, lasciar dubbiosi.

Davanti a questo problema, ho pensato che la lunga serie di osservazioni sistematiche, nel 1° verticale, di quattro stelle vicinissime allo zenit, di Pino Torinese, per dedurne quattro volte al giorno il valore della latitudine, serie che stiamo eseguendo dal maggio 1912, potrebbe dare un contributo alla determinazione della costante di aberrazione.

In questo primo saggio non ho creduto di determinare le variazioni di φ mediante l'osservazione delle nostre 4 stelle, fra l'altro pel motivo che due di esse, β *Aurigae* e ψ *Ursae*, si perdono per necessità rispettivamente per due e tre mesi dell'anno, poichè il Sole ha le sue più grandi declinazioni quando quelle stelle passano verso mezzogiorno.

Per eliminare le variazioni di φ ho adottato come ammesso e dimostrato soltanto il periodo di Chandler di 429 giorni, di modo che dopo parecchi periodi siffatti le variazioni della latitudine vengono ad annullarsi da loro stesse. Lasciate quindi da banda le osservazioni di β *Aurigae* e ψ *Ursae*, che serviranno per altri scopi, ma non possono prestarsi a dare l'annullamento dei $\Delta\varphi$, perchè presentano larghe lacune nel corso dell'anno, ho preso le osservazioni di δ ed α *Cygni* nel periodo giugno 1912 ad ottobre 1914, con che abbiamo già due completi periodi di

Chandler, lasciando le osservazioni fatte fino ad oggi per una ulteriore determinazione della costante di aberrazione.

Le osservazioni di δ *Cygni* in quel periodo di 28 mesi sono state 297; quelle di α *Cygni*, 351. Sicchè con queste sole stelle in 28 mesi abbiamo 648 osservazioni, mentre G. Struve a Pulkova in due anni e mezzo potè appena raccogliere 298 osservazioni su 7 stelle.

Espongo adesso il concetto del metodo da me ideato. Le nostre osservazioni sono eseguite col metodo delle due inversioni ([1]). Ogni osservazione fu ridotta mediante il valore δ, per la declinazione di ognuna delle stelle, da noi assunto (secondo il Catalogo fondamentale di Newcomb) e ricondotto *ad diem* coi valori delle costanti adottate e specialmente quello dell'aberrazione 20″,47, avuto altresì riguardo al termine lunare a breve periodo, in Effemeridi calcolate con 3 decimali per ognuna delle nostre stelle. Questa riduzione dà per ogni osservazione un valore della latitudine φ. Se adesso per ognuna delle stelle formiamo il valore φ_0 dedotto dall'insieme delle osservazioni, questo valore darà il valore della latitudine riferita al polo medio, *come risulta dalla declinazione di quella stella* depurato dalle variazioni di φ, e tanto meglio liberato da quelle variazioni, quanto maggiore sarà il numero dei periodi completi di Chandler abbracciati dalle osservazioni. Poichè le δ delle stelle non sono assolutamente esatte, ogni stella dà un valore di φ_0 che differisce leggermente dagli altri.

La differenza fra il valore φ dato da una osservazione e φ_0, nel senso $\varphi - \varphi_0$, proviene: 1° dall'errore inevitabile in ogni osservazione; 2° dalla variazione della latitudine; 3° dall'errore proveniente sulla effemeride, da noi calcolata, dall'avere adoperato il valore 20″,47 della costante di aberrazione, invece del valore esatto.

Ora, 1° l'errore di ogni osservazione si attenua estremamente nel gran numero di osservazioni, perchè vi è ampio compenso; 2° l'effetto della variazione di φ si annulla quando si

---

([1]) Vedasi Boccardi, “ Bulletin Astronom. de l'Observatoire de Paris „, 1913-14. — Id., *La variazione delle latitudini, ecc.* (“ Memorie della R. Accademia dei N. Lincei „), ed altre pubblicazioni dello stesso.

combinano i $\varphi - \varphi_0$ per più periodi di Chandler; 3° rimane dunque di trar partito dall'insieme dei $\varphi - \varphi_0$ per dedurne la piccola correzione da fare al valore 20″,47.

Se mal non mi appongo, il metodo è irreprensibile. Per applicarlo, anzichè formare 648 equazioni di condizione, ho raggruppato le osservazioni fatte entro un periodo da 25 a 28 giorni. La variazione della latitudine a lungo periodo si può certamente ritenere proporzionata al tempo per questo numero di giorni. L'altra a breve periodo da me notata (" Comptes-rendus ", 1914), e dipendente dall'azione lunare, quindi connessa col periodo della rivoluzione siderea della Luna, fa compiere a φ due oscillazioni nel lasso di tempo da perigeo a perigeo, o da apogeo ad apogeo. Dunque, con far la media dei valori di φ ottenuti con una stella in una rivoluzione siderea, vengo a tener conto e ad eliminare la variazione a breve periodo. La variazione a lungo periodo è eliminata nell'insieme dei $\varphi - \varphi_0$. Io formo dunque ogni equazione di condizione nel modo più semplice, ponendo nel 1° membro il coefficiente della aberrazione corrispondente all'epoca media da perigeo a perigeo moltiplicato per l'incognita Δf, e nel secondo il valore $\varphi - \varphi_0$ media di tutte le osservazioni fatte da perigeo a perigeo. Siccome poi le osservazioni non sono certamente distribuite con assoluta regolarità, chè molte lacune ci costringe a lasciare il cattivo tempo, ho ripetuto il calcolo delle medie e la formazione delle equazioni di condizione da apogeo ad apogeo.

Il punto saliente del metodo usato è non solo l'aver tenuto conto della variazione a corto periodo, ma altresì di avere riunito i risultati $\varphi - \varphi_0$ per due stelle, δ ed α *Cygni*. Poichè esse si seguono con 56^m d'intervallo, la somma dei $\varphi - \varphi_0$ per esse due corrisponde certamente ad una stella fittizia che avesse α [1] ed eguale alla semisomma delle loro α e δ. Per le δ poi la differenza è di appena 2′,5. In tal modo si vengono ad attenuare e la scarsezza di osservazioni per una delle due stelle in un periodo e l'errore residuale sulla media, e infine si riduce a metà il numero delle equazioni di condizione. Col fatto, in 28 mesi ho formato 32 equazioni pei perigei e 32 per gli apogei.

---

(1) Ascensione retta

Evidentemente i coefficienti di Δf venivano calcolati per una stella fittizia, avente le coordinate

$$\frac{\alpha + \alpha'}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\delta + \delta'}{2}.$$

Non credo si possano fare obbiezioni speciali contro questo metodo. Quanto a quelle fatte generalmente alle osservazioni nel 1° verticale, vi risponderò brevemente. Il moto obliquo delle immagini di stelle rispetto ai fili, non costituisce un inconveniente per chi ha pratica del metodo. Col fatto, in ogni osservazione si notano i passaggi obliqui quattro volte agli stessi fili; il modo di osservare nelle quattro parti non è lo stesso, quanto al senso in cui si muove l'immagine, la quale (nel cannocchiale spezzato) due volte sale e due volte discende; ma il confronto fra le osservazioni dello stesso astronomo a breve intervallo di tempo e la determinazione della equazione personale fra i diversi astronomi (nel nostro caso erano prima due, poi tre) (1), ci hanno mostrato che con l'esercizio si riesce ad osservare senza errore inerente al metodo.

Quanto al diverso aspetto delle immagini stellari di notte e di giorno, numerose sono le precauzioni che adoperiamo per attenuare la differenza, come tende oscuranti distese nel padiglione, diaframmi di garza davanti all'obbiettivo, ecc. Qui farò notare che, culminando le nostre stelle a tanta vicinanza allo zenit che l'osservazione completa prende da 40^m a 50^m ci troviamo in condizioni vantaggiosissime. Della perfezione dell'istrumento e della sua istallazione non aggiungo nulla a quanto ho scritto in altre pubblicazioni. La migliore dimostrazione della sufficiente aerazione del nostro padiglione è data dal variare simultaneo dei valori di φ ottenuti dentro il padiglione e fuori, all'aperto, con due istrumenti, ma applicando lo stesso metodo ed osservando le medesime stelle (2). Dell'aria a 616 metri sopra una vetta isolata ce n'è fin troppa. Forse a 75 m. come a Pulkowo, non ve n'è a sufficienza. Il Newcomb introduce una causa di errore nelle osservazioni fatte verso mezzogiorno, cioè che al variare della luce diurna fra il passaggio ad Est e quello ad Ovest, varia il dischetto apparente della stella, donde una

(1) Boccardi, Castelli, Chelli.

(2) V. " Annuario Astronomico del R. Osservatorio di Torino pel 1916 ".

differenza nel modo di osservare i passaggi. Se la stella passa ad Est verso mezzodì e ad Ovest dopo, si ha un errore in un senso, e se passa ad Est prima di mezzodì e ad Ovest verso quest'ora l'errore è in senso contrario. Però per le nostre osservazioni che non durano più ore, come suppone Newcomb, ma come dicemmo 40^m o 50^m, questa causa di errore non esiste, tanto più che nel metodo qui usato, media dei $\varphi - \varphi_0$ per due stelle seguentisi a breve intervallo di tempo, spesso accadrebbe che l'errore (se vi fosse) su di una sarebbe di senso contrario all'errore sull'altra. Di riscaldamento poi, all'altitudine e latitudine in cui siamo, non c'è da preoccuparsi molto.

Non volli introdurre la determinazione della possibile parallasse sulle stelle, il che non mi avrebbe permesso di far la media dei loro $\varphi - \varphi_0$, perchè da molte ricerche di diversi astronomi la parallasse di δ ed α *Cygni* è risultata nulla. Nemmeno introdussi la possibile correzione al moto proprio, perchè trattasi di μ piccolissimi. Forse in séguito vi si potrà pensare, ma allora si dovrebbero separare i termini noti $\varphi - \varphi_0$ relativamente a δ ed α *Cygni*.

IV.

Nei quadri seguenti riferisco soltanto i dati concernenti il calcolo per periodi da apogeo ad apogeo. Nella 1ª colonna, T, è data non l'ora del passaggio della Luna, ma l'istante medio fra le ore di due apogei in tempo medio astronomico di Parigi. È da questo istante, per la prima rivoluzione, che si devono contare i 28 mesi. Nella 2ª, $\odot$, dà i valori della longitudine vera (1) del Sole per quell'istante. Trattandosi di determinare tre cifre per correggere 20″,47 il calcolo può farsi con poca approssimazione riguardo a T, ad $\odot$ ed a

$$\log \lfloor b \sin(\odot + B) \rfloor,$$

dato nella 3ª colonna. È noto il significato di b e B. Lo spostamento di aberrazione in declinazione è

$$\Delta\delta = -20'',47 \cos\odot \cos\epsilon (\operatorname{tg}\epsilon \cos\delta - \sin\alpha \sin\delta) -$$
$$- 20''47 \sin\odot \cos\alpha \sin\delta.$$

(1) Corretta dall'aberrazione 20″,47.

Se si pone

$$b \sin B = + \sin\alpha \sin\delta \cos\epsilon - \cos\delta \sin\epsilon$$
$$b \cos B = - \cos\alpha \sin\delta$$

si ottiene

$$\Delta\delta = fb \sin(\odot + B), \qquad f = 20'',47.$$

Ecco intanto i valori di α e δ medî fra quelli di δ ed α *Cygni* per due epoche, cioè pel 1° gennaio (posizione apparente) [1] 1913 e 1915.

	1913	1915
α_m	$20^h.10^m.19^s,5$	$20^h.10^m.23^s,9$
δ_m	$+44°.56',56$	$+44°.53',34$

	1913	1914	1915
$\log b$	9.95950	9.95951	9.95952
B	$245°.19',1$	$245°.18',6$	$245°.18',2$

Il calcolo si poteva fare con 4 decimali, ma per evitare accumulazione di errori l'ho eseguito con 5.

La 4ª colonna contiene φ cioè i valori di φ (media delle osservazioni da apogeo ad apogeo) per δ *Cygni*. La 5ª, φ' per α *Cygni*. Ove si sappia che si ha

δ *Cygni*	α *Cygni*
φ_0	φ_0'
$+45°.2'.16'',184$	„ $2'.16'',286$,

si formano immediatamente i valori $\varphi - \varphi_0$ e $\varphi' - \varphi_0'$ dalle colonne 4ª e 5ª.

La 6ª, C, contiene i valori numerici di

$$b \sin(\odot + B)$$

---

[1] La posizione apparente del 1° gennaio è stata adoperata dal 1° luglio dell'anno precedente al 30 del giugno seguente: questo è più esatto che servirsi della posizione *media* al principio dell'anno per le osservazioni di tutto l'anno.

cioè i coefficienti C, e la 7ª, n, i termini noti delle equazioni di condizione, cioè

$$\frac{1}{2}[(\varphi - \varphi_0) + (\varphi' - \varphi_0')].$$

Le prime tre equazioni di condizione sono dunque

$$\begin{aligned} -0{,}4286 \times \Delta f &= +0'',137 \\ -0{,}0313 \quad \text{„} &= -0\ ,108 \\ +0{,}3708 \quad \text{„} &= -0\ ,068 \end{aligned}$$

e così via.

Non rechi sorpresa la contraddizione (del resto piccola) che presentano le qui scritte equazioni; perchè nei secondi membri i termini noti n non contengono soltanto l'effetto della imperfezione della costante di aberrazione, ma anche quello della variazione della latitudine. È nell' insieme delle equazioni che si annulla quest'ultimo. Del rimanente, una equazione con coefficiente piccolissimo, com'è qui la 2ª, non potrebbe da sola dare garanzia alcuna del valore della incognita che se ne volesse dedurre [1].

Non ho dato peso diverso alle equazioni perchè i termini noti poggiano presso a poco sull'istesso numero di osservazioni. Soltanto alla 9ª, 10ª e 23ª ho dato peso $^1/_2$ (e così sono riferiti nei quadri i dati corrispondenti logaritmici o numerici) perchè poggiate sopra un numero relativamente molto piccolo di osservazioni [2].

---

[1] Ben altre sono le contraddizioni fra le equazioni cui giunge il Fergola, equazioni, nelle quali, secondo Küstner, non entrerebbero le variazioni delle latitudini. Ecco le 4 equazioni del Fergola;

$$\begin{aligned} +11{,}5\,x &= -0'',098 \\ +10{,}3 \text{ „} &= +0\ ,069 \\ +18{,}4 \text{ „} &= +0\ ,277 \\ +19{,}1 \text{ „} &= +0\ ,007. \end{aligned}$$

[2] Nei calcoli ho avuto riguardo ai piccoli + e — risultanti dalle cifre trascurate. Per ragioni tipografiche ho dovuto sopprimere quei segni. Fo notare questo perchè il lettore possa rendersi ragione delle piccolissime differenze che ei troverebbe, ripetendo il calcolo.

T			⊙	log [$b \sin(\odot + B)$]	φ	φ′	C	n
1			2	3	4	5	6	7
1912	Giugno	17,792	86°.37′	9".63206	16″,356	16″,388	— 0,4286	+ 0″,137
	Luglio	15,125	112 .43	8".49502	16 ,090	16 ,165	— 0,0313	— 0 ,108
	Agosto	11,292	138 .42	9 .56910	16 ,085	16 ,249	+ 0,3708	— 0 ,068
	Settembre	7,625	165 . 5	9 .84628	16 ,240	16 ,538	+ 0,7019	+ 0 ,154
	Ottobre	5,229	192 . 6	9 .94894	16 ,416	16 ,519	+ 0,8891	+ 0, 233
	Novembre	2,021	219 .43	9 .94438	16 ,346	16 ,624	+ 0,8798	+ 0 ,250
	"	29,875	247 .49	9 .82268	16 ,271	16 ,405	+ 0,6648	+ 0 ,103
	Dicembre	27,667	276 . 5	9 .46324	16 ,197	16 ,186	+ 0,2906	— 0 ,043
1913	Gennaio	24,187	304 . 7	8".87305	16 ,015	15 ,890	— 0,0746	— 0 ,141
	Febbraio	20,354	331 .37	9".43726	15 ,832	15 ,830	— 0,2737	— 0 ,202
	Marzo	19,604	358 .53	9".91390	16 ,112	16 ,172	— 0,8202	— 0 ,093
	Aprile	16,187	26 . 4	9".95937	16 ,294	16 ,313	— 0,9107	+ 0 ,068
	Maggio	13,938	53 . 0	9".90415	16 ,307	16 ,431	— 0,8020	+ 0 ,134
	Giugno	10,750	79 .42	9".71791	16 ,287	16 ,359	— 0,5223	+ 0 ,088

	Settembre	1,188	158 .36	9 .80063	16 ,101	16 ,317	+ 0,6319	— 0 ,026
	"	28,355	185 . 6	9 .93363	16 ,117	16 ,267	+ 0,8583	— 0 ,043
	Ottobre	25,917	212 .22	9 .95559	15 ,971	16 ,223	+ 0,9028	— 0 ,138
	Novembre	22,563	240 .10	9 .87029	15 ,973	16 ,150	+ 0,7418	— 0 ,174
	Dicembre	20,416	268 .26	9 .60522	15 ,951	16 ,031	+ 0,4029	— 0 ,244
1914	Gennaio	17,292	296 .51	8".53708	15 ,933	16 ,222	— 0,0344	— 0 ,157
	Febbraio	14,042	325 . 0	9".36158	15 ,915	15 ,947	— 0,2299	— 0 ,152
	Marzo	13,521	352 .36	9".88754	15 ,943	15 ,986	— 0,7719	— 0 ,270
	Aprile	9,709	19 .28	9".95771	16 ,287	16 ,202	— 0,9072	+ 0 ,010
	Maggio	6,979	46 . 3	9".92858	16 ,480	16 ,431	— 0,8484	+ 0 ,220
	Giugno	3,541	72 .34	9".78600	16 ,265	16 ,480	— 0,6109	+ 0 ,138
	Luglio	1,250	99 . 1	9".39094	16 ,239	16 ,551	— 0,2460	+ 0 ,160
	"	29,021	125 .31	9 .23291	16 ,327	16 ,619	+ 0,1710	+ 0 ,238
	Agosto	25,771	152 .11	9 .74380	16 ,265	16 ,442	+ 0,5544	+ 0 ,118
	Settembre	22,417	179 . 2	9 .91440	16 ,257	16 ,479	+ 0,8211	+ 0 ,133
	Ottobre	19,771	206 . 1	9 .95941	16 ,163	16 ,331	+ 0,9108	+ 0 ,012

T			$\odot$	log $[b \sin(\odot + B)]$	φ	φ'	C	n
1			2	3	4	5	6	7
1912	Giugno	17,792	86°.37′	9".63206	16″,356	16″,388	— 0,4286	+ 0″,137
	Luglio	15,125	112 .43	8".49502	16 ,090	16 ,165	— 0,0313	— 0 ,108
	Agosto	11,292	138 .42	9 .56910	16 ,085	16 ,249	+ 0,3708	— 0 ,068
	Settembre	7,625	165 . 5	9 .84628	16 ,240	16 ,538	+ 0,7019	+ 0 ,154
	Ottobre	5,229	192 . 6	9 .94894	16 ,416	16 ,519	+ 0,8891	+ 0, 233
	Novembre	2,021	219 .43	9 .94438	16 ,346	16 ,624	+ 0,8798	+ 0 ,250
	„	29,875	247 .49	9 .82268	16 ,271	16 ,405	+ 0,6648	+ 0 ,103
	Dicembre	27,667	276 . 5	9 .46324	16 ,197	16 ,186	+ 0,2906	— 0 ,043
1913	Gennaio	24,187	304 . 7	8".87305	16 ,015	15 ,890	— 0,0746	— 0 ,141
	Febbraio	20,354	331 .37	9".43726	15 ,832	15 ,830	— 0,2737	— 0 ,202
	Marzo	19,604	358 .53	9".91390	16 ,112	16 ,172	— 0,8202	— 0 ,093
	Aprile	16,187	26 . 4	9".95937	16 ,294	16 ,313	— 0,9107	+ 0 ,068
	Maggio	13,938	53 . 0	9".90415	16 ,307	16 ,431	— 0,8020	+ 0 ,134
	Giugno	10,750	79 .42	9".71791	16 ,287	16 ,359	— 0,5223	+ 0 ,088
	Luglio	8,479	106 . 9	9".13090	16 ,146	16 ,329	— 0,1352	+ 0 ,003
	Agosto	5,083	132 .31	9 .44558	16 ,175	16 ,337	+ 0,2790	+ 0 ,021
	Settembre	1,188	158 .36	9 .80063	16 ,101	16 ,317	+ 0,6319	— 0 ,026
	„	28,355	185 . 6	9 .93363	16 ,117	16 ,267	+ 0,8583	— 0 ,043
	Ottobre	25,917	212 .22	9 .95559	15 ,971	16 ,223	+ 0,9028	— 0 ,138
	Novembre	22,563	240 .10	9 .87029	15 ,973	16 ,150	+ 0,7418	— 0 ,174
	Dicembre	20,416	268 .26	9 .60522	15 ,951	16 ,031	+ 0,4029	— 0 ,244
1914	Gennaio	17,292	296 .51	8".53708	15 ,933	16 ,222	— 0,0344	— 0 ,157
	Febbraio	14,042	325 . 0	9".36158	15 ,915	15 ,947	— 0,2299	— 0 ,152
	Marzo	13,521	352 .36	9".88754	15 ,943	15 ,986	— 0,7719	— 0 ,270
	Aprile	9,709	19 .28	9".95771	16 ,287	16 ,202	— 0,9072	+ 0 ,010
	Maggio	6,979	46 . 3	9".92858	16 ,480	16 ,431	— 0,8484	+ 0 ,220
	Giugno	3,541	72 .34	9".78600	16 ,265	16 ,480	— 0,6109	+ 0 ,138
	Luglio	1,250	99 . 1	9".39094	16 ,239	16 ,551	— 0,2460	+ 0 ,160
	„	29,021	125 .31	9 .23291	16 ,327	16 ,619	+ 0,1710	+ 0 ,238
	Agosto	25,771	152 .11	9 .74380	16 ,265	16 ,442	+ 0,5544	+ 0 ,118
	Settembre	22,417	179 . 2	9 .91440	16 ,257	16 ,479	+ 0,8211	+ 0 ,133
	Ottobre	19,771	206 . 1	9 .95941	16 ,163	16 ,331	+ 0,9108	+ 0 ,012

Quanto a dedurre il valore dell'unica incognita Δf dall'insieme delle 32 equazioni ora date, non sarebbe pratico il far semplicemente la somma dei coefficienti, perchè nella massima parte vi sarebbe compenso fra i positivi e i negativi, col risultato

$$\overset{\Sigma C}{+\,2{,}4236}\,\Delta f = \overset{\Sigma n}{+\,0'',361}.$$

Il valore di Δf si determinerebbe allora in cattive condizioni, con coefficiente troppo piccolo; però si vede fin da questa equazione complessiva che la correzione Δf al valore $20'',47$ è positiva. Lasciata dunque da banda questa soluzione in condizioni affatto sfavorevoli, ho riuniti in $\Sigma\, C\,(+)$ tutti i coefficienti positivi, facendone la somma e in $\Sigma\, n$ ho fatta la somma algebrica dei termini noti, n, corrispondenti a quei coefficienti positivi nelle 32 equazioni.

I coefficienti seguono in valore e in segno la legge del fenomeno di aberrazione, mentre i termini noti portano altresì l'effetto della variazione della latitudine. I coefficienti positivi si presentano a tre riprese in epoche diverse, per modo che nella somma dei termini noti devesi avere un largo compenso nelle variazioni di φ, compenso che sarà maggiore quando si riuniranno in una media i valori di Δf ottenuti coi coefficienti positivi e quelli coi coefficienti negativi.

Dai coefficienti positivi risulta

$$\overset{\Sigma C+}{10{,}0709} \times \Delta f = \overset{\Sigma n}{+\,0'',526}$$

donde

$$\Delta f = +\,0'',0522.$$

Riunendo i negativi e i loro n corrispondenti, si ottiene

$$-\,7{,}6473 \times \Delta f = -\,0'',165$$
$$\Delta f = +\,0'',0216.$$

Fare la media dei due valori di Δf col rispettivo peso equivale a sottrarre membro a membro l'equazione dei coefficienti negativi da quella dei positivi, con che si ottiene

$$17{,}7182 \times \Delta f = +\,0'',691$$
$$\Delta f = +\,\mathbf{0'',0390}.$$

Dal calcolo con gl'intervalli da perigeo a perigeo mi risultò

$$\Delta f = +0'',0357,$$

il che, se non altro, fu un'ottima conferma della precisione del metodo e del calcolo. Facendo la media dei risultati, si trova

$$\Delta f = +0'',037.$$

Sicchè, secondo il mio lavoro, la costante di aberrazione annua avrebbe il valore

$$20'',507.$$

Quanto all'errore *medio* (¹) del valore suddetto, non si può pensare a dedurlo dalle singole equazioni, perchè tutte affette dall'errore sistematico della variazione della latitudine. Una via per giungervi potrebbe esser questa. Nella più dannata ipotesi *l'errore medio di una determinazione di* φ *mediante l'osservazione di una stella* non può oltrepassare $\pm 0'',10$. In verità a noi risulta $\pm 0'',05$, ma preferisco esagerare nell'errore. Essendo 648 le osservazioni distribuite in 32 periodi, in ognuno di essi si riuniscono 20 osservazioni e più; quindi l'errore medio sulla media si attenua in

$$\frac{0'',10}{\sqrt{20}}.$$

Poichè ho fatto la media dei $\varphi - \varphi_0$ per le due stelle, posso benissimo ritenere la media, cioè ogni termine noto, come poggiata egualmente sulle osservazioni dell'una e dell'altra, quindi su 20 e più osservazioni. Si tratta di avere due valori della stessa quantità chè le stelle sono vicine in α.

E perchè ho formato 32 equazioni di 1° grado, l'errore sul Δf ottenuto con esse, dipendendo unicamente dai termini noti, si attenua assai, divenendo

$$\frac{0'',10}{\sqrt{2}\,\sqrt{31}} = \pm 0'',0040\,.$$

(¹) Preferisco dar questo anzichè „ il probabile „.

Sicchè in definitivo il risultato del presente lavoro darebbe per la costante di aberrazione annua

$$20'',507 \pm 0'',0040.$$

Ma io non ho cieca fiducia negli errori previsti, i quali si trova poi che sono sempre molto più piccoli dei veri; mi contenterò dunque di un *errore medio* inferiore o al più eguale a $\pm 0'',01$.

Ad ogni modo, il valore 20'',47 è certamente troppo piccolo.

V.

Crederei opportuno dare una risposta all'argomento in favore del valore 20'',47 che si desume dal valore della parallasse solare oggi adottato e da quello della velocità della luce, come risulta da replicate osservazioni fatte sulla Terra. Con quei dati si giunge a $498^s,4$ pel tempo che la luce impiega a percorrere con la velocità 299860 km. la distanza media Sole-Terra.

Ma si rifletta che questa via è troppo lunga, indiretta e poggia sopra un'ipotesi tutt'altro che indiscutibile. *Aberratio* (l'ho detto già) vuol dire *scostamento*, *deviazione*; per avere l'aberrazione, il modo semplice e diretto consiste in misurare le *aberrationes*, gli scostamenti delle stelle durante l'anno. Il valore *20'',50* o *20'',51* che risulta da queste osservazioni è il più attendibile.

Quanto a partire dalla parallasse solare (che può avere il suo piccolo errore), dalla eccentricità dell'orbita terrestre, dal moto medio angolare della Terra e dalla velocità della luce, come risulta da osservazioni *fatte sulle brevi distanze di cui si può disporre sulla Terra ed attraverso l'atmosfera*, ritenendo che questa debba essere la velocità della luce attraverso lo spazio, ciò non sembra assolutamente giustificato.

La questione dell'aberrazione tocca l'astronomia e la fisica ad un tempo e bisogna andare con molta cautela nel trattarla. Si legga l'interessante articolo del signor Herassimovicht nel " Bulletin astronomique ", 1914, e si vedrà quanta incertezza rimane in questa materia.

Partendo dal valore 20″,507 [1] da me trovato ed assumendo per la parallasse equatoriale orizzontale del Sole alla distanza media il valore 8″,806 ottenuto dall'Hinks, e, naturalmente, assumendo pel moto medio (apparente) del Sole il valore assolutamente indiscutibile 3548″,19, io trovo per la velocità V della luce attraverso lo spazio e pel tempo t che impiega la luce del Sole a giungerci:

$$V = 299285 \text{ km.}, \quad t = 499^s,28.$$

Nota. — Tutti i calcoli per questo lavoro, compresa la riduzione delle osservazioni di δ ed α *Cygni*, furono eseguiti interamente da me. Nelle osservazioni ebbi valido aiuto dal Dottor Chelli e da luglio 1914 in poi anche dalla Dott.ª Castelli, su i quali ricade parte del merito di questa ricerca.

---

[1] Assumendo il raggio equatoriale della Terra eguale a 6378,290 km., si ha $a = 149\,428\,300$ km.:

$$\begin{aligned} \log . a &= 8.174433 \\ \log n : 86400 &= 8.613493 \\ C . \log . f \cos \varphi &= 8.688159 \\ \hline \log V &= 5.476085 \\ V &= 299\,285 \text{ km.} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log a &= 8.174433 \\ \log . V &= 5.476085 \\ \hline \log t &= 2.698348 \\ t &= 499^s,28. \end{aligned}$$

Relazione sulla Memoria del Prof. Luigi Colomba, *Ricerche sui giacimenti di Brosso e di Traversella*: Parte II, *I fenomeni di metamorfismo e di deposito nei giacimenti inferiori di Traversella.*

Questa Memoria fa seguito a quella presentata e pubblicata nel 1912, e riguardante i caratteri petrografici del Massiccio dioritico di Valchiusella (" Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino ", 1911-12, serie II, vol. LXIII, pag. 271).

Essa comprende lo studio delle formazioni metamorfiche e metallifere del gruppo dei giacimenti inferiori di Traversella indicati con i nomi di giacimenti Riondello e Bertolino. È costituita da una introduzione e da una serie di capitoli distinti.

L'introduzione risulta di un riassunto bibliografico di quanto fu pubblicato sui giacimenti di Brosso e di Traversella in rapporto alla loro origine ed ai loro caratteri strutturali e mineralogici, con uno speciale riguardo ai lavori di Novarese, Bonacossa e Muller; in seguito sono in essa contenuti alcuni cenni sullo sviluppo complessivo dei detti giacimenti, sui loro raggruppamenti e sulle analogie e differenze che si riscontrano nei loro caratteri generali.

I capitoli riguardano esclusivamente i giacimenti di Riondello e Bertolino, ai quali sono limitate le ricerche contenute nella presente Memoria, avendo l'autore rinviato quanto si riferisce agli altri gruppi di giacimenti ed alle considerazioni generali sui fenomeni metallogenici di Valchiusella ad una terza ed ultima parte.

I detti capitoli sono i seguenti:

1° *Caratteri generali dei giacimenti.* — Dopo un accenno al tipo prevalente delle formazioni metallifere, l'autore, sulla scorta dei piani del giacimento Riondello-Bertolino ultimamente fatto dall'ing. Aronson, studia l'andamento e la disposizione delle formazioni metamorfiche e metallifere, in rapporto anche

all'esistenza di banchi calcarei mineralizzati, alle varie fasi di metamorfismo in dipendenza della intrusione del materiale dioritico e delle azioni pneumatoidatogeniche da cui venne accompagnata, ed ai rapporti di posizione che si hanno fra le varie formazioni metamorfiche e metallifere.

2° *Formazioni metamorfiche e metallifere esterne o poco profonde:*

I. *Hornfels* e rocce affini. — Sono in questo sottocapitolo studiate le numerose formazioni riferite ad *hornfels* ed a rocce affini, che sono rappresentate da *pirosseniti* di vario tipo (normali, anfiboliche, granatifere) e da masse di granato.

II. *Masse metallifere.* — Comprende lo studio delle formazioni metallifere considerate tanto rispetto ai minerali che essi contengono, quanto alle relazioni che li collegano.

III. *Calcari metamorfici.* — Comprende lo studio delle forme presentate dai banchi calcarei in prossimità delle predette formazioni metamorfiche e metallifere delle parti esterne o poco profonde dei giacimenti, ed in esso sono descritti numerosi tipi di calcari metamorfici contenenti minerali differenti, fra i quali sono da ricordare il pirosseno, l'olivina ed il granato.

3° *Scisti metamorfici.* — In questo capitolo sono distinti gli scisti cristallini nelle loro varie forme più o meno intensamente metamorfiche, in rapporto specialmente alle modificazioni in essi avvenute in conseguenza dei fenomeni di metamorfismo e di mineralizzazione.

4° *Formazioni metamorfiche e metallifere profonde:*

I. *Hornfels e forme di diretto contatto.* — Sono descritte quelle forme di rocce che si hanno nelle regioni profonde e che corrispondono agli *hornfels* esterni, ed indicate le differenze e le analogie che si hanno fra i due gruppi di formazioni. In seguito sono descritte alcune forme di diretto contatto, di cui alcune debbono considerarsi come apofisi del massiccio.

II. *Masse metallifere.* — Comprende lo studio delle masse metallifere profonde, essendo indicate anche in questo caso le differenze e le analogie fra di esse e quelle esterne.

III. *Calcari metamorfici.* — Sono studiati con lo stesso criterio comparativo i calcari metamorfici profondi.

Nelle conclusioni l'autore fa notare la grande complessità dei fenomeni di metamorfismo esistenti a Traversella, ma crede

utile di rinviare alla terza parte delle sue ricerche lo studio particolareggiato dei modi nei quali i detti fenomeni si svolsero, essendo opportuno di paragonarli con quelli svoltisi negli altri giacimenti di Valchiusella.

La Memoria è accompagnata da una tavola in fototipia, in cui sono indicati i principali modi di presentarsi delle formazioni metamorfiche e metallifere e da tre schizzi topografici intercalati nel testo.

I relatori hanno rilevato in questa seconda parte della monografia, sui classici giacimenti di Brosso e Traversella, i pregi già notati nella prima ed i notevoli risultati e però la raccomandano per l'ammissione alla stampa nei volumi delle Memorie, in attesa delle conclusioni del lungo studio e come incoraggiamento per l'autore a continuare le interessanti ricerche.

C. Somigliana.
C. F. Parona, *Relatore*.

Relazione sulla Memoria di G. Sannia, *I limiti d'una funzione in un punto limite del suo campo.*

L'Autore, in questa Memoria, studia *i limiti*, o l'insieme limite, indicato col simbolo “ Lm ”, di una funzione in un punto. Quando la classe limite si riduce ad un solo individuo, questo è il limite ordinario, indicato col simbolo “ lim ”. Il massimo e il minimo della classe limite furono già considerati come limiti d'indeterminazione della funzione. La classe limite generale trovasi già accennata in Abel e Cauchy.

Esposta la bibliografia e la storia della questione, in modo esauriente, e premesse le necessarie definizioni, l'Autore, nel § 1 N. 5, enuncia e dimostra il nuovo ed importante teorema, che “ ogni numero dell'insieme limite Lm di $f(x)$ nel punto a, è il limite ordinario nel punto a della funzione $f(x)$ considerata nei punti di un conveniente sottogruppo del campo in cui era definita la funzione ”.

La dimostrazione è data servendosi delle ordinarie forme di ragionamento, senza ricorrere alla scelta arbitraria di infiniti elementi (come fecero alcuni autori in ricerche consimili).

Nel § 2, l'Autore tratta delle derivate destra e sinistra di un gruppo di punti. Richiamati i teoremi del prof. Burali-Forti su questo soggetto, l'Autore espone nuove proprietà, da cui risulta che un gruppo è numerabile in ipotesi più late di quelle già date da Cantor per le derivate ordinarie.

Nel § 4 l'Autore estende la definizione di classe limite Lm alle funzioni di due variabili, ne studia le proprietà, e generalizza (N. 18) un importante teorema di Young, sull'insieme dei valori della variabile, in cui la classe limite parziale della funzione $f(x)$ non coincide colla classe totale.

In fine, nel § 6, l'Autore stabilisce le relazioni fra l'insieme limite d'una funzione di due variabili, e l'insieme che risulta prendendo successivamente il limite rispetto all'una del limite rispetto all'altra variabile; ed espone dei casi molto generali, in cui i risultati coincidono.

L'Autore dimostra piena conoscenza della letteratura del soggetto. Varii risultati sono nuovi ed importanti. Perciò noi proponiamo l'inserzione della Memoria nei volumi dell'Accademia.

E. D'Ovidio.
G. Peano, *Relatore.*

Relazione intorno alla Memoria del Dr. Giuseppe Colosi, dal titolo: *Osservazioni anatomo-istologiche sulla* " *Runcina calaritana* ", *n. sp.*

Il gen. *Runcina* è l'unico rappresentante della famiglia dei Runcinidi fra i Molluschi e presenta nella sua struttura notevoli cose interessanti, sopratutto per quanto riguarda l'apparato riproduttore e quello digerente, che hanno speciale importanza nella conoscenza biologica e sistematica dei Molluschi.

Intorno allo studio di questi apparati si svolge precisamente la Memoria presentata dal Dr. Colosi.

Egli fa uno studio accurato delle varie parti dell'apparato digerente, mettendovi in evidenza l'esistenza di una valvola gastrica, di una ghiandola gastrica e di un fegato impari con sbocco impari, le due prime finora non conosciute, la terza era dubbia. Quanto all'apparato riproduttore l'A. dimostra che esso è costituito su un tipo nuovo, differente da quello che caratterizza gli altri Molluschi, onde la necessità di creare nell'ordine dei Tettibranchi una sezione speciale per i Runcinidi.

L'A. dimostra inoltre l'esistenza nei Runcinidi di un rene secondario.

Dall'insieme dell'organizzazione della *Runcina* di Cagliari confrontata con quella di esemplari di *Runcina* avuti da Marsiglia, conclude che la specie di Cagliari è diversa da questa per varî caratteri e la distingue come specie nuova col nome di *Runcina calaritana*.

I risultati ottenuti dall'A. sono interessanti e i vostri Commissari ne propongono la stampa nel volume delle Memorie Accademiche.

T. Salvadori.
L. Camerano, *Relatore*.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 2 Maggio 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Chironi, Direttore della Classe, Pizzi, De Sanctis, Brondi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Vidari, Prato, Stampini Segretario della Classe. — È scusata l'assenza dei Soci: Carle, Ruffini, Einaudi.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 18 aprile.

Il Socio Segretario Stampini legge una lettera del Dottore Antonio Taramelli, Soprintendente agli scavi ed ai musei archeologici per la Sardegna, il quale notifica che nella prima quindicina del corrente mese saranno inaugurati i nuovi locali del Museo Nazionale di Cagliari, ed esprime la speranza che un membro della nostra Accademia possa essere presente a tale inaugurazione, alla quale l'Accademia sarà ufficialmente invitata dal Ministero. La Classe delibera di farsi rappresentare dal Socio corrispondente Silvio Lippi.

Il Presidente con vivo compiacimento presenta alla Classe

il volume primo dell'opera *La circolazione monetaria nei diversi Stati* del Dott. Giovanni Carboneri, Segretario nella R. Commissione monetaria. Questo primo volume, che è stato testè pubblicato ed ha per titolo *Monete e biglietti in Italia dalla Rivoluzione francese ai nostri giorni*, fu, per iniziativa del Socio Einaudi, cortesemente inviato in dono all'Accademia dal Direttore Generale del Tesoro, Comm. Federico Brofferio, al quale il Presidente propone siano tributati i più caldi ringraziamenti. Alle parole del Presidente si associa il Direttore della Classe Chironi, rilevando l'altissima importanza dell'opera del Dottore Carboneri anche dal lato giuridico, e soggiungendo come tale pubblicazione faccia onore all'autore non meno che al Ministero ed alla Direzione Generale del Tesoro sotto i cui auspici si è stampata. La Classe unanime si rallegra col benemerito autore e tributa vive azioni di grazie al Direttore Generale del Tesoro.

Indi il Presidente presenta l'opera in tre volumi di Paolo Orano, *I Moderni*, e il volume del medesimo autore *Discordie. Studi e polemiche*; inoltre l'opuscolo del Socio corrispondente Giuseppe Biadego che commemora il Prof. Effigenio Perina. La Classe ringrazia.

Il Socio Stampini presenta il volume *Studi e ricerche di Diplomatica Comunale* del Prof. Pietro Torelli, libero docente di Paleografia e Diplomatica nella R. Università di Bologna. Il volume è stato inviato in dono alla nostra Accademia dalla R. Accademia Virgiliana, la quale con questo ha voluto iniziare una prima serie di pubblicazioni che intende e spera di poter continuare mediante i lavori premiati nei concorsi da essa indetti. Della importanza di questa pubblicazione parla il Socio Patetta, rilevando come sia notevolmente interessante, anche perchè tratta un argomento finora pochissimo studiato. La Classe delibera sia ringraziata l'Accademia Virgiliana per il dono che si compiacque inviare.

Il Presidente presenta per l'inserzione negli *Atti* accademici, a nome dell'autore, una Nota del Socio nazionale non residente Fedele Savio, intitolata *Giovanni Diacono Biografo dei Vescovi Napoletani.*

Per essere inserite negli *Atti* stessi il Socio De Sanctis presenta pure due Note, una del Dott. Alberto Olivetti, intitolata *Osservazioni storiche e cronologiche sulla guerra di Costanzo II contro i Persiani*, e l'altra di Augusto Rostagni col titolo *Neos Dionysos. Poeti e letterati alla corte di Tolemeo IV Filopatore.* La Classe approva.

LETTURE

Giovanni Diacono, Biografo dei Vescovi Napoletani.

Nota di FEDELE SAVIO.

Dalle notizie, che raccolsi nelle due Note, da me presentate altre volte alla R. Accademia, su *Pietro suddiacono agiografo napoletano del secolo X* (1), si desume, per quanto mi sembra, con certezza, che costui fiorì e scrisse le varie sue opere nel periodo 940-960.

Queste date mi rendono proclive a riconoscere in lui quel Pietro, del quale parla con lode un anonimo, che, o sulla fine del secolo XI o sul principio del XII, compose una vita del papa S. Urbano I (2). Questi elogia come fulgidi luminari della Chiesa due scrittori, un Giovanni ed un Pietro, entrambi napoletani, entrambi agiografi, ed entrambi ascritti all'ordine levitico, i quali si dice (sono sue parole) vivessero nel medesimo tempo, e sebbene si occupassero nel comporre vite di Santi, adornandole talora con versi, non ebbero il tempo di por mente a correggere la vita di S. Urbano: “ Quidam partenopenses duo viri “ docti et eruditi, Johannes scilicet et Petrus fuere, ut fertur, “ tempore uno, quos Ecclesiae Dei fulgere dedit leviticus ordo „ (3).

---

(1) “ Atti della R. Accad. delle Scienze „, vol. XXXV, adun. 31 marzo 1901, e vol. XLVII, adunanza 9 giugno 1912. Correggo qui un errore di stampa sfuggito in questa 2ª nota, a pag. 9, ove si parla della chiesa napoletana di San Gregorio. In luogo di *Lignoro* si deve leggere *Liguoro*.

(2) La data si deduce specialmente dall'età del codice cassinese 123, che, nella parte contenente la vita di S. Urbano, appartiene al secolo XII; *Biblioth. Casinensis*, vol. III, pag. 112 del testo.

(3) Op. cit., *Florilegium*, pag. 101.

Il de Rossi, osservando questo testo, non ebbe dubbio che i due partenopensi, Giovanni e Pietro, fossero Giovanni diacono, autore delle vite dei vescovi napoletani che si succedettero dal 763 circa all'872, e Pietro suddiacono, che alle predette aggiunse la vita di Atanasio II (1). Ma, persuaso che Pietro suddiacono, il quale rimaneggiò la vita dei SS. Quattro Coronati, fosse contemporaneo di Pietro vescovo di Napoli dal 1094 al 1100, diede lode al biografo di S. Urbano per la prudenza con cui mediante un *fertur* aveva temperato l'asserzione che Giovanni e Pietro fossero vissuti contemporanei, mentre tra

---

(1) " Bullett. d'archeologia crist. ", 1879, p. 64. Il Muratori nella prefazione al *Chronicon episcoporum* di Giovanni diacono, parlando di una vita di S. Atanasio I, più ampia di quella contenuta nel *Chronicon*, dimostra inammissibile l'opinione del Baronio, che all'anno 872 dei suoi Annali, riportandone una buona parte, ne credette autore Pietro Cassinese. Egli suppone a sua volta che l'autore fosse l'agiografo Pietro suddiacono. Ma il Capasso, *Monum. Neap. Ducatus*, vol. I, pag. 84 e più ancora a pag. 213, dimostra, d'accordo col Mazzocchi, non potersi accettare l'opinione del Muratori, troppo diverso essendo lo stile della vita di S. Atanasio dallo stile di Pietro suddiacono. L'unica cosa certa è che l'autore era un napoletano.

Aggiunge inoltre il Muratori che la vita fu composta tra l'anno 872, quando S. Atanasio I fu sepolto a Monte Cassino, e l'anno 877 quando il suo corpo fu trasferito a Napoli; onde tanto più si confermerebbe che Pietro, vissuto almeno fino al 960, non fu l'autore della vita suddetta. Però, osserva, e mi pare giustamente, il Sollerio, non potersi provare che l'autore della vita sia stato testimonio oculare della traslazione del corpo di S. Atanasio a Napoli e degli altri fatti, che narra; solo potersi dire contemporaneo. Tale sincronismo potrebbe anche estendersi ad alcuni lustri, sebbene non mai più tardi del secolo X.

Se poi questa vita si possa considerare come la fonte a cui attinse Giovanni diacono, per la sua biografia del medesimo S. Atanasio I nel *Chronicon*, non oserei dire, essendo certo che nell'uno si trovano notizie che non si trovano nell'altra. Per es. Giovanni diacono dice che S. Atanasio fece dipingere nella chiesa di San Gennaro i Santi Dottori, che vi fece costruire un altare di marmo e sovr'esso pose un velo, ov'era ricamato il martirio del Santo, e che per suppellettili provvedute nella chiesa Stefania impiegò 48 libbre d'argento, le quali notizie nella Vita mancano. Al contrario nella Vita si narra la fondazione di sacerdoti ebdomadarii nella Stefania, e di custodi nelle chiese di S. Andrea, di S. Stefano e di S. Restituta; fondazioni che non sono narrate da Giovanni. Vedi *Acta SS.*, tomo IV di luglio, p. 75, n. 3, confr. con pag. 81, n. 14.

l'uno e l'altro vi sarebbe stata la distanza d'almeno un secolo (1).

Come ho dimostrato nella mia prima Nota, Pietro suddiacono visse non tra il 1094 ed il 1100, ma tra il 940 e 960; e qui ora vedremo che Giovanni diacono visse una parte notevole, se non la maggiore, della sua vita nella prima metà del secolo X. Onde se ne può concludere che la tradizione, riferita dal biografo di S. Urbano, sul quasi sincronismo dei due agiografi, non si allontana molto dalla realtà.

Di Giovanni diacono, trattarono gli editori delle sue opere cioè i Bollandisti, il Muratori, il Waitz, il Capasso, poi gli storici napoletani, i bibliografi, ed altri, e tutti, eccetto il Capasso, caddero in qualche inesattezza, che di mano in mano verrò qui rilevando e correggendo.

Una è quella dell'Ughelli, seguìto dal Fabricio (2), che lo sdoppiò, facendone due personaggi, il primo dei quali sarebbe stato un diacono addetto alla chiesa di S. Gennaro, ed autore della *Passio dei SS. Sosio e Gennaro* e della *Traslazione di S. Sosio*, e l'altro autore delle *Vite dei Vescovi napoletani*. Contro questo sdoppiamento si pronunziò il Muratori, affermando recisamente l'unità dei due pretesi scrittori: " Id mihi certum est, " certumque et reliquis futurum puto. Utrobique conveniunt no- " mina, munus, patria et diaconia, quandoquidem utriusque operis " scriptor appellatur Johannes diaconus sancti Januarii. Aetas " etiam in eamdem nos sententiam impellit „ (3).

Quanto all'età in cui visse il diacono Giovanni, il Parascandolo, che io pure seguii nella mia prima Nota su *Pietro suddiacono*, credette che un Atanasio, al quale Giovanni dedicò la sua traduzione dal greco della vita di S. Niccolò, fosse Atanasio II, prima che egli venisse eletto alla dignità vescovile, cioè, secondo il computo del Parascandolo, prima del marzo

---

(1) Partendo dai suoi presupposti, il de Rossi doveva dire due secoli e non uno.

(2) *Biblioth. lat. mediae et inf. latinit.*, ediz. Mansi, Firenze, 1858, t. IV, pag. 355.

(3) *Rer. It. Script.* I, p. 2, pag. 287.

dell'876 (1). E poichè tale traduzione fu compiuta da Giovanni quando contava 25 anni di età, ne verrebbe che la parte maggiore della sua vita l'avrebbe trascorsa nella seconda metà del secolo IX; onde difficilmente potrebbe dirsi contemporaneo del suddiacono Pietro, che scriveva ancora nel 960.

Ma avendo esaminato il testo della vita di S. Niccolò, riportato dal Mai (2), vidi che il Parascandalo prese un abbaglio, poichè l'Atanasio, cui è dedicata la vita, fu monaco, come risulta dal titolo che a lui rivolge l'agiografo, *monache Dei*; onde non lo si può identificare col futuro vescovo Atanasio II, che non fu mai monaco.

Tre altre scritture furono attribuite a Giovanni diacono, il quale le avrebbe scritte per esortazione del vescovo Atanasio II, cioè le traduzioni delle vite o passioni di S. Febronia, di S. Pietro di Alessandria, e dei SS. Eustrazio e comp.

Le prime due traduzioni, che in nessun codice portano il nome del traduttore, furono attribuite dal Papebrochio a Giovanni diacono, ma senza nessun argomento positivo.

Secondo ogni apparenza a tale attribuzione il Papebrochio fu condotto unicamente dal presupposto, che Giovanni diacono, il quale condusse le vite dei vescovi napoletani sino ad Atanasio I († 872), vivesse sotto l'immediato successore di lui, Atanasio II, e che questi, avendolo già forse invitato a quella prima impresa, lo inducesse ancora ad occuparsi dei suddetti lavori agiografici. Essendo certo da una parte che Giovanni diacono, oltre alle vite dei vescovi, compose anche opere agiografiche, e

---

(1) Il Parascandolo, e prima di lui il Mazzocchi, credettero Atanasio II eletto nel marzo dell'876 e protrassero il suo episcopato fino al 902, sull'autorità della *Cronaca della Cava* e della *Cronaca* di Ubaldo, che ora sono riconosciute come falsificazioni del Pratilli (si veda Potthast, *Bibl. hist. Medii aevi*, vol. I, pag. 258, alla parola *Chr. Cavense*, e vol. II, pag. 1078, *Ubaldus Chron. Neapol. fragm.*). Il Capasso, *Monum. Neap. Ducatus*, vol. I, pag. 220 e lo Schipa, fissarono l'episcopato di Atanasio II dal settembre od ottobre dell'875 al marzo o aprile dell'896, fondandosi sul catalogo blanchiniano dei vescovi napoletani, scritto nel secolo X. Ad Atanasio II morto nel marzo o aprile dell'898 succedette suo zio Stefano III, stato fino allora vescovo di Sorrento, il quale visse fino ad una parte del 907, in cui gli succedette Atanasio III.

(2) *Spicilegium Romanum*, IV, 235.

dall'altra, che il traduttore delle due vite di S. Febronia e di S. Pietro, compì il suo lavoro, costrettovi, come dice egli stesso, dal vescovo Atanasio II (1), tanto più potè sembrar verisimile al Papebrochio la sua congettura.

Ma l'ipotesi che Giovanni vivesse sotto Atanasio II, perchè terminò di scrivere le vite dei vescovi con Atanasio I († 872), è già di per se stessa assai debole. Essa poi sfuma interamente, se si può dare della cessazione del lavoro di Giovanni all'872, ossia alla morte di Atanasio I, una ragione più forte, la quale appunto darò tra poco. Molto meno poi dal fatto, che Giovanni scrisse opere agiografiche, si può dedurre che egli, e non altri, scrivesse le vite di S. Febronia e di S. Pietro.

A Giovanni diacono il Baronio, che io pure seguii nella mia prima Nota su *Pietro suddiacono*, attribuì la traduzione del Martirio di S. Eustrazio e compagni martiri d'Armenia (2). Ma presentava e presenta tuttora moltissima difficoltà il fatto, che nel prologo di essa il traduttore dà a sè il nome di Guarimpoto (3). Per togliere questa difficoltà il Mazzocchi suppose, che Guarimpoto, ricevendo gli ordini sacri, cambiasse il suo nome in quello di Giovanni, per affezione verso Giovanni abate di S. Severino suo maestro spirituale (4). Ipotesi, come ognun vede, troppo arbitraria, e che tutt'al più potrebbe essere discussa, quando vi fosse qualche argomento per credere Giovanni diacono autore della traduzione. Ma argomenti siffatti mancano (5).

---

(1) " Athanasius junior Neapoleos urbis antistes, scripturarum studio " apprime eruditus, vitam et agonem gloriosae martyris Febroniae, nec " non et beati Petri Alexandrinae cathedrae pontificis, ex graeco stylo la- " tinis auribus transferre coegit „. *Acta SS.*, tomo di giugno, pag. 14. Come si vede qui dal n. 2 del *Comment. praevius* confrontato con *Bibliotheca hagiografica latina*, n. 2833, la traduzione dell'anonimo napoletano è tuttora inedita.

(2) Nelle note al *Martirologio*, il 13 decembre. La traduzione fu pubblicata nella *Bibliotheca Casinensis*, III, *Floril.* 193, tratta dal codice cassinese 139 del secolo XI.

(3) " Athanasius junior parthenopensis ecclesiae praesul, patrui sui " magnifici praesulis studia secutus, mirabilis acuminis ingenio pollens, " imperio suo me Guarimpotum impulit, ut de graeca in latinam vocem " vitam sanctissimi Eustrathii trasfundere minime recusarem „.

(4) *Comment. in Neapol. Eccl. Kalend.*, II, 343.

(5) Se il Muratori nella prefazione al *Chronicon episcop. Neapol.*, in *Rer. It. Script.*, vol. I, parte 2, pag. 288, non si dichiarò in favore di Gua-

Il Baronio inoltre cita un codice, che gli Oratoriani avevano nella loro biblioteca, dove, a quanto egli afferma, leggevasi il nome di Giovanni servo di S. Gennaro, che è il nome preso talora nei suoi scritti dal nostro Giovanni diacono, siccome addetto al servizio della chiesa di S. Gennaro (1). Ma, a dire il vero, io penso sia intervenuto al Baronio il medesimo caso, che poi intervenne al Papebrochio. Entrambi attribuirono a Giovanni diacono uno scritto agiografico, mossi unicamente da preconcetti. Il Baronio però si sarebbe sbagliato più gravemente, in quanto nel codice che egli aveva dinanzi agli occhi o v'era il nome di Guarimpoto, o non vi era alcun nome. Tutto ciò io deduco:

1° Dal fatto che niun codice antico esiste ora nella Vallicelliana (la biblioteca degli Oratoriani, a cui allude il Baronio) contenente il prologo, nel quale si dovrebbe incontrare o l'uno o l'altro dei due nomi. Nella Vallicelliana vi è bensì un codice antico (tomo V, del secolo XI) colla vita di S. Eustrazio, ma è senza prologo (2). Così pure manca del prologo una copia scritta nel secolo XVI dal Gallonio, ed ivi conservata (3). Siccome non consta che niun codice agiografico della Vallicelliana trasmigrasse altrove, bisogna conchiudere che il Baronio cadde qui in una svista (4).

2° In secondo luogo osservo che gli altri codici di Roma, contenenti la vita di S. Eustrazio, o mancano del prologo, come

---

rimpoto contro Giovanni diacono, ciò fece unicamente per rispetto al Baronio.

(1) " In his quae habemus apud nos aperitur et nomen auctoris, qui " ea latinitate donavit. Fuit is Joannes servus S. Januarii (sic enim inscri- " bitur) qui vixit Neapoli temporibus Athanasii junioris ejus sedis episcopi. " Haec etenim habet auctor in praefatione: Athanasius junior Partheno- " pensis Ecclesiae praesul, patrui sui magnifici praesulis studia secutus, " me impulit ,, etc. Così testualmente nelle note al *Martirol. Rom.* 13 dicembre.

(2) Così ho verificato io stesso, e quindi è giusta l'indicazione datane dal P. Poncelet, *Cat. hag. lat. rom.*, pag. 307.

(3) Nel codice H. 16; Poncelet, op. cit., pag. 438.

(4) Uno sbaglio simile a quello che io attribuisco qui al Baronio, ma in altro senso, fu commesso dagli editori della *Bibliotheca Casinensis*, III, 257, i quali affermano che un codice della Vallicelliana porta *Guarimpoto* in luogo di *Giovanni diacono*.

il codice A. 5, del Capitolo di S. Pietro (1), e il codice A (del secolo XII-XIII) di S. Maria Maggiore (2), oppure portano il nome di Guarimpoto o Varimpoto. Questo nome stava pure in un codice antico del monastero di Casanova, del card. Borromeo, in caratteri longobardi, copiato dal Caetani nel codice 96 della biblioteca Alessandrina (3). Ivi a pag. 453 leggesi chiaramente il nome *Varimpotum.*

3° Finalmente inclino a credere ad uno sbaglio del Baronio dal modo con cui egli riporta il testo, dove, secondo lui, stava il nome di Giovanni *servus S. Januarii*, poichè mentre riferisce esattamente tutte le altre parole del testo, tralascia poi il nome del traduttore ed il titolo suddetto di *servus S. Januarii* (4). Lo tralasciò, io credo, perchè nel codice lesse il nome di *Guarimpoto,* ch'egli credette scritto erroneamente da un copista in luogo del nome, che egli reputava dovervi essere, cioè *Johannem servum S. Januarii.*

Quindi concludo questo punto, unendomi agli editori della *Bibliotheca Casinensis* (5) ed al Waitz (6), i quali pensarono che l'autore della traduzione del martirio di S. Eustrazio e compagni fu un certo Guarimpoto, il cui nome chiaramente si legge o si leggeva nei codici antichi.

Di più, considerando la grande rassomiglianza e quasi la identità di concetti e di parole che v'è tra il testo del prologo della vita di S. Febronia e il prologo del martirio di S. Eustrazio, credo non improbabile che il medesimo Guarimpoto, il quale tradusse questo martirio, traducesse pure la vita di S. Febronia e per conseguenza anche la vita di S. Pietro d'Alessandria. Su quest'ipotesi tuttavia, per quanto essa mi sembri ragionevole, non insisto, bastandomi d'escludere che l'autore delle dette tre scritture sia stato Giovanni diacono.

Tale esclusione è ancora confermata da quanto ora dirò

---

(1) Poncelet, *Cat. cod. hag. lat. rom.*, pag. 19.

(2) *Ibid.*, pag. 82.

(3) *Ibid.*, pag. 185.

(4) Vedi qui sopra le parole testuali del Baronio, dove sostituì con un *etc.* la frase che avrebbe dovuto seguire: *me Guarimpotum impulit.*

(5) Vol. III, pag. 257.

(6) *Mon. Germ. Hist , Script. Rer. Langob.*, pag. 309.

sugli argomenti o indizi che vi sono per credere che Giovanni diacono spiegasse la sua attività letteraria piuttosto nella prima metà del secolo X che nella seconda metà del secolo IX.

Il primo e più forte si prende dal fatto, che Giovanni diacono ebbe per suo precettore e maestro quel prete Ausilio, il quale nell'896 circa venne a Napoli, e poscia, stando tuttavia in Napoli, scrisse, tra gli anni 908 e 909, alcuni libri in difesa del papa Formoso (891-896) e del vescovo di Napoli Stefano III.

Nel racconto della traslazione di S. Sosio che fa parte della Passio dei SS. Gennaro e Sosio, opera certa di Giovanni diacono, questi narra che volendo l'abate Giovanni ottenere da Stefano III vescovo di Napoli il permesso di togliere da Miseno le reliquie di S. Sosio (il che fu verso il 905), gli mandò come nunzio il prete Ausilio, che egli chiama suo maestro: " per " Auxilium Domini Sacerdotem meae indolis praeceptorem, sup- " plicando direxit domino Stephano episcopo „. Tutte le edizioni precedenti, compresa quella del Waitz (1), lessero la parola *auxilium* come nome comune, cioè per *auxilium Domini*, la qual frase, come ben nota il Capasso, non ha senso alcuno. La vera ed unica lezione è quella data dal Capasso *per Auxilium, Domini sacerdotem*, per mezzo di Ausilio, sacerdote del Signore; ed è del tutto probabile, se non certo, che qui si tratta proprio di quel prete Ausilio, che scrisse in difesa del papa Formoso e del vescovo Stefano III.

Di Ausilio abbiamo le seguenti notizie, raccolte diligentemente dal Dümmler (2). Ausilio non era italiano, ma, come egli medesimo attesta, da lontanissimi paesi venne in Italia, ed a Roma, dove fu ordinato sacerdote dal papa Formoso (891-896). Il Dümmler adduce molte ragioni per provare che, dopo la sua ordinazione, e forse quando cominciò la persecuzione contro la memoria di Formoso, Ausilio andò a Napoli, e quivi entrò in intima relazione col vescovo Stefano III (898-907), che egli poi validamente difese subito dopo la morte di lui. L'ipotesi della dimora di Ausilio a Napoli verrebbe ora confermata dal passo citato di Giovanni diacono, che lo chiama suo precettore.

---

(1) In *Mon. Germ. Hist. Script. Langob.*, stampato nel 1888.

(2) *Auxilius und Vulgarius*, Leipzig, 1866, pag. 38.

Il medesimo Dümmler suppose ancora che un Giovanni levita, al quale fu indirizzato un breve carme da Eugenio Vulgario, scrittore contemporaneo di Ausilio, e che al par di lui difese con gli scritti il papa Formoso, sia il nostro Giovanni diacono.

Il carme di otto versi acrostici formanti il nome di *Iohannes* suona così:

Inter sacratos caelesti iure ierarchos
Ordine conspicuo rutilas, levita Iohannes.
Hausisti factum, geminans de nomine factum,
Alto presagio scitus, quis sorte futurus.
Nus etenim nictans pollet tibi mentis in arce,
Nomen principium resonet charismatis utrum —
Eloim veretur — positum spectabile doctum,
Salve quocirca felix, mi gnosie, perpes (1).

Siccome non è rimasta nessuna memoria di un altro Giovanni levita (ossia diacono) contemporaneo di Eugenio Vulgario, cioè verso il 907-908, al quale si possa attribuire un elogio così grande d'ingegno e di dottrina:

Nus etenim nictans pollet tibi mentis in arce
.... positum, spectabile, doctum,

se non del nostro Giovanni diacono, scrittore per quei tempi eminente, l'ipotesi del Dümmler diventa più che verosimile.

Posto pertanto che Ausilio fu maestro di Giovanni, siccome Ausilio venne a Napoli dopo la morte di papa Formoso nell'896, ne conseguita che verso l'896 Giovanni era ancora relativamente giovane ed in condizione di dover ricorrere all'opera di un maestro.

Questa conclusione è in pieno accordo con quanto sappiamo o di certo o di probabile sulla cronologia di quelle opere che sono indubbiamente di Giovanni. La prima di esse è la traslazione di S. Severino, contenente pure la narrazione del martirio di S. Procopio vescovo di Taormina (2).

---

(1) *Mon. Germ. Hist. Poetae*, IV, p. 1, pagg. 428; Dümmler, op. cit., p. 151.

(2) Il *Martyrium S. Procopii* pubblicato dal Muratori in *Rerum Ital. Script.*, I, parte 2, pagg. 268-273 non è che un estratto della *Translatio*

L'assalto dato dai Saraceni a Taormina e l'uccisione che vi fecero di S. Procopio avvennero nell'agosto del 902. Nell'ottobre seguente i Napoletani, temendo un'invasione di quei barbari, trasferirono il corpo di S. Severino dal castello Lucullano dentro le mura di Napoli. Ond'è chiaro che la relazione di questo trasferimento fu scritta da Giovanni diacono dopo l'ottobre del 902.

Quanto alla traslazione di S. Sosio vedesi dal racconto stesso, che essa fu scritta posteriormente alla traslazione di S. Severino (1). Non si può tuttavia collocarla al 910 (2), come fece il Mazzocchi, nè molto meno al 920, come fece l'Ughelli, rimproverato perciò dal MURATORI, *Rer. Ital. Script.*, I, part. 2, pag. 287, perchè essa avvenne sotto l'episcopato di Stefano III, il quale terminò certamente la vita prima del dicembre 907, in cui già era vescovo Atanasio III (3). Essa avvenne quindi tra il 902 ed il 907.

Lo stesso Giovanni diacono ci dà un elemento cronologico, che potrebbe restringere di alquanto questi termini, dove dice che la traslazione di S. Sosio avvenne circa 60 anni dopo che i Saraceni avevano distrutta la città di Miseno: " Sexaginta " evolutos jam pene per annos ab Hismaelitis erat demolitum " oppidum illud, et ad solum usque prostratum ". L'occupazione di Miseno per parte dei Saraceni è messa da lui nel *Chronicon Episcoporum* al tempo del vescovo Giovanni antecessore di S. Atanasio I, poco prima che i Saraceni andassero a devastare il territorio di Roma, il che, come nota il Muratori, secondo tutti

---

S. Severini, quale era già stata pubblicata in *Acta SS.*, tomo I di gennaio, pag. 1098, e fu poi ristampata dal CAPASSO nei *Monum. Neapolit. Ducat.*, *Cronache*, pagg. 291-300. Nell'edizione muratoriana la dicitura presenta alcune piccole differenze.

(1) Ivi Giovanni scrive: " Post eversionem Lucullani oppidi, sicut in " alio constat libello, quum memoratus Abbas (Johannes) corpus S. Seve- " rini meruisset adipisci "; *Acta SS.*, tomo VI settembre, pag. 879.

(2) Anche il Wattembach accetta questa data, *Deutschlands Geschichtsquellen*, 5ª ediz., I, 289.

(3) Il Parascandolo, da me seguìto nella mia prima Nota su Pietro suddiacono, errò fissando il termine dell'episcopato di Atanasio II al 902. Vedi qui sopra, pag. 4 in nota.

i cronisti di allora avvenne nell'846 (1); ma della distruzione di Miseno il medesimo *Chronicon* parla sotto il vescovo Atanasio I, e quindi dopo il Natale dell'849. Resta perciò incerto se i 60 anni devano computarsi dall'845, oppure dall'849 o 850; nel primo caso si andrebbe fino al 905 e nel secondo al 909 o 910; ma siccome Stefano III cessò di essere vescovo prima del dicembre 907, perciò la traslazione dovette accadere tra 905 e 907.

Per esortazione di Giovanni abate di S. Severino, che ho qui sopra nominato, il nostro diacono agiografo tradusse pure la Passio dei XL martiri. Di questo abate Giovanni consta che già fin dal 907 almeno era succeduto nel governo ad Acculsario, fondatore del monastero di S. Severino, e suo maestro, e per quanto pare governava ancora detto monastero nel 928, nel qual anno un documento fa menzione di lui (2). Prima adunque del 928 il nostro agiografo tradusse la Passio dei 40 martiri, e secondo ogni apparenza anche qualche tempo prima di scrivere la *Passio SS. Januarii et Sosii* con la traslazione di S. Sosio.

In effetto quivi lo scrittore afferma di essersi rifiutato agli inviti ed alle preghiere dell'abate Giovanni, di guisa che costui fu obbligato di ricorrere al vescovo Stefano, laddove, aggiunge egli, altre volte avrei stimato delitto sottrarmi ai suoi desideri; " quem nunquam refellere nefas existimaveram „. Si può credere pertanto che la Passio dei XL martiri sia tra quelle che egli scrisse aderendo all'invito dell'abate di S. Severino, senza nessuna difficoltà, come nessuna difficoltà poi presentò poco appresso per scrivere la traslazione di S. Severino.

Tuttavia la passione dei 40 martiri non fu la prima delle sue opere, poichè nel prologo di essa si lagna di nemici, che avevano malignamente criticati altri suoi lavori (3). La stessa

---

(1) *Rer. It. Script.*, I, p. 2, pag. 315.

(2) Il Muratori pubblicò questo documento nel vol. V delle *Antiquitates Medii aevi*, pag. 593, con la data del 765; ma il Parascandolo a ragione osserva, che nel 765 non esisteva ancora il monastero di S. Severino, e che le note cronologiche indicano l'anno 928.

(3) " Sane operae pretium rei studiosis insinuare lectoribus cuius id " auctoritate fieri compertum sit, ut insolentium latratus facillime conclu- " damus. Dominus enim Johannes spiritualis noster pater, abbas quoque

lagnanza fa pure nella prefazione alle vite dei SS. Sosio e Gennaro (1). Può essere che la prima delle sue opere sia appunto la traduzione della vita di S. Nicolò che, come ho detto, fu scritta da lui quando contava 25 anni di età. La menzione di questa cifra, che egli fa nel prologo, pare buon argomento per credere, che quello fosse appunto il primo suo lavoro. Quanto al monaco Atanasio, che per errore fu confuso col vescovo Atanasio II, v'è motivo di pensare che egli sia quell'*illustre* monaco, di cui si parla nella relazione del trasporto di S. Sosio, avvenuto come dicemmo nel 905-907. Il titolo di *illustre*, affatto insolito per un monaco, mi fa supporre, che egli sia identico all'Atanasio levita, fratello di Gregorio prefetto, figli entrambi di Stefano fratello del duca di Napoli, Sergio III (2). Appartenendo egli così strettamente alla famiglia ducale, il titolo di *illustre* non reca più meraviglia.

In fine per ciò che spetta alle vite dei Vescovi napoletani dal 763 all'872 (3), ossia fino alla morte di S. Atanasio I, tutto porta a credere che Giovanni le scrivesse nei primi anni del secolo X, poichè da un lato è certo che le scrisse mentre era ancora in età giovanile (4), e dall'altro sembra che esse si devano collocare sotto l'episcopato di Stefano III, che corse dall'898 al 907. Mettendole in questo periodo si spiegherebbe, perchè Giovanni si fermasse alla morte di S. Atanasio I (872). La ra-

---

" monasterii S. Severini, cum me infelicissimum Johannem diaconum servum " S. Januarii martyris unice diligeret... Ob cujus amorem cum meo Hyero- " nymo Scylleios canes surda aure transibo „; *Acta SS. mart.*, II, 22.

(1) " Post nonnulla tyrocinii mei opuscula, quibus aliquantis per iuve- " nilem animum caritatis exercuisse videbar imperio, nullius fore dispo- " nebam intentionis, nisi ut magis hebetaret desidia, quem fomenta lividae " stomachationis alicui pro talibus subministrarem experimentis „. *Acta SS.*, tomo VI sept., pag. 874.

(2) Si veda l'albero genealogico dei duchi di Napoli nella mia Nota 2ª su *Pietro suddiacono napoletano.*

(3) Il Muratori credette Giovanni autore di tutte le vite; ma fu dimostrato dal Waitz, che l'opera di Giovanni comincia solo con il vescovo Paolo nel 763 circa.

(4) Nella vita di Giovanni III (*Rerum Ital. Script.*, I, p. 2, pag. 314), scrive: " Si hujus vitam vel mores scribere tentavero, non dico meae adolescentiae, cujus sensus propter aetatem adhuc intercluditur, verum etiam sagacioribus oneri fuerit „

gione sarebbe questa, che Stefano III, il vescovo allora vivente, quanto era affezionato e devoto verso suo fratello S. Atanasio I, altrettanto era poco ben disposto verso Atanasio II suo nipote, che s'era mostrato così diverso nella condotta da Atanasio I, e che aveva anche tribolato lui, Stefano, mentre era vescovo di Sorrento.

Ecco pertanto l'ordine delle opere finora note di Giovanni diacono:

1° Traduzione della vita di S. Niccolò, composta da lui per esortazione del monaco Atanasio (probabilmente del monastero di S. Severino), mentre contava 25 anni di età.

2° Continuazione delle vite dei vescovi di Napoli dal 763 all'872, probabilmente per impulso del vescovo Stefano III, tra l'898 ed il 907 (1).

3° Traslazione di S. Severino, per esortazione dell'abate Giovanni, dopo l'ottobre del 902 (2).

4° Traduzione del martirio dei 40 martiri per esortazione dell'abate Giovanni (3).

5° Passio dei SS. Gennaro e Sosio con la traslazione di S. Sosio, per esortazione dell'abate Giovanni e comando del vescovo Stefano, fra il 905 ed il 907 (4).

Da questa esposizione risulterebbe, che la più parte delle sue opere le compose Giovanni diacono nel primo decennio del secolo X. Onde ebbe ragione l'ignoto biografo di S. Urbano nel temperare con un *fertur* l'asserzione che Giovanni diacono e Pietro suddiacono erano vissuti contemporanei; poichè mentre

---

(1) Pubblicate dal Muratori, *Script. Rer. Ital.*, p. 2, pag. 291.

(2) *Acta SS.*, tomo VIII di ottobre, pag. 1098, nelle Aggiunte.

(3) *Acta SS.*, tomo II di marzo, pagg. 22-25.

(4) *Acta SS.*, tomo VI di settembre, p. 874. Si sbaglia Dom Plaine, *Series critico-chronologica Hagiographorum noni et decimi saeculi* nel tomo XIV (1893) degli *Studien und Mittheilungen aus dem Benedict. und Cistercens. Ord.*, attribuendo a Giovanni la traduzione della vita di S. Maria Egiziaca, che sta in *Acta SS.*, tomo I di aprile, 83-90; il suo traduttore fu Paolo diacono, che la dedicò *Carolo gloriosissimo regi*, il quale era o Carlo il Calvo nell'875, o Carlo il Grosso nell'881.

Secondo il Caracciolo si dovrebbe pure attribuire a Giovanni diacono l'omelia in onore di S. Agrippino, ma non ve ne sono prove sicure.

Pietro fiorì tra il 940 e 960, Giovanni avrebbe scritto tra il 900 circa e il 910.

Con la cronologia di Pietro suddiacono napoletano ha stretta relazione la questione della data del codice corsiniano 777, assai importante per l'agiografia napoletana, essendo tutto composto di leggende di Santi napoletani.

Questo codice dal Bethmann, che ignorando la questione del tempo, lo giudicò spassionatamente, fu creduto del secolo XI (1). Prima del Bethmann, il Mazzocchi, senza averlo visto con gli occhi suoi, ne aveva fissato il tempo tra gli anni 1220 e 1280, unicamente per il presupposto che il vescovo Pietro di Napoli, al quale un certo Alberico dedicò la vita di S. Aspreno, contenuta nel medesimo codice, fosse Pietro vissuto dal 1226 al 1252 (2), e sull'autorità del Mazzocchi, ripeterono la stessa affermazione il Cassitto, *Acta sincera S. Maximi*, Roma, 1800, il P. Bollandista, che riportò questi stessi Atti di S. Massimo in *Acta SS.*, vol. XIII di ottobre, pag. 310, ed il Waitz. Il Waitz, sebbene per la forma dei caratteri inclinasse a credere il codice scritto nel secolo XI, come già aveva creduto il Bethmann, tuttavia accettò l'opinione del Mazzocchi, adducendo la stessa ragione che aveva addotto costui, il presupposto che a Napoli non vi fosse stato alcun Pietro vescovo, anteriore al Pietro del 1226-1252 (3). I Bollandisti nel *Catal. Hagiograph.* delle biblioteche di Roma si attennero al giudizio del Waitz.

Ora però che sappiamo esservi stato un Pietro vescovo di Napoli nel secolo X, ed un altro verso il 1090, non vi è più

---

(1) Veramente nel Pertz, *Archiv.*, XII, 394, dove sta il giudizio del Bethmann, è stampato secolo IX; ma il Waitz, *Mon. Germ. Hist. Rer. Langob.* corregge in XI il manifesto errore di stampa. Dico manifesto, perchè nel codice, di cui trattiamo, si contiene la vita di S. Severo, scritta dall'arciprete Giovanni, il quale menziona Enrico III imperatore, ed è quindi posteriore al 1046; nè ciò poteva sfuggire al Bethmann.

(2) *De SS. Neapol. Eccl. Episcoporum cultu*, Napoli, 1533, pag. 328.

(3) Il Waitz, *Script. Rer. Langob.*, 401, scrive: " Cujus scripturam beneventanam saeculo XI tribueres, nisi f. 87 etiam Acta Aspreni episcopi " ab Alberico scripta jussu Petri archiepiscopi qui ab anno 1226–1252 sedem " Neap. tenuit, contineret ". Come osservo nel testo, Alberico non dà il titolo di arcivescovo a Pietro.

nessun motivo di aderire all'opinione del Mazzocchi, tanto più che Alberico non dà a Pietro il titolo di arcivescovo, che gli avrebbe dovuto dare se avesse scritto dopo il secolo X, quando i vescovi di Napoli furono elevati alla dignità arcivescovile, nè in tutta la vita di S. Aspreno vi è parola alcuna, da cui questa possa giudicarsi scritta in tempo inferiore al secolo X. Noi possiamo quindi attenerci all'opinione del Bethmann, confermandola e dichiarandola con quella del Capasso (1), il quale, dopo esaminato il codice, giudicò non potersene ritardare l'età oltre il principio del secolo XII. Tale è pure il giudizio del mio ottimo amico dott. Giovanni Mercati, il quale così me ne scrisse: " Il Bethmann lo giudicò del secolo XI, e a me pare che abbia " ragione nel senso che la scrittura è del secolo XI o XII incipiente ", e aggiunge ancora: " Parmi impossibile che il codice discenda a mezzo il secolo XII ".

---

(1) *Monumenta Neap. Ducatus, Cronache*, pag. 238.

Neos Dionysos.

Poeti e letterati alla corte di Tolemeo IV Filopatore.

Nota di AUGUSTO ROSTAGNI.

I. — Sullo scorcio del secolo III av. Cr.

Gli ultimi decennii del secolo III av. Cr. non sono, nella storia della letteratura ellenistica, nè i più chiari nè i più comunemente noti. Fin che si parla di Teocrito e di Callimaco, di Arato e di Apollonio Rodio, di Asclepiade e di Leonida, ognun vede che siamo alla presenza di un movimento poetico pieno di significato e di armonia. Ma questi poeti fioriscono tutti nella prima metà del secolo: l'opera loro coincide col regno di Tolemeo II Filadelfo (284-47) o, al più, coi primi anni del successore, Tolemeo Evergete, non oltre: Apollonio Rodio stesso, il quale figura fra i più giovani della schiera, chiude i suoi giorni, alla direzione della Biblioteca di Alessandria, verso il 230 (1). Nessuno ci dice qual corso abbia seguìto, dopo d'allora, l'arte, di quali processi abbia intessuto la sua tela. Un grigio velame di uniformità è lasciato incombere sull'ampiezza de' tempi. L'attenzione si perde nello studio di fatti isolati e frammentarii; si rinchiude nei ceppi di certe categorie convenzionali che la obbligano a prescindere dal complesso della vita e del pensiero. Eppure, se è necessario dare al periodo della esultante fioritura i giusti contorni, non meno indispensabile è stabilire anche per l'età successive le condizioni e i caratteri proprii. Partico-

---

(1) Ciò, infatti, si ricava dal catalogo anonimo dei bibliotecarii di Alessandria, pubblicato recentemente nel X vol. dei *Papiri di Ossirinco*, pagina 99 sgg.; cfr. per questa e per altre deduzioni consimili il mio scritto, *I bibliotec. aless. nella cronologia della letter. ellenistica*, negli " Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino ", L (1914-15), pp. 241 sgg.

larmente, perciò, si potrà dire di avere giovato alla retta concezione dell'ellenismo, quando, com'io mi propongo, queste condizioni e questi caratteri vengano cercati nella capitale stessa dell'Oriente greco e negli anni in cui, per essere appena scomparse le figure maggiori, più imperiosa si affaccia la domanda, più penoso l'imbarazzo. Una superba fiammata aveva pur allora illuminato il mondo alessandrino. E non doveva essa, naturalmente, far sentire le conseguenze della sua azione? E non dovevano l'abitudine e l'esempio dare slancio a nuove, continue creazioni?

Certo, gli scrittori cui siamo per avvicinarci sembrano a prima giunta affondare nella confusione, nell'oscurità, nello smarrimento: di alcuni neanche l'epoca trovasi ancora fissata con speciale determinazione; de' più le membra appaiono disgregate ed inerti: vagolano tutti, come ombre sperdute, senza una mèta. Ma se codesti elementi a cui la tradizione ci condanna son cosa miserevole, acquisteranno però valore, quando, anzichè essere abbandonati a sè stessi, si pongano nel loro giusto clima, si rianimino dei reciproci riflessi, si connettano e si riconducano a quel moto generale di coltura del quale hanno vissuto.

E perchè, infatti, a insegna e quasi a sostegno del nostro studio abbiamo preso il nome di Tolemeo IV Filopàtore? Non per la semplice convenienza di adottare una indicazione cronologica, ma perchè dalla persona appunto del Filopatore ricevono, in gran parte, unità ed avviamento le poco perspicue manifestazioni della letteratura contemporanea. La corte di Alessandria aveva avuto, sì, fin da principio, nello svolgersi delle arti e delle scienze, un'importanza eccezionale. Tuttavia, che accentrasse ed ordinasse già allora nel suo seno, con indirizzo dominatore, le maggiori energie degli intelletti, sarebbe esagerazione l'affermare. Tale anzi fu il primo e più florido periodo della civiltà ellenistica, che le sue meraviglie cospargeva tutt'intorno, sul litorale asiatico, nelle isole, in Macedonia alla corte di Antigono Gonata, in Siria al sèguito di Antioco Sotere, in Atene. Era come un balzo concorde e spontaneo di tutt'intero l'orbe ellenico unificato ed ingrandito dalle conquiste di Alessandro Magno. Solo verso la metà del secolo, col modificarsi delle condizioni politiche e con l'assiduo accrescersi degli studii e delle istituzioni sotto i Lagidi, il predominio di Ales-

sandria venne ad accentuarsi fortemente. Difatti, in Atene le rappresentazioni drammatiche, che fino a' tempi della Guerra di Cremonide avevano continuato a prodursi, si può dire, senza interrompimento e con esito non infelice, decadono oramai; le scuole filosofiche, intorno a cui tanta luce di dottrina e d'ingegno si era accolta, illanguidiscono esse pure. Quanto poi alla Macedonia, non se ne parli neanche: Arato, Licofrone, Menedemo, Omero di Bisanzio e gli altri tutti che vi erano convenuti, non esistono più, nè han lasciato successori. La visione dunque si restringe, ma guadagna in profondità ed in rilievo. Se un'orbita nuova, per il prossimo avvenire, si annunzia — cioè la scuola di Pergamo, destinata a rivaleggiare con l'Egitto —, essa in fondo contribuisce a segnare anche più netto il primato a cui sul fertile suolo di Alessandria la coltura si è innalzata.

II. — **Il re drammaturgo.**

Tipo stravagante di re letterato, Tolemeo IV rispecchiava nella fisionomia e nelle tendenze i più spiccati caratteri dell'epoca sua. Salito poco più che ventenne, nel 221, sul trono egiziano, egli non fece che proseguire la politica inaugurata già, negli ultimi tempi, dal padre suo, l'Evergete: politica fiacca ed inerte, ignara di ambizioni e di idealità, chiusa in una angusta cerchia di interessi pratici ed immediati (1). Evitare il cozzo dei grandi avvenimenti contemporanei, non intervenire nelle lotte in cui i rimanenti stati ellenistici si travagliavano, godere i beneficii della potenza e delle ricchezze anteriormente acquisite: questa la linea di condotta dietro a cui, per opera dell'Evergete prima, del Filopatore poi, la monarchia dei Lagidi si pose, incamminandosi via via a quel suo tardo ed inglorioso disfacimento. La battaglia di Rafia, nella quale inaspettatamente il giovine principe ebbe a trarre vittorioso la spada per difen-

(1) Veramente l'opinione comune degli studiosi è affatto diversa: si dice che la decadenza politica dell'Egitto cominciò col Filopatore soltanto, e che il regno di Tolemeo Evergete fu attivo e glorioso. Da questo pregiudizio si allontana E. Pozzi, “ Mem. dell'Acc. di Torino „, 1913, pp. 380-1.

dere dall'assalto dei Seleucidi il retaggio degli avi, non fu che breve impeto cui successe tosto la calma e l'afa ordinaria. Dal campo dell'azione egli si affrettava al ritorno, desideroso di riprendere in Alessandria la sua vita consueta. E ad Alessandria, dove lo si conosceva così bene, si rimase abbastanza meravigliati vedendolo rientrare in quel novissimo aspetto di guerriero e di vincitore (1). Veramente, non è a dire che nell'interno dello Stato il terreno fosse sgombro di difficoltà. Problemi gravi urgevano: guerre civili, congiure di palazzo, insurrezioni militari pullulavano (2). Un pericolo difatti si veniva sviluppando, cagion prima di debolezza nella storia della monarchia tolemaica: voglio dire il continuo scemare dell'elemento greco, l'accrescersi preoccupante ed aggressivo delle stirpi indigene. Questa mutazione, la cui efficacia dovè naturalmente ripercuotersi su tutti quanti gli aspetti della vita, ha infiltrato nel regno del Filopatore per la prima volta il tarlo del disordine (3). Si sente che la civiltà ellenica, trapiantata sul vinto suolo, è costretta a smussare le sue velleità dominatrici ed esclusorie. L'aristocrazia delle persone colte concede, ogni giorno, maggior attenzione alla folla circostante. Sembra talora di vedere, anche nelle fonti letterarie, l'ondata della razza mista che avanza, che impone i suoi gusti e le sue passioni. La strana gazzarra risuona in certo modo fin sulle porte del più puro classicismo e della più venerata tradizione. L'impertinenza, la licenziosità proverbiale del popolo di Alessandria, avvezzo a lanciare anche alla volta del principe e dei potenti i suoi motti e

---

(1) È questa una fine osservazione di Polibio, V, 87, 7.

(2) Polibio, V, 107, 2-3 accenna alle ribellioni degli Egiziani e ad altri tumulti, ma fa conto di discorrerne altrove. Il libro dov'egli ne discorse di proposito è perduto. Ripariamo con poche cognizioni disperse e con opportune induzioni. V. per i particolari Niese, *Gesch. der griech. u. mak. St.*, II, pp. 403 sgg. e, meglio ancora, Bouché-Leclercq, *Hist. d. Lag.*, I, pp. 314 sgg.

(3) È noto che Polyb., XXXIV, 14 descrivendo l'Alessandria dei proprii tempi, da lui stesso visitata (verso il 140 av. Cr.), la dice abbandonata ormai dai Greci e tutta nelle mani degli Egiziani. Una tale condizione di cose non può non risalire naturalmente, per le sue origini, ad epoca anteriore: gli indizii che addurremo in seguito ci inducono a porne qui la prima manifestazione.

le sue caricature procaci, viene non di rado a colorire le opere d'arte (1).

Tali adunque le tendenze elaboratrici che si agitano negli estremi decennii del secolo III. Indizio sono, fra l'altro, alcune riforme ed innovazioni di ordine politico allora appunto tentate: come l'ammissione degli egiziani nelle file dell'esercito, e il riordinamento della cittadinanza alessandrina sulla base di una più larga partecipazione delle genti straniere (2). Ma qual fu in codesti atti l'opera vera e propria del re? Dire che Tolemeo IV Filopatore, primo nella serie dei Lagidi veramente fannulloni ed inetti, attendesse alle cure dello Stato, sarebbe per lo meno un'ironia. Il governo era nelle mani dei ministri e dei favoriti: di Sosibio e di Agatocle, figure, per parte loro, assai poco simpatiche e rassicuranti. Tuttavia, se c'è cosa nella quale ancora l'impronta personale del sovrano si dimostri, è precisamente in queste ed in simili riforme, alle quali egli ha portato il contributo delle sue velleità, dei suoi ghiribizzi e delle sue infatuazioni letterarie e religiose. Ad introdur feste e cerimonie, ad inventar denominazioni e rituali, il Filopatore era sempre disposto. Si trattava di riordinare, come abbiamo detto, sur un nuovo piano la cittadinanza della Capitale? Ed egli volle che la prima tribù prendesse nome da Dioniso, e a' demi di questa tribù studiosamente applicò nomi leggendarii del ciclo dionisiaco, Deianiris, Ariadnis, Altheis, Thestis, Euanthis, Maronis e così di seguito: perchè Dioniso era il suo iddio prediletto, a cui i suoi atti e i suoi pensieri si conformavano, da cui infine dipendevano le forme d'arte e di culto più gradite alla sua fantasia. Lo stesso fece con la genealogia ufficiale della sua casa. L'albero genealogico, com'era stato foggiato dai suoi predecessori, aveva bisogno di essere riveduto? Ed ecco che in luogo

---

(1) Su queste disposizioni degli *'Αλεξανδρεῖς* cfr. G. Lumbroso, *L'Egitto*², pp. 101-2.

(2) Sul primo di questi provvedimenti cfr. Bouché-Leclercq, *Hist. d. Lag.*, IV, pp. 6 sgg. Sul secondo v. il frammento di Satiro, *περὶ δήμων Αλεξανδρέων* in *F. H. G.*, III, pp. 164-5 e cfr. Meineke, *Analecta alex.* pagine 346 sgg.; G. Lumbroso, “ Mem. di Torino „, 1873, pp. 245-57, e più particol. Perdrizet, “ Bull. Soc. arch. d'Alex. „ N° 12 (1900), pp. 53-82; Mitteis u. Wilcken, *Grundz.* I 1. pp. 15-6. Per la data (217/6) v. B. Motzo, “ Atti Accad. Sc. di Tor. „ XLVIII (1913), p. 581.

di Eracle egli sceglieva, a capostipite mitico, Dioniso, facendo prevalere sulla discendenza maschile per mezzo di Lago, sino allora invalsa, la discendenza femminile per mezzo di Arsinoe (1). Che più? Dioniso, ' novello Dioniso ', chiamavasi egli stesso, ripetendo nella propria persona l'imagine del nume e dell'antenato (2). Difficile è dire quanta parte in cotali manifestazioni avesse l'effettivo e sincero influsso dei culti e delle credenze dinastiche, e quanta ne avessero invece i capricci del letterato e del monarca. Ma se, per esempio, Tolemeo II Filadelfo erasi assimilato ora a Zeus e ora ad Apollo, di modo che naturalmente Callimaco negli *Inni* ebbe di quando in quando a confondere effigie del Dio e effigie del Principe, e se, nei versi di Teocrito e di altri contemporanei, Berenice era stata appaiata con Cipride, non stupisce che il quarto Tolemeo ponesse nel vecchio iddio delle vendemmie e degli agoni drammatici la propria rappresentanza celeste. D'altronde, già Alessandro, esempio memorabile agli occhi di ogni principe ellenistico, aveva avuto nome da Dioniso: aveva, al pari di Dioniso, percorso in trionfo le terre d'Oriente; poeti drammatici gli avevan fatto corteo; per tutte le tappe della spedizione appositi attori — che chiamavansi a piacere o ' seguaci di Dioniso ' o ' seguaci di Alessandro ', *Διονυσοκόλακες* o *Αλεξανδροκόλακες* — avevano in suo onore allestito le scene; egli stesso anzi, a quanto dicevano, aveva composto, dopo la vittoria sull'Idaspe, un dramma satiresco, l'*Agèn* (3).

I fondamenti dunque c'erano già, senza fallo, nella tradizione. Ma a dar loro rilievo si aggiungeva, nel caso del Filopatore, da un lato una maggiore invadenza di concetti e di usi orientali, d'altro lato una più precisa e cosciente vocazion letteraria, fatta di dilettantismo e di manìa. Tolemeo IV — tutti sanno — fu il principale ordinatore e propugnatore di quella curiosa concezione del dio-re che i Grecomacedoni, fin dagli inizii, a contatto col popolo indigeno, avevano creduto bene di

---

(1) Cfr. Lumbroso, Mem. cit., p. 232.

(2) Clem. Alex., *Protr.*, IV, 54, 1.

(3) Su Alessandro-Dioniso vedi W. Otto, *Priester u. Tempel im hellen. Aegypt.*, I, p. 149. Sui poeti drammatici che accompagnarono la spedizione: Welcker, *Die griech. Trag.*, III, p. 1239 sgg. Sugli attori: Athen., XII, p. 538 *f*.

accettare. Ubbidendo ora alla fatale necessità de' tempi, che il centro di attrazione dalle mani dei Grecomacedoni voleva spostato verso gli Egiziani, Tolemeo IV cercò di conciliarsi gli elementi del paese; dedicò templi ai numi locali; combinò orgie e misteri di tutto l'Oriente (1). Sui confini dell'incredulità e dell'indifferenza, un oscuro fondo di superstizione, di stravaganza, di entusiasmo traeva le coscienze vuote e sperdute ad accogliere, ad accumulare le forme incomprese di tutte quante le religioni. Tolemeo era l'iniziato e il sacerdote dei più diversi iddii. Riti barbari ed orgiastici si mescolavano nella sua mente coi gusti di una vita sfarzosa e corrotta. Non chiamavasi Dioniso soltanto, ma Gallo; portava incise sul proprio corpo le foglie dell'edera (anche i sudditi Giudei, se volevano entrare nella cittadinanza alessandrina, dovevano, per suo ordine, esserne marchiati); al simbolo di Bacco congiungeva le insegne dei sacerdoti di Cibele (2).

Il ritratto — confessiamolo sùbito — ha tutte le apparenze di un quadro di maniera. Eppure, non può essere altrimenti. Lo storiografo contemporaneo, Tolemeo di Agesarco, che visse a corte e lasciò sul Filopatore un'opera intiera, così ci ha descritto l'indole del suo sovrano. L'ostentazione di ogni atto, l'esaltamento ieratico e teatrale erano di questo monarca le caratteristiche proprie. Lo si vedeva affogare nel vizio, trascinar le sue giornate in mezzo ai favoriti, alle ballerine ed ai buffoni, non senza l'intervento di poeti, grammatici, filosofi, i quali, tutti assieme, lo aiutavano a mescere vino e dottrina (3). Lo si vedeva, invasato, percorrere la reggia ed agitare il tiaso o far strepito coi timpani sacri (4). La volgarità turpe e salace, la volgarità che si avvoltola nei bassi fondi del motteggio e della lussuria, era

---

(1) Cfr. Bouché-Leclercq, *Hist. d. Lag.*, I, pp. 329 sgg.

(2) *Etym. M.*, s. v. *Γάλλος*. Cfr. pure Plut., *Cleom.* 36, 4 *μητραγύρτης βασιλεύς*. Quanto ai Giudei v. *III Maccab.*, 2, 29 e cfr. l'interpretazione di B. Motzo, *Esame stor.-crit. del III Macc.* in " *Entaphia.* In Mem. di E. Pozzi " (Torino, 1913), p. 228.

(3) Polyb., XIV, 12; Plut., *Cleom.*, 35, 2; Athen., VI, p. 246 *c*. La fonte di queste informazioni è, secondo ogni verisimiglianza (Ateneo per parte sua lo dichiara esplicitamente), il sullodato Tolemeo di Agesarco *ἐν τοῖς Περὶ τὸν Φιλοπάτορα ἱστορίαις* (*F. H. G.*, III, pp. 66-7).

(4) Plut., *Cleom.*, 36, 4.

di suo gradimento. E la coltivava, a bella posta, in quelle sue comitive di giullari o *γελοιασταί*; la assecondava nell'opera degli scrittori suoi protetti. Feste e cerimonie religiose si risolvevano esse pure in solenni baldorie. Eratostene che fu a capo della regia biblioteca per tutta la durata di Tolemeo IV (lo aveva eletto il padre del Filopatore, Tolemeo Evergete, verso il 230, dopo la morte di Apollonio Rodio), Eratostene, dico, ce ne fa conoscere una di tali cerimonie, intitolata *Λαγυνοφόρια*, cioè Festa dei fiaschi, che era un campione di grossolanità e provocava il disgusto della regina Arsinoe, donna gentile, ben diversa dal suo consorte (1).

Ma non contentiamoci delle prime impressioni, le quali, per quanto sieno vere, rimangono sempre alla superficie. Più volte abbiamo parlato di ambizione letteraria e di dottrina. Si deve giungere infatti a riconoscere — e sarà il perno appunto del nostro studio — che nel fondo di tutti quegli atteggiamenti spettacolosi, di tutti quei costumi or salaci ora grotteschi di cui il Filopatore si compiaceva, era la passion consapevole e, quasi, l'intendimento filologico di ripetere al vivo certi momenti della civiltà e dell'arte classica. Non è qui il caso di precorrere i risultati dell'indagine e dire qual rigoglio persino di studii esegetici, storici, grammaticali abbia fatto corteggio all'opera del monarca e quali condizioni la letteratura di questi tempi si sia create perciò in confronto con la letteratura dei tempi immediatamente anteriori. Si vedrà meglio di volta in volta. Ora è chiaro che lo strepito bacchico di cui Tolemeo si circondava era destinato, in suo pensiero, ad imitare le forme di civiltà e di vita nelle quali la vecchia poesia dei ditirambi e degli agoni drammatici aveva messo radici. I così detti *γελοιασταί*, che gli facevan corona e con cui egli amava gareggiare di lazzi e di oscenità, rassomigliavano a quei loro antichi progenitori di Atene

---

(1) Eratosth.: *ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ συγγράμματι Ἀρσινόη ap.* Athen., VII, p. 276 *b-c*. — Che si tratti di Arsinoe Filopatore, non di Arsinoe Filadelfo come alcuno inavvedutamente intese, è indubitabile: cfr. Bouché-Leclercq, *Hist. d. Lag.*, I, p. 328, 2. — Quanto alle date del bibliotecariato di Eratostene mi richiamo allo scritto cit. " Atti dell'Accad. di Torino ", L, pp. 258 sgg. — Sull'uso del *λάγυνος* e su queste feste medesime vedi ora: G. Leroux, *Lagynos* (Paris, 1913).

e di altre città greche, i quali, nei giorni delle Dionisie o delle Lenee, sciamando per la campagna, *peruncti faecibus ora*, avevano divertito con ogni sorta di buffonate il popolino. Certo: spassi e amenità erano cose naturali alla vita di corte, senza bisogno di tanta archeologia; e ravvisarvi i riflessi di un mondo così lontano, di un mondo idoleggiato dalla fantasia ma ormai assolutamente scomparso, era, più che altro, sogno od astuzia di mente corrotta. L'afflato dionisiaco, questa specie di inspirazione libera e dicace che cercava di affermarsi nella letteratura, non aveva nulla che fare con l'afflato dell'epoca eroica; era nutrito coi filtri di una civiltà evoluta e faticosa, non rompeva, come grido selvaggio, dalle vergini forze della natura. Ma non importa: qui appunto sta il buono. Idee fallaci che tengono il campo, principii filologici che pretendono di dar norma alla realtà cotidiana, contaminazioni che si intrudono e si moltiplicano: sono i segni sopra cui il periodo letterario che ora studiamo potrà fino ad un certo punto essere ricostrutto. È interessante, è singolare lo spettacolo di questo principe che, sodisfacendo ai capricci del proprio cervello, crede rinata l'età di Dioniso, e coltiva con amore la vecchia pianta della Tragedia e della Commedia, mentre intorno a lui grammatici e storici lavorano a ricercare ed illustrare i monumenti della Tragedia, della Commedia medesima. Sì, questo principe voluttuoso, che i contemporanei chiamarono *Τρύφων* (1), ha avuto l'ambizione, non solo di proteggere i poeti, ma di essere poeta egli stesso. Fu un autentico precursore di Nerone; diede di piglio al flauto ed alla lira, salì con volto raggiante le scene, desideroso " del nome che più dura e più onora „ (2). Si dànno ad ora ad ora nella storia della civiltà momenti in cui l'impero delle lettere è così forte, l'affetto per le cose dell'ingegno così universale che non sembra esserci gloria al mondo se non pel poeta e pel letterato: principi ed uomini politici cercano di immortalarsi con gli scritti. Di tal sorta è l'età nella quale tocca vivere a Tolemeo Filopatore. L'aria che vi si respira è impregnata di adorazione per le arti belle. Ogni libro che a prezzo di fatiche e

---

(1) Plin., VII, 208.
(2) Sulle ambizioni musicali in modo speciale, v. Iustin., XXX, 1, 9.

d'oro venga ad accrescere la già ricca biblioteca di Alessandria, è sacro. Le ombre dei Grandi destano intorno a sè quasi un rispetto religioso. Nell'ardore dell'entusiasmo che lo agita, Tolemeo non fa differenza fra missione divina e missione letteraria. Gran fondatore di templi, egli non ha mancato di costrurne uno al dio delle lettere greche, Omero (1); ha istituito, in nome delle Muse e di Apollo, gare poetiche (2). S'intende quindi come abbia cercato di elevare sul piedestallo della gloria letteraria anche la propria persona. Un sentimento dominava in lui: il sentimento che Nerone espresse, moribondo: *qualis artifex pereo!*

Ma la sorte non lo ha favorito. E noi siamo qui oggi ad indagare invano i caratteri e le doti di quella sua persona di poeta. Sappiamo, perchè ce l'ha detto Eratostene, che il padre Evergete gli aveva fatto insegnare 'tutto ciò che fosse caro alle Muse ed ai re' (3). Abbiamo notizia di una sua tragedia intitolata *Adoni*, alla quale aveva composto un commento il suo

---

(1) Aelian., *v. h.*, XIII, 22.

(2) Ciò si ricava da un brano di Vitruvio, VII, 4 sgg., brano il quale, poichè ci fornirà più innanzi altri dati, e poichè viene generalmente respinto quasi sia inattendibile, ha bisogno di essere qui brevemente esaminato. Lo scrittore parla di un Tolemeo, che appare poi essere il Filadelfo, il quale, indotto dalla rivalità dei re Attalici, si diede a favorire gli studii ed istituì *Musis et Apollini ludos*. Nell'occasione di uno di questi agoni, a far parte della giuria fu chiamato un giovane ancora ignoto che studiava sempre nella regia biblioteca, Aristofane: il re ammirò la dottrina di Aristofane *et* [*eum*] *supra bybliothecam constituit.* — È chiaro che in questi termini il racconto non regge, giacchè Aristofane non viveva ancora od era bimbo ai tempi del Filadelfo, e d'altra parte ai tempi del Filadelfo non poteva darsi rivalità con gli *Attalici reges*. Tuttavia, respingere senz'altro il sostrato dei fatti mi sembra arbitrario ed ingiusto. Vitruvio non inventava di suo, ma attingeva, a quanto pare, da Varrone (v. E. Oder, " Philol. ", Suppl. VII, p. 340). La soluzione è semplice. Basta supporre uno scambio nel nome del re: non è la prima volta che l'un Tolemeo sia preso per l'altro, vuoi dal copista disattento, vuoi dall'autore stesso. Vitruvio, per parte sua, è maestro in fatto di granchi. Che qui in luogo del Filadelfo si intenda il Filopatore, è suggerito dal contenuto del racconto, dall'età di Aristofane, dalla rivalità dei re Attalici.

(3) Così nel ben noto epigramma votivo, presso Eutoc. in Archim., III, p. 112 Heib., sagacemente commentato dal Wilamowitz, " Gött. Nachr. ", 1894, pp. 15-35.

stesso favorito Agatocle, fratello dell'amante Agatoclea (1). Come si vede dal soggetto, l'iniziazione orgiastica del re Dioniso-Gallo era in stretti rapporti col suo mondo poetico. L'autore faceva uso di un espediente euripideo, introducendo sulla scena Eco a ripetere e diffondere i lamenti di Afrodite. E qui importerebbe conoscere qual parte avessero nella concezione dell'opera i riti e le impressioni attinte alla diretta pratica del culto. Ma la tradizione è muta.

III. — I seguaci del novello Dioniso.

Che la persona di Tolemeo Filopatore, con le sue orgie religiose, con le sue ambizioni drammatiche, rappresenti e comprenda in sè, come ho detto, i principali caratteri della letteratura contemporanea, ciò potrà essere in breve dimostrato procedendo all'esame dei varii scrittori, nei quali è somiglianza appunto e concordia di principii, è unità di opere e di intenti. Ma, prima di tutto: non sarebbe per avventura desiderabile che alcuno di questi scrittori ci parlasse egli chiaramente delle sue relazioni col Sovrano e ci ponesse quindi sott'occhio, come realtà in atto, non come puro sostrato ideale, questo difficile intreccio d'influssi e di dipendenze su cui è chiamata la nostra attenzione?

Ecco infatti con quali parole un poeta contemporaneo si rivolgeva ai seguaci del ' novello Dioniso ', affermando, non senza entusiasmo, di essere fatto della loro schiera, iniziato ai medesimi misteri, per bontà del Sovrano:

Οὐ βέβηλος, ὦ τελεταὶ τοῦ νέου Διονύσου,
κἀγὼ δ' ἐξ εὐεργεσίης ὠργιασμένος ἥκω,
ὀδεύων Πηλουσιακὸν κνεφαῖος παρὰ τέλμα (2).

---

(1) Schol. *in Aristoph. Thesm.*, v. 1059. Cfr. Nauck, *Trag. graec. fragm.*², p. 824. — È notevole che una tragedia *Adoni* aveva composto, altro re drammaturgo, Dionisio il Vecchio di Siracusa: Nauck, p. 793.

(2) Il frammento si trova presso Hephaest., p. 56 Consbr. come esempio di metro priapèo. Ad identificare il *νέος Διόνυσος* con Tolemeo Filopatore

Evidentemente a Pelusio erano state bandite dal re Tolemeo cerimonie solenni; e il poeta accorreva, insieme con gli altri, al romore dell'orgia, costeggiando — com'egli dice — fra le tenebre quei luoghi paludosi. Pelusio era al confine orientale dell'Egitto, fortezza lanciata sulle porte dell'impero a difenderle contro la Siria. Che fosse cosa ordinaria per la Corte (e per la Corte del Filopatore, il quale amava gli ozii e la clausura di Alessandria) raccogliersi là, in luogo poco piacevole, a celebrare sacrificii e misteri, non si può ammettere tanto facilmente. L'appello del poeta ci richiama a qualche momento particolare: se così è, non tornerà male supporre che sia stato scritto in occasione della guerra contro Antioco il Grande (l'unica che Tolemeo IV abbia condotto), quando cioè, nel 217, il giovane monarca faceva a Pelusio i preparativi dell'impresa e si propiziava con ogni sorta di riti la divinità. Invero, poesia e superstizione non si scompagnavano mai dalla Corte.

L'autore di questi versi non è un nome ignoto: è Eufronio, nativo di Cherronesos, in vicinanza di Alessandria (1). Guadagnarlo alla nostra causa ed introdurlo nella cerchia di Tolemeo Filopatore, non significa soltanto dar sede e consistenza ad un'ombra finora sperduta: significa compiere nuovi progressi nella comprensione di quella cerchia medesima. Eufronio non è figura di un unico aspetto; con la varietà delle sue attitudini egli ci apre, per così dire, le diverse ramificazioni attraverso le quali il movimento di coltura da lui rappresentato ebbe ad esplicarsi.

---

fu A. Meineke, *Anal. alex.*, pp. 341-8. È notevole però che da questa acuta intuizione del Meineke nessun profitto si sia tratto, nè presso Susemihl, *Gesch.*, I, pp. 281-2, nè, ch'io sappia, presso altri critici, allo scopo di giustamente collocare l'età del poeta e di illuminarne la persona, la quale, come vedremo, è tutt'altro che insignificante.

(1) Veramente presso Hephaest., l. c. il nome è Euforione, *παρ' Εὐφορίωνι τῷ Χερρονησιώτῃ*, e tale lo ritenne il Meineke pur distinguendolo dall'omonimo poeta calcidese. Ma il riscontro con Strab., VIII, p. 382 e con Choerob. Schol. Heph., p. 241 Consbr. induce a correggere, come ormai fanno la maggior parte dei critici, in Eufronio. Cfr. Cohn, in " Pauly-Wiss. ", VI, 1220-1; ibid., 1178. Una forma perfettamente legittima è invece, accanto ad *Εὐφρόνιος*, anche *Εὐφρονίδας* che si trova presso Suida, s. v. *Ἀριστοφάνης Βυζ.* e che è confermata da un papiro di Demetrio Lacone presso Crönert, *Kolotes u. Mened.*, pp. 106, 183.

Il suo nome presso gli antichi era soprattutto legato ad una speciale categoria di carmi: i così detti Carmi priapèi, di cui egli sarebbe stato inventore. È facile imaginare da quali criterii e da quali spiriti Eufronio sia stato condotto a cantare, con apposito ordine di componimenti e in metro lirico, l'osceno dio degli orti. I Priapei latini, anonimi e non, sono in massima l'eco di questo nostro autore. Che li abbia escogitati e messi in voga, fra le lascivie di un'orgia notturna e le dotte fatiche della biblioteca, un Alessandrino sull'estremo dugento, un Alessandrino cortigiano del re Dioniso-Gallo, non ci fa meraviglia. Era tanto naturale per un letterato di quella fatta, nutrito di quei costumi e di quelle impressioni, prefiggersi nel dominio dell'arte una provincia sua propria in cui potesse liberamente e originalmente stillare tutti i crassi vapori di quegli scherzi e di quelle lordure dello spirito di cui la Corte del Filopatore si compiaceva, scherzi e lordure che egli, da bravo filologo, considerava una preziosa risonanza del primitivo mondo comico e mimico, tornato di moda, ma che erano infatti il prodotto della corruzione contemporanea. Poichè anzi, a dir vero, non c'era nulla che meglio di codesto genere di opere rispondesse alle reali condizioni della società e della Corte. Un'ondata di misticismo — ho già detto — aveva invaso le coscienze alessandrine; ma era quello il misticismo che nasce dalla putredine e che va congiunto con le più brutali affermazioni di un mondo in decadenza: era l'ardore di chi cerca stordire nell'ebbrezza, coi sottili vizii della coltura, la tabe del proprio spirito. Rinascevano sul suolo d'Oriente le Baccanti ed i caproni antichi; sonavano gli urli delle processioni barbare ed incomposte; i miti più volgari parevano vivi; il rozzo Priapo si mescolava a tutti i misteri:

> .....tibia lumbos
> incitat et cornu pariter vinoque feruntur
> attonitae crinemque rotant ululantque Priapi
> maenades.

L'uomo dotto, l'uomo maturato dai libri e cresciuto all'indifferenza ed allo scherno, era preso dall'universale contagio; dava lustro al suo riposto armamentario di cognizioni mitologiche o religiose e, contaminandole con l'aria della società mo-

derna, le gettava, in forma di nuovi trovati e di possenti incentivi, nei vortici della ridda. Sembrava che a tutte quelle funzioni religiose, a tutti quei riti sonanti si dovessero accompagnare anche, di bel nuovo, le vecchie forme della poesia. La voce delle Muse riprendeva il suo posto nell'àgora e nel tempio.

Era dunque, dal punto di vista letterario, una tendenza di arcaismo questa che così si affermava: arcaismo materiato di ricerca paziente e minuta, inteso a contraffare ed acclimatare i più antichi monumenti. L'effetto che ne sortiva, era per lo più — come ben si può comprendere — profanazione e parodia.

Ma se come autore dei Carmi priapèi Eufronio è figura abbastanza significativa, assai più importante egli ci sembra per un altro aspetto: per l'opera che ha svolto nell'àmbito del teatro. Infatti, anche Eufronio fu (come il suo re Tolemeo Filopatore) poeta drammatico, fra i sette della famosa Pleiade alessandrina; e fu, in pari tempo, critico e commentatore fra i primi che lavorassero a rivendicare, illustrare e divulgare gli esemplari, ormai quasi dimenticati, della Commedia antica (1). Hai dunque, da una parte, la creazione originale, dall'altra l'esegesi filologica: attitudini governate entrambe da un unico intento e destinate a spiegarsi e caratterizzarsi reciprocamente. Non bisogna, a questo proposito, dimenticare che Eufronio fu maestro di Aristofane da Bisanzio, prossimo grande editore dei Tragici e dei Comici (2). Aristofane da Bisanzio ha respirato alla corte di Tolemeo IV; giovane ancora, ha avuto da questo sovrano un posto fra gl'impiegati della Biblioteca; ha assorbito dall'ambiente di feste, di occupazioni, di impressioni che formavano la delizia del novello Dioniso, i principii dell'opera propria (3). Un nucleo di filologi, e giovani ed anziani, gli stava attorno, ad iniziarlo od accompagnarlo per quella stessa via, da Eratostene, autore di un trattato *Della Commedia antica*, ad Apollonio *εἰδογράφος*, successore di Eratostene nella direzione della Bi-

(1) V. i frammenti in C. Strecker, *De Lycophrone Euphronio Eratosthene comicorum interpr.* Diss. 1884. — Sulla Pleiade, in sèguito.

(2) Suid., s. v. *Ἀριστοφ.* (il testo, un po' manchevole, è corretto da R. Schmidt, *De Callistr. Aristoph.*, p. 21).

(3) Cfr. il passo già sopra commentato di Vitruv., VII, 4 sgg.

blioteca, a Timachida, ad Asclepiade, tutti interpreti di questo o di quel drammaturgo antico (1). Sembrava che ogni studioso dovesse in questa età pagare il suo tributo all'opera di ricostruzione e riordinamento del teatro classico.

Certo, per noi codesta rinascenza — chiamiamola così — dionisiaca, che si palesa tanto nei tentativi di una nuova produzione originale quanto nella revisione critica dei testi antichi, è il fenomeno più largamente comprensivo e più profondamente dominatore della letteratura alessandrina sotto il quarto Lagide. Qui, anzi, il problema va affermato una buona volta in tutta la sua interezza. Non si tratta ormai di rintracciare e coordinare manifestazioni di un momento isolato e, per sè stesso, secondario della letteratura: si vuol comprendere per qual modo una forma dello spirito che aveva avuto vita gloriosa nel passato della nazione, e che era stata sottoposta a successivi cambiamenti, attragga ora la maggioranza degli intelletti e divenga pascolo favorito per le brame filologiche non meno che per le ambizioni creative. Sotto questa luce, Tolemeo Filopatore con la sua Corte ci rappresenta, meglio che per altro lato non sia possibile, l'epilogo del teatro greco.

Era un abisso quello che si frapponeva fra gli uomini della incipiente età ellenistica e le grandi creazioni del secolo V. Eschilo e Sofocle, Aristofane ed Eupoli apparivano ad un contemporaneo di Alessandro e dei Diàdochi ombre quasi incomprensibili. Infatti, attraverso il quarto secolo, il dramma sia tragico sia comico aveva perduto tutti, si può dire, i suoi caratteri più genuini da cui originariamente era stato marchiato nell'anima: l'esaltazione religiosa e fantastica, l'afflato lirico, il tripudio dei sensi trasportati ad una sfera superiore e diversa dall'umana. L'indice esteriormente più palese di questo mutamento era l'abolizione delle parti corali: abolizione la quale, mentre per un lato rispondeva al nuovo orientamento degli intelletti, dipendeva per l'altro lato dalle nuove condizioni materiali ed economiche che non permettevano più l'allestimento,

---

(1) Per l'identificazione dei meno noti fra codesti critici v. il mio scritto già cit., " Atti Accad. Sc. di Torino ", L, pp. 260 sgg. Sulla storia dei testi tragici e comici: Wilamowitz, *Herakles*, I, pp. 134 sgg.

costosissimo, dei cori. Uno spirito di realtà pratica e borghese veniva ad animare i nuovi frutti dell'arte. Il teatro, vivo e vero, dei tempi moderni, sulla fine del IV e sul principio del III secolo, fu costituito dalle commedie di Menandro e di Filèmone, prive di danza e di canto, prive di miti e di elementi soprannaturali, materiate di pura e mediocre umanità: fu costituito, se si vuole anche, dalle tragedie di Cherèmone e di Timone destinate più alla lettura che alla rappresentazione (1).

Ma a questo stato di cose, che è il prodotto di un'età creatrice, doveva succedere presto un avviamento affatto diverso, sia per le speciali condizioni degli imperi ellenistici, i quali, dediti al lusso ed alla pompa, erano naturalmente portati a ristabilire lo splendore delle primitive rappresentazioni, con coro ed apparato coreografico; sia per la sempre crescente invasione della filologia che tendeva essa pure a conoscere e ripetere con fedeltà esploratrice ed imitatrice i monumenti classici. E potevano gli agoni drammatici e le processioni bacchiche essere dimenticate nella lista dei giuochi di cui i monarchi amavano dotare, secondo l'uso greco, le loro città? E non era per Alessandria una gloria il vedere rinascere nel proprio seno le feste attiche, particolarmente le tanto celebrate Dionisie? L'allegra comitiva di Bacco coi Satirelli e coi Sileni, come un giorno sulle balze dell'Imetto, scalpitava ora sulle sponde del Nilo. Nella festa isolimpica istituita da Tolemeo Filadelfo in onore del padre defunto, primo ad attrarre gli sguardi degli spettatori era, per la sua sontuosità, il drappello di Dioniso (2). Apposite corpo-

---

(1) Importanti osservazioni sulla decadenza dei cori v. in Bethe, *Prolegom. z. Gesch. d. Theat.*, pp. 248 sgg. Contro il Bethe si levarono Dörpfeld-Reisch, *Das griech. Theater*, pp. 258 sgg. e Körte, " Neue Jahrb. f. Kl. Alt. ", V (1900), pp. 81 sgg.; " Hermes ", 1908, pp. 41 sgg., negando che mai i cori sieno stati aboliti in quanto di essi sussiste menzione nel teatro ellenistico. Credo che un grave equivoco storico stia in tutta codesta questione, e mi propongo di tornarvi sopra, con più agio, altrove, ad ordinare ed interpretare secondo il mio principio le varie testimonianze. — Naturalmente (com'è noto) i cori segnati nei papiri di Menandro alludono a semplici intermezzi teatrali estranei alla concezione del dramma. Le migliori osservazioni su ciò ha Leo, *Der Monolog im Drama,* " Gött. Abh. ", 1908, pp. 41-4.

(2) Notissima la descrizione che ne fa Callisseno ap. Athen., V, pagina 196 sgg.

razioni di attori o *Διονύσου τεχνῖται* col proprio sacerdote, *Ἱερεύς*, venivano sorgendo, non solo nella capitale, ma nei varii centri dell'impero, ed assorbivano per il loro mantenimento buona parte del tesoro regio (1).

Dunque: se ancora la poesia drammatica era chiamata a fiorire sulle terre ellenizzate, essa non poteva non prendere il cammino che le era consigliato dalle naturali condizioni dell'ambiente: cammino il quale, scostandola dalla evoluzione della Commedia nuova, la riavvicinava ai suoi incunaboli e la conduceva a boccheggiare sotto i ferri della filologia. Sua scorta naturale e indispensabile dovevano essere le edizioni e i commenti degli Eufronio, dei Timachida, degli Aristofane da Bisanzio.

Tale fu infatti, a mio avviso, la storia del teatro sotto i Tolemei. Dopo un primo periodo di incertezza e di preparazione, durante il quale caratteri della Commedia e della Tragedia nuova si mescolano con vaghi tentativi di ritorno all'antico, vien fuori, sulla fine del III secolo e press'a poco negli anni di Tolemeo Filopatore, questa più larga e più concorde fioritura, impregnata — come ho detto — di arcaismo, colorata dalle contaminazioni bizzarre ed incomposte della civiltà contemporanea, assistita infine dal superbo incremento della filologia. La tradizione ha avuto sentore della sollecitudine particolare con cui il teatro fu coltivato alla corte dei Lagidi. Com'è noto, essa ha raccolto in forma di cànone, col nome pomposo di ' Pleiade ', sette fra i più eminenti tragediografi dell'età alessandrina: Omero da Bisanzio, Sositeo, Licofrone, Alessandro Etolo, Filisco, Dionisiade, Eufronio (ai due ultimi alcuni sostituivano, od aggiungevano, Sosifane ed Eantiade), e li ha considerati coetanei, ponendoli in attinenza con la Corte d'Egitto, anzi, più precisamente, con Tolemeo II Filadelfo (2). È facile però notare l'arbitrio e la tendenziosità di una simile attribuzione, che

---

(1) V. Otto, *Priest. u. Temp.*, I, p. 168. — Polyb., XVI, 21, parlando di Tlepolemo, tutore del giovane figlio ed erede del Filopatore, Tolemeo Epifane, scrive: *διερρίπτει τὰ βασιλικὰ χρήματα τοῖς ἀπὸ τῆς Ἑλλάδος παραγεγονόσι πρεσβευταῖς καὶ τοῖς περὶ τὸν Διόνυσον τεχνίταις.*

(2) Due sono le liste principali, in Choerob., *ad Hephaest.*, p. 236 Consbr. Altre varianti in Suida. Cfr. Susemihl, *Gesch.*, I, pp. 269 sgg.

riunisce in un fascio situazioni e tempi diversi. Di questi poeti alcuni non hanno nulla che fare con l'Egitto; altri, com'è il caso di Eufronio, sono posteriori di mezzo secolo a Tolemeo Filadelfo. Ora, se il regno di Tolemeo Filadelfo rappresenta infatti negli annali della poesia alessandrina il momento della più felice ed entusiastica creazione, ciò non può dirsi per la poesia drammatica in ispecie, nella quale non solo non contiene nulla di caratteristico, ma, ad onta delle apposite istituzioni, non sembra avere ottenuto alcun risultato. Teocrito ci parla degli agoni dionisiaci fondati da questo monarca e dei premii concessi ai poeti; ma più che a rappresentazioni drammatiche egli allude forse a canti ditirambici: " nè mai alcuno ai sacri agoni di Dioniso viene, esperto a modular l'arguto canto, a cui il re premio non dia degno dell'arte ". Di rappresentazioni vere e proprie non sappiamo nulla. Sappiamo, al contrario, che Menandro aveva declinato l'invito di recarsi ad Alessandria, e che Filemone, se pure vi si recò, vi si trattenne breve tempo; sappiamo che Licofrone ed Alessandro Etolo furono nella Biblioteca dei Tolemei ad ordinare per la prima volta i testi dei Comici e dei Tragici; ma anch'essi non rimasero, e delle loro opere drammatiche nessuna, che noi si conosca, è in attinenza con l'Egitto, mentre parecchie contengono l'eco della Corte di Antigono Gonata o dei circoli e delle scuole di Atene. Lo stesso dicasi degli altri autori: Omero di Bisanzio, Sositeo, Posidippo di Cassandria son tutti nomi legati o ad Atene o alla Corte di Macedonia. Un solo, Filisco di Corcira, ci compare innanzi, come sacerdote di Dioniso, nella processione bandita da Tolemeo Filadelfo in memoria degli Dei Soteri (1). Ha egli portato i frutti dell'opera sua sul teatro di Alessandria? Ignoriamo. Ma, se anche così fosse, la conclusione in sostanza non potrebbe mutare: i primi Tolemei non sono riesciti a costituire un centro vero e proprio di produzione drammatica, non sono riusciti ad eliminare la prevalenza, consuetudinaria, di Atene, e a trasportarla nel loro impero. E ciò, forse, non per altra ragione, se non perchè quegli scrittori stessi non avevano nulla di particolare, non costituivano un movimento armonico e definito, venivano

(1) Callix. ap. Athen., V, 198 c.

fuori per forza di abitudine, oscillando fra il nuovo ed il vecchio. Il tentativo di accentramento si adempie invece sullo scorcio del secolo. Se in tutta l'età alessandrina di un solo drammaturgo ci è detto espressamente che lavorò per il teatro di Alessandria, questo drammaturgo, Macone, appartiene alla schiera dei seguaci di Tolemeo Filopatore. Nativo di Sicione o di Corinto, ma vissuto ad Alessandria, Macone, che i critici moderni per non ben approfondite indagini considerano coetaneo di quei primi, deve invece ritenersi posteriore, d'un bel tratto (1). Egli è stato maestro di Aristofane da Bisanzio, precisamente come Eufronio; e ha dedotto i motivi dell'opera propria da quel medesimo ordine d'idee e di fatti, dal quale, come abbiamo visto, li deducevano e Eufronio e i suoi compagni (2).

In Macone, nome abbastanza noto e assai celebrato, noi abbiamo finalmente il rappresentante vero ed autentico del nuovo Dioniso o — se così è lecito esprimerci — della nuova rinascenza dionisiaca. I contemporanei lo esaltavano come un restauratore o un superstite dell'arte antica — *τέχνης ἄξιον ἀρχαίης λείψανον* — come colui che aveva trapiantato su terreno egiziano l'acerbo timo dell'Attica. Però, più che dalla sua produzione di commediografo direttamente, noi possiamo conoscerlo oggi da un'altra sua opera, intitolata *Χρεῖαι*, cioè " Detti memorabili „ (3). *Χρεῖαι* erano le sentenze morali, gli ammaestra-

---

(1) Cito, per tutti, Meineke, *Hist. crit.*, pp. 462, 478 sgg.; Christ, *Gesch. Litt.*, II^5, p. 36. Testimonianze sono: Athen., VI, p. 241 *f*; XIV, p. 664 *a*; Suida, s. v. *Ἀριστοφ. Βυζ.*

(2) Sebbene a nessuno sieno sfuggite le relazioni di Macone con Aristofane da Bisanzio, tuttavia nessuno ne ha tenuto esatto conto, pensando che, alla stessa stregua, maestri di Aristofane sono pure detti e Zenodoto e Callimaco, dei quali per conseguenza Macone viene ad essere contemporaneo. Ma il caso di Macone (insieme con Eufronio e Dionisio Giambo) è ben diverso da quello di Zenodoto e Callimaco, come ho cercato di dimostrare nello scritto sopra cit. " Atti Accad. Sc. di Tor. „, L, p. 262. — Quanto poi alla affermazione di Athen., XIV, p. 664 *a*, Macone essere stato contemporaneo di Apollodoro Caristio, è un'affermazione che ci lascia al punto di prima, perchè l'età di questo Apollodoro non è per sè stessa precisata.

(3) Ampii brani ce ne ha tramandati, qua e là, Ateneo. Si trovano raccolti in gran parte da G. v. Wartensleben, *Begr. d. griech. Chreia*, etc. (Heidelberg, 1901, pp. 129-38). Leggasi pure su questo genere di opere G. A. Gerhard, *Phoinix v. Koloph.*, pp. 247 sgg.

menti, gli esempii, gli aneddoti con cui fin dal IV secolo i filosofi Cinici usavano diffondere fra il popolo, in forma epigrammatica, il loro pensiero. Ora fa conto di sostituire, alle sentenze e agli aneddoti dei filosofi, sentenze e aneddoti di cortigiane, di cinedi e di simile genìa, e avrai l'opera di Macone. La serietà della dottrina e della propaganda morale era dunque doppiamente compromessa dallo spregiudicato seguace di Bacco. Certo, l'imagine che il poeta aveva innanzi era quella dei buffoni, dei ciarlatani, delle bagascie in mezzo a cui Tolemeo Filopatore faceva, come tutti sanno, collezione di freddure e di lazzi. Che se poi nella compagnia del Filopatore intervenivano anche filosofi come lo stoico Sfero e l'epicureo Colote, non stiamo ad indagare quale metafisica ascesa prendessero allora le discussioni. Macone ha composto, per così dire, la cronaca delle giornate di Corte o un buon manuale per i trattenimenti cotidiani. Futile e ributtante, l'opera sua va però giudicata a questa stregua, come espressione di una consuetudine o di una tendenza che faceva capo alla persona del Re. Nella interminabile sfilata degli episodii osceni e delle grossolane facezie, ad ora ad ora, di mezzo alle Frini ed ai Batilli, fa capolino qualche testa coronata, ed è dato riconoscervi talora il Filopatore stesso, il quale amava naturalmente vedere raccolta nella serie qualche trovata di suo proprio conio (1). Molti tratti — non è neanche il caso di dirlo — sono ricavati dal comune patrimonio della commedia o del ditirambo: vi è un po' di Aristofane e di Filosseno; ma il tutto è passato al filtro della sconcezza e della pornografia alessandrina. Lo spirito affoga quasi sempre nella più bruta volgarità: sul mondo dell'umorismo guazzano le lascivie bestiali degl'iniziati di Priapo e di Cibele.

Il medesimo doveva avvenire, naturalmente, nelle opere di teatro. I giuochi plebei e spettacolosi, cari alle popolazioni imbastardite, prendevano il sopravvento sul puro ed inimitabile spirito attico. Siamo per averne assicurazione formale, fra breve,

---

(1) Alludo all'aneddoto di Tolemeo ed Ippe ap. Athen., XIII, p. 583 *a-b*. Dopo quanto abbiam detto, tutto ci induce a credere che questo re Tolemeo sia Tolemeo Filopatore, sebbene per sè stessa la cosa non sia così certa da darla senza giustificazione come fa il Bouché-Leclercq, *Hist. d. Lag.*, I, p. 331.

da un altro poeta di questo periodo, dall'epigrammatografo Dioscoride di Alessandria: che sopravvisse a Macone, e su Macone lasciò scritte, in epitafio, le parole laudative di cui già sopra ci servimmo per definire l'avviamento letterario del nostro Comico:

Τῷ κωμῳδογράφῳ, κούφη κόνι, τὸν φιλάγωνα
κισσὸν ὑπὲρ τύμβου ζῶντα Μάχωνι φέροις·
οὐ γὰρ ἔχεις κηφῆνα παλίμπλυτον, ἀλλά τι τέχνης
ἄξιον ἀρχαίης λείψανον ἠμφίεσας.
τοῦτο δ' ὁ πρέσβυς ἐρεῖ· 'Κέκροπος πόλι, καὶ παρὰ Νείλῳ
ἔστιν ὅτ' ἐν Μούσαις δριμὺ πέφυκε θύμον' (1).

Dioscoride è fra gli epigrammatografi dell'èra ellenistica uno dei più largamente noti, a causa del discreto mazzo di componimenti cui è legato il suo nome. Tuttavia, non si può dire che e l'età e l'opera sua siano state comprese finora con soddisfacente determinazione (2). Connetterlo con quell'ordine di persone e di cose del quale siamo venuti sin qui ragionando, avrà l'effetto di darci il sostrato appunto e lo spirito dell'opera letteraria. Gli epigrammi di Dioscoride sono pieni di Alessandria. Nel suo mondo fantastico e nella sua arte questo poeta reca la patina di un'età stracca, viziosa e decadente. Imitatore di Asclepiade di Samo, egli ci fa vedere al vivo quale divario corra fra gli ultimi e i primi anni del secolo III, fra il periodo del corrompimento e l'epoca della bella e rigogliosa creazione ellenistica. La semplicità fine ed elegante, il tono popolare ma impeccabile, il divino temperato riso che dei distici di Asclepiade aveva fatto tanti piccoli tesori, si ingoffisce nella pompa, nell'ostentazione del tardo discepolo. La facezia brillante è diventata gesto scurrile o ghigno incomposto. Sono svaniti quei delicati vapori di mattino primaverile, quelle arie di famigliarità e di brio di cui il vecchio amico e maestro di Teocrito aveva soffuso l'opera propria. Qui regnano il bizzarro, il prodigioso,

---

(1) *Anth. Pal.*, VII, 708 Stadtmueller.

(2) V. ad es. Susemihl, *Gesch.*, II, p. 543; Reitzenstein, *Epigr. und Sk.*, pp. 164 sgg., 186 e " Pauly-Wiss. „, V, coll. 1125 sgg.

il grottesco. La fantasia del poeta ha preso tutti i toni della Corte. La sua attenzione si muove nel dominio dei misteri e delle orgie: egli canta Attis, il flauto frigio, il timpano sacro; non pochi dei suoi aneddoti erotici sentono i riti del dio Priapo (1).

Come dai misteri, così non può Dioscoride non essere occupato dalle cose di teatro. Egli è uomo del tempo: ha principii e norme attinte allo studio della letteratura classica; si è fatto un'idea dei grandi maestri dell'arte, e ne ha composto in una specie di *album* il ritratto: da Eschilo a Sofocle, da Tespi, dal primitivo Tespi, all'alessandrino Sositeo, rigeneratore dell'antico dramma satiresco (2). E poi egli frequenta gli spettacoli che si dànno a' suoi giorni, in Alessandria; ed osserva. Evidentemente questi spettacoli, sebbene pretendessero di rifare sotto molti aspetti le costumanze arcaiche, tuttavia davano adito a gusti e applicazioni disparatissime che non erano sempre in armonia con la teorica del nostro scrittore.

Una volta Dioscoride è a teatro, e s'innamora dell'attrice Atenuccia: malanno che non gli sarebbe certo capitato, secoli innanzi, nell'Atene di Eschilo, quando alla donna non era permesso di mostrarsi sulla scena. Rappresentavasi quel giorno *Il cavallo di Troia*: tutta Ilio era in fiamme; la protagonista effondeva il suo canto pietoso sulle rovine della città: al poeta, discosto, sembrava di ardere insieme coi vinti Troiani:

Ἵππον Ἀθήνιον ᾖσεν ἐμοὶ κακόν· ἐν πυρὶ πᾶσα
Ἴλιος ἦν, κἀγὼ κείνῃ ἅμ' ἐφλεγόμαν,
οὐ δείσας Δαναῶν δεκέτη πόνον· ἐν δ' ἑνὶ φέγγει
τῷ τότε καὶ Τρῶες κἀγὼ ἀπωλόμεθα (3).

Altra volta il poeta istituisce un confronto fra due rappresentazioni che avevano avuto presso il pubblico sorte diversa. Un attore aveva interpretato le eroiche e severe imprese dei Temenidi e di Irneto (era questa per avventura una replica dei

---

(1) *Anth. Pal.*, VI, 220; IX, 340.

(2) *Anth. Pal.*, VII, 37, 410, 411, 707.

(3) *Anth. Pal.*, V, 137: *εἰς Ἀθήνιον κόρην τραγῳδόν.* Della questione che qui ci si affaccia, e che non è punto contemplata dagli studiosi delle antichità sceniche, circa le *attrici* nel teatro greco, tratterò altrove, come pure della fortuna di codesta tragedia.

Temenidi di Euripide? — certo, Euripide, se aveva goduto le simpatie dei primi Alessandrini, era in contrasto con l'avviamento attuale); un altro aveva rappresentato la parte di Gallo. Il primo si ebbe i fischi; il secondo, manco a dirlo, trovò negli spettatori, fedeli sudditi del loro re, applausi frenetici:

Γάλλον Ἀρισταγόρης ὠρχήσατο· τοὺς δὲ φιλόπλους
Τημενίδας ὁ καμὼν πολλὰ διῆλθον ἐγώ.
Χὼ μὲν τιμηθεὶς ἀπεπέμπετο· τὴν δὲ τάλαιναν
Ὑρνηθὼ κροτάλων εἷς ψόφος ἐξέβαλεν.
Εἰς πῦρ ἡρώων ἴτε πρήξιες· ἐν γὰρ ἀμούσοις
καὶ κόρυδος κύκνου φθέγξετ' ἀοιδότερον (1).

Adoni, Attis, Cibele: questo ci voleva per il pubblico di Alessandria. — Erano rappresentazioni mimiche e musicali soltanto? Rappresentazioni come dovevano piacere al futuro cantore dell'Incendio di Troia, Nerone? Non si può dire con certezza, ma le parole del poeta lo lasciano per lo meno supporre. Sentiamo che la scena è invasa dai musici, dai mimi e dai tragèdi che formeranno la delizia della Roma imperiale. Il novello Dioniso si è dato alla danza lasciva ed alla mimica. Sul poeta prevalgono l'istrione e la ballerina.

IV. — Alessandrinismo creatore e alessandrinismo decadente.

Poche parole basteranno ormai a qualificare, con un ultimo tratto, la letteratura di questo periodo in confronto con la letteratura dei Teocrito, degli Asclepiade, dei Callimaco. Non inopportunamente fin da principio, scartando il criterio convenzionale di un'età ellenistica intesa in tutta la sua ampiezza, sur un solo piano, senza scorci e senza rilievi, noi ci siamo proposti di cercare, dopo la scomparsa delle figure maggiori quali fossero le condizioni dell'arte letteraria. La scomparsa delle figure maggiori non lascia dietro a sè il vuoto. Ed abbiamo potuto discernere tutto un movimento assolutamente armonico,

---

(1) *Anth. Pal.*, XI, 195.

la cui nota fondamentale è data dalla nuova rinascenza dionisiaca e le cui attitudini si ripercuotono, con pari indole, così nell'arte come nella critica.

Quale è dunque, in ultima analisi, lo spirito che sta alla base di codesto movimento? È, comunque lo si guardi, uno spirito filologico, uno spirito che la sua sodisfazione naturale trova nella raggiunta maturità della critica, nella revisione dei testi antichi, nel lavoro di ricerca e di commento, ma che governa intanto ed inquina le opere d'arte. In ogni pensiero, in ogni gesto è il tarlo dell'archeologia che s'infiltra. Gli animi sono retti da una sola preoccupazione: rifarsi sulle imagini e sugli esempii della più remota antichità. Al senso del bello è sostituito il senso dell'antico: sugli impulsi della pura creazione prevalgono i suggerimenti e le impressioni della conoscenza astratta. Non è più possibile navigare nell'immenso oceano della fantasia: gli uncini dell'erudizione ti legano all'osservanza di cose e di fatti semplicemente esteriori. La polvere delle biblioteche esercita sul pensiero e sui sensi un influsso irresistibile.

Ben diverse ci sembrano le disposizioni intellettuali da cui avevano tratto origine i primi e più vivaci frutti dell'alessandrinismo. Certo, la coltura era fin dagli inizii prerogativa e carattere, profondo, dell'anima ellenistica. L'arte di Teocrito e dei suoi coetanei era un'arte di imitazione e di perfezionamento che aveva sotto gli occhi tutta la storia del passato e s'inebbriava di cose e di imagini appartenenti ai tempi andati. Ma Teocrito e i suoi coetanei portavano, e sapevano di portare, nell'opera poetica, la propria modernità, si sentivano una propria persona di cui andavano fieri. La loro poesia, nelle sue manifestazioni vitali (poichè a queste soltanto si deve badare) non aveva nulla di arcaicizzante; cresceva da un terreno di ricca ed evoluta dottrina, non da un museo archeologico; si affermava come rivelazione nova sull'orlo della tramontata e non resuscitabile arte classica; era, in fondo, la poesia di tutti i popoli moderni, i quali, condannati a cantare sotto il peso di una infinita eredità di pensiero, cercano in ogni momento della storia o della leggenda, in ogni forma del reale o dell'irreale, la libera ricreazione del loro spirito. Gli idillii del poeta siracusano ricordavano ora un inno di Stesicoro, ora un epitalamio di Saffo; ma non pretendevano di adattarsi alle condizioni di civiltà da cui gli

inni e gli epitalamii erano stati determinati: ripetevano, a puro sfogo di fantasia, certi momenti del passato, fuori dalle condizioni materiali che a questi momenti avevano dato la vita (1).

Ma poteva codesta virtù così fine, che faceva sgorgare la poesia in seno agli aridi studii e che era il canto delle anime nuove a cospetto dell'antichità classica scoprentesi e riordinantesi sotto gli occhi bramosi, poteva, dico, essere cosa durevole? E non dovea invece il delicato fiore irrimediabilmente perire, tostochè i soffii dell'erudizione, destituendosi di ogni influsso creativo, si fossero fatti più gelidi? Certo: la necessità che era nei tempi di apprendere e possedere con spirito critico il patrimonio intellettuale della nazione finì con sbarbicare quella stessa pianticella cui dapprima aveva dato amoroso alimento.

Venute meno le energie fresche e ardite dei primi alessandrini, sviluppatasi sulle rovine dei veri valori spirituali la filologia, non rimangono che gli scheletri o i fantocci buffi, incomposti e plebei. Il predominio della poesia drammatica, la quale per il suo speciale carattere permetteva di ricostituire costumi e contingenze dell'antica tradizione, è l'indice più evidente di questa trasformazione.

Si può dire dunque che la fine dell'arte alessandrina è segnata dall'èra di Aristofane da Bisanzio e di Aristarco. La poesia cede il passo, da un lato, alla filologia, dall'altro alle manifestazioni del gusto plebeo. Era il meglio oramai che gli Alessandrini potessero fare: avvolgersi nel severo paludamento dell'archivista e del professore, ritrarsi dalle fonti di Parnaso, in pace. Qualche voce isolata suonerà ancora, come quella di Meleagro; il concento stesso dell'ellenismo si continuerà piuttosto, con larga diffusione, sul vergine suolo di Roma: ma l'ufficio degli Alessandrini è segnato: raccogliere e interpretare per i posteri, con le lenti della grammatica, il retaggio spirituale della Grecia antica.

---

(1) Non insisto su questi caratteri perchè ne ho trattato diffusamente nel I cap. di un libro in corso di stampa: *Poeti alessandrini* (Torino, Bocca). — S'intende che mi allontano assolutamente dai criterii del Wilamowitz, il quale in *Herakl.* I, pp. 135 sgg., trattando della filologia ellenistica quale si affermò con Aristofane ed Aristarco, riconduce al medesimo principio, ch'egli dice di *arcaismo*, tutta quanta la poesia alessandrina.

Osservazioni storiche e cronologiche sulla guerra di Costanzo II contro i Persiani.

Nota di ALBERTO OLIVETTI.

I.

La maggior parte degli storici antichi e moderni ha dato sulla guerra, che l'imperatore Costanzo II condusse per molti anni sulle frontiere orientali dell'impero contro i Persiani, questi accaniti nemici del nome romano, un giudizio ingiusto e forse avventato. Non sarà quindi fuor di proposito cercare di rimettere le cose a posto e di esporre i resultati derivati da un esame sereno e spassionato delle fonti. Cominciamo intanto col constatare che sul primo periodo della guerra — quello di cui più specialmente intendiamo di occuparci — non abbiamo che notizie scarse e frammentarie: dobbiamo accontentarci dei pochi accenni degli epitomatori e delle descrizioni vaghe e retoriche dei panegiristi (1). Solo un fatto d'armi — che del resto è, a quanto sembra, l'unico veramente importante di tutta questa lunga campagna — la battaglia di Singara, si può ricostruire con esattezza: per la maggior parte degli avvenimenti, che precedettero o seguirono questa battaglia, vaghiamo nell'incerto, nell'indeterminato. Però, raccogliendo tutte le testimonianze delle fonti — se pur non possiamo farci un'idea dei singoli episodi di questa guerra e dell'alterna fortuna dei competitori — possiamo almeno, a mio avviso, esser condotti a dare un giudizio generale sugli avvenimenti che si svolsero sulle frontiere orientali dell'impero. Esaminiamo queste testimonianze.

---

(1) Giuliano, *Orat.*, I, ediz. Hertlein, §§ 17 *C*–28 *D*; Libanio, *Orat.*, LIX, ediz. Förster, §§ 89 e segg.

Aurelio Vittore, storico molto attendibile e per l'imparzialità delle notizie e per l'epoca in cui scrisse (1), accenna solo di sfuggita alla guerra persiana con queste parole: " At Iulius " Constantius annos tres atque viginti Augustum imperium re- " gens, *cum externis motibus* modo civilibus exercetur aegre ab " armis abest. Quis, tyrannide tantorum depulsa, *sustentatoque* " *interim Persarum impetu*, genti Sarmatorum magno decore con- " sidens, apud eos regem dedit " (2).

Eutropio, vissuto anch'egli appena una ventina d'anni dopo questi avvenimenti (3), scrive: " diversa Constantii fortuna fuit: " a Persis enim multa et gravia perpessus, saepe captis oppidis, " obsessis urbibus, caesis exercitibus, nullumque ei contra Sa- " porem prosperum proelium fuit, nisi quod apud Singaram " haud dubiam victoriam ferocia militum amisit... " (4). Più oltre nel giudizio generale su Costanzo: giudizio che — affrettiamoci a dirlo — è in complesso favorevole, aggiunge che di questo imperatore " in civilibus magis quam in externis bellis sit lau- " danda fortuna " (5).

Rufio Festo, contemporaneo di Eutropio, d'accordo con lui, scrive: " Constantius in Persas vario ac magis difficili pugnavit " eventu: praeter leves excubantium in limite congressiones, " acriori Marte noviens decertatum est: per duces suos septiens: " ipse praesens bis adfuit " (6). Anche San Girolamo (7) e Paolo Orosio (8) fanno sommare a nove il numero delle battaglie impegnate da Costanzo contro i Persiani e si accordano nel dichiarare che nessuna di esse ebbe esito felice per i Romani; mentre

---

(1) La sua opera *De Caesaribus* si chiude col 23° anno del regno di Costanzo: cfr. Peter, *Die geschichtliche Litteratur über die Römische Kaiserzeit bis Theodosius I und ihre Quellen*, vol. II, pag. 132.

(2) *De Caesaribus*, 42, 20-21.

(3) Il *Breviarium Historiae Romanae* è dedicato all'imperatore Valente (364-378).

(4) *Breviarium*, X, 10.

(5) *Breviarium*, X, 15.

(6) *Breviarium*, 27.

(7) *Chronicon*, 2364.

(8) *Historia adversus Paganos*, VII, 29, 6: " novem proeliis (Constantius) parum prospere decertavit ".

Zosimo si limita ad accennare a devastazioni compiute dai Persiani in Mesopotamia e non fa nessun accenno alla battaglia di Singara, che pure, come abbiamo detto, è la più importante di tutta la guerra (1).

Queste le testimonianze sicure sull'andamento generale della guerra persiana. Ci sia lecito di prescindere dalle tronfie parole, con le quali Libanio e Giuliano lodano il valore di Costanzo, l'accortezza della sua strategia, enumerano i grandi preparativi compiuti ed i trofei riportati, senza però specificare nomi nè date e senza entrare mai in particolari precisi (2). Le fonti si accordano dunque nell'ammettere che Costanzo non fu fortunato nella guerra persiana. Ma ci lasciano travedere un'altra circostanza del più alto valore: che cioè la guerra persiana non fu, a rigor di termini, una guerra vera e propria, ma bensì un seguito di scaramucce e di incidenti di frontiera. Il fatto che, raccogliendo tutte le testimonianze, non abbiamo notizia di altra battaglia notevole all'infuori di quella di Singara, di altri assedi all'infuori di quelli di Nisibis, di Amida e di Bezabda, può fare molto ragionevolmente supporre che furono questi gli unici episodi veramente importanti di un'azione militare, che si prolungò, sia pure con interruzioni, per tutta la durata del regno di Costanzo. E le nove battaglie, di cui parlano concordemente — come abbiam visto — Rufo Festo, San Girolamo e Paolo Orosio, non sono davvero molte per un periodo di 23 anni. Non è quindi fuor di luogo pensare che la cosidetta guerra persiana sia stata, durante questi anni, un seguito d'incursioni dei Persiani in Mesopotamia, fronteggiate con maggiore o minore fortuna dalle armi romane. Uno studio particolareggiato potrebbe dimostrare che, da Traiano in poi, la Mesopotamia non fu mai completamente assoggettata all'impero; ma che anzi oscillò continuamente tra la dominazione romana e quella persiana. Ed era naturale che il re Sapore, ambizioso e ardimentoso, rivolgesse le sue cupidigie su tale provincia ricca e fertile e cercasse a più riprese di assicurarla in modo definitivo al suo

---

(1) Zosimo, II, 43.

(2) Libanio, *Or.*, LIX, §§ 74-75 e sg.; Giuliano, *Or.*, I, capp. 20-21.

regno. Già prima che Costantino morisse, il fiero monarca persiano aveva arrogantemente richiesto che gli fossero restituite la Mesopotamia e l'alta sovranità sull'Armenia sottratte alla Persia. Dopo una grande vittoria riportata da Diocleziano e da Galerio nel 293 (1), Costantino naturalmente non cedette e si preparò anzi alla guerra, ma la morte lo colse in mezzo a tali preparativi (2). La scomparsa del grande imperatore, anzichè frenare le brame di Sapore, doveva incoraggiarle, ed ecco che Costanzo II fin dall'inizio del suo regno si trova involto in una lunga guerriglia. Egli difende tenacemente la prospera provincia che Diocleziano aveva tolto a Narsete. E noi dobbiamo dare il nostro giudizio su questa difesa, perchè non ci consta che Costanzo abbia mai preso l'offensiva ed abbia pensato di togliere ai Persiani ciò che loro apparteneva. Del resto non ci può apparire strano che questo imperatore abbia limitata l'azione militare, sul confine orientale del suo regno, alla sola parte difensiva e non abbia mai neppur tentato d'invadere il territorio nemico. Costantino aveva potuto vagheggiare il sogno di soggiogare la Persia, di spingersi magari fino all'India e di portare fino in quelle remote regioni il verbo di Cristo (3). Ma Costantino era solo sovrano, arbitro supremo di tutte le forze militari dell'impero tanto da poterle dislocare a suo piacimento; si accingeva a questa grande impresa dopo trent'anni di regno, dopo molte e fortunate vittorie riportate su nemici interni ed esterni.

Costanzo giungeva al trono in giovane età: il suo temperamento era tutt'altro che bellicoso: pur non essendo un codardo — e lo dimostrò a più riprese — si trovava più a suo agio quando discuteva di teologia coi vescovi nei sinodi, che quando doveva affrontare il nemico sul campo di battaglia. Inoltre non aveva a sua disposizione che le milizie orientali e non poteva pretendere che i suoi fratelli sguarnissero di truppe i loro confini per

---

(1) Eusebio, *Vita Const.*, IV, 56.

(2) Gerolamo, *Chronicon*, 2353: " Constantinus, cum bellum pararet in Persas in Ancyrone villa publica iuxta Nicomediam moritur... „.

(3) Sul carattere religioso che avrebbe avuta la spedizione di Costantino contro la Persia cfr., tra l'altro De Bacci Venuti, *Dalla grande persecuzione alla vittoria del Cristianesimo*, Milano, 1913, pagg. 281-284.

accorrere in suo aiuto e, del resto, Costantino II morì presto. Costante fu spesso in disaccordo con lui (1).

In tali condizioni che poteva fare Costanzo, se non tenersi sulla semplice difensiva e concentrare tutti i suoi sforzi a quest'unico scopo: impedire che le estreme provincie dell'impero fossero danneggiate o menomate in misura troppo larga dalle scorrerie dei Persiani? Neppure questo programma minimo gli riuscì sempre di attuare, ma dobbiamo considerare che non ininterrottamente attese a fronteggiare gli eserciti di re Sapore. Quando — nel 350 — gli fu portata la notizia della morte di Costante e della duplice usurpazione di Magnenzio e di Vetranione, egli, affidata ai suoi generali la difesa delle provincie orientali, mosse verso l'Occidente per riconquistare le regioni già appartenute al fratello e ora contesegli dai tiranni. La lunga lotta contro Magnenzio, il riassestamento delle provincie occidentali e le campagne contro i barbari del settentrione lo trattennero più di quanto avesse forse previsto, e solo nel corso dell'anno 360 potè tornare in Siria. Le incursioni di Sapore si erano rinnovate — dopo nove anni — nel 359 e parecchie città della Mesopotamia erano state assediate o distrutte. Per fronteggiare il suo nemico, Costanzo chiese aiuti a Giuliano, che — col titolo di Cesare — si trovava in Gallia. Tale richiesta, come è noto, provocò la proclamazione di Giuliano ad Augusto per parte delle truppe. E Costanzo dovette abbandonare nuovamente la Siria e la Mesopotamia e muovere contro il cugino che minacciava le provincie orientali. Ma, giunto a Mopsucrene in Cilicia, morì. Giova constatare che, alla morte di Costanzo, la Mesopotamia — di fatto e di diritto — apparteneva tuttora all'impero romano. Quindi non possiamo dire che l'azione difensiva di questo imperatore sia fallita, tanto più che per ben 24 anni le incursioni dei Persiani si limitarono alla Mesopotamia e all'Armenia e mai si spinsero fino alla Siria o alle provincie costiere dell'Asia Minore. Dopo la morte di Costanzo ben maggiori disastri toccheranno ai Romani in queste regioni.

---

(1) Giuliano, *Or.*, I, 18 *C* rimprovera ai fratelli di Costanzo di non averlo aiutato: *πρὸς τούτοις δὲ οὐδὲ τῶν ἀδελφῶν σοι δι' ἀσδηποτοῦν αἰτίας τὸν πόλεμον ἐλαφρυνόντων.*

Giuliano che osò invadere l'impero Persiano, giungendo fin sotto le mura di Ctesifonte, lascerà la vita in una precipitosa ritirata. Il suo successore Gioviano dovrà concludere un vergognoso (1) — se pur necessario — trattato, che abbandonerà per sempre la Mesopotamia e l'Armenia alla Persia (2).

Concludendo, se la lunga campagna condotta da Costanzo sul confine orientale dell'impero non portò a nessun risultato positivo, se non sempre la sua azione militare fu fortunata, dobbiamo però riconoscere che il completo rovescio delle armi romane con la conseguente perdita definitiva di una delle più fertili provincie dell'impero e la totale rovina dell'opera di reintegrazione territoriale compiuta da Diocleziano dopo la vittoria del 293 non si ebbero che sotto i suoi successori.

II.

La battaglia di Singara.

Tralasciando la narrazione delle operazioni militari che si svolsero in Mesopotamia tra il 337 e il 348 e che, del resto, ebbero poca importanza (3), tranne il primo assedio di Ni-

(1) Amm. Marc., XXV, 7, 13: " Quo *ignobili* decreto firmato ".

(2) Amm. Marc., XXV, 7, 9: " Petebat autem rex obstinatius ut ipse " aiebat, sua dudum a Maximiano erepta, ut docebat autem negotium pro " redemptione nostra quinque regiones transtigritanas: Arzanenam et Mo- " xoenam et Zabdicenam itidemque Rehimenam et Corduenam cum castellis " quindecim et Nisibin et Singaram et castra Maurorum... ".

(3) La campagna del 338, alla quale accenna Giuliano (*Or.*, 21 *B-C*), deve esser stata brevissima, come dimostrano le date delle leggi, le quali ci indicano la presenza di Costanzo ad Antiochia l'11 ottobre (*Cod. Theod.*, XII, 1, 23) e il 27 dicembre (*Cod. Theod.*, VIII, 18, 4): tra questi limiti di tempo si svolse l'azione offensiva, o, meglio, dimostrativa di Costanzo sulle rive del Tigri. Al 343 si riferirebbe, secondo il Seeck (*Gesch. des Unterg. der antiken Welt*, IV, pag. 78), un successo notevole riportato da Costanzo, ma il vago accenno che di questo avvenimento si trova in Libanio (*Or.*, LIX, 82) non basta a garantire nè l'autenticità di esso, nè, tanto meno, la data. Al 344 Teofane (*Chronographia*, anno 5835) assegna una nuova vittoria dei Romani sui Persiani, ma anche qui lo scarso valore di questa

sibis (1), mi preme di intrattenermi un po' lungamente sulla battaglia di Singara, uno dei fatti d'arme più notevoli di tutto questo periodo. E, anzitutto, dobbiamo proporci una questione cronologica. Ci troviamo infatti di fronte a due dati del tutto discordanti fra loro. Nel *Chronicon* di Gerolamo (2) e nei *Consularia Constantinopolitana* di Idazio (3) si assegna la battaglia di Singara all'anno 348: invece Giuliano, parlando della notizia pervenuta a Costanzo dell'assassinio di Costante per mano di Magnenzio (350), dice che tale notizia Costanzo ebbe nel sesto anno dopo *τὸν πρὸ τῶν Σιγγάρων πόλεμον* (4). Giuliano assegnerebbe dunque la battaglia di Singara al 344 — se si devono contare gli anni da un'estate all'altra — o al 345, se invece gli anni devono essere calcolati da un gennaio all'altro.

Quasi tutti gli storici accettano il dato di Gerolamo, appena discutendo il dato di Giuliano. Seguono infatti Gerolamo il Tillemond (5), il Gibbon (6), il Clinton (7), il Rawlinson (8), lo Schiller (9), il Goyau (10) e recentemente il Seeck (11). Un solo storico tra i moderni, per quanto sappia, accetta il dato di Giuliano e sostiene in base a quello essere la battaglia di Singara

---

fonte e il silenzio di tutte le altre ci rendono dubbiosi. Queste sono le uniche notizie sull'azione militare dei Romani contro la Persia, anteriore al 348.

(1) Il *Chronicon Paschale* (Mommsen, *Chronica minora*, vol.I, p. 236) pone questo assedio nel 337. S. Gerolamo lo assegna invece al 338 (*Chronicon*, anno 2354). Ritengo preferibile questo secondo dato, perchè Costanzo, che si trovava a Viminacio o a Sirmio con i fratelli nel luglio 338, si mosse per venire ad Antiochia in seguito appunto all'assedio di Nisibis. Questo fu il primo atto di ostilità compiuto da Sapore contro l'impero romano dopo la morte di Costantino.

(2) *Chronicon*, a. 2364.

(3) Mommsen, *Chronica minora*, vol. I, p. 236.

(4) *Oratio*, I, 26 *B*.

(5) *Histoire des empereurs*. vol. IV, *Constance*, art. 12.

(6) *Decline and fall of the Roman Empire*, vol. II, pag. 227.

(7) *Fasti romani*, vol. 2°, pp. 96-97.

(8) *The Seventh Great Oriental Monarchy*, London, 1877, pag. 158.

(9) *Geschichte der römischen Kaiserzeit*, vol. II, pag. 240.

(10) *Chronologie de l'empire romain*, pag. 447.

(11) Op. cit., IV, pag. 93, Appendice, pag. 424.

avvenuta nel 344: il Bury (1). Egli osserva anzitutto che le testimonianze, apparentemente diverse e indipendenti di Gerolamo e dei *Consularia Constantinopolitana* si riducono in sostanza ad una sola, perchè la seconda fonte deriva dalla prima. Cerca poi di dimostrare come sarebbe stranissimo un errore di Giuliano. Un principe della casa imperiale, che scrive nel 355, cioè a pochissima distanza di tempo da un avvenimento tanto importante, quale è la battaglia in parola, non può ingannarsi. Discute poi un argomento posto innanzi dal Clinton (2): questi datava erroneamente il Concilio di Sardica assegnandolo al 347 e metteva in rilievo un passo di S. Atanasio (3), secondo il quale Costanzo avrebbe in tale occasione celebrato pubblicamente una vittoria riportata sui Persiani. Ora Libanio, nel *Βασιλικὸς λόγος* pronunziato nel 349 (4), chiama la battaglia di Singara *τελευταίαν*: osserva il Clinton che non poteva chiamarla in tal modo se fosse avvenuta nel 344. Risponde il Bury che, essendo ormai stabilito doversi il Concilio di Sardica assegnare al 343, cade l'obiezione del Clinton. Fa rilevare infine che dei tre avvenimenti, dei quali Gerolamo ci dà notizia sotto l'anno 348, due avvennero certamente in un anno diverso: l'assedio di Nisibis, che Teofane assegna al 346 (= A. M. 5838), e l'eclisse di sole, che sappiamo invece essere avvenuta il 6 giugno 346: nulla di strano dunque che anche la data del terzo avvenimento, cioè della battaglia di Singara, sia errata. Il Bury accetta quindi la data del 344. Non sarà inutile esporre per quali ragioni io ritenga preferibile la data scelta dalla maggior parte degli storici, i quali non si curano però, come ho già accennato, di confutare l'ipotesi del Bury.

Noi abbiamo di fronte due dati: uno di Giuliano, posteriore

(1) " Byzantinische Zeitschrift ", vol. V, pag. 302. Edizione della storia del Gibbon, vol. II, appendice 17.

(2) Loc. cit.

(3) *Historia Arianorum ad Monachos*, 16.

(4) Cfr. nell'ediz. del Förster di Libanio, vol. IV (Lipsia, Teubner, 1908) l'introduzione al *Βασιλικὸς λόγος* (*Orat.*, LIX), nella quale si tratta anche della data, in cui tale orazione sarebbe stata pronunziata. Cfr. anche la dissertazione di C. Gladis, *De Themistii Libanii Iuliani in Constantium orationibus*, Breslavia, 1907, pag. 6.

di pochi anni alla battaglia, ma inserito in un'opera apologetica e non storica; l'altro di Gerolamo, posteriore di circa mezzo secolo, ma contenuto in un'opera storica. A me non consta che Gerolamo, specialmente in questo periodo, abbia commesso molti errori cronologici: le sue date corrispondono quasi sempre a quelle che si possono desumere dalle fonti più autorevoli. Il Bury cerca di dimostrare che dei tre dati registrati sotto l'anno 348 nessuno appartiene veramente a tale anno. Ma per il secondo assedio di Nisibis non può richiamarsi che al dato di Teofane, storico molto tardo e quasi sempre inesatto. Anche in questo caso può darsi che il dato cronologico di Gerolamo sia esatto, come tra breve esporremo. In ogni modo, se anche tutti gli altri dati del 348 fossero cronologicamente inesatti, non ne consegue certo che sia inesatto quello riguardante la battaglia di Singara. Del resto la data del 348 risulta evidente da altre considerazioni. Giuliano dice che a Singara i Romani non attaccarono subito per non rompere la tregua (1). Ora se immaginiamo la battaglia avvenuta nel 344, non sapremmo quando sarebbe stata conclusa la tregua, poichè nel 343 troviamo notizie di combattimenti impegnati tra Romani e Persiani e non si può chiamar tregua o meglio pace (*εἰρήνη*) la sospensione di ostilità, che probabilmente si aveva tutti gli anni dall'autunno alla primavera. Se invece poniamo la battaglia nel 348, la pace sarebbe durata da un massimo di cinque anni a un minimo di due, secondo la data che vogliamo assegnare al secondo assedio di Nisibis. Nè basta. Sapore ordinò nel 345 una persecuzione assai violenta dei Cristiani (2): ora questa si può spiegare meglio come una rappresaglia di fronte ai successi dei Romani che come un atto compiuto dopo una vittoria, quale fu per i Persiani la battaglia di Singara. La presenza di Costanzo a Nisibis nel 345, provata da una legge del *Codice Teodosiano* (3), mal si potrebbe capire dopo una sconfitta tanto grave (4); è invece spiegabilissima in un periodo di pace.

---

(1) Giuliano, *Or.*, I, 23 *C*: *οὐχὶ δὲ αὐτοὶ πολέμου μετὰ τὴν εἰρήνην ἄρχοντες χανεῖεν.*

(2) *Chronicon*, a. 2361: “ Sapor Persarum rex Christianos persequitur „.

(3) *Cod. Theod.*, XI, 7, 5: 7 maggio 345.

(4) “ Vulnus fatale „ chiama la battaglia di Singara Eutropio (X, 10, 1).

Infine si può osservare che la descrizione della battaglia di Singara chiude la parte dell'orazione di Libanio consacrata a Costanzo, come conchiude la parte dell'orazione di Giuliano precedente la notizia dell'usurpazione di Magnenzio. Supponendo la battaglia avvenuta nel 344, se ne dovrebbe necessariamente concludere che gli zelanti panegiristi di Costanzo non avessero trovato nessun fatterello da registrare in lode del loro imperatore per 5 anni — nel caso di Libanio — o per 6 — nel caso di Giuliano. Ora questo è sommamente improbabile.

Dopo quanto sono venuto fin qui esponendo, mi sembra di poter a buon diritto accettare come sicura o almeno come molto probabile la data del 348. Ma in qual modo dobbiamo spiegarci il dato di Giuliano? Infatti, come giustamente osserva il Bury, un errore materiale di questo scrittore, che aveva tutti i mezzi di essere bene informato, non potrebbe non apparirci molto strano (1). È poi impossibile che nel testo si sia introdotto un' *ἕκτος* in luogo di un *τρίτος*, che ci permetterebbe di accordare Giuliano con Gerolamo? Il Bury, per dimostrare il contrario, ravvicina le due forme stilizzate di *gamma* e *stigma* (*digamma* corsivo) e sostiene che uno scambio non è ammissibile. Ma i mss. rarissimamente presentano queste forme rigide e regolari, e la confusione fra i due segni, specie nella scrittura affrettata, può ritenersi normale e avvenire in molti modi; la sostituzione di gamma a digamma è inoltre tanto più comprensibile quando si pensi alla rarità di questo secondo segno; un certo numero di glosse eoliche offrono un esempio tipico di tale scambio (2).

Premessa questa osservazione cronologica, dobbiamo farne un'altra sulle fonti, dalle quali possiamo attingere notizie sullo svolgimento della battaglia.

---

(1) È vero che Giuliano non intende di fornirci un dato rigorosamente esatto, ma solo approssimativo: *ἕκτον που μάλιστα μετὰ τὸν πόλεμον ἔτος, οὐ μικρῷ πρόσθεν ἐμνήσθην*. Ma si potrebbe ammettere, ad esempio, che un principe di Savoia, parlando intorno al 1865 della battaglia di Solferino, la assegnasse al 1855 invece che al 1859?

(2) Cfr. Kuehner–Blass, I, p. 81; Hoffmann, *Die griech. Dialekte*, II, p. 488.

Ci troviamo a questo riguardo in una condizione singolarmente favorevole, perchè abbiamo notizie assai ampie nelle opere di tre scrittori quasi contemporanei all'avvenimento: Libanio (1), Giuliano (2) e Rufio Festo (3). Accenni meno estesi ma sempre importanti troviamo in Eutropio (4), in Ammiano Marcellino (5), in Gerolamo (6), in Paolo Orosio (7). Ma di Libanio e di Giuliano, che scrivono, non come storici, ma come panegiristi di Costanzo, non dovremo forse sospettare? Il primo di essi dichiara esplicitamente in un punto della sua orazione che non è suo intento far della storia (8). E Giuliano afferma di voler dimostrare che la gloria di Costanzo oltrepassò quella dei suoi antenati (9). Ma il celebre retore di Antiochia, dopo averci descritto la battaglia di Singara, asserisce esplicitamente di aver voluto dire la verità (10). E l'ultimo imperatore pagano dichiara di voler descrivere la battaglia di Singara per non esser accusato di tacere i fatti d'arme nei quali la fortuna fu favorevole ai nemici dell'impero (11). Se anche non vogliamo prendere per oro colato queste parole e queste professioni di sincerità, non abbiamo neppure nessun motivo di diffidarne completamente e di respingere senz'altro le notizie dei panegiristi.

Dobbiamo notare poi che, ad eccezione di Libanio e di Giuliano, nessuno storico greco e bizantino fa allusione alla battaglia: nè Zosimo, nè Teofane, nè l'autore del *Chronicon Paschale*,

---

(1) *Oratio*, LIX, pagg. 92-119.

(2) *Or.*, I, 22-25 *A*.

(3) *Breviarium*, cap. 27.

(4) *Breviarium*, X, 10, 1.

(5) XVIII, 5, 7.

(6) *Chronicon*, anno 2363.

(7) VII, 92-119.

(8) LIX, 56: *ἡμῖν γὰρ ἡ γνώμη νῦν οὐχ ἱστορίαν συνθεῖναι πάντα περιλαμβάνουσαν οὐδὲ διήγησιν ψιλὴν ἀποτεῖναι μηδὲν ἔξω καταλείπουσαν ἑαυτῆς.*

(9) *Or.*, I, 10 *A*.

(10) LIX, 119: *ταῦτα οὐχ ἡμέτερος λόγος εἰς χάριν συγκείμενος... ἀλλὰ αὐτόμολοι τὰ σώματα παραβαλλόμενοι διαρρήδην ἀγγέλλουσιν. οἷς οὐκ ἔνεστιν ἀπιστεῖν· οὐ γὰρ κινδύνων ψευδολογίᾳ τέρπουσι.*

(11) *Or.*, I, 22: *περὶ ἃ καὶ τοῖς πολεμίοις πλεονεκτῆσαι παρέσχεν ἡ τύχη.*

nè Zonara. Il silenzio di due fonti latine, dalle quali certamente attinse Zosimo, il primo in ordine di data di tali scrittori: il *De Caesaribus* di A. Vittore e l'anonima *Epitome* di quest'opera, valgono forse a spiegarci questa circostanza.

Ecco come, in base ai dati che abbiamo, possiamo ricostruire il fatto d'armi di Singara. Il re Sapore, dopo un lungo intervallo e mentre durava ancora una tregua conclusa, non sappiamo quando, coi Romani (1), invase il territorio dell'impero nel cuor dell'estate dell'anno 348. Aveva seco un grande esercito, del quale facevano parte molti barbari: Libanio ci dice che alcuni di essi erano venuti per amore, altri per forza (2). Il Seeck da questo particolare trae la conseguenza, assai ragionevole, che il lungo intervallo lasciato scorrere da Sapore fosse dovuto a guerre interne, che avrebbero travagliato il suo regno (3). L'avanzata di Sapore ci è descritta esattamente dal già citato Libanio (4). Il re Persiano invase la Mesopotamia dal N.-E., forse, come ritiene il Rawlinson (5), dalla regione dell'Adiabene. Fece costruire tre ponti sul Tigri per facilitare il passaggio delle sue truppe. Nessun dato ci è fornito sull'entità delle forze messe in campo dall'impero persiano.

Certo però quest'incursione non colse i Romani alla sprovvista, come forse i Persiani speravano, perchè arrivato il suo esercito a Singara (6), Sapore seppe che a circa 100 stadii si trovava accampato Costanzo col suo esercito. Il re persiano, non osando attaccare subito, o aspettando che i Romani iniziassero l'offensiva o già meditando lo strattagemma, che pose poi in opera, non procedette più oltre, ma si fermò a Singara e si fortificò in buona posizione. Così per qualche tempo i due eserciti stettero fermi l'un di fronte all'altro (7). Finalmente

---

(1) Giuliano, *Or.*, I, 23 *C.*

(2) Libanio, *Or.*, LIX, 80.

(3) Op. cit., vol. IV, pag. 92, e Append., pag. 424.

(4) *Or.*, LIX, 102, 103.

(5) Op. cit., pag. 158.

(6) Nei dintorni dell'antica Singara sorge ora il villaggio di Sindjar a circa 50 chilometri da Mosul. Cfr. Layard, *Ninive et Babylone*, pp. 246-249.

(7) Giuliano, *Or.*, I, 23 *C.*

Sapore ideò un piano strategico per trionfare dei nemici (1). Egli forse pensò che non era possibile vincere in combattimento aperto l'esercito romano, già avvezzo a queste battaglie e, mentre egli stesso non disponeva che di truppe raccolte qua e là e meno addestrate, per quanto forse più numerose, di quelle romane. Collocò quindi i suoi arcieri e i suoi frombolieri in un luogo fortificato e riparato da un vallo, probabilmente in collina: quindi, colle truppe armate alla leggiera, andò incontro ai Romani. Egli si proponeva di far tornare indietro, ad un dato punto, i soldati, simulando una fuga, di provocare così l'inseguimento da parte dei Romani e di attirare questi ultimi nel suo campo trincerato, dove le sue truppe più fresche avrebbero potuto facilmente aver ragione di un esercito stanco e disordinato, dopo la lunga marcia (2). Questo piano, che — *mutatis mutandis* — ha qualche leggera rassomiglianza, ad es., con quello adottato dai Francesi nella recente battaglia della Marna, non sarebbe stato cattivo, se fosse stata minore la distanza che separava i due eserciti, ma, come giustamente osserva il Seeck, era impossibile che la simulata fuga potesse prolungarsi per 100 stadii senza degenerare in un fuggi-fuggi generale. Infatti l'esercito romano, del quale — come ci attesta Libanio — facevano parte molti barbari, si lanciò con foga all'inseguimento dei nemici e questi si sparpagliarono per la pianura, dirigendosi non soltanto verso l'accampamento, ma anche verso i ponti del Tigri (3). Nella precipitosa fuga fu travolto lo stesso re Sapore, il quale non potè così assistere al successo del suo

---

(1) Che Sapore seguisse, durante la battaglia, un piano già prestabilito, risulta dalla narrazione di Libanio (LIX, 104, 107); Giuliano, invece, considera la fuga dei Persiani come una vera e propria manifestazione di panico e la loro vittoria al campo come un colpo di fortuna. Cfr. Rawlinson, op. cit., pag. 159, n. 1[a]. Ritengo più logico e verosimile, in questo punto, il racconto di Libanio.

(2) Libanio, LIX, 104: *Οἱ δὲ λοιποὶ τὰ ὅπλα ἀναλαβόντες τοῖς ἐναντίοις προσῄεσαν ὡς ἀναστήσοντες· ἐπεὶ δὲ κινηθέντας κατεῖδον, εὐθὺς ἐγκλίναντες ἔφευγον ὑπάγοντες τοὺς διώκοντας εἴσω βελῶν, ὡς ἂν ἐκ μετεώρου τοξεύοιντο.*

(3) Giuliano, *Or.*, I, 23 *D*: *καὶ τοῦτό οἱ* (a Sapore) *πρὸς σωτηρίαν ἀρκέσειν, εἰ φθήσεται τὸν ποταμὸν διαβῆναι, ὅσπερ ἐστὶ τῆς χώρας ἐκείνης πρὸς τὴν ἡμετέραν ὅρος ἀρχαῖος.*

piano (1). La giornata dunque volgeva propizia alle armi romane e Costanzo, forse per la prima volta, avrebbe potuto vantarsi di una reale e non dubbia vittoria sugli insidiatori dei suoi confini orientali (2).

Quando i Romani si furono avvicinati al campo trincerato dei Persiani, Costanzo intuì che là dentro si nascondeva l'insidia e fece di tutto per trattenere l'impeto delle sue truppe (3). Ma per la foga e anche per la stanchezza prodotta dall'inseguimento, per il desiderio di un bottino, che i soldati speravano ricco, l'imperatore nulla potè ottenere. La ragione principale dell'impaziente indisciplina dell'esercito, secondo le fonti, fu la sete ardente, dalla quale erano tormentati i barbari che ne facevano parte, nuovi al calore della Mesopotamia (4). Si noti che si era nel colmo dell'estate ed era trascorso di poco il meriggio (5). Così i soldati che sapevano di trovare nell'interno dell'accampamento le cisterne dell'acqua, varcarono le trincee, ruppero le palizzate e, nella foga, snidarono dai loro accampamenti gli arcieri e i frombolieri, che vi si erano appiattati e che ripararono sulle vicine colline. In questa seconda parte della battaglia fu fatto prigioniero il figlio ed erede di Sapore, al quale il padre aveva lasciato il comando dell'esercito. Nonostante l'opposizione di Costanzo, il quale voleva forse procurarsi un prezioso ostaggio, fu fatto segno a orribili sevizie e poscia ucciso (6). Anche quest'episodio prova come l'esercito fosse talmente

---

(1) Rufio Festo, *Brev.*, 27: " ... fugatoque rege „; cfr. Giuliano, *Or.*, I, 24 *A*.

(2) Eutropio, X, 10, 4: " haud dubiam victoriam... „; Rufio Festo, 27: " omnium expeditionum compensatus fuisset eventus „.

(3) Rufio Festo, 27: " si milites ... imperator ipse adloquendo revocare potuisset „.

(4) Rufio Festo, 27: " qui (= milites) tamen, invicti viribus inprovisis adversum sitim aquarum subsidiis... „. Libanio, LIX, 107: *φλόγωσιν ἐξ ἡλίου δίψους ὑπερβολήν*. Giuliano, *Or.*, I, 24 *C*: *ὑπὸ δὲ τοῦ δίψους ἀπειρηκότες ἤδη καὶ λάκκοις ὕδατος ἐντυχόντες ἔνδον...*

(5) Giuliano, *Or.*, I, 23 *B*: *θέρος δὲ μὲν γὰρ ἦν ἀκμάζον ἔτι ..*, Libanio, LIX, 107: *ἤρξαντο δὲ τῆς διώξεως ἀγορᾶς πληθούσης...*

(6) Libanio, LIX, 117: *ἐπεῖδον δὲ τὸν τοῦ βασιλέως παῖδα τὸν τῆς ἀρχῆς διάδοχον ἐζωγρημένον καὶ μαστιγούμενον καὶ κεντούμενον καὶ μικρὸν ὕστερον κατακοπτόμενον...*

eccitato da non riconoscere neppur più la suprema autorità dell'imperatore. La sorte del figlio di Sapore — che, secondo Rufio Festo, si chiamava Narsete (1) — ricorda quella dell'imperatore Valeriano, caduto circa 90 anni prima (260) nelle mani dei Persiani e da loro orribilmente martirizzato.

Continuava dunque, anche nell'interno dell'accampamento nemico, la fortuna delle armi romane. L'esito finale però doveva invertire totalmente le sorti dei due eserciti combattenti. Venuta la notte, i Romani, lieti del bottino trovato, si sparpagliarono per il campo e si dettero probabilmente a copiose libazioni (2). Commisero poi anche l'incredibile imprudenza di accendere delle torcie. Queste servirono di facile bersaglio alla parte scelta dell'esercito persiano, che si trovava ancora appostata sulle colline circostanti (3). Si ebbe così la terza parte della battaglia: la *νυκτομαχία* e l' " acerrima nocturna concertatio „ della quale parlano le fonti. I Romani furono avvolti in un vero e proprio nembo di frecce (4): colti così alla sprovvista, non poterono opporre adeguata resistenza e furono sopraffatti. Il successo riportato durante la giornata era irreparabilmente compromesso.

L'affermazione di Giuliano, secondo la quale Costanzo avrebbe avuti uccisi in questa mischia disperata non più di tre o quattro dei suoi (5), è ridicola e assurda e cade non solo di fronte al più elementare buon senso, ma anche in forza della testimonianza di Ammiano Marcellino (6) e degli altri storici, che in-

---

(1) Rufio Festo, 27, dice: " Narasarensi (?) autem (*scil.* pugna) ubi Narseus occiditur superiores discessimus „. Pare che non si tratti di un'altra battaglia, ma di questa seconda parte della battaglia di Singara. L'ultima parte sarebbe indicata dalle parole che seguono: " Nocturna vero Eliensi prope Singaram pugna ... „.

(2) Cfr. Rawlinson, op. cit., p. 160, nota 2.

(3) Rufio Festo, 27: " ... cum a proelio respirantes praetentis luminibus repertae inhiarent aquae ... „.

(4) Rufio Festo, 27: " ... nimbo sagittarum obruti sunt, cum stolide, ad dirigendos certius in se ictus, lumina ipsi per noctem accensa praeberent „.

(5) Giuliano, *Or.*, I, 24 *D*: ... *τρεῖς μὲν ἢ τέτταρας ἀφελομένης τῶν πάρ' ἡμῖν.*

(6) Amm. Marc., XVIII, 5, 7: " ... Singaram, ubi acerrima illa nocturna concertatione pugnatum est, nostrorum copiis ingenti strage confossis... „.

dicano concordemente questa battaglia come una sconfitta non lieve dei Romani. Si sarebbe potuta chiamar così una battaglia, nella quale l'esercito imperiale, dopo aver messo in fuga il grosso dei nemici e lo stesso re Sapore, dopo essersi impadronito delle trincee nemiche e dell'accampamento persiano e di un ricco bottino di guerra, dopo aver ucciso il principe ereditario, avesse poi perso solamente tre o quattro uomini? Dobbiamo invece ritenere che le perdite dei Romani furono ragguardevoli, se, a detta dello stesso Giuliano, Costanzo dette l'indomani l'ordine della ritirata (1).

Così era terminata una battaglia, che avrebbe potuto condurre a un trionfo decisivo sui Persiani e avrebbe certamente assicurata per lungo tempo la tranquillità dei confini orientali dell'impero, se i legionari imperiali si fossero mantenuti fedeli a quelle tradizioni di ordine e di disciplina, alle quali Roma doveva le sue più belle vittorie.

III.

La data del secondo assedio di Nisibis.

Le notizie degli storici non ci dànno nessuna indicazione sui resultati positivi, che potè avere per i Persiani una vittoria così notevole. Anzi Giuliano lascerebbe ritenere che Sapore non sfruttasse in nessun modo il successo conseguito dal suo piano strategico. Parlando infatti della fuga disordinata dei nemici di Roma durante la prima fase della battaglia, afferma che il re persiano non si fermò se non dopo aver lasciato dietro le spalle *τὸν ποταμόν* (2). E accennando poi alle conseguenze della disfatta romana, quasi ad attenuarne grandemente l'entità, si domanda: " Quale forte fu preso? Quale città fu assediata? Di " quale bagaglio militare i nemici si impadronirono, dopo la bat-

(1) Giuliano, *Or.*, I, 25 *A*.

(2) *Or.*, I, 24. *D*. Giuliano non nomina questo fiume, nel quale non sappiamo perciò se dover riconoscere il Tigri o altro corso d'acqua più vicino a Singara.

" taglia? „ (1). Ma queste sono interrogazioni retoriche, che non ci possono certo dare elementi sicuri di giudizio, come è retorica l'asserzione di Libanio che tutto l'esercito persiano fuggì in disordine da Singara e ripassò in fretta e furia il Tigri (2). Già il Rawlinson aveva notata la stranezza del fatto che " Sa-" pore non avesse presa occasione della sua vittoria per attaccare " il resto delle forze romane in Mesopotamia o almeno tentare " l'assedio di una grande città „, ed era stato costretto a spiegare l'invasione militare dei Persiani, che si prolunga non solo per tutto il resto del 348, ma anche per l'intiero anno 349, con l'ipotesi che Sapore avesse perso ingenti forze nella parte della battaglia a lui sfavorevole o fosse rimasto troppo addolorato della morte del figlio (3). Sono ipotesi senza dubbio ingegnose e anche, diciamolo pure, attraenti, ma prive di qualsiasi fondamento positivo. L'inverosimiglianza della situazione sussiste ancora. Ma tutti gli storici hanno fin qui trascurato un passo del *Chronicon* di Gerolamo, che, come ho già accennato, sotto l'anno 2364 (= 348) ci dà questa notizia: *Rursus Sapor tribus mensibus obsidet Nisibin.* Orbene, questo avvenimento è concordemente assegnato al 346, perchè a tale anno appunto lo assegna Teofane nella sua *Chronographia* (anno 5837). Il ragionamento, che, probabilmente, ha indotto gli studiosi di questo periodo a preferire il dato del tardo cronografo bizantino vissuto circa quattro secoli dopo questi avvenimenti al dato del vescovo di Stridione posteriore di appena mezzo secolo, deve esser stato il seguente: Teofane sotto l'anno 5838 registra un'eclissi di sole e il secondo assedio di Nisibis: orbene, siccome i calcoli degli astronomi ci informano che nel 346, cioè nel 5838 dell'êra di Teofane, si ebbe veramente un'eclissi di sole, nel 346 deve esser pure avvenuto l'assedio. Questi ragionamenti sono pericolosissimi, quando si tratta di uno storico confusionario e inesatto, qual'è Teofane. Se in ogni occasione dovessimo ammettere, in base a questo cronografo, la contemporaneità di due o più avvenimenti, arriveremmo a risultati addirittura spaventosi. Sarebbe superfluo

(1) *Or.*, I, 25 *B.*
(2) *Or.*, LIX, 118.
(3) Rawlinson, op. cit., pag. 161.

abbondare in esempi (1). Gerolamo, invece, è di gran lunga più preciso. Non è il caso di scendere ad analisi troppo minute: osserverò solo che, ad esempio, sui 64 dati cronologici riguardanti il regno di Costanzo, eccettuato quello ora in discussione, ben 59 sono confermati o, almeno, in nessun modo smentiti dalle fonti più autorevoli (2).

Nessuno potrebbe dunque contestare che *a priori* sia più attendibile il dato di Gerolamo di quello di Teofane. Se poi si tien conto dell'improbabilità di una completa ritirata persiana, dopo la vittoria di Singara, se ne deduce che la data del 348 per il secondo assedio di Nisibis è confermata da considerazioni logiche di indubbio valore. Si consideri poi che Sapore, fuggendo davanti all'incalzare dell'esercito romano, dovette necessariamente ritirarsi verso il N., e, probabilmente, verso il N.-O., cioè appunto in direzione di Nisibis: qui potevano far capo anche le truppe vittoriose, dopo la *νυκτομαχία*, cioè dopo la terza

---

(1) Mi contenterò di citare i fatti che Teofane registra sotto l'a. 5849, (= 357) ponendo tra parentesi la vera data: 1) Atanasio e Paolo nuovamente scacciati dalle loro sedi (356). 2) Costante scrive a Costanzo per difendere Paolo e Atanasio (342-43). 3) Concilio di Sardica (343). 4) Magnenzio uccide Costante (350). 5) Costanzo marcia contro Magnenzio (350). 6) Tirannia e morte di Nepoziano (350). 7) Elena nomina imperatore Vetranione (350). 8) Battaglie di Mursa (351) e di Monte Seleuco (353.) 9) Morte di Magnenzio e di Decenzio (353). 10) Silvano tiranno delle Gallie (355). 11) Costanzo a Roma (357). 12) Costanzo depone Vetranione (351). 13) Costanzo nomina Giuliano Cesare e lo invia nelle Gallie (356). 14) Giulio papa muore, gli succede Liberio (352). — Dunque, in un solo anno, su 14 dati cronologici ne abbiamo solo *uno* esatto.

(2) L'unico errore veramente grave è la datazione dell'elezione di Liberio a papa: Gerolamo l'assegna al 349, mentre avvenne nel 352 (cfr. Goyau, op. cit., p. 455). Le morti di Delmazio e di Gallo sono assegnate rispettivamente al 338 e al 355, mentre, secondo ogni probabilità, avvennero negli ultimi mesi del 337 e del 354 rispettivamente, ma non si tratta di date sicure. L'elezione di Giuliano a Cesare che Gerolamo (*Or.*, a. 2372) assegna al 356, avvenne invece il 6 novembre 355 (Amm. Marc., XV, 8). Finalmente l'eclissi di sole, già più volte citata, sarebbe da Gerolamo registrata sotto l'anno 348 con le parole " Solis facta defectio ". Si potrebbe però affacciare l'ipotesi che il cronista volesse alludere a un'eclissi parziale anzichè a quella totale del 346. Anche lo stesso Teofane dopo aver citato l'eclissi dell'anno 346, ne registra un'altra nell'anno 347 (A. M. 5839): *ἐν ὥρᾳ δευτέρᾳ τῆς κυριακῆς ἡμέρας.*

parte della battaglia. Il secondo assedio di Nisibis durò 3 mesi, secondo Gerolamo; 75 giorni, secondo Teofane, e anche questa volta la forte città della Mesopotamia, estremo baluardo della potenza romana verso l'Oriente, resistette validamente (1). Ora la battaglia di Singara, come si è visto, avvenne nel colmo dell'estate, cioè, presumibilmente, verso i primi di agosto: l'assedio di Nisibis sarebbe dunque terminato al principio dell'inverno. Sapore si sarebbe ritirato nei suoi dominii e avrebbe interrotta l'azione militare in seguito a questo insuccesso, anzichè in seguito alla battaglia di Singara. In tali condizioni non ci potrebbe stupire la sua inazione per tutto l'anno 349. Solo dopo aver ricevuta la notizia della morte di Costante, ritenendo che Costanzo dovesse trascurare la difesa delle provincie orientali per non perdere quelle occidentali, il re persiano ritentò infatti la prova, cominciando, si badi bene, la nuova campagna con un altro assedio di Nisibis, quasi a riparazione dello smacco subìto.

Non mi lusingo di aver con queste poche considerazioni dimostrato in modo inconfutabile che il dato di Gerolamo si debba senz'altro accettare: credo di aver provato però come sia irragionevole metterlo senz'altro da parte, senza neppure discuterlo.

---

(1) Rufio Festo, 27: " Ter autem a Persis est obsessa Nisibis, sed maiore sui detrimento, dum obsidet, hostis adfectus est ".

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. L. Disp. **13ª**, **1914-1915**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

CLASSI UNITE

Adunanza del 9 Maggio 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Camerano, Vice Presidente, D'Ovidio, Naccari, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Fusari, Balbiano, Panetti e Segre, Segretario;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Carle, De Sanctis, Stampini, D'Ercole, Brondi, Einaudi, Vidari, Prato. — Scusa l'assenza il Socio Salvadori.

Viene letto ed approvato il verbale dell'adunanza precedente.

Invitato dal Presidente, il Socio Naccari legge la Relazione della 1ª Giunta per il XIX° premio Bressa (internazionale, quadriennio 1911-1914) nella quale sono indicate le opere su cui la Giunta crede che debba particolarmente richiamarsi l'attenzione dell'Accademia.

Il Presidente domanda se qualche Socio ha da fare ulteriori proposte. Nessuno chiedendo la parola, resta chiuso il campo delle proposte.

Si procede quindi alla votazione per la nomina della 2ª Giunta, pel detto premio Bressa. E riescono nominati: per la Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali i Soci Naccari, Camerano, Guareschi, Somigliana, Mattirolo, e per la Classe di

Scienze morali, storiche e filologiche i Soci Ruffini, Stampini, Einaudi, De Sanctis e Brondi.

Il Socio Tesoriere Einaudi dà quindi lettura del conto consuntivo dell'esercizio 1914 e del bilancio preventivo del 1915 e dei conti relativi ai fondi dei premi.

Questi bilanci vengono approvati ad unanimità.

Il Presidente comunica che, accogliendo molto volontieri una proposta fattagli da alcuni Soci, ha scritto al Sindaco di Torino per ottenere che sia trasferta nell'arcata del Cimitero Generale destinata agli uomini illustri la salma di Angelo Genocchi, che fu per molti anni lustro di quest'Accademia e della nostra Università. Il Sindaco e la Giunta municipale hanno già espresso parere favorevole; ed ora si stanno facendo le ulteriori pratiche necessarie. L'Accademia unanime approva l'opera del Presidente, e lo incarica dei dovuti ringraziamenti all'Autorità Municipale.

Infine il Presidente chiede all'Assemblea di autorizzarlo a provvedere perchè nei locali dell'Accademia sia con apposita lapide ricordato il Socio Giacinto Berruti, che morendo lasciò in dono all'Accademia una cospicua somma. L'Accademia approva.

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre.
Ettore Stampini.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 9 Maggio 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe D'Ovidio e i Soci Naccari, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Fusari, Balbiano, Panetti e Segre, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Salvadori.

Letto e approvato il verbale della precedente adunanza, vengono presentate per la stampa negli *Atti* le seguenti Note:

G. Andreoli, *Su un problema di meccanica ereditaria*, dal Socio Peano;

F. Tavani, *Intorno alla teoria della funzione* $\Gamma(\rho)$ *e sue relazioni con altri integrali definiti*, pure dal Socio Peano (*);

F. Burzio, *Ricerche sperimentali sulla resistenza dell'aria contro schermi piani, sottili, rotanti*, dal Socio Panetti;

G. Fano, *Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli*, dal Socio Segre.

Il Socio Fusari, anche a nome del Collega Foà, legge la Relazione sulla Memoria del Dott. Loredan: *Intorno al processo dell'atresia follicolare nell'ovaia dei Mammiferi*. La Classe unanime ne accoglie le conclusioni, favorevoli alla stampa della Memoria.

(*) Questa Nota uscirà in una dispensa successiva.

LETTURE

Su un problema di meccanica ereditaria.

Nota di GIULIO ANDREOLI.

1. Scopo del presente lavoro è di trattare il problema delle oscillazioni smorzate (od altri aventi la stessa traduzione analitica) nell'ipotesi che, invece di una resistenza dovuta alla velocità, ed a questa proporzionale, vi sia una resistenza dovuta a forze di ereditarietà.

Il problema stesso — nel caso di condizioni *iniziali lineari* già assegnate — è stato trattato dal Volterra [1].

Noi, usando una trasformazione altrove [2] indicata, risolveremo completamente il problema, anche nel caso che *non* siano date condizioni iniziali e lineari, ma condizioni *non lineari* riferentisi a *tempi arbitrarii.*

Supporremo che, trattandosi di prima approssimazione, la legge di ereditarietà sia lineare (caso particolare è l'ordinaria ipotesi di una resistenza proporzionale alla velocità). Oltre ad assegnare la semplice espressione analitica, cercheremo anche di determinare l'andamento della soluzione (determinare cioè se il movimento sia asintotico o oscillatorio).

Mostreremo come, almeno in certi casi, la trattazione di questa seconda quistione sia possibile; questi casi sono compresi fra quelli appartenenti al ciclo chiuso, hanno cioè una legge di ereditarietà invariabile attraverso il tempo.

---

[1] Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, pag. 139 e seg.; *Leçons sur les fonctions de ligne*, pag. 221 e seg., ecc.

[2] G. Andreoli, *Sulle espressioni integro-differenziali* [" Rend. R. Acc. Lincei ", serie 5ª, vol. XXII (2° sem. 1913), pagg. 409-414], ecc.

In questi casi i risultati ottenuti derivano dal potere estendere l'ordinario metodo (*equazione caratteristica*) usato per l'integrazione delle equazioni differenziali a coefficienti costanti, ad un certo tipo di equazioni singolari di Volterra.

2. Premettiamo dunque un breve cenno su tale soggetto. Come ha già fatto rilevare il Volterra, le equazioni integrali del suo tipo possono riguardarsi come equazioni differenziali di ordine infinito; *lo stesso si potrà dire per le integro-differenziali dello stesso tipo.*

D'altra parte si vede che le equazioni del ciclo chiuso corrispondono al caso delle equazioni differenziali a coefficienti costanti; quelle più generali corrispondono invece al caso dei coefficienti variabili.

Infatti, un nucleo $m(t, \tau)$, sommabile e di quadrato sommabile, può sempre porsi sotto la forma:

$$m(t, \tau) = n(t, \xi),$$

ove $\xi = t - \tau$.

In un qualunque intervallo arbitrario noi possiamo sviluppare $n(t, \xi)$ in serie di funzioni ortogonali $g_r(\xi)$ ed avere:

$$m(t, \tau) = n(t, \xi) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r(t)\, g_r(\xi).$$

Quindi l'equazione integrale:

$$\varphi(t) + \lambda \int_0^t m(t\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(t),$$

può scriversi anche sotto la forma:

$$\varphi(t) + \lambda \sum_1^{\infty} c_r(t) \cdot \int_0^t g_r(t - \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(t),$$

la quale dimostra l'asserto.

Limitiamoci ora al caso di leggi di ereditarietà della forma di quella del ciclo chiuso, sia cioè:

$$n(t, \tau) = g(t - \tau).$$

Dimostriamo un lemma:

Se l'integrale:

$$\int_{t-\eta}^{t+\xi} g(t-\tau)\, e^{k\tau}\, d\tau = \omega(t, \xi, \eta)$$

esiste per ogni t *finito, esso, qualunque siano* ξ, η, k, *è eguale a:*

$$e^{kt}\left[\Psi(k, \xi) - \Psi(k, \eta)\right].$$

Infatti, mutiamo t in $t+h$; l'integrale soprascritto si può anche scrivere:

$$\int_{t+h-\eta}^{t+h-\xi} g(t+h-\tau)\, e^{k\tau}\, d\tau = \omega(t+h, \xi, \eta).$$

Poniamo ora $\tau = h + \tau'$; quest'ultimo integrale diventa:

$$\int_{t+h-\eta}^{t+h-\xi} g(t+h-\tau)\, e^{k\tau} d\tau = \int_{t-\eta}^{t-\xi} g(t-\tau') \,.\, e^{kh} \,.\, e^{k\tau'} d\tau' = e^{kh}\, \omega(t, \xi, \eta);$$

avremo cioè:

$$\omega(t+h, \xi, \eta) = e^{kh} \,.\, \omega(t, \xi, \eta).$$

Questa formola per $t=0$, ci dà:

$$\omega(h, \xi, \eta) = e^{kh}\, \omega(0, \xi, \eta),$$

da cui, ponendo t in luogo di h, si trae:

$$\omega(t, \xi, \eta) = e^{kt}\, \omega(0, \xi, \eta).$$

Ora, sostituendo alle ω i corrispondenti integrali, avremo

$$\int_{t-\eta}^{t-\xi} g(t-\tau)\, e^{k\tau}\, d\tau = e^{kt} \,.\, \int_{-\eta}^{-\xi} g(-\tau)\, e^{k\tau}\, d\tau.$$

Ma quest'ultimo integrale può scriversi anche:

$$\int_{-\eta}^{-\xi} g(-\tau)\, e^{k\tau}\, d\tau = \int_{0}^{-\xi} g(-\tau)\, e^{k\tau}\, d\tau + \int_{-\eta}^{0} g(-\tau)\, e^{k\tau}\, d\tau.$$

Quindi ne deduciamo che:

$$\int_{t-\eta}^{t-\xi} g(t-\tau)\, e^{k\tau}\, d\tau = e^{kt} \cdot \left[\int_0^{-\xi} g(-\tau)\, e^{k\tau}\, d\tau - \int_0^{-\eta} g(-\tau)\, e^{k\tau}\, d\tau\right],$$

la quale si può anche scrivere:

$$\omega(t, \xi, \eta) = e^{kt}\left[\omega(0, \xi, 0) - \omega(0, \eta, 0)\right],$$

e questa formola dimostra l'assunto [1].

3. Nel caso che $\xi = 0$, $\eta = \infty$; $\xi = -\infty$, $\eta = 0$; $\xi = -\infty$, $\eta = +\infty$, si ha semplicemente:

$$\int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\, e^{k\tau}\, d\tau = -e^{kt} \cdot \int_0^{-\infty} g(-\tau)\, e^{k\tau}\, d\tau = e^{kt} \cdot \int_0^{\infty} g(\tau) \cdot e^{-k\tau}\, d\tau = e^{kt} \cdot \Omega_1(k),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\, e^{k\tau}\, d\tau = e^{kt} \cdot \Omega_2(k), \qquad \int_t^{\infty} g(t-\tau)\, e^{kt}\, d\tau = e^{kt}\, \Omega_3(k),$$

nel caso che la g sia definita solamente nel campo reale.

---

[1] Considerazioni del tutto analoghe possono farsi per altri tipi di espressioni; così ad esempio si può dimostrare che: *Se l'integrale:*

$$\int_{\alpha t}^{\beta t} g\left(\frac{t}{\tau}\right) \cdot \tau^k \cdot d\tau \qquad (k \neq -1)$$

esiste, esso è eguale a:

$$t^{k+1}\left[\Psi(k, \beta) - \Psi(k, \alpha)\right].$$

Basta ripetere la dimostrazione di prima, sostituendo però a t non $t+h$, bensì ht; e così ponendo poi $\tau = h\tau'$.

Così anche, più generalmente per:

$$\sum_r \int_{-\infty}^{t-\xi_r} g_r(t-\tau)\, e^{k\tau}\, d\tau, \qquad \sum_r \int_0^{\alpha_r t} g_r\left(\frac{t}{\tau}\right) \tau^k\, d\tau.$$

Si vede quindi agevolmente che gli operatori del tipo:

$$\left.\begin{aligned} D_1\,\varphi(t) &= \varphi(t) + \lambda \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \\ D_2\,\varphi(t) &= \varphi(t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \\ D_3\,\varphi(t) &= \varphi(t) + \lambda \int_{t}^{+\infty} g(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} D\varphi(t) &= \varphi(t) + \lambda \int_{t-\eta}^{t-\xi} g(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \\ \Delta\varphi(t) &= \int_{t-\eta}^{t-\xi} g(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \end{aligned}\right.$$

generalizzano *direttamente* gli operatori differenziali lineari omogenei a coefficienti costanti.

Infatti, questi sono caratterizzati proprio dal fatto, che applicati ad un esponenziale e^{kx}, lo riproducono moltiplicato per una costante rispetto a x, dipendente da k.

E però:

Le equazioni integrali omogenee singolari del Volterra:

$$\varphi(t) + \lambda \int_{t-\eta}^{t-\xi} g(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = 0\,, \qquad \int_{t-\eta}^{t-\xi} g(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = 0,$$

sono da riguardarsi come estensione delle ordinarie equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti ([1]).

Che queste equazioni integrali, anche per ξ ed η finiti, siano singolari, si deduce dalle mie già citate Note e Memorie; si può anche vedere direttamente, dimostrando che esiste una soluzione non nulla.

Così, se $g(t-\tau) = c$, $\xi = -1$, $\eta = 1$, si ha l'equazione:

$$\varphi(t) + \lambda \int_{t-1}^{t+1} c\,.\,\varphi(\tau)\,d\tau = 0\,,$$

che è soddisfatta ovviamente da $\varphi(t) = $ costante, se $1 + 2\lambda c = 0$.

([1]) Ciò si può dire anche nel caso che invece d'un solo integrale si avesse una sommatoria:

$$\sum_r \int_{-\infty}^{t-\xi_r} g_r(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\,.$$

Ciò non deve meravigliare, poichè se in queste equazioni imponiamo (ad esempio) alla φ la condizione di essere nulla fuori di un certo intervallo, in questo stesso intervallo l'equazione che determina φ, si può trasformare in una equazione regolare di Fredholm, e quindi per certi valori di λ (gli autovalori, i quali dipendono dalla scelta dell'intervallo arbitrario) può presentare soluzioni non nulle.

Dalle formule scritte dianzi si trae che la funzione $\Psi(k, \xi)$, è data da:

$$\int_{-\infty}^{-\xi} g(-\tau)\, e^{k\tau} d\tau\,, \qquad \int_{-\xi}^{\infty} g(-\tau)\, e^{k\tau} d\tau\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g(-\tau)\, e^{k\tau} d\tau\,,$$

per quei valori di k, i quali rendono convergenti i relativi integrali.

Se, per fissare le idee, ci limitiamo solo alla prima forma (ripetendo poi per le altre gli stessi ragionamenti), ne viene immediata la seguente generalizzazione dell'ordinario risultato della teoria delle equazioni differenziali lineari omogenee, a coefficienti costanti; cioè:

L'equazione singolare di Volterra:

$$\varphi(t) + \lambda \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = 0\,,$$

ammette la soluzione:

$$\varphi(t) = e^{kt}$$

solo se k *è radice dell'equazione:*

$$1 + \lambda \int_{0}^{\infty} g(\tau)\, e^{-k\tau} d\tau = 0\,,$$

e naturalmente sia tale che gl'integrali da considerare esistano.

Lo stesso si potrà dire anche per l'equazione più generale data dapprima.

L'equazione in k, ora scritta, sarà detta *equazione caratteristica*, relativa all'equazione integrale singolare data.

Si vede che essa (a causa dell'esistenza di k e della convergenza degl'integrali) lega la crescenza della g sull'asse reale:

si può, ad esempio, subito affermare che se $g(\tau) = e^{\tau^2}$, non esisteranno radici dell'equazione caratteristica (limitandosi però a considerare la g come funzione di variabile reale).

Questo stesso teorema si può porre anche sotto altra forma.

4. *L'equazione integrale regolare:*

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^t g(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = \lambda \int_\mu^\nu g(t-\tau)\,e^{k\tau}\,d\tau\,,$$

ove sia:

$$\nu = 0,\ \mu = -\infty; \qquad o \qquad \nu = \infty,\ \mu = 0,$$

ed ove:

$$1 - \lambda \int_\mu^\nu g(-\tau)\,e^{k\tau}\,d\tau = 0\,,$$

ammette la soluzione:

$$\varphi(t) = e^{kt}$$

supponendo soddisfatte le condizioni di convergenza degli integrali che si considerano.

Noi ammetteremo anche che k possa avere valori complessi: l'imaginario in tal modo introdotto, non ci porta alle funzioni di variabile complessa, ma introduce semplicemente le funzioni trigonometriche in luogo dell'esponenziale.

Nello scrivere l'equazione caratteristica, abbiamo supposto di estendere l'integrazione all'asse reale delle τ, poichè supponevamo definita g soltanto nel campo reale.

I risultati ottenuti si possono unire e generalizzare nel caso che g sia funzione della variabile complessa τ. Però allora il cammino d'integrazione (che va da $-\xi$ a $-\eta$) influirà sulla $\psi(k)$, *sicchè questa, in generale, risulterà funzione polidroma della variabile complessa* k, *e tale polidromia è dovuta alla presenza di singolarità nella* g (τ).

Il concetto di equazione caratteristica viene così ad essere ampliato e nello stesso tempo unificato: *le differenti equazioni caratteristiche prima trovate sono ottenute eguagliando a zero diversi rami della funzione polidroma.*

Fissato ora il valore $\lambda = 1$, si possono avere i due seguenti casi, il cui differente comportamento sta ad indicare la singolarità ottenuta col passare da equazioni differenziali di ordine finito, a quelle di ordine infinito:

I. *L'equazione caratteristica ammette un numero finito di radici*, computando solo quelle che danno un senso agl'integrali improprii, ciascuna secondo la propria multiplicità: *sussiste allora la differenza fra equazioni omogenee e non omogenee.*

II. *Essa ammette un numero infinito di radici:* ed allora tale differenza può sparire.

Questo diverso comportamento si riverbera sulla discussione delle equazioni integrali regolari che incontreremo nel nostro problema di meccanica ereditaria.

Infine, seguendo l'ordinario procedimento, si può vedere che se k è radice r-pla dell'equazione caratteristica, essa dà anche le soluzioni:

$$t e^{kt}, \ldots, t^{r-1} . e^{kt}.$$

5. Passiamo ora al problema di meccanica ereditaria cui abbiamo accennato.

Consideriamo una curva C, e su di essa due punti P e Q, di cui il primo (fisso) attrae il secondo (mobile sulla curva) proporzionalmente all'arco $s = PQ$ (si tratta di accelerazione tangenziale).

Sia $s(t)$ la posizione di Q all'istante t, ed $H((s))$ esprima la funzione di ereditarietà; potremo subito scrivere l'equazione del moto:

$$m . s''(t) = [k^2 s(t) + H((s))] \qquad (t \geq 0) \tag{1}$$

in cui m è la massa del punto Q (supposta unitaria quella di P), e k^2 sia la costante dell'attrazione.

Se notiamo che la $H((s))$ è una funzione della linea s e quindi anche della linea $s''(t)$, e se supponiamo inoltre che la legge di ereditarietà non sia caricata [1] (non avvengano cioè,

---

[1] G. Andreoli, *Su certe equazioni integrali del Kneser e sulla loro generalizzazione* [" Rend. R. Acc. Lincei ", serie 5ª, vol. XXIII (1° sem. 1914), pagg. 159-162].

in essa, variazioni istantanee e finite), la (1) si può trasformare nella:

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^t N(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(\tau); \qquad (t \geq 0) \tag{2}$$

se, cominciando a contare il tempo dall'inizio del moto, operiamo la già accennata trasformazione:

$$s''(t) = \varphi(t)$$
$$s(t) = \int_0^t (t - \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau + \alpha t + \beta; \quad (\alpha, \beta \text{ costanti arbitrarie})$$
$$\lambda = \frac{1}{m},$$

ed in conseguenza (1) da:

$$H((s)) = \int_0^t M(t\tau)\, s(\tau)\, d\tau$$

ricaviamo:

$$N(t\tau) = \int_\tau^t M(t\theta)\,(\theta - t)\, d\theta + k^2 (t - \tau)$$
$$f(t) = k^2 (\alpha t + \beta) + \int_0^t M(t\tau) \{\alpha t + \beta\}\, d\tau.$$

Quindi la soluzione della (2) ed in conseguenza della (1) è data da:

$$f(t) + \lambda \int_0^t \mathfrak{N}(t\tau)\, f(\tau)\, d\tau = \varphi(t) \qquad (t \geq 0), \tag{3}$$

se $\mathfrak{N}$ è il nucleo risolvente di Volterra rispetto ad N.

Come formola che risolve completamente il problema posto, si trae infine:

$$s(t) = \int_0^t (t - \tau)\, f(\tau)\, d\tau + \lambda \int_0^t \left\{ \int_\tau^t (t - \theta)\, \mathfrak{N}(\theta t)\, d\theta \right\} f(\tau)\, d\tau + \alpha t + \beta. \tag{4}$$

Chiamiamo ora $\sigma(t)$ e $\kappa(t)$ le due soluzioni particolari ottenute scegliendo $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$; $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$. Più generalmente si potrebbero scegliere due soluzioni corrispondenti alle coppie α_1, β_1; α_2, β_2, supposto che:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

---

(1) Per $N.(t, \tau) = k^2 (t - \tau) + 2h^2$, si ritrova l'ordinaria legge di resistenza proporzionale alla velocità.

Per il modo lineare con cui le costanti α, β entrano nella (4), è facile vedere che si ha:

$$s(t) = \alpha\sigma(t) + \beta\kappa(t) \tag{5}$$

in modo perfettamente analogo a quanto avviene nel caso ordinario.

Supponiamo ora di volere che, in due certi istanti t_1 e t_2, la soluzione soddisfi alle:

$$\begin{aligned} a_{11}\, s(t_1) + a_{12}\, s'(t_1) + b_1 = 0 \\ a_{21}\, s(t_2) + a_{22}\, s'(t_2) + b_2 = 0 \end{aligned} \qquad \left\{ s' = \frac{ds}{dt} \right\},$$

ove può anche essere $t_1 = t_2$.

Dalla (5) seguono per α, β le due equazioni:

$$\begin{aligned} \alpha\left[a_{11}\,\sigma(t_1) + a_{12}\,\sigma'(t_1)\right] + \beta\left[a_{11}\,\kappa(t_1) + a_{12}\,\kappa'(t_1)\right] + b_1 = 0 \\ \alpha\left[a_{21}\,\sigma(t_2) + a_{22}\,\sigma'(t_2)\right] + \beta\left[a_{21}\,\kappa(t_2) + a_{12}\,\kappa'(t_2)\right] + b_2 = 0 \end{aligned}$$

che le determinano completamente (almeno nel caso generale).

Come abbiamo già detto, questo procedimento vale ancora per *vincoli non lineari* (a differenza degli altri che partono solo da condizioni *iniziali e lineari*): esso può estendersi ancora ad una qualunque equazione integro-differenziale.

Ad esempio, per mostrare come la ricerca della soluzione col nostro metodo si riduca ad una quistione di algebra, imponiamo la seguente condizione: *La differenza di energia cinetica del punto Q considerato nel suo movimento agli istanti* t_1 *e* t_2 *deve essere* p; *quella agli istanti* t_3 *e* t_4 *deve essere* q.

Ciò equivale a porre:

$$\left\{ \begin{aligned} s'(t_2)^2 - s'(t_1)^2 = \frac{2p}{m} \\ s'(t_4)^2 - s'(t_3)^2 = \frac{2q}{m} \end{aligned} \right.$$

Se ad s' sostituiamo la sua espressione ottenuta da (5), si ha:

$$[\alpha\sigma'(t_2) + \beta\kappa'(t_2)]^2 - [\alpha\sigma'(t_1) + \beta\kappa'(t_1)]^2 = \frac{2p}{m}$$

$$[\alpha\sigma'(t_4) + \beta\kappa'(t_4)]^2 - [\alpha\sigma'(t_3) + \beta\kappa'(t_3)]^2 = \frac{2q}{m}$$

che è un sistema di due equazioni quadratiche in α, β.

Quindi *in generale vi sono quattro soluzioni; resta poi da discuterle e scartare le eventuali radici doppie o complesse.*

6. Bisogna infine discutere l'andamento della soluzione $s(t)$, ciò che in generale non è possibile fare in modo completo, se non supponendo già conosciuto in un modo qualunque (o come faremo in seguito, oppure tracciando effettivamente le curve date dalla soluzione analitica (5)) l'andamento delle due soluzioni particolari $\sigma(t)$, $\kappa(t)$; a queste due si potrebbero sostituire altre due qualunque, purchè linearmente indipendenti.

Supponiamo perciò conosciuto l'andamento di $\sigma(t)$ e $\kappa(t)$; sarà in conseguenza nota la $\rho(t) = \frac{\kappa(t)}{\sigma(t)}$.

Ora la soluzione generale si potrà porre sotto la forma:

$$s(t) = \sigma(t)\left\{\alpha + \beta\rho(t)\right\} = \beta\sigma(t)\left\{\frac{\alpha}{\beta} + \rho(t)\right\} \qquad (\beta \neq 0).$$

Si possono presentare i seguenti casi:

I. *La funzione $\sigma(t)$ è monotona (decrescente positiva o crescente negativa, poichè per $t = \infty$ tende a zero), a partire da un certo t_0 in poi; la $\rho(t)$ è anch'essa monotona, a partire da t_0 in poi.*

Noi troviamo che la $s(t)$ non può avere altre radici che quelle di

$$\sigma(t) = 0; \qquad \frac{\alpha}{\beta} + \rho(t) = 0$$

e quindi fuori dell'intervallo $(0, t_0)$ non può ammettere, al più, che una sola radice reale.

E però il movimento, per t sufficientemente grande, è asintotico.

II. *La* σ (t) *caratterizza un movimento oscillatorio:* vi sono cioè dei valori di t arbitrariamente grandi, per cui essa s'annulla. La ρ (t) *è invece monotona* (s'intende sempre a partire da un certo t_0 in poi).

Il movimento del punto, per qualunque condizione iniziale, è sempre oscillatorio.

III. *La* σ (t) *è monotona, la* ρ (t) *non lo è.* In generale, nulla si potrà dire sul movimento, però possiamo affermare che:

Se il movimento è *oscillatorio* per i valori $\frac{\alpha}{\beta} = k_1$, $\frac{\alpha}{\beta} = k_2$, *lo deve certamente essere* ancora o per tutti i valori compresi nell'intervallo (k_1, k_2), o per tutti i valori esterni ad esso, o, infine, per tutti i valori di $k = \frac{\alpha}{\beta}$: in ogni caso però vi sarà una regione per k, per cui il movimento è certamente oscillatorio.

Se il movimento per quei valori di k *non è oscillatorio ma asintotico*, esso non sarà oscillatorio certamente o per tutti i valori interni o per tutti quelli esterni.

Se infine $k_1 = k_2$, potrebbe darsi che il movimento risulti oscillatorio (asintotico) solo per quel valore di k, ed asintotico (oscillatorio) per tutti gli altri. Tutto ciò si vede con considerazioni di continuità.

IV. *La* σ (t) *definisce un movimento oscillatorio, la* ρ *non è monotona.*

Anche in questo caso si possono ripetere le considerazioni fatte nel caso precedente; potrebbe quindi accadere che *vi sia un solo moto oscillatorio possibile*, quello cioè definito da $s(t) = \sigma(t)$.

Come conseguenza della precedente discussione, si può osservare che se i due moti definiti da σ e κ sono ambedue oscillatorii, e le radici di

$$\sigma(t) \,.\, \kappa(t) = 0$$

disposte in ordine crescente, sono tali che si possano sempre trovare due consecutive di esse, arbitrariamente grandi, e fra cui la $\sigma(t)$, $\kappa(t)$ abbiano i segni che si vogliano, il movimento *sarà sempre oscillatorio.*

Per fare ciò, basta ed occorre che fra due radici arbitrariamente grandi dell'una funzione vi sia sempre un numero dispari di radici dell'altra, e reciprocamente.

Scegliendo poi opportunamente il nucleo M, si vede che si può presentare il caso che, prima d'arrivare ad un certo istante t_0, la s faccia infinite oscillazioni, e così per altri istanti t_r in numero finito o no.

7. Riprendiamo la discussione dell'equazione integro-differenziale, supposta già ridotta ad equazione integrale: e consideriamo la soluzione σ.

Ammettiamo inoltre d'aver costruita la funzione caratteristica Ψ, corrispondente ad essa (cioè all'equazione integrale singolare da essa dedotta). Si dovrà allora verificare una delle seguenti ipotesi.

A) *La funzione* f(x) *può essere una combinazione lineare di un numero finito di funzioni:*

$$(6)\qquad f_{\varrho ps}(t) = (\lambda_s - 1) \, . \, t^{\varrho} . \, e^{k_{ps} t} + \lambda_s \int_{\infty}^{0} g(t-s) \, \tau^{\varrho} e^{k_{ps} \tau} \, d\tau \qquad (\rho \text{ intero}),$$

ove k_{ps} *sia una radice di multiplicità* $r_p > \rho \geq 0$ *dell'equazione caratteristica relativa all'equazione integrale singolare:*

$$\varphi(t) + \lambda_s \int_{\infty}^{t} g(t-s) \, \varphi(s) \, ds = 0.$$

Si abbia cioè:

$$(7)\qquad f(t) = \sum c'_{\varrho ps} \cdot f_{\varrho ps}(t),$$

in tal caso si avrà anche:

$$\varphi(t) = \sum c'_{\varrho ps} \, \varphi_{\varrho ps}(t),$$

ove le $\varphi_{\varrho ps}$ sono le soluzioni della data equazione integrale del movimento (scritte sotto forma leggermente diversa, per semplicità) quando $f = f_{\varrho ps}$, cioè:

$$\varphi_{\varrho ps}(t) + \int_{0}^{t} g(t-\tau) \, \varphi_{\varrho ps}(\tau) \, d\tau = f_{\varrho ps}(t);$$

ma per la seconda forma del lemma (§ 4) le $\varphi_{\varrho ps}$ sono proprio date da:

$$t^{\varrho} \, e^{k_{ps} t}.$$

Quindi possiamo dire che in questo caso la soluzione è data da:

$$\varphi(t) = \sum_{\varrho,p,s} c'_{\varrho,p,s} \, . \, t^\varrho \, . \, e^{k_{ps} t} \qquad (0 \leq \rho < r_p).$$

Questa formola ci dà la φ; integrando due volte, con la opportuna scelta delle costanti d'integrazione, si giunge alla:

$$\sigma(t) = \sum_{\varrho,p,s} c_{\varrho,p,s} \, . \, t^\varrho \, . \, e^{k_{ps} t}, \tag{8}$$

ove le c e c' sono legate da certe relazioni facili a vedere.

E però la discussione procede molto semplicemente. Già dalla stessa soluzione del problema meccanico, si vede che il punto Q deve tendere a P, col tendere di t a $+\infty$; ciò implica un certo legame alla forma analitica della funzione di ereditarietà. Nell'ipotesi A) ora accennata, possiamo quindi dire che:

Se la f *si presenta sotto la forma* (6), *siamo certi che le* k *devono essere a parte reale negativa. Se eventualmente ve ne fossero di quelle a parte reale positiva o nulla, in ogni problema meccanico del tipo indicato, le* c *corrispondenti sarebbero certamente nulle.*

Sieno ora $k_1, k_2, k_3, \ldots,$ le radici a parte reale negativa; per la realtà del movimento (e della stessa equazione caratteristica) le complesse vanno a coppie coniugate. Quindi potremo porre più semplicemente:

$$\sigma(t) = \sum e^{-u_r t} (\alpha_r \cos(v_r t) + \beta_r \operatorname{sen}(v_r t) \, . \, \pi_r'(t),$$

ove il sommatorio consta di un numero finito di termini, le $-u_r$ sono le parti reali, le iv_r le imaginarie delle radici, e π_r' è un polinomio in t, di grado minore della multiplicità della radice considerata. È ovvio che questa espressione si può poi trasformare in [1]:

$$\sigma(t) = \sum e^{-u_r t} \operatorname{sen}(v_r t + w_r) \, . \, \pi_r(t).$$

---

[1] Le w_r e π_r dipendono in modo facile a vedere dalle α, β, π.

Supponiamo già disposte le u_r in ordine non decrescente; per t sufficientemente grande, segnando:

$$\sigma(t) = e^{-u_1 t} \{ \sum e^{-(u_r - u_1)t} . \operatorname{sen}(v_r t + w_r) . \pi_r(t) \},$$

si vede che tutti i termini pei quali $u_r > u_1$, si possono rendere piccoli a piacere. Quindi, per t sufficientemente grande, ci possiamo limitare a considerare la funzione:

$$\sigma_1(t) = e^{-u_1 t} \{ \sum h_r \operatorname{sen}(v_r t + w_r) . t^{\varrho} \}$$

ove il sommatorio vada esteso alle sole radici di cui la parte reale sia $-u_1$, ed $h_r . t^{\varrho}$ sia il termine di grado più alto di π_r. Quindi:

Se l'espressione:

$$\sum h_r \operatorname{sen}(v_r t) + w_r) t^{\varrho}$$

cambia infinite volte di segno, il movimento è oscillatorio. In caso diverso è asintotico. Si vede però che in un qualunque intervallo di tempo, esso può cambiar segno, solo per un numero finito di volte.

Infine, se notiamo che a sua volta questa espressione per t sufficientemente grande, prende lo stesso segno che competerebbe al coefficiente della più alta potenza di t (salvo nell'intorno delle radici), possiamo dire concludendo:

Nell'ipotesi A) *l'andamento della curva* $\sigma(t)$, *per* t *sufficientemente grande, è lo stesso di quella della curva:*

$$\sum h_s \operatorname{sen}(v_s t + w_s)$$

ove il sommatorio vada esteso alle sole v_s, *le cui* u_s *corrispondenti siano eguali ad* u; *che inoltre abbiano come coefficienti* $\pi_s(t)$ *quelli di grado più alto, ed in cui le* h_s *siano proprio i coefficienti della più alta potenza di* t *che figura in tutte le* π_s.

In particolare potrebbe avvenire che l'espressione da studiare si annulli senza cambiar segno; fisicamente ciò corrisponde al fatto che Q, dopo aver raggiunto P, ritorni indietro, senza proseguire il cammino nello stesso senso con cui è arrivato. Ciò potrebbe presentarsi un numero finito o anche infinito di volte: è infinitamente poco probabile però, poichè impone delle relazioni da verificare.

8. Passiamo ora alla seconda ipotesi:

B) *La* f *non è rappresentabile con un numero finito di termini di quel tipo, ma con una serie.*

In tal caso la (8) a sua volta dà una serie. Conviene allora scegliere, per semplicità, un unico valore di λ_s, la cui equazione caratteristica abbia infinite radici. In particolare, se ciò è possibile, conviene $\lambda_s = 1$.

Si vedono subito quali singolarità possono presentarsi: la φ, ed in conseguenza la [illegible], assumono la forma:

$$\sum e^{-u_r t} \,.\, \mathrm{sen}\,(v_r t + w_r) \,.\, \pi_r(x)\,, \tag{9}$$

dove però invece di un sommatorio si ha una serie; le w_r, v_r, *si possono trovar ripetute; ed infine* π_r *non sia un polinomio, ma una funzione intera* (sempre che lo sviluppo converga).

D'altra parte, in un intervallo arbitrario noi possiamo sempre dedurre dalle $f_{\varrho, p, s}$ un sistema di funzioni ortogonali, e sviluppare la f secondo queste. Dunque la soluzione, in un qualunque intervallo arbitrariamente grande, potrà rappresentarsi con una serie i cui elementi siano del tipo (8), supposto soddisfatta la convergenza.

Per vedere quali siano poi le difficoltà del problema, in generale, ci limitiamo a considerare il seguente caso:

I. *Le* π_r *sono delle costanti.*

II. *Le* u_r *non si vadano addensando indefinitamente nell'intorno destro di una di esse; vi deve essere fra le* u *un valore minimo* u_1; *vi possono essere infinite* u *eguali ad* u_1.

Ciò in sostanza equivale ad imporre certe condizioni all'equazione caratteristica, e quindi alla funzione di ereditarietà; anche in tali ipotesi, la trattazione è delicatissima.

Infatti, se le u eguali ad u_1 sono in numero finito, si possono ripetere le stesse considerazioni, e giungere agli stessi risultati dei numeri precedenti.

Se invece le u eguali ad u_1 fossero infinite, allora bisognerebbe considerare la serie trigonometrica

$$\sum h_r \,\mathrm{sen}\,(v_r t + w_r)\,,$$

la quale convergerà certamente se lo sviluppo (9) da cui essa è estratta convergeva.

Siccome noi avevamo una serie analoga per $\varphi(t) = s''(t)$, e naturalmente noi supponevamo la convergenza assoluta e la sommabilità termine a termine, siamo certi che questa serie converge uniformemente ed è derivabile termine a termine due volte.

Ora questa serie potrebbe rappresentare anche una funzione sempre positiva: infatti se le v fossero dei multipli di π, mentre $w_{2r+1} = 0$, $w_{2r} = \frac{1}{2}\pi$, ci troveremmo proprio in tale caso.

Però se notiamo che le h_r si possono ritenere sempre positive (mutando, ove occorra, segno a v_r, w_r) possiamo enunciare la seguente condizione *sufficiente* perchè il moto sia oscillatorio:

I due insiemi comuni a tutti gli insiemi in cui ciascun termine della serie è rispettivamente positivo (non nullo), negativo (non nullo), devono avere come punto limite l'infinito.

Ciò implica a sua volta che l'insieme delle radici di tutti i termini della serie non sia densa su tutto il semiasse positivo, a destra di un qualunque t_0. Questa condizione, in sostanza, equivale proprio ad affermare che vi sono dei punti t arbitrariamente grandi, in cui la serie è certamente positiva (o negativa); essa si potrebbe esprimere sotto forma puramente aritmetica.

Riassumendo i risultati ottenuti, possiamo dire:

La discussione del problema (già risolto per via analitica) si può fare senza tracciare le curve ottenute analiticamente, quando si conosca l'andamento di due soluzioni particolari (o meglio di una e del rapporto di un'altra a questa).

La discussione poi dell'andamento di ciascuna di queste due soluzioni, salvo che esso non sia già conosciuto per mezzo dell'effettivo tracciamento, si può fare solo sotto ipotesi particolari.

In generale si presenta però la possibilità di avere moto asintotico o oscillatorio, a seconda delle condizioni iniziali.

Gabinetto di Meccanica Razionale della R. Università di Napoli, Marzo 1915.

Ricerche sperimentali sulla resistenza dell'aria contro schermi piani, sottili, rotanti.

Nota dell'Ing. FILIPPO BURZIO
(Con una tavola).

1. Facendo seguito agli esperimenti eseguiti dal prof. Panetti, coi quali si determinò l'influenza del fenomeno rotatorio, misurato dal *rapporto di posizione*, sulla resistenza specifica opposta dall'aria al moto di schermi piani, sottili, rotanti, altri se ne sono intrapresi, col duplice scopo:

a) di ricercare ulteriormente se la legge di dipendenza fra resistenza specifica e rapporto di posizione sia da considerarsi, approssimativamente, lineare, oppure quadratica;

b) di studiare l'influenza che su tale resistenza specifica ha un secondo parametro: il *rapporto di figura* φ, o *allungamento*, il quale, nella Nota citata, e per il caso di piastre sottili di figura rettangolare, investite dal vento in direzione parallela ad un piano di simmetria, fu definito come il rapporto fra il lato normale alla direzione del vento e quello inclinato.

A tale scopo si sperimentò su tre nuovi tipi di pala rettangolare, aventi la stessa area di quella che servì nelle precedenti ricerche, cioè m² 0,074. Ciò affinchè l'influenza della variazione del rapporto di figura risultasse distinta da quella della variazione dell'area. Le dimensioni delle pale furono rispettivamente: m² 0,272 × 0,272 — m² 0,385 × 0,192 — m² 0,472 × 0,158; e, col 1° tipo di pala già sperimentato, di m² 0.238 × 0,311, realizzano gli allungamenti: 0,765; 1; 2,005; 2,94.

2. Le prove vennero effettuate nel Laboratorio di Aeronautica del Politecnico di Torino, e furono condotte identicamente a quelle eseguite dal prof. Panetti. I dati degli esperimenti e i risultati dei calcoli sono esposti nelle tabelle seguenti:

3. TABELLE.

I. — **PALA** m² $0,272 \times 0,272$; $\varphi = 1$

Molinello *m. 1,498 diametro esterno*

$R = 0,749$ $r = 0,477$ $b = 0,272$ $b' = 0,06$ $R = 0,70$

rapporto di posizione $p = 0,222$

$5640\, b(R^4 - r^4) = 403,7$ $5640\, b'[r^4 + (R')^4 - R^4](K) = 2,013$

Posizione del reostato	Misure elettriche: Volt V	Ampère A	KW Π	Giri del molinello n	Perdita joule in KW $\Pi_j = 0,159 \frac{A^2}{1000}$	Potenza a vuoto depurata Π_0'	Potenza assorbita dal braccio $(\Pi) = 2,013 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	Potenza assorbita dalle pale $\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	$K = \frac{\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)}{403,7}$
0	490,0	77,5	38,00	756	0,955	10,60	0,870	25,58	0,147
3	488,0	87,5	42,68	796	1,237	10,16	1,014	30,27	0,149
5	485,0	102,0	49,50	849	1,655	9,75	1,232	36,86	0,149
6	481,5	115,0	55,80	887	2,105	9,67	1,405	42,62	0,151
7	478,5	131,5	63,80	927	2,746	9,84	1,605	49,61	0,154
8	476,5	143,5	69,62	954	3,270	10,02	1,750	54,58	0,153
9	474,0	153,5	74,48	973	3,741	10,14	1,853	58,75	0,158

Molinello *m. 1,356 diametro esterno*

$R = 0,678$ $r = 0,406$ $b = 0,272$ $b' = 0,06$ $R' = 0,70$

rapporto di posizione $p = 0,253$

$5640\, b(R^4 - r^4) = 282,45$ $5640\, b'[r^4 + (R')^4 - R^4]\,(K) = 2,178$

	Misure elettriche: V	A	Π	n	$\Pi_j = 0,159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 2,178 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
0	485,0	62,0	30,10	754	0,611	10,62	0,935	17,93	0,148
3	484,5	69,5	33,62	798	0,768	10,14	1,108	21,60	0,150
5	482,5	80,5	38,81	853	1,030	9,74	1,351	26,69	0,152
6	480,0	91,5	43,90	896	1,330	9,69	1,565	31,32	0,158
7	477,0	106,0	50,59	941	1,787	9,93	1,814	37,06	0,158
8	475,0	117,0	55,84	973	2,174	10,14	2,006	41,52	0,160
9	471,0	128,0	61,12	998	2,607	10,31	2,165	46,04	0,164

***Molinello** m. 1,218 diametro esterno*

$R = 0{,}609 \quad r = 0{,}337 \quad b = 0{,}272 \quad b' = 0{,}06 \quad R' = 0{,}70$

rapporto di posizione $p = 0{,}289$

$5640\, b\, (R^4 - r^4) = 191{,}2 \qquad 5640\, b' \,[r^4 + (R')^4 - R^4]\, (K) = 4{,}499$

	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0{,}159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 4{,}499 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	492,5	57,0	28,10	761	0,517	10,55	2,20	14,83	0,176
3	490,5	63,0	30,90	806	0,631	10,05	2,56	17,66	0,176
5	488,5	73,0	35,63	863	0,846	9,70	3,21	21,87	0,178
6	487,0	83,5	40,65	907	1,110	9,73	3,73	26,08	0,183
7	485,0	97,0	47,00	958	1,498	10,04	4,39	31,07	0,185
8	483,0	106,0	51,20	993	1,790	10,27	4,89	34,25	0,183
9	481,5	116,0	56,03	1023	2,110	10,58	5,60	37,74	0,185

***Molinello** m. 1,076 diametro esterno*

$R = 0{,}538 \quad r = 0{,}266 \quad b = 0{,}272 \quad b' = 0{,}06 \quad R' = 0{,}70$

rapporto di posizione $p = 0{,}338$

$5640\, b (R^4 - r^4) = 120{,}08 \qquad 5640\, b' [r^4 + (R')^4 - R^4] (K) = 6{,}28$

	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0{,}159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 6{,}28 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	494	49,0	24,21	761	0,382	10,55	2,767	10,51	0,197
3	493	53,0	26,17	808	0,447	10,04	3,320	12,36	0,194
5	491	60,5	29,58	866	0,582	9,70	4,070	15,23	0,194
6	489	68,0	33,25	910	0,735	9,75	4,740	18,03	0,198
7	488	79,0	38,58	961	0,991	10,05	5,570	21,97	0,204
8	486	88,0	42,80	1000	1,230	10,35	6,280	24,94	0,206
9	485	96,5	46,84	1034	1,480	10,72	6,950	27,69	0,206

Molinello *m. 1,006 diametro esterno*

$R = 0,503$ $r = 0,231$ $b = 0,272$ $b' = 0,06$ $R' = 0,70$

rapporto di posizione $p = 0,371$

$5640\,b\,(R^4 - r^4) = 93,8$ $5640\,b'\,[r^4 + (R')^4 - R^4]\,(K) = 6,946$

	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0,159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 6,946 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	488,5	44,5	21,70	756	0,315	10,61	3,000	7,78	0,192
3	487,5	47,5	25,40	801	0,358	10,11	3,572	9,36	0,194
5	486,0	54,0	26,25	859	0,464	9,72	4,409	11,66	0,196
6	485,0	61,0	29,68	904	0,592	9,72	5,138	15,43	0,223
7	482,5	70,0	33,80	959	0,780	10,05	6,125	16,85	0,204
8	481,0	78,0	37,52	998	0,969	10,31	6,900	19,34	0,208
9	480,0	86,5	41,50	1031	1,190	10,69	7,617	22,00	0,214

Molinello *m. 0,936 diametro esterno*

$R = 0,468$ $r = 0,193$ $b = 0,272$ $b' = 0,06$ $R' = 0,70$

rapporto di posizione $p = 0,413$

$5640\,b\,(R^4 - r^4) = 71,6$ $5640\,b'\,[r^4 + (R')^4 - R^4]\,(K) = 7,52$

	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0,159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 7,52 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	496,0	44,0	21,82	761	0,308	10,55	3,32	7,64	0,232
3	495,4	47,2	23,40	807	0,354	10,05	3,96	9,04	0,230
5	494,0	52,5	25,92	863	0,438	9,71	4,84	10,93	0,238
6	492,5	59,0	29,08	909	0,554	9,75	5,65	13,13	0,242
7	490,5	67,5	33,17	961	0,725	10,35	6,68	15,72	0,247
8	490,0	74,0	36,26	1001	0,864	10,35	7,55	17,50	0,243
9	489,0	82,5	40,04	1035	1,082	12,00	8,34	18,62	0,234

II. — **PALA** m² 0,192 × 0,385 ; $\varphi = \mathbf{2{,}005}$

Molinello *m. 1,498 diametro esterno*

$R = 0{,}749 \quad r = 0{,}557 \quad b = 0{,}385 \quad b' = 0{,}06 \quad R' = 0{,}70$

rapporto di posizione $p = 0{,}147$

$5640\, b\,(R^4 - r^4) = 476{,}3 \qquad 5640\, b'\,[r^4 + (R')^4 - R^4](K) = 3{,}75$

Posizione del reostato	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0{,}159\,\frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 3{,}75\left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	491,0	78,0	38,30	748	0,968	10,71	1,570	25,05	0,125
3	490,0	88,0	43,15	790	1,230	10,21	1,850	29,86	0,127
5	487,0	102,5	49,96	844	1,670	9,78	2,252	36,26	0,127
6	484,0	125,5	60,75	881	2,500	9,67	2,562	46,02	0,141
7	480,5	132,5	63,80	920	2,788	9,80	2,922	48,29	0,130
8	479,0	144,0	69,00	943	3,295	9,95	3,150	52,61	0,132
9	476,0	154,5	73,60	966	3,790	10,09	3,380	56,34	0,131

Molinello *m. 1,354 diametro esterno*

$R = 0{,}677 \quad r = 0{,}485 \quad b = 0{,}385 \quad b' = 0{,}06 \quad R' = 0{,}70$

rapporto di posizione $p = 0{,}165$

$5640\, b(R^4 - r^4) = 456{,}5 \qquad 5640\, b'[r^4 + (R')^4 - R^4]\,(K) = 3{,}32$

	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0{,}159\,\frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 3{,}32\left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	490	66,0	32,34	746	0,692	10,76	1,38	19,51	0,140
3	490	73,0	35,77	793	0,847	10,17	1,66	23,09	0,138
5	484	85,5	41,38	846	1,160	9,77	2,10	28,44	0,142
6	484	96,5	46,71	889	1,480	9,67	2,33	33,23	0,141
7	480	111,5	53,52	930	1,970	9,86	2,67	39,02	0,144
8	478	120,5	57,60	968	2,310	10,10	3,02	42,17	0,138
9	480	131,5	63,12	988	2,740	10,25	3,20	46,93	0,145

***Molinello** m. 1,204 diametro esterno*

$R = 0,602$ $r = 0,410$ $b = 0,385$ $b' = 0,06$ $R' = 0,70$

rapporto di posizione $p = 0,189$

$5640\, b\, (R^4 - r^4) = 222$ $5640\, b' \left[r^4 + (R')^4 - R^4\right] (K) = 5,34$

	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0,159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 5,34 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	487,5	56,5	27,58	756	0,507	10,61	2,307	14,16	0,147
3	485,5	62,5	30,04	799	0,621	10,13	2,72	16,57	0,146
5	484,5	72,5	35,09	856	0,836	9,73	3,347	21,18	0,152
6	483,0	83,0	40,09	900	1,094	9,70	3,89	25,41	0,157
7	481,0	96,0	46,15	951	1,465	10,00	4,59	30,10	0,158
8	471,0	106,0	50,67	986	1,788	10,22	5,12	33,54	0,155
9	477,5	115,5	55,15	1018	2,115	10,52	5,62	36,90	0,158

***Molinello** m. 1,064 diametro esterno*

$R = 0,532$ $r = 0,340$ $b = 0,385$ $b' = 0,06$ $R' = 0,70$

rapporto di posizione $p = 0,22$

$5640\, b (R^4 - r^4) = 144,8$ $5640\, b' [r^4 + (R')^4 - R^4] (K) = 6,75$

	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0,159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 6,75 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	488	48,5	23,64	753	0,374	10,64	2,887	9,74	0,158
3	487	53,0	25,43	798	0,460	10,14	3,434	11,40	0,155
5	485	60,0	29,10	855	0,573	9,74	4,225	14,56	0,161
6	484	68,5	33,14	900	0,746	9,70	4,930	17,76	0,168
7	482	80,0	38,58	954	1,020	10,02	5,867	21,67	0,173
8	480	88,0	42,24	991	1,230	10,26	6,574	24,18	0,172
9	480	97,0	46,58	1039	1,500	10,60	7,269	27,21	0,175

Molinello *m. 0,992 diametro esterno*

$R = 0,496$ $r = 0,304$ $b = 0,385$ $b' = 0,06$ $R' = 0,70$

rapporto di posizione $p = 0,24$

$5640\, b\, [R^4 - r^4] = 112,8$ $5640\, b'\, [r^4 + (R')^4 - R^4]\,(K) = 7,32$

	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0,159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 7,32 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	491,0	46,0	22,60	758	0,339	10,57	3,190	8,50	0,173
3	490,5	49,5	24,27	803	0,389	10,08	3,792	10,01	0,171
5	489,0	56,0	27,39	862	0,499	9,71	4,685	12,50	0,173
6	489,0	63,0	30,78	909	0,631	9,75	5,500	14,90	0,176
7	490,0	73,0	35,78	961	0,847	10,05	6,493	18,39	0,182
8	487,5	81,0	39,50	1000	1,044	10,34	7,320	20,80	0,185
9	486,0	89,0	43,32	1035	1,260	10,73	8,108	23,22	0,186

III. — PALA m² $0{,}158 \times 0{,}472$; $\varphi = 2{,}94$

Molinello m. 1,424 diametro esterno

$R = 0{,}712$ $r = 0{,}554$ $b = 0{,}472$ $b' = 0{,}06$ $R' = 0{,}70$

rapporto di posizione $p = 0{,}125$

$5640\, b\,(R^4 - r^4) = 433{,}8$ $5640\, b'\,[r^4 + (R')^4 - R^4]\,(K) = 3{,}662$

Posizione del reostato	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0{,}159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 3{,}662 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	494	71,0	35,09	761	0,802	10,55	1,614	22,12	0,116
3	490	79,0	38,70	800	0,992	10,12	1,874	25,71	0,116
5	487	92,5	45,09	856	1,353	9,73	2,298	31,71	0,116
6	484	104,5	50,60	898	1,733	9,70	2,649	36,52	0,116
7	480	121,0	58,09	942	2,328	9,94	3,061	42,76	0,118
8	478	133,0	63,51	971	2,809	10,12	3,350	47,23	0,119
9	476	143,5	68,35	998	3,267	10,32	3,639	51,12	0,119

Molinello m. 1,352 diametro esterno

$R = 0{,}676$ $r = 0{,}518$ $b = 0{,}472$ $b' = 0{,}06$ $R' = 0{,}70$

rapporto di posizione $p = 0{,}132$

$5640\, b\,(R^4 - r^4) = 364$ $5640\, b'\,[r^4 + (R')^4 - R^4]\,(K) = 4{,}02$

	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0{,}159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 4{,}02 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	488,5	65,0	31,75	749	0,672	10,70	1,168	18,69	0,122
3	485,5	72,0	34,95	795	0,824	10,16	2,019	21,95	0,120
5	484,0	84,5	40,86	849	1,130	9,75	2,460	27,52	0,123
6	480,0	95,5	45,84	893	1,447	9,68	2,860	31,85	0,123
7	477,0	111,0	53,00	939	1,960	9,91	3,328	37,80	0,125
8	475,0	122,0	57,99	975	2,367	10,15	3,724	41,75	0,124
9	474,5	134,0	63,60	1003	2,855	10,40	4,050	46,30	0,126

***Molinello** m. 1,212 diametro esterno*

$R = 0{,}606$ $r = 0{,}448$ $b = 0{,}472$ $b' = 0{,}06$ $R' = 0{,}70$

rapporto di posizione $p = 0{,}150$

$5640\, b\, (R^4 - r^4) = 252$ $5640\, b'\, [r^4 + (R')^4 - R^4]\, (K) = 5{,}65$

	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0{,}159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 5{,}65 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	488,5	58,0	28,30	753	0,535	10,65	2,415	14,70	0,136
3	490,0	64,5	31,60	798	0,661	10,14	2,873	17,93	0,140
5	487,0	74,5	36,28	853	0,883	9,74	3,510	22,15	0,141
6	486,0	85,0	41,34	896	1,150	9,69	4,062	26,41	0,146
7	483,5	98,0	47,38	946	1,529	9,97	4,784	31,10	0,146
8	481,0	108,5	52,20	981	1,870	10,19	5,338	34,80	0,146
9	479,0	118,0	56,52	1013	2,215	10,45	5,850	38,01	0,148

***Molinello** m. 1,070 diametro esterno*

$R = 0{,}535$ $r = 0{,}377$ $b = 0{,}472$ $b' = 0{,}06$ $R' = 0{,}70$

rapporto di posizione $p = 0{,}173$

$5640\, b\, (R^4 - r^4) = 164{,}3$ $5640\, b'\, [r^4 + (R')^4 - R^4]\, (K) = 6{,}94$

	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0{,}159 \frac{A^2}{1000}$	Π_6'	$(\Pi) = 6{,}94 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	491,5	48,8	24,00	767	0,379	10,48	3,173	9,97	0,135
3	491,5	53,2	26,20	813	0,450	10,04	3,728	11,98	0,136
5	488,0	60,7	29,62	868	0,586	9,70	4,540	14,79	0,138
6	487,5	69,0	33,63	915	0,757	9,78	5,318	17,78	0,141
7	483,0	80,0	38,61	968	1,018	10,1	6,300	21,19	0,142
8	481,0	89,0	42,82	1009	1,260	10,41	7,133	24,02	0,142
9	479,0	98,6	47,22	1041	1,546	10,83	7,838	27,01	0,146

Molinello m. 0,930 diametro esterno

$R = 0,465$ $r = 0,307$ $b = 0,472$ $b' = 0,06$ $R' = 0,70$

rapporto di posizione $p = 0,202$

$5640\, b(R^4 - r^4) = 100,8$ $5640\, b'[r^4 + (R')^4 - R^4](K) = 7,86$

	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0,159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 7,86 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	500,5	44,0	22,02	772	0,308	10,41	3,618	7,68	0,166
3	499,5	47,0	23,47	820	0,352	9,94	4,330	8,85	0,159
5	497,0	52,5	26,10	872	0,438	9,69	5,212	10,76	0,161
6	495,0	59,5	29,43	918	0,563	9,80	6,082	12,99	0,167
7	492,5	68,0	33,50	973	0,735	10,14	7,241	15,38	0,166
8	491,0	75,5	37,09	1016	0,906	10,50	8,247	17,44	0,173
9	489,0	83,5	40,84	1051	1,110	10,98	9,119	19,63	0,174

Molinello m. 0,790 diametro esterno

$R = 0,395$ $r = 0,237$ $b = 0,472$ $b' = 0,06$ $R' = 0,70$

rapporto di posizione $p = 0,25$

$5640\, b\,(R^4 - r^4) = 56,4$ $5640\, b'\,[r^4 + (R')^4 - R^4]\,(K) = 8,52$

	Misure elettriche			n	$\Pi_j = 0,159 \frac{A^2}{1000}$	Π_0'	$(\Pi) = 8,52 \left(\frac{n}{1000}\right)^3$	$\Pi - \Pi_j - \Pi_0' - (\Pi)$	K
	V	A	Π						
0	496,0	39,5	19,60	763	0,248	10,52	3,78	5,05	0,201
3	495,0	41,5	20,52	808	0,274	10,04	4,50	5,71	0,192
5	494,0	46,5	22,96	868	0,344	9,70	5,56	7,36	0,199
6	490,5	51,5	25,26	910	0,421	9,75	6,42	8,67	0,204
7	488,5	58,5	28,58	963	0,544	10,07	7,60	10,37	0,206
8	487,0	64,5	31,44	1003	0,662	10,36	8,60	11,82	0,208
9	486,5	71,5	34,80	1041	0,813	10,83	9,61	13,55	0,213

4. Influenza del rapporto di posizione. — Il ciclo di esperimenti su ciascun tipo di pala è lo stesso di quello considerato nella Nota precedente: cioè si è posta la pala a varie distanze dall'asse di rotazione del molinello, e per ciascuna di queste posizioni si sono fatte 13 letture a velocità successivamente crescenti, poi decrescenti, tenendo conto solo di queste ultime per le ragioni già esposte. Pertanto, le variazioni della resistenza specifica K per una data pala e per un dato rapporto di posizione sono dovute solo al variare della velocità: la media K_m dei valori di K è quella che si considera relativa a quel particolare valore del rapporto di posizione p. Così portando in ascisse le p, in ordinate le K_m, si sono potuti costruire i diagrammi della Fig. 1.

La legge di dipendenza lineare fra K_m e p è chiaramente visibile in questi grafici, per l'intervallo considerato, e per tutti e tre i tipi di pala. Però i prolungamenti dei segmenti, oltre quest'intervallo, darebbero per $p = 0$, cioè per il moto traslatorio, valori di K_m inferiori, in misura più o meno grande a 0,08, mentre, per quel che è già stato osservato nella Nota precedente relativamente alle grandi velocità alle quali si è sperimentato, tali valori, per $p = 0$ dovrebbero essere maggiori di 0,08. Ciò denota che l'andamento della linea, per i piccoli valori di p, cioè quando il moto si avvicina al traslatorio, deve esser parabolico, con la convessità rivolta all'asse delle ascisse. Le condizioni in cui si svolsero gli esperimenti, e la lunghezza del braccio porta-pale che si aveva a disposizione, non hanno, per ora, permesso di verificar ciò sperimentalmente.

Applicando i soliti procedimenti di determinazione dei coefficienti di una relazione ottenuta per mezzo di un numero sovrabbondante di dati sperimentali, risulta:

I	**Pala**	m² $0{,}238 \times 0{,}311\ (\varphi = 0{,}765)$	$K_m = 0{,}307 p + 0{,}080$
II	**Pala**	m² $0{,}272 \times 0{,}272\ (\varphi = 1)$	$K_m = 0{,}432 p + 0{,}0524$
III	**Pala**	m² $0{,}385 \times 0{,}192\ (\varphi = 2{,}005)$	$K_m = 0{,}505 p + 0{,}0561$
IV	**Pala**	m² $0{,}472 \times 0{,}158\ (\varphi = 2{,}94)$	$K_m = 0{,}656 p + 0{,}0366$

Però la considerazione suesposta sull'andamento parabolico della linea $K_m(p)$ per piccoli valori di p aveva indotto a tentare

di esprimerla con una relazione quadratica pur nell'intervallo considerato. Il fatto dell'andamento quasi rettilineo per questo tratto avrebbe dovuto tradursi nella proprietà che la funzione $K_m = ap^2 + bp + c$ presentasse un coefficiente a molto piccolo. Applicato, come sopra, il metodo dei minimi quadrati, si trovò che i determinanti risolutivi del sistema di equazioni in a, b, c erano tutti assai prossimi a 0. In conseguenza le espressioni di a, b, c del tipo $a = \frac{A - B}{C - D}$ risultavano dal quoziente di due termini ottenibili per differenza fra grandezze quasi uguali come A e B, C e D, nelle quali differenze diventavano significative al numeratore e al denominatore le ultime cifre decimali, cioè quelle che l'approssimazione del calcolo numerico non permetteva di ritenere determinabili con esattezza. Fu per ciò che i valori di $a\ b\ c$ trovati mediante l'applicazione di questo metodo risultarono inattendibili.

5. Si è continuato a verificare in tutti gli esperimenti l'accrescimento quasi regolare del valore di K con l'aumentare della velocità, il che conferma che, alle velocità realizzate, la legge incrementale della resistenza con la velocità è più rapida della quadratica. Ciò, del resto, è in armonia con quanto fu verificato, per velocità minori e per il moto traslatorio, dall'Eiffel e da altri sperimentatori.

6. I 4 tipi di pale su cui si è sperimentato, aventi area eguale e dimensioni diverse, permettono pure la ricerca relativa al rapporto di figura. Per poter determinare l'influenza di tale rapporto φ sulla resistenza specifica, occorre naturalmente, mettersi in condizioni d'indipendenza rispetto all'altro parametro p.

Per questo il metodo più ovvio consiste nel tracciare le curve di variazione di K_m con φ per valori costanti di p. Però negl'intervalli in cui si è sperimentato non esistono valori di p comuni ai 4 tipi di pale: ciò perchè per le pale a maggior dimensione radiale ($\varphi = 0{,}765$, $\varphi = 1$) non si potevano realizzare i valori di p delle altre se non mediante grandi raggi medi $\left(p = \frac{R - r}{R + r}\right)$, il che non era possibile, data l'insufficiente lunghezza e resistenza del braccio porta-pale. Questo risulta dalla figura e dal seguente prospetto.

Dimens. pale	Rapporto di figura φ	Perimetro	Rapporto di posizione p	$R_m = \frac{R + r}{2}$	K_m
0,311 × 0,238	0,765	1,098	0,290	0,536,5	0,169
			0,333	0,466,5	0,182
			0,415	0,374,5	0,208
			0,475	0,326,5	0,225
0,272 × 0,272	1	1,088	0,222	0,613	0,152
			0,253	0,542	0,156
			0,289	0,473	0,181
			0,338	0,402	0,200
			0,371	0,367	0,204
			0,413	0,329	0,238
0,192 × 0,385	2,005	1,154	0,147	0,653	0,129
			0,165	0,581	0,140
			0,189	0,506	0,154
			0,220	0,436	0,168
			0,240	0,400	0,179
0,158 × 0,472	2,94	1,260	0,125	0,633	0,117
			0,132	0,597	0,123
			0,150	0,527	0,143
			0,173	0,456	0,140
			0,202	0,386	0,166
			0,250	0,316	0,203

Si è ricorso allora al procedimento di estrapolazione, cioè si sono prolungati i segmenti $K_m(p)$ oltre l'intervallo in cui si è effettivamente sperimentato. Si sono per tal modo potute costruire le 6 curve $K_m(\varphi)$ riportate in figura, corrispondenti ai valori costanti di p: 0,20 ; 0,222; 0,24; 0,25; 0,27; 0,29. Esse mostrano che K_m è funzione crescente di φ, con legge più rapida della lineare, salvo alcune anomalie nei tratti iniziali delle curve corrispondenti ai 2 minori valori di p.

A proposito di tali anomalie è opportuna un'osservazione. Esperimenti che si sono tentati oltre l'intervallo in cui è stata verificata la legge lineare di $K_m(p)$, benchè non accettabili rigorosamente per il fatto che date le grandi potenze assorbite, cominciava a verificarsi lo slittamento delle cinghie della trasmissione, e a sovracaricarsi il motore, fanno ritenere più plausibile l'andamento delle curve $K_m(\varphi)$ relative ai valori $p = 0,29$, $p = 0,27$, anche per i valori più piccoli di p. Vale a dire che l'estrapolazione lineare sarebbe più legittima per i maggiori che non per i minori valori di p. È dunque probabile che le anomalie nel comportamento delle curve $K_m(\varphi)$ non si verifichino nella realtà.

Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli.

di GINO FANO.

In un lavoro pubblicato alcuni anni or sono negli " Atti „ di questa R. Accademia ([1]) ho dimostrato che la varietà del 4° ordine dello spazio S_4 priva di punti doppi, e la varietà M_3^6 di S_5 intersezione generale di una quadrica e di una varietà cubica di quest'ultimo spazio, pur avendo tutti i generi nulli, non sono razionali. La dimostrazione era fondata sull' impossibilità di soddisfare in pari tempo a certe condizioni, tutte necessarie per l'esistenza di sistemi omaloidici di superficie contenuti rispett. in quelle due varietà.

Questo risultato viene confermato e messo in più chiara luce dalla Nota presente, nella quale sono stabilite per quelle stesse due varietà alcune proprietà nuove, invarianti per trasformazioni birazionali, e sufficienti a differenziarle dallo spazio S_3, ossia dalle varietà razionali, nonchè fra di loro.

1. In una varietà algebrica a tre dimensioni, completamente regolare e coi generi nulli, un sistema lineare almeno ∞^2 di superficie F, regolari anch'esse e aventi tutti i generi eguali all'unità, ha bensì una superficie aggiunta, eventualmente di ordine zero, ma manca di aggiunte di un qualsiasi indice superiore. Infatti, se esistesse un'aggiunta di indice $i > 1$, questa insieme ad una qualsiasi F contata $i - 1$ volta costituirebbe per le F medesime una comune superficie i-aggiunta, variabile

([1]) Vol. XLIII, adunanza del 14 giugno 1908.

con quella F, e incontrante ogni F secondo una linea pure variabile; il che è da escludersi, poichè sopra ogni F non vi è che una sola curva i-canonica.

Consideriamo pertanto, sopra una varietà del 4° ordine V^4 dello spazio S_4 priva di punti doppi, un sistema lineare almeno ∞^2 di superficie regolari coi generi tutti eguali all'unità; superficie che saranno intersezioni di V^4 con forme di un certo ordine n. Se $n > 1$, questo sistema lineare dovrà avere o un punto base multiplo di ordine $> 2n$, oppure una linea base (effettiva, o infinitesima) multipla di ordine $> n$; poichè in caso contrario nessuna condizione sarebbe imposta alle aggiunte d'indice n (le quali sono di ordine zero) [1].

Ora, sopra V^4, una superficie F^{4n} generica è di genere

$$\binom{n+3}{4} - \binom{n-1}{4} = 4\binom{n}{3} + n(n+1) - 1$$

mentre un punto $(2n+1)^{\text{plo}}$ ne abbasserebbe il genere di $\binom{2n+1}{3}$ unità; numero che, se $n > 1$, supera il precedente (e per $n = 1$ lo eguaglia). Una F^{4n} di genere uno non può avere dunque un punto $(2n+1)^{\text{plo}}$.

D'altra parte una linea base $(n+1)^{\text{pla}}$ del sistema $|F^{4n}|$, la quale sia di ordine k, costituisce per l'intersezione complessiva di due F^{4n}, che è di ordine $4n^2$, una componente di ordine $k(n+1)^2$. Sarà dunque $k \leq 3$. Ma una F^{4n} contenuta in V^4 non può certamente avere una retta $(n+1)^{\text{pla}}$, perchè ogni forma di ordine n passante per essa dovrebbe contenere per intero le cubiche piane intersezioni ulteriori di V^4 coi piani passanti per quella retta (avendo già a comune con ciascuna di queste cubiche $3(n+1)$ punti). E, a più forte ragione, non potranno le F^{4n} avere come linea $(n+1)^{\text{pla}}$ una conica oppure una cubica, piana o sghemba, perchè facendo spezzare quest'ultima linea si avrebbe di nuovo una F^{4n} con retta $(n+1)^{\text{pla}}$.

---

[1] Anche un punto $(2n)^{\text{plo}}$, eventualmente con un numero finito di altri punti consimili successivi, e, successivamente, una linea n^{pla} infinitesima (retta o conica) con eventuali elementi multipli ulteriori (non più che n^{pli}) non imporrebbe condizione alcuna alle aggiunte di indice n.

Esaminiamo infine se le F^{4n}, supposte sempre di genere uno, possano avere una linea infinitesima di multiplicità $\geq n+1$, naturalmente consecutiva a un punto di multiplicità almeno eguale alla precedente [1]. Per questo caso valgono le seguenti osservazioni:

1° Questa linea infinitesima di multiplicità $\geq n+1$ potrà essere soltanto una retta, perchè, se fosse anche solo una conica (ossia di 2° ordine), dovrebbe seguire un punto di multiplicità $\geq 2(n+1)$; punto che la F^{4n}, come già sappiamo, non può avere.

2° Una eventuale retta infinitesima $(n+1)^{\text{pla}}$ dovrà seguire un punto A avente per la F^{4n} multiplicità $2n$; poichè, se la multiplicità di questo punto fosse inferiore, le aggiunte di indice $n-1$ sarebbero vincolate soltanto (al più) ad avere A come punto doppio e la retta considerata ad esso consecutiva come semplice, e per le aggiunte d'indice n mancherebbe qualsiasi condizione. — D'altra parte, se $n>3$, una F^{4n} di genere uno non può avere un punto $(2n)^{\text{plo}}$, perchè già questo produrrebbe un eccessivo abbassamento del genere; mentre, se $n=2$, una F^8 con punto quadruplo è già di genere uno, e non potrebbe perciò, conservando questo genere, avere in più una retta multipla infinitesima successiva a quel primo punto.

3° Più generalmente, una retta infinitesima di multiplicità $n+k$ dovrebbe seguire un punto di multiplicità $\geq 2n-k+1$ (se no, di nuovo, nessuna condizione sarebbe imposta alle aggiunte d'indice n); e basterà limitarsi al caso $2n-k+1 \geq n+k$, ossia $k \leq \frac{n+1}{2}$. Ora l'abbassamento di genere determinato da questa singolarità complessiva ha il suo valore minimo in corrispondenza al valore massimo di k $\left(\frac{n+1}{2}\text{, oppure } \frac{n}{2}\right)$; e anche in quest'ultimo caso esso è superiore al genere di una F^{4n} ge-

---

[1] Si osservi che a un elemento generico di quella linea infinitesima di multiplicità $\geq n+1$ potranno anche seguire elementi ulteriori di multiplicità non superiore alla precedente e del pari $\geq n+1$, *ma solamente in numero finito.* Se no, la singolarità complessiva — la quale si riconosce immediatamente che equivarrebbe a più che quattro punti $(n+1)^{\text{pli}}$ — implicherebbe una riduzione eccessiva nel genere della F^{4n}.

nerica. (È superiore p. es. alla riduzione determinata da due punti $\left(\frac{3n+1}{2}\right)^{\text{pli}}$, la quale si manifesta già troppo elevata).

Concludiamo pertanto: *Sulla varietà* V^4 *di* S_4 *priva di punti doppi il sistema delle sezioni iperpiane è il solo sistema lineare di superficie regolari coi generi tutti eguali all'unità e di dimensione* ≥ 2.

Possono esistere invece, all'infuori delle sezioni iperpiane, dei *fasci* di superficie regolari coi generi uno. Per esempio, se la V^4 ammette in un suo punto una quadrica avente ivi con essa un contatto di 3° ordine, e perciò anche tutto un fascio di quadriche consimili (quello determinato dalla prima quadrica e dallo spazio S_3 tangente alla V^4 nel medesimo punto, contato due volte), queste quadriche segheranno sulla V^4 un fascio di superficie F^8 con punto quadruplo e coi generi uno.

Abbiamo altresì, come conseguenza ulteriore immediata: *La varietà* V^4 *di* S_4 *priva di punti doppi non ammette trasformazioni birazionali, all'infuori delle eventuali trasformazioni proiettive* [1].

2. Queste considerazioni si estendono, con poche modificazioni, alla varietà M_3^6 di S_5, intersezione di una quadrica e di una forma cubica di quest'ultimo spazio, supposta anch'essa priva di punti doppi.

Anche in questo caso un sistema lineare almeno ∞^2 di superficie coi generi eguali ad uno e contenute nella varietà proposta, superficie perciò di un certo ordine $6n$ segate da forme di ordine n, dovrà avere, se $n > 1$, o un punto base di multiplicità $> 2n$, oppure una linea base, effettiva o infinitesima, multipla di ordine $> n$ (poichè, in caso diverso, esisterebbe un'aggiunta d'indice n, di ordine zero).

---

[1] La V^4 con punto doppio ammette invece la trasformazione involutoria risultante dalla sua proiezione doppia da questo stesso punto, e anche altre trasformazioni birazionali che è facile assegnare. Una F^{4n} contenuta in essa può avere il punto doppio di V^4 medesima come multiplo di ordine $> 2n$, senza che ciò ne riduca eccessivamente il genere; e può avere del pari una linea passante pel punto doppio (p. es. una retta) come multipla di ordine $> n$.

La prima ipotesi va esclusa, perchè già un punto $(2n+1)^{\text{plo}}$ produrrebbe una riduzione eccessiva nel genere delle superficie F^{6n}. — Un'eventuale linea $(n+1)^{\text{pla}}$ potrebbe bensì essere una retta; ma non potrà certo essere una conica, perchè ogni forma di ordine n passante per una F^{6n} con conica $(n+1)^{\text{pla}}$ dovrebbe contenere per intero ciascuna delle quartiche ellittiche intersezioni ulteriori della M_3^6 con spazi S_3 passanti per quella conica (avendo quella forma con queste quartiche già più intersezioni di quanto comportino i rispettivi ordini); e, a più forte ragione, non potranno nemmeno le F^{6n} avere una linea $(n+1)^{\text{pla}}$ di ordine più elevato (in ogni caso ≤ 5), perchè quest'ultima potrebbesi far spezzare in modo da contenere una conica come parte [1]. — Infine le stesse osservazioni già fatte dianzi per la V^4 di S_4 mostrano che anche nel caso presente una eventuale linea infinitesima di multiplicità $n+k$ (dove $k \geq 1$) potrebbe essere soltanto una retta, e dovrebbe seguire un punto almeno $(2n-k+1)^{\text{plo}}$; sicchè queste due singolarità insieme determinerebbero di nuovo una soverchia riduzione nel genere della F^{6n}.

Se esiste dunque, per $\text{n} > 1$, *un sistema lineare almeno* ∞^2 *di superficie* F^{6n} *coi generi tutti eguali all'unità, queste superficie avranno certamente una retta base multipla di ordine* $k \geq n+1$. Applicando pertanto a queste superficie la trasformazione birazionale della varietà M_3^6 risultante dalla sua proiezione doppia dalla retta nominata, il sistema trasformato si comporrà (v. la mia Nota cit., n° 7) di superficie di ordine $6(4n-3k)$, inferiore perciò al precedente. Se la differenza $4n-3k$ è ancora superiore all'unità, il nuovo sistema si troverà nelle stesse condizioni del precedente, e il suo ordine potrà essere ulteriormente ridotto per mezzo della proiezione doppia della M_3^6 da una nuova retta; e così, occorrendo, più volte. L'operazione avrà termine solamente quando si sia pervenuti ad un sistema di sezioni iperpiane.

---

(1) D'altronde ciò è pure dimostrato nella mia Nota cit. (n° 8) senza ricorrere a questo spezzamento, bensì con considerazioni analoghe a quelle già applicate al caso di una conica.

Sulla varietà M_3^6 *non esistono dunque sistemi lineari almeno* ∞^2 *di superficie aventi tutti i generi eguali all'unità, all'infuori dei sistemi di sezioni iperpiane, e di quelli che da questi si deducono per proiezione da una o più rette della* M_3^6 *successivamente.*

Per conseguenza: *Sopra una* M_3^6 *di* S_5 *a curve-sezioni di genere* 4 (1) *e priva di punti doppi ogni trasformazione birazionale è il prodotto di un numero finito di proiezioni doppie da rette della varietà stessa e di (eventuali) trasformazioni proiettive.*

Torino, aprile 1915.

---

(1) Una tale M_3^6 è appunto, in ogni caso, intersezione di una quadrica e di una forma cubica; come anche viceversa questa intersezione, quando non abbia una superficie doppia, ha le curve-sezioni di genere 4.

Relazione sulla Memoria del Dott. Lorenzo Loredan, *Intorno al processo dell'atresia follicolare nell'ovaia dei mammiferi.*

È noto che non tutti i follicoli oofori dei mammiferi giungono a maturazione: alcuni fra di essi dopo essere pervenuti ad un grado più o meno avanzato di sviluppo subiscono un processo di atresia per il quale finiscono di scomparire dall'ovario. Tale processo di atresia fu già oggetto di studio per parte di buon numero di istologi, ma fino ad ora non si era pervenuti ad un accordo circa la valutazione di alcuni fatti osservativi e specialmente circa alla loro genesi. Invero il processo di atresia follicolare è tutt'altro che semplice e già gli studi precedenti vi misero in evidenza due ordini di fenomeni, gli uni regressivi, gli altri progressivi: i primi consistono nella degenerazione e nella scomparsa dell'ovulo e dell'epitelio costituente lo strato granuloso del follicolo e nell'assorbimento del *liquor folliculi*; i secondi conducono alla riparazione della lacuna lasciata dalla caduta o dalla scomparsa delle indicate formazioni. Fra le particolarità che si notano nel lavoro di riparazione vi ha una stria ialina, che appare pressochè costantemente subito all' interno della teca dei follicoli atresici, e un tessuto di aspetto reticolare nel centro del follicolo. Circa al modo esatto di prodursi di queste formazioni essendovi grandi incertezze, il Dott. Lorenzo Loredan, assistente all' Istituto di Anatomia umana normale di Torino, volle occuparsene e, dopo avere raccolto un conveniente materiale tolto dal topo albino, dalla cavia, dal coniglio e dal gatto, eseguì metodiche ricerche valendosi di tutti i mezzi suggeriti dalla moderna tecnica istologica. I risultati di tali indagini sono raccolti nella memoria della quale noi diamo relazione, e le particolarità più importanti sono chiaramente dimostrate, oltre che dalla descrizione, anche da un buon numero di disegni illustrativi.

In conclusione con i suoi studi l'A. viene ad affermare che alcune cellule epiteliali della granulosa del follicolo atresico invece di cadere permangono a lungo in posto, ed in alcuni animali ingrossano, si caricano di gocciole adipose e presentano in qualche caso fenomeni di attività formativa dimostrati dalla comparsa di cariocinesi e di nuclei doppi. Col progredire del processo di atresia i resti della granulosa o finiscono col degenerare, o vanno incontro ad una nuova fase evolutiva dando origine ad un tessuto luteinico simile a quello dei corpi lutei. Allorchè degenerano, abbiano o no subìto prima un' ipertrofia, nella maggior parte dei casi gli elementi della granulosa perdono il loro netto contorno, si fondono gli uni cogli altri e si trasformano in una sostanza omogenea tutta continua, che appare in forma di una stria e corrisponde alla già nota stria ialina dei follicoli atresici.

Il tessuto reticolare che durante il processo di atresia invade la parte centrale dei follicoli è un vero tessuto connettivo e trae origine dagli elementi connettivi della teca interna del follicolo; esso forma una specie di stroma che sostiene le cellule persistenti dello strato granuloso.

Le conclusioni da noi riferite sono una deduzione diretta dei reperti che l'A. minutamente riporta ed illustra, e perciò ci sembrano interamente accettabili; esse sono anche importanti perchè vengono a rischiarare molto bene il processo di atresia del follicolo ooforo. Per queste considerazioni proponiamo alla Classe la lettura della Memoria e la stampa della medesima nei volumi accademici.

Pio Foà.

R. Fusari, *Relatore.*

L'Accademico Segretario

Corrado Segre.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 16 Maggio 1915.

PRESIDENZA DEL SENATORE GIAMPIETRO CHIRONI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Carle, De Sanctis, Sforza, Baudi di Vesme, Schiaparelli e Stampini, Segretario della Classe.

È scusata l'assenza di S. E. Boselli, Presidente dell'Accademia, e dei Socii Ruffini, Brondi, Einaudi, Patetta, Vidari e Prato.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 2 Maggio.

Il Presidente legge una lettera del Socio corrispondente Silvio Lippi che ringrazia l'Accademia per l'incarico da essa conferitogli di rappresentarla alla inaugurazione dei nuovi locali destinati al Museo Nazionale di Cagliari.

Il Socio Segretario Stampini presenta, a nome dell'autore, cinque pubblicazioni del Prof. Pietro Rasi, ordinario di Grammatica greca e latina nella R. Università di Padova, cioè *Genesi del Pentametro e caratteri del Pentametro latino* (Venezia, 1912), *Una poetessa del secolo di Augusto* (Padova, 1913), *Bibliografia Virgiliana 1910-1911* (Mantova, 1913), *Divinum rus* (Amstelodami, MCMXIV), *Gli studi recenti sull'epitafio di Allia Potestas e la metrica del carme* (Venezia, 1914), dando breve conto del contenuto di tali pregevoli scritti, specialmente della

diligentissima *Bibliografia Virgiliana* che il valoroso latinista ha impreso a compilare per incarico della R. Accademia Virgiliana di Mantova. La Classe ringrazia il donatore.

Poscia il Socio Segretario STAMPINI presenta la parte prima del volume primo del *Codicum Casinensium manuscriptorum catalogus cura et studio Monachorum S. Benedicti Archicoenobii Montis Casini* testè pubblicata e inviata alla Accademia da D. Mauro INGUANEZ Monaco di Montecassino, che ha aggiunto in dono una sua monografia *L'Esamerone di Sant'Ambrogio ridotto in versi da Alessandro Monaco di Montecassino* (Roma, 1913). Il Socio STAMPINI fa notare come con questa prima parte del *Catalogus* la Badia di Montecassino abbia impreso a compilare l'elenco illustrativo di tutti i codici che in essa sono conservati. Con norme affatto diverse da quelle con cui furono descritti i codici 1-358 nei cinque volumi della *Bibliotheca Casinensis*, il nuovo *Catalogus*, che richiederà sei o sette volumi in-4°, comprenderà così i codici già precedentemente descritti come tutti gli altri a cui la *Bibliotheca Casinensis* non si estese. La Classe si rallegra con la Badia di Montecassino per l'importantissima opera nuovamente intrapresa a beneficio della scienza.

Il Socio DE SANCTIS presenta una Nota, che sarà pubblicata negli *Atti*, del Dottor Aldo FERRABINO dal titolo *La cronologia dei primi Tolemei* (*). Presenta inoltre una monografia dello stesso autore, intitolata *Silla a Cheronea*, per essere pubblicata nelle *Memorie* accademiche. Perciò la Classe nomina una Commissione, composta dei Socii DE SANCTIS e STAMPINI, perchè, esaminata questa monografia, ne riferisca all'Accademia in una prossima adunanza.

(*) Questa Nota uscirà in una dispensa successiva.

L'Accademico Segretario: ETTORE STAMPINI.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classi Unite.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. L. DISP. **14ª**. **1914-1915**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 23 Maggio 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO

VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Panetti e Segre, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Naccari.

Letto ed approvato il verbale della precedente adunanza, la Classe, su proposta del Presidente e del Socio Somigliana, unanime delibera d'inviare a S. E. Boselli un telegramma di vivo plauso per la sua solenne affermazione dei diritti e delle speranze d'Italia, fatta nella storica seduta del 20 corrente alla Camera dei deputati; e di pregarlo in pari tempo di formulare e presentare i calorosi voti dell'Accademia per la vittoria dell'Italia, che valga a rivendicare i diritti nazionali.

Il Socio Jadanza legge la Commemorazione del Socio nazionale Emanuele Fergola. Verrà stampata negli *Atti*.

Pure per gli *Atti* vengono presentate le seguenti Note:

P. Foà, *Ricerche ematologiche.* Parte I: *Sulla produzione delle piastrine del sangue* (*);

M. Panetti, *Gli eccentrici multipli dei motori a scoppio con cilindri radiali.*

Infine il Socio Segretario, per incarico del Socio Naccari, presenta una Memoria di A. Campetti, *Sull'equilibrio di coppie di liquidi parzialmente miscibili.* Vengono incaricati di riferire su di essa i Soci Naccari e Grassi.

(*) Questa Nota venne poi ritirata dall'Autore, il quale si riserva di presentarla per le *Memorie*.

EMANUELE FERGOLA

(1830-1915)

Officina Fototecnica Ing. Molfese. Torino

LETTURE

EMANUELE FERGOLA

Commemorazione del Socio NICODEMO JADANZA.

Illustri Colleghi,

Ho ancora dinanzi a me la immagine benevola e fiera del Prof. EMANUELE FERGOLA, quando dettava le sue lezioni di *Analisi superiore* nella R. Università di Napoli or sono 46 anni! Egli era un insegnante efficacissimo per la sua chiarezza e gli studenti volenterosi seguivano anche per diversi anni i diversi corsi che sviluppava ora sulle *equazioni differenziali*, ora sulla *teoria dei numeri*, ora sulle *funzioni di variabile complessa*, ecc.

A me, suo discepolo, è toccato il còmpito di commemorarlo qui dinanzi a voi, in questa Accademia di cui fu Socio corrispondente fino dal 1880 e Socio nazionale non residente dal 1896. Lo farò con affetto filiale e devoto, per rendere l'omaggio dovuto ad uno dei più insigni astronomi che abbia avuto l'Italia nel secolo decorso.

EMANUELE FERGOLA nacque in Napoli il 20 ottobre 1830.

Suo padre GENNARO fu militare e nel 1860 era generale e si distinse per attaccamento ai doveri della sua carica di comandante della cittadella di Messina, mentre questa era assediata.

Cugino dell'avo fu NICOLA FERGOLA (*a*) capo dell' antica Scuola geometrica napoletana.

Altro congiunto fu il capitano del genio FRANCESCO FERGOLA; autore della *prima misura matematica dell'Italia meridionale*, e che mentre eseguiva una operazione geodetica sulla montagna Antennamare presso Messina vi morì fulminato (*b*).

EMANUELE cominciò a studiare matematica in età giovanissima con maestri particolari, prima in provincia, poi in Na-

poli; ma dai primi studi non ebbe a trarre che frutti scarsissimi. Imparò qualche cosa solamente quando conobbe NICOLA TRUDI, da cui ebbe a salti, come comportava la condizione della famiglia di un militare spesso in viaggio, lezioni di Algebra, Geometria analitica e poche di Calcolo infinitesimale. Per mezzo di queste lezioni acquistò amore per le matematiche; il resto lo studiò da sè.

Nel 1855 fu assunto Professore di Calcolo differenziale ed integrale nel Collegio Militare dell'Annunziatella, e tenne questo posto fino al 29 ottobre 1860, quando con Decreto prodittatoriale fu chiamato all'Università ad insegnare *Introduzione al calcolo.*

Il 15 gennaio 1863 fu nominato Ordinario di *Analisi superiore*; il 1° gennaio 1890 fu trasferito alla cattedra di *Astronomia* resasi vacante per il collocamento a riposo del DE GASPARIS.

Già *alunno* della *Reale Specola* di Capodimonte (1), il 3 settembre 1863 fu nominato Assistente in quell'Osservatorio; il 6 marzo 1864 Astronomo aggiunto; il 3 agosto 1884 fu nominato astronomo in 2° e quindi Direttore il 1° gennaio 1890.

L'attività scientifica del FERGOLA incominciò nel 1850 con una Memoria che ha per titolo: *Ricerche relative alle curve inviluppi*, pubblicata a Modena tra le Memorie della Società Italiana delle Scienze, e durò ininterrotta fino al 1900. Essa consta di due parti distinte, una esclusivamente di matematica pura; l'altra, che incominciò più tardi, riguarda l'Astronomia di osservazione e le teorie matematiche applicate all'Astronomia. È questa seconda parte, in cui si è manifestato maggiormente il suo ingegno, che ha reso celebre il suo nome.

Nel 1869 fu eseguita la differenza di longitudine tra Napoli e Roma con osservazioni fatte a Napoli da E. FERGOLA ed a Roma dal P. A. SECCHI.

Queste osservazioni furono le prime fatte in Italia con l'uso del cronografo e con la trasmissione telegrafica dei segnali dei

(1) Sebbene sia incerta l'epoca della sua entrata come *alunno* della Specola di Capodimonte, essa dev'essere stata nel 1858 o prima. Ciò risulta dalla Memoria che ha per titolo *Sopra due formole di Calcolo differenziale* che porta la data: Osservatorio di Capodimonte, 11 settembre 1858. Dalla commemorazione fatta dal prof. Luigi Pinto si desume che tale nomina è del 1843.

passaggi da una stazione all'altra. Dopo quell'epoca molte altre determinazioni analoghe sono state fatte fra varie stazioni italiane; e l'Osservatorio di Milano si è collegato allo stesso modo con parecchie stazioni estere, talchè esso è il punto d'Italia la cui posizione è la più esattamente determinata rispetto alle principali stazioni astronomiche di Europa. Ora, essendosi verificato che i risultamenti ottenuti con alcuni di questi lavori (ai quali il FERGOLA non aveva preso parte) presentavano nel triangolo Napoli-Roma-Milano un disaccordo di $1^s,32$, la Commissione Geodetica italiana decise che la più antica di quelle determinazioni, cioè la longitudine Napoli-Roma, fosse ripetuta, sperando di trovare in essa la causa della grave differenza.

In conseguenza di tale deliberazione le osservazioni per la novella determinazione della differenza di longitudine Napoli-Roma, furono eseguite al principio del 1885 da E. FERGOLA a Napoli e dal Dr. DI LEGGE all'Osservatorio del Campidoglio in Roma.

Risultato di questa nuova determinazione fu la conferma della bontà dell'antica misura ed una prova dell'eccellenza delle Osservazioni geodetiche fatte dal Capitano FRANCESCO FERGOLA fin dal 1838, dalle quali aveva dedotto la differenza di longitudine della cupola di S. Pietro dal centro dell'Osservatorio di Capodimonte con qualche *centesimo di secondo* di differenza da quella ottenuta attualmente.

Ad accertare l'errore esistente nel triangolo Napoli-Milano-Roma, lo SCHIAPARELLI ed il FERGOLA, che fin dal 1882 era stato nominato membro della Commissione Geodetica italiana, si accordarono per una nuova determinazione della differenza di longitudine Napoli-Milano. Questa fu eseguita nel 1888 con osservazioni di FERGOLA a Napoli e di M. RAJNA a Milano (1). Col valore nuovamente ottenuto l'errore di chiusura del detto triangolo fu ridotto a $0^s,324$.

Dalle osservazioni fatte nel 1869 venne fuori un fatto nuovo, la *variazione periodica* dell'azimut di un cannocchiale meridiano.

---

(1) Cfr. *Determinazione della differenza di longitudine tra Napoli e Milano mediante osservazioni fatte nel 1888 da* E. FERGOLA *ed* M. RAJNA (Pubblicazione N. XXXIX del Reale Osservatorio di Brera in Milano).

Questa variazione era già stata avvertita dall'astronomo americano Dr. Gould fin dal 1862 e confermata dagli astronomi dell'Osservatorio di Washington nel 1864. Tanto il Dr. Gould quanto gli astronomi dell'Osservatorio di Washington attribuivano la spiegazione del fatto a movimenti generali del suolo dovuti ai cangiamenti di temperatura. Il Fergola fece altre osservazioni dal 7 al 17 luglio 1871, determinando tre volte al giorno alle ore 6, alle ore 11 ed alle ore 18 il valore dell'azimut. Tali osservazioni, oltre a confermare la legge di variazione scoperta dal Dr. Gould, lo indussero a dedurre un altro fatto notevole non stato ancora da altri osservato, o almeno non preso nella dovuta considerazione, la spiegazione cioè di quel fenomeno nell'esistenza di una *rifrazione laterale* nelle vicinanze del meridiano, che sposta tutte le stelle parallelamente all'equatore di una quantità variabile a differenti ore del giorno (1).

Nell'anno 1871 Fergola eseguì una novella determinazione della latitudine del R. Osservatorio di Capodimonte mediante le differenze di distanze zenitali meridiane di 52 coppie di stelle. La Memoria relativa fu presentata nel novembre del 1872 alla R. Accademia delle Scienze di Napoli. In una Nota aggiunta alla fine di detta Memoria esamina la diminuzione avvenuta nella latitudine di Capodimonte ed in parecchi altri Osservatorî. Dai valori ottenuti risultanti da migliaia di accurate osservazioni si trae come conclusione immediata che *l'invariabilità della latitudine stabilita solo teoricamente non è confermata dalle sopradette osservazioni.* Quindi *la necessità di cercare i dati per la soluzione di tal problema in accurate osservazioni fatte ad epoche sufficientemente lontane ed in siti opportunamente scelti; le condizioni più favorevoli riscontrandosi in quelle stazioni che essendo situate quasi sugli stessi paralleli presentano le più grandi differenze in longitudine.*

---

(1) I risultamenti ottenuti in questa nota che ha per titolo: *Sopra talune oscillazioni diurne degli strumenti astronomici* (“ Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli ”, settembre 1871) furono ricordati dall'astronomo americano B. Gould nella riunione della Società astronomica tenuta a Vienna nel 1883. Cfr. anche Tisserand, *Bulletin astronomique*, vol. I, pag. 338.

In occasione della riunione dell'Associazione Geodetica internazionale avvenuta in Roma nell'ottobre 1883, il FERGOLA ritornò sull'argomento presentando un programma di osservazioni che può riassumersi nel seguente modo:

1° Sostituire alle determinazioni assolute di latitudine le determinazioni di differenze di latitudine di luoghi situati due a due quasi sui medesimi paralleli, ma lontanissimi in longitudine.

2° Usare per queste determinazioni i metodi di STRUVE o di TALCOTT, adoperando strumenti perfettamente simili e osservando simultaneamente in ogni coppia di stazioni le medesime stelle, affine di eliminare rigorosamente gli errori di declinazione, che sono la principale causa d'incertezza nelle determinazioni assolute.

3° Raccomandare queste determinazioni agli Osservatorî che si trovano nelle condizioni richieste per l'esecuzione del piano di cui si tratta, e che sono:

	differenza in latitudine	differenza in longitudine
Capo di Buona Speranza — Sydney .	4′ 22″	$8^h\,51^m$
Santiago (Chilì) — Vindsor (Australia)	9 47	9 14
Roma — Chicago	3 53	6 40
Napoli — New-York (Columb. Coll.) .	6 22	5 53
Lisbona — Washington	11 7	4 31

4° Rinnovare le osservazioni a periodi più o meno lunghi.

Fu nominata una Commissione composta dai signori CRISTIE, CUTTS, BAKHUYZEN, SCHIAPARELLI, VILLARCEAU per esaminare tale programma, e le conclusioni di un lungo ed elaborato Rapporto scritto dallo SCHIAPARELLI, approvate ad unanimità dalla Conferenza, furono le seguenti (1):

I. Che l'Ufficio centrale dell'Associazione Geodetica internazionale invii a tutti gli Osservatorî e a tutte le istituzioni che si occupano di lavori astronomico-geodetici, una copia della proposta del Prof. Fergola e del Rapporto della Commissione.

---

(1) Cfr. *Comptes-Rendus des séances de la Septième Conférence Géodétique internationale pour la mesure des degrés en Europe* (ottobre 1883, pag. 211).

II. Che per gli Osservatorî nominati nel piano proposto dal Prof. Fergola e pel *Coast- and Geodetic Survey* degli Stati Uniti, questo invio sia accompagnato da una lettera speciale contenente l'invito di voler cooperare all'esecuzione di questo piano.

I primi Osservatorî che accettarono di fare osservazioni allo scopo di determinare la variabilità delle latitudini furono i due di Lisbona e di Washington; in seguito l'Osservatorio di Napoli e l'Osservatorio del Collegio *Columbia* di New-York intrapresero, a cominciare dal maggio 1893, osservazioni aventi lo stesso scopo, con due strumenti identici di Wanschaff. Nel solo anno (maggio 1893-giugno 1894) il Fergola ha osservato 2271 coppie di stelle, dalle quali dedusse un nuovo valore della costante di aberrazione in **20″,533** e una nuova determinazione della latitudine di Capodimonte. L'Associazione Geodetica internazionale avocò a sè lo studio delle variazioni delle latitudini e nella XII Conferenza tenutasi a Stoccarda nel 1898, fu deciso che a spese di detta Associazione si organizzasse un servizio internazionale delle latitudini colle stazioni di *Mizusawa* nel Giappone, di *Tschardjni* nell'Impero Russo, di *Carloforte* in Italia, di *Dover* oppure *Gaithersburg* nell' America orientale, di *Cincinnati* nell'America di mezzo, di *Ukiah* nell'America occidentale. Fu stabilito anche che per la stazione di *Carloforte* nella piccola isola di S. Pietro in Sardegna, il personale dovesse essere interamente italiano e scelto dalla nostra Commissione Geodetica (*c*).

Il servizio internazionale delle latitudini incominciò a funzionare nell'ottobre del 1899.

Oltre ai precedenti lavori il nome di Fergola rimarrà nella Scienza per le due importantissime Memorie:

1° *Sulla posizione dell'asse di rotazione della terra rispetto all'asse di figura* (maggio 1874).

2° *Dimensioni della terra e ricerca della posizione del suo asse di figura rispetto a quello di rotazione* (dicembre 1875).

Nella prima di dette Memorie il Fergola, *nella ipotesi che non coincidessero tra loro gli assi della rotazione diurna e l'asse di figura*, si propose di dedurre dalle sole misure geodetiche la posizione scambievole degli assi di rotazione e di figura dello sferoide terrestre, o dimostrare la loro coincidenza, che è generalmente ammessa, partendo dalla supposizione che lo sferoide *sia*

formato di strati omogenei o (che è lo stesso) *da potersi considerare come tali senza errori apprezzabili nei risultamenti.* Considerando di preferenza il lato teorico della questione, trattò diffusamente i principali problemi che naturalmente si presentano quando si riguarda la terra come un'ellissoide schiacciata, che faccia la sua rivoluzione diurna intorno ad un diametro non coincidente con l'asse di figura, ma comprendente con esso un angolo piccolissimo. Dopo varî teoremi e formole generali trovò l'espressione analitica della lunghezza di un arco di meridiano geografico in funzione delle latitudini dei suoi estremi, del semiasse maggiore e della eccentricità dello sferoide e di due angoli v e $\hat{\omega}$ che determinano completamente la posizione dell'asse di figura rispetto a quello di rotazione (v è la longitudine dell'estremo dell'asse di figura e $\hat{\omega}$ l'angolo che quest'asse forma con quello di rotazione). La Memoria termina con l'applicazione della suddetta espressione analitica a nove archi di meridiano, per dedurre i valori dei due angoli v e $\hat{\omega}$, ritenendo come abbastanza precisi gli elementi di BESSEL.

Nella seconda Memoria riprende la ricerca numerica con tutta l'estensione che il problema comporta, introducendo cioè al calcolo il maggior numero possibile di archi di meridiano, i cui estremi sieno stati determinati astronomicamente; e cercando non solo la posizione dell'asse di figura della terra rispetto a quello di rotazione, ma anche gli elementi che determinano le dimensioni dell'ellissoide terrestre.

Gli archi di cui fa uso in questo lavoro sono in numero di 41, ed i valori che trova per le quantità a, ϵ, v, $\hat{\omega}$ sono i seguenti:

$$a = 3\,272\,573^{t},6$$

$$\epsilon = 0{,}082\,224\,2303$$

$$v = 326^{o}$$

$$\hat{\omega} = 5'\,\frac{1}{2}\,.$$

E dopo aver fatto vedere che essi rappresentano meglio gli archi misurati, conchiude:

“ Quantunque il sistema di valori delle incognite da me
“ ottenuto sia quello che convenga meglio alle equazioni di con-
“ dizione relative agli archi considerati, pure a motivo della

" piccolezza dell'angolo $\hat{\omega}$, e per la impossibilità di sceverare
" la parte di tale valore dovuta agli errori dei *dati* del problema, da quella che può esprimere il vero angolo fra l'asse
" di figura della terra e quello di rotazione, ritengo come risultamento del mio lavoro, da una parte una determinazione
" novella del semiasse equatoriale e della eccentricità dello sferoide terrestre, e dall'altra una dimostrazione di questa proposizione, che cioè: *l'asse di rotazione della terra può riguardarsi*
" *come sensibilmente coincidente con quello di figura*. Che se poi,
" con nuovi, numerosi e più esatti dati, che si raccoglieranno
" dalle misure che man mano andranno eseguendosi in altre
" regioni della terra, si perverrà ad un angolo poco differente
" dal valore che ora ho trovato per $\hat{\omega}$, allora si potrà forse dire
" con qualche fondamento che tale valore accenna ad un fatto
" reale, e non è solo risultamento degli errori inevitabili nei
" procedimenti delle operazioni geodetiche, o anche della diversità fra un'ellissoide di rotazione e la reale figura della superficie terrestre „ (1).

Non a tutti è dato di apprezzare nel loro giusto valore i lavori astronomici. Essi, in generale richiedono molto tempo per le osservazioni e moltissimo per il calcolo, specialmente quando sono fatti con quella cura scrupolosa con cui sono fatti i lavori del Fergola.

Nella Memoria che ha per titolo: *Posizioni apparenti di alcune stelle dell'Eridano*, con osservazioni fatte al circolo meridiano di Repsold nell'Osservatorio di Capodimonte dalla fine di ottobre 1886 al 30 gennaio 1887, si trova scritto in nota quanto segue:

" Fui indotto ad intraprendere queste osservazioni dal Chiarissimo Prof. Auwers, Segretario della Reale Accademia delle
" Scienze di Berlino, che me ne scrisse a principio del 1886.....

" *Il penoso lavoro della lettura dei fogli cronografici* (diverse
" migliaia di segnali) *e quello delle calcolazioni tutte mi hanno*

---

(1) Delle due memorie ora dette si trova un'ampia relazione del Gunter in forma scevra da simboli matematici nel n.° del 22 settembre 1879 della Rivista intitolata " *Das Ausland* „ che si pubblica a Stuttgard. Cfr. anche Helmert: *Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der Höheren Geodasie*, vol. I, pag. 8 e 15.

" *occupato per varî mesi, non avendo potuto ottenere che fosse in-*
" *caricato di cooperarvi alcuno degli assistenti dell'Osservatorio.*
" Per tale motivo non ho potuto comunicare all'AUWERS i risul-
" tamenti ottenuti se non verso la fine di agosto „.

Non mi occuperò delle onorificenze e degli onori che Egli ebbe; dirò soltanto che non chiese mai nè le une nè gli altri (1).

Fu elevato alla dignità di Senatore il 4 marzo del 1905.

Quando fu promulgata la legge 19 luglio 1909 il prof. FERGOLA aveva già chiesto il collocamento a riposo da Professore d'Università, conservando il posto di Direttore dell'Osservatorio. Avendo il Ministro riconosciuto che la legge doveva estendersi anche ai Direttori degli Osservatorî autonomi, Egli, ancora sano e robusto di corpo e di mente, non volle far domanda per essere conservato al posto di Direttore del R. Osservatorio di Capodimonte; fu perciò collocato a riposo con decreto del 1° novembre 1909.

Ma l'alta stima in cui era tenuto e per la sua dottrina e per il suo carattere indusse la Facoltà matematica di Napoli a promuovere una sottoscrizione nazionale fra colleghi, discepoli ed ammiratori di Lui, e nella seduta del 26 febbraio 1910, stabilì di creare con i fondi raccolti un premio di studi intitolato *premio Fergola*, da concedersi ogni 4 anni al più distinto giovane che si fosse laureato nella Università di Napoli e che si fosse distinto nell'esame di Astronomia. Era questa la forma più gradita a Lui che si potesse dare alle onoranze.

Ora che la morte lo ha rapito alla Scienza e alla famiglia nella grave età di anni 85 (morì in Napoli il 5 aprile 1915), la

---

(1) Fu nominato socio dell'Istituto d'incoraggiamento di Napoli, *corrispondente* nel 1853, *ordinario* nel 1890; della R. Accademia delle Scienze di Napoli *corrispondente* nel 1855, *ordinario* nel 1861; della R. Accademia Pontaniana fu socio fin dal 1863; della Società astronomica tedesca fin dal 1863. Ebbe la medaglia d'oro dalla Società italiana detta dei XL nel 1877 e nel 1878 fu nominato socio. Della R. Accademia delle Scienze di Torino fu nominato socio *corrispondente* nel 1880 e socio nazionale non residente nel 1896. Socio effettivo della R. Commissione Geodetica italiana dal 1882; socio della R. Accademia dei Lincei dal 1884; socio corrispondente del R. Istituto Veneto nel 1896; della Società degli spettroscopisti italiani dal 1889 e socio onorario dell'Associazione meteorologica italiana dal 1890.

mia mente segue il mio Maestro nel luogo della sua ultima dimora, là sulla collina di *Poggioreale* sacra ai morti. Dopo aver contemplato la statua della Religione nell'atto di chiamare a raccolta quelli che furono, si avvia sul luogo dove Egli gode le gioie del sepolcro, concesse soltanto a chi lascia larga eredità di affetti. Ivi all'ombra dei cipressi sempre verdi, al cospetto del mare infinito gli manda l'estremo saluto affettuoso e reverente.

Torino, aprile 1915.

NOTA (*a*).

Notizie di NICOLA FERGOLA si trovano nel libro di GINO LORIA (Genova, 1892): *Nicola Fergola e la Scuola di matematici che lo ebbe a duce.*

In esso l'autore esamina l'opera di FERGOLA e dei suoi discepoli. Questo libro ha il merito indiscutibile di aver cagionato il risveglio degli studii storici sulla Scuola Napolitana. Notizie più sicure e minute si trovano nella interessante memoria del professore FEDERICO AMODEO, pubblicata nel volume XXXIII degli « Atti dell'Accademia Pontaniana » (Napoli 1903), e che è intitolata: *Nicolò Fergola.* In questa vi è tutta la vita del FERGOLA ed un ritratto di esso; ci dispiace non poter qui riprodurre alcuni brani che mostrano tutta l'elevatezza dell'ingegno, la modestia e la nobiltà di carattere di quest'uomo insigne che riempie di sè l'epoca in cui ha vissuto (nacque a Napoli il 29 ottobre 1753; morì il 21 giugno 1824).

In un'altra memoria dello stesso AMODEO, intitolata: *Gli Istituti d'Istruzione e scientifici in Napoli intorno al 1800* che, in un certo modo completa la precedente, si trovano notizie del celebre PIAZZI con ritratto e di CARLO BRIOSCHI (anche con ritratto) primo Direttore dell'Osservatore di Capodimonte in Napoli. Questa seconda memoria trovasi nel vol. XXXVII degli « Atti dell'Accademia Pontaniana » (Napoli 1905). Da essa togliamo quanto segue: « Più che nell'Università l'insegnamento civile delle ma-
« tematiche, per quasi tutto il tempo di questo periodo, era tenuto
« alto dall'insegnamento privato. Eranvi parecchi studii privati, ma
« furono tutti ecclissati dallo studio privato di NICOLÒ FERGOLA.
« Egli spiegava tutto dall'EUCLIDE al Calcolo ed alla Meccanica. Al
« suo studio accorrevano entusiasti i giovani, sebbene in picciol

« numero, e in men di tre anni, per l'abilità didattica del Maestro, « completavano i loro studi, e ne uscivano valorosi insegnanti e « appassionati alle ricerche matematiche ..... ».

Nota (*b*).

Francesco Fergola (zio di Emanuele), Capitano del Genio, morto fulminato nel 1845 sul monte di Antennamare presso Messina, mentre ivi attendeva ai lavori geodetici a cui era destinato, lasciava all'Officio Topografico di Napoli quasi compiuta la triangolazione dell'Italia meridionale, e il collegamento di questa rete con quelle eseguite, nello Stato Romano e nell'Alta Italia, dagl'Ingegneri italiani ed austriaci. Questo lavoro molto grave, avuto specialmente riguardo ai mezzi scarsi concessi al Fergola, era cominciato verso il 1816 in occasione della costruzione della carta di cabotaggio delle coste dell'Adriatico e del collegamento della rete di triangoli distesi in quella regione con l'isola di Fanò al Nord-Ovest di Corfù per la esatta determinazione della bocca dell'Adriatico; fu interrotto dal 1822 al 1828 per rimozione dall'impiego; e proseguito dal 1828 al 1845 con le triangolazioni in Terra di Lavoro ed Abruzzo, nonchè in Sicilia lungo la costa Nord-Ovest dell'isola, e da Palermo per Messina sulle coste della Calabria .

. . . .

Di quei lavori non si è più tenuto alcun conto fin che rimasero in Napoli. Ma quando, per la soppressione dell'Officio di Napoli, i manoscritti di Francesco Fergola passarono in Firenze nell'Archivio dell'Istituto Geografico Militare, gli obliati lavori del Geodeta Napoletano trovarono nel Colonnello dello Stato Maggiore Annibale Ferrero un estimatore competentissimo e leale che prese l'iniziativa di una pubblica testimonianza di onore alla memoria del loro autore .....

Il Colonnello Ferrero ha riconosciuto i lavori di Francesco Fergola tanto ben fatti da non lasciare desiderare quelli posteriormente eseguiti. A proposta del Ferrero adunque, la Commissione Geodetica italiana deliberò che fosse messa una lapide sulla chiesetta di Antennamare (*) per onorare la memoria dello scien-

(*) La chiesetta di Antennamare, a 1130 metri sul mare, è una rozza e nuda cappelluccia, dove una volta l'anno, il 4 agosto, accorrono numerose, per divota consuetudine, le popolazioni dei vicini paesi. Vi si giunge in 4 ore da Messina passando pel villaggio del Santo.

ziato che vi morì fulminato; e il Ministro della Pubblica Istruzione, da cui dipende quella Commissione, consentì a questa deliberazione. Per tal modo il 25 ottobre ultimo (1882) con l'intervento della Rappresentanza municipale, delle Autorità Civili e Militari di Messina e dei delegati della Commissione Geodetica italiana [Colonnello Annibale Ferrero e Prof. Emanuele Fergola] fu inaugurata sulla Chiesetta di Antennamare una lapide con la seguente iscrizione:

IL 25 NOVEMBRE 1845
IL FULMINE TRONCAVA QUI VITA E LAVORI
DI FRANCESCO FERGOLA
ILLUSTRE GEODETA

L'ANNO 1882
LA COMMISSIONE GEODETICA ITALIANA
PONEVA QUESTA LAPIDE
PER ONORARE LA MEMORIA
DELL'AUTORE DELLA PRIMA MISURA MATEMATICA
DELL'ITALIA MERIDIONALE

Quanto sopra è detto è stato preso da una: *Notizia di commemorazione comunicata all'Accademia Pontaniana dal Socio Emanuele Fergola* nella tornata del 12 novembre 1882. Codesta notizia termina con le seguenti parole: « *I discorsi pronunziati* « *in quella occasione saranno inseriti in un opuscolo, che con-* « *terrà un esame critico delle triangolazioni eseguite da Fran-* « *cesco Fergola, e verrà stampato perchè resti notizia dell'av-* « *venuta commemorazione* ».

Non siamo sicuri che ciò è stato fatto.

NOTA (*c*).

Non è qui il caso di parlare delle *variazioni della latitudine*. Si possono consultare su tale argomento i tre interessanti lavori dell'Ingegnere OTTAVIO ZANOTTI-BIANCO:

1° *Il livello del mare* nel « Bollettino della Società Meteorologica italiana », 1889, n[i] 3, 5, 6;

2° *La variazione della latitudine*: Notizie storiche nel *Cosmos* di GUIDO CORA, Serie II, vol. XI (Torino, 1892-1893);

3° *La variazione delle latitudini* nel libro: *Istorie di Mondi*, Torino, Bocca, 1903.

In questi articoli, specialmente nell'ultimo, sono esaminati dapprima i lavori teorici tanto sulla variazione *secolare* quanto sulla variazione *annua* della latitudine a cominciare da Eulero nel 1758, poi gli studii pratici e le osservazioni sulla variazione annua della latitudine. Questi ultimi hanno avuto origine dal *Programma* di E. Fergola.

Il Prof. Arminio Nobile, astronomo dell'Osservatorio di *Capodimonte*, fu il primo ad intravedere nelle sue osservazioni indizii della variazione annua della latitudine. In una sua memoria del 1885 (*) dice, nella prefazione: « *Pubblico le presenti ricerche* « *le quali accennano ad una variazione annua della latitu-* « *dine intorno ad un medio che alla sua volta potrebbe pure* « *essere variabile* » . . . . , ... ed a pag. 5 della stessa memoria: « *Le ricerche che qui imprendo* « *ad esporre* (in parte iniziate fortuitamente) *tendono a provare* « *essere probabile che la latitudine di un punto della terra sia* « *un elemento variabile nell'anno dentro certi limiti e che* « *questi limiti nello stato attuale dell'astronomia e della geo-* « *desia*, *non comprendono quantità assolutamente trascu-* « *rabili* ».

NB. La fotografia del Fergola ed alcune notizie di famiglia le ho avute dal Prof. Gabriele Torelli, genero del defunto. L'elenco delle pubblicazioni è quello stesso che trovasi nella *Commemorazione* fatta alla R. Accademia delle Scienze di Napoli dal Prof. Luigi Pinto. Si abbiano i due egregi Colleghi i miei ringraziamenti.

(*) Cfr. *Ricerche numeriche sulla latitudine del R. Osservatorio di Capodimonte*, Parte I: *Risultato delle osservazioni del 1884 ed esame dei risultati di altre località*. Vol. IV degli " Atti del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli ", 1885.

PUBBLICAZIONI DEL PROF. FERGOLA.

1. *Ricerche relative alle curve inviluppi* (" Mem. della Soc. it. delle Scienze „, Modena, 1850).
2. *Sopra alcune proprietà delle superficie di 2° grado* (" Atti della R. Acc. delle Scienze „, Napoli, 1851).
3. *Sopra la condizione per la possibilità dello sviluppo in serie di una funzione* (" Idem „, 1857).
4. *Ricerca dell'espressione di una derivata qualunque di una funzione in termini delle derivate della funzione inversa* (" Idem „, 1857).
5. *Ricerche sulla risoluzione per serie di una equazione qualunque* (" Idem „, 1857).
6. *Sopra una nuova espressione dei numeri di Bernoulli* (" Id. „, 1857).
7. *Sopra due formole di Calcolo differenziale* ("Annali di Matemat. „, Roma, 1858).
8. *Sulla risoluzione per serie delle equazioni trinomie di grado qualunque* (" Rendic. della R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche „, vol. 1°, Napoli, 1862).
9. *Sopra talune proprietà delle soluzioni intere e positive dell'equazione* $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n$ (" Idem „, 1863).
10. *Elementi dell'orbita della cometa 5ª del 1863* (" Idem „, 1863).
11. *Osservazioni sul pianeta Psiche e sulla cometa 5 luglio 1864* (" Id. „, 1864).
12. *Sopra una proposizione elementare di Calcolo integrale* (" Id. „, 1864).
13. *Determinazione degli errori costanti dell'equatoriale di Merz esistente nella R. Specola di Napoli* (" Idem „, 1864).
14. *Osservazioni ed elementi dell'orbita del pianeta Clio* (" Id. „, 1864).
15. *Ricerca dei più probabili elementi dell'orbita di Clio* (" Id. „, 1865).
16. (In unione col P. Secchi). *Sulla differenza di longitudine fra Napoli e Roma, determinata per mezzo della trasmissione telegrafica delle osservazioni dei passaggi* ("Atti della R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche „, vol. V, Napoli, 1871).
17. *Sopra talune oscillazioni diurne degli strumenti astronomici e sopra una probabile causa della loro apparenza* (" Rend. della R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche „, Napoli, 1871).

18. *Determinazione novella della latitudine dell'Osservatorio di Capodimonte mediante le differenze di distanze zenitali di 52 coppie di stelle osservate durante l'anno 1871* (“Atti della R. Accad. delle Scienze fisiche e matematiche „, Napoli, 1871).
19. *Sopra alcuni valori della latitudine di Roma* (“ Rend. della R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche „, Napoli, 1873).
20. *Sulla posizione dell'asse di rotazione della terra rispetto all'asse di figura* (“Atti della R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche „, Napoli, 1874).
21. *Dimensioni della terra e ricerca della posizione del suo asse di figura rispetto a quello di rotazione* (“ Idem „, 1875).
22. *Osservazioni di Marte fatte nel R. Osservatorio di Capodimonte dal 19 agosto al 23 ottobre 1877* (“ Rend. della R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche „, Napoli, 1879).
23. *Osservazioni di Marte intorno all'opposizione del 1879* (“ Id. „, 1880).
24. *Osservazioni della Cometa* b 1881 *al Cerchio meridiano di Repsold* (“ Idem „, 1881).
25. *Di talune equazioni relative alla teoria delle funzioni ellittiche* (“ Memorie della Società italiana delle Scienze „, 1882).
26. *Richiamo a proposito di una formola recentemente pubblicata dal signor Erdmann* (“ Rend. della R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche „, Napoli, 1882).
27. *Sulla latitudine del R. Osservatorio di Capodimonte* (“Atti R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche „, Napoli, 1884).
28. *Notizia di una commemorazione a* Francesco Fergola *comunicata all'Accademia Pontaniana nella tornata del 12 novembre 1882* (“ Rend. della R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche „, Napoli, 1882).
29. *Proposta alla Conferenza Geodetica tenuta a Roma nel 1883 per verificare l'invariabilità delle latitudini e dimostrare con le osservazioni la variazione dell'asse di rotazione della terra* (“ Comptes-rendus de la 7me Conférence Géodétique internationale „, 1884).
30. *Commemorazione di* Nicola Trudi (“ Rend. della R. Acc. delle Sc. fisiche e matematiche „, Napoli, 1884).
31. *Sopra una serie di osservazioni iniziate negli Osservatorî di Washington e Lisbona secondo un piano raccomandato dalla Commissione Geodetica internazionale* (“ Idem „, 1885).
32. *Nuova determinazione della differenza di longitudine fra Napoli e Roma* (“ Idem „, 1886).
33. *Posizioni apparenti di alcune stelle dell'Eridano osservate al Circolo meridiano di Repsold nel R. Osservat. di Capodimonte* (“ Id. „, 1887).

34. *Determinazione della differenza di longitudine fra Napoli e Roma, mediante osservazioni fatte nel 1885* (" Pubblicazioni della Commissione italiana per la misura del grado ", 1887).
35. *Sulla latitudine del R. Osservatorio di Capodimonte* (" Atti della R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche ", Napoli, 1888).
36. *Rapporti sui lavori compiuti dalla R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche negli anni 1887-88-89.*
37. *Commemorazione di* Annibale De Gasparis (" Rend. della R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche ", Napoli, 1892).
38. *Sull'errore di collimazione degli strumenti meridiani* (" Id. ", 1889).
39. *Novella determinazione della costante di aberrazione* (" Id. ", 1897).
40. *Osservazioni del pianeta Vittoria e di 41 stelle di paragone nell'opposizione del 1889* (" Atti della R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche ", Napoli, 1894).
41. *Stelle cadenti dello Sciame delle Leoneidi* (" Rend. della R. Accad. delle Scienze fisiche e matematiche ", Napoli, 1889).
42. *Sulle variazioni del medio annuo della declinazione magnetica* (" Id. ", 1900).
43. (In collaborazione con Raina ed Angelitti). *Determinazione della differenza di longitudine fra Napoli e Milano mediante osservazioni fatte nel 1888* (Milano, 1900).
44. *Per* Luigi Cremona (" Rend. della R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche ", Napoli, 1903).

Gli eccentrici multipli dei motori a scoppio con cilindri radiali.

Nota del Socio MODESTO PANETTI.

---

1. I motori a scoppio possono essere a 2, a 4 ovvero a 6 tempi, ossia le fasi costituenti un intero ciclo si possono svolgere durante 1, 2, o 3 giri del sistema rotante, che è l'albero a gomito, se i cilindri sono fissi, ovvero il telaio se i cilindri sono mobili.

L'aggruppamento di più cilindri disposti radialmente, permette l'uso di una manovella sola con disposizioni costruttive che qui non hanno interesse. Permette anche di usare un eccentrico unico in servizio di tutte le punterie di introduzione ed un altro in servizio di quelle di scarico.

L'eccentrico di introduzione e quello di scarico possono finalmente essere riuniti in uno solo con artifizi diversi, fra i quali ne accenniamo due di carattere ben distinto:

1° Il distanziamento delle punterie di introduzione e di scarico (ovvero il loro comando indiretto con la interposizione di leve) per modo che la medesima gobba possa servire al doppio ufficio, operando sulla 2ª punteria col ritardo voluto rispetto alla 1ª.

2° La riunione delle 2 punterie in una sola, tenendo separate le due gobbe, e ricavando per esempio quella destinata alla introduzione in risalto e quella destinata allo scarico in rientranza rispetto al circolo di riposo, nel qual caso l'unica punteria deve far capo ad una leva interfissa che comanda le 2 valvole ed apre l'una o l'altra di esse, secondochè si abbassa l'uno o l'altro estremo della leva.

Numerosi brevetti riguardano l'eccentrico unico a più lobi che risolve nei casi singoli il problema qui indicato. È scopo

di questa nota quello di svolgerne una trattazione generale, nella quale tutti i casi già noti ed altri nuovi e possibili rientrano.

2. Premettiamo che in un motore a più cilindri dicesi *differenza di fase* fra di essi l'angolo di cui deve rotare la manovella per portare la distribuzione del 1° nella posizione occupata da quella del 2°. Come fase caratteristica si assume d'ordinario quella di accensione. Gli angoli di rotazione dell'albero, pei quali si seguono le accensioni nei cilindri successivi, sono quindi le loro differenze di fase.

Nel caso d'una motrice a cilindri radiali con manovella unica, questi angoli coincidono con quelli formati dagli assi dei cilindri motori, o risultano come somma di essi. Per ottenere la massima uniformità del momento motore è necessario che le differenze di fase siano tutte eguali. Quindi, se n è il numero dei cilindri, esse risultano rispettivamente

$$\frac{2\pi}{n}, \qquad \frac{4\pi}{n}, \qquad \frac{6\pi}{n},$$

secondochè la motrice svolge un ciclo di 2, 4, o 6 tempi.

Siccome poi gli assi dei cilindri in questi motori sono diretti come raggi ugualmente spaziati di una ruota, e quindi formano angoli uguali a $\frac{2\pi}{n}$ in ogni caso, segue la regola ben nota che la successione delle accensioni deve avvenire: per i motori a 2 tempi, nell'ordine stesso nel quale i cilindri sono distribuiti intorno all'asse: per i motori a 4 tempi, saltandone uno ogni volta, ossia secondo la serie 1° - 3° - 5° . . . . .: per i motori a 6 tempi saltandone due, ossia secondo la serie 1° - 4° - 7°.

Di conseguenza il numero n dei cilindri in un motore raggiato a 4 tempi dev'essere dispari (non multiplo del 2), così si incontreranno tutti una volta sola in 2 giri: in un motore a 6 tempi non deve essere multiplo del 3, così si incontreranno tutti una sola volta in 3 giri.

3. Consideriamo ora (Fig. 1) una sagoma di eccentrico sviluppata in rettilineo A B, sia essa utilizzabile per la sola introduzione, o per il solo scarico, o per il duplice scopo, com'è il

caso della figura, dove il risalto i e l'incavo s hanno l'ufficio spiegato nella disposizione (2) e l'ampiezza suggerita dalle regole abituali sul ritardo al termine della introduzione e l'anticipo allo scarico.

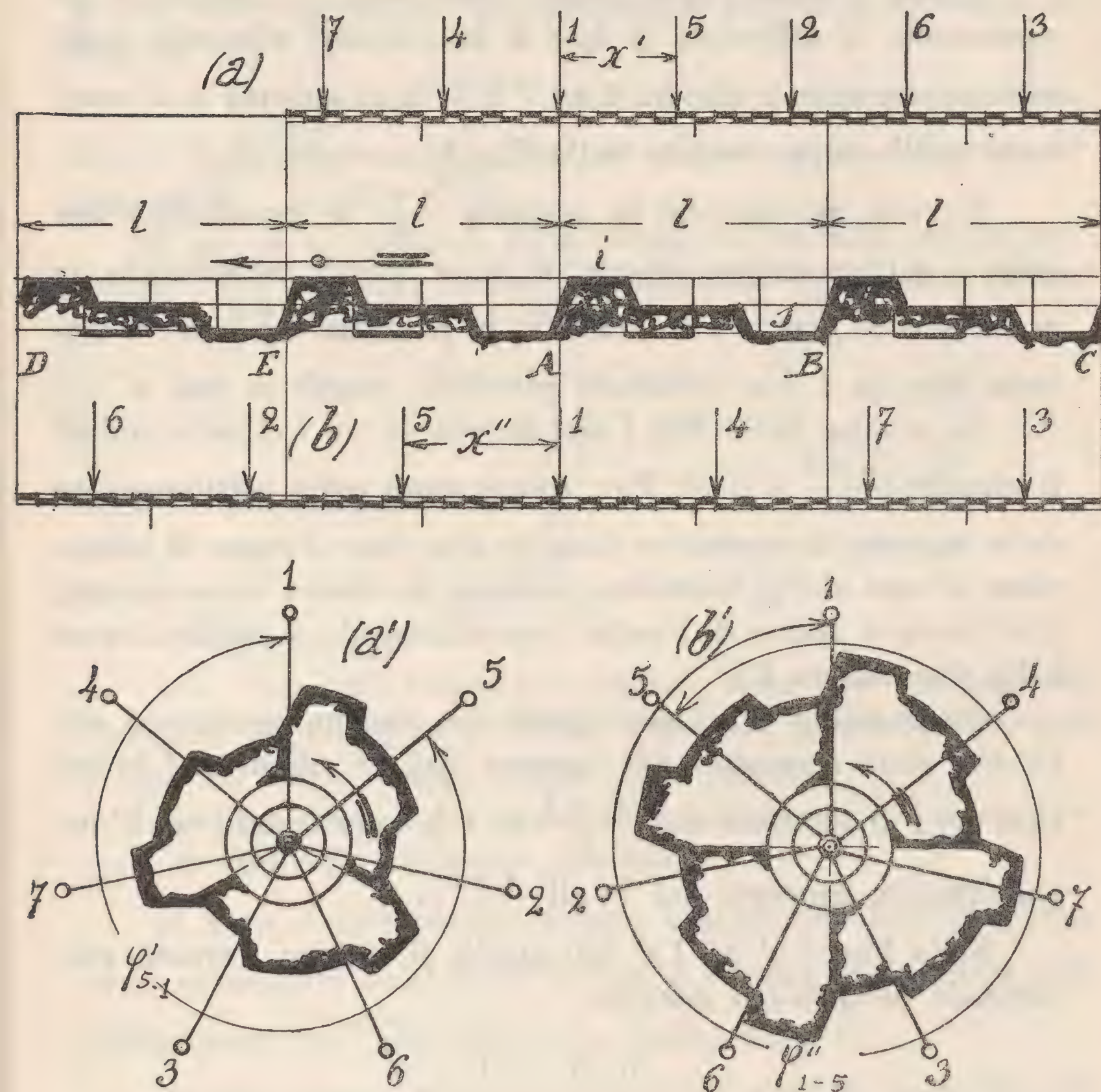



Fig. 1.

Immaginiamo preceduta la sagoma AB in EA ed in DE, e seguìta in BC da altre identiche, in numero non determinato.

Proponiamoci poi di distribuire le punterie lungo questa serie di sagome in modo che esse realizzino le volute differenze di fase fra i rispettivi cilindri, nell'ordine delle accensioni che mettiamo in evidenza numerandoli.

La numerazione si può fare in due sensi:

a) in senso contrario all'ordine in cui un punto qualsiasi del contorno dell'eccentrico tocca le punterie (Fig. 1 *a'*);

b) nello stesso senso dell'ordine anzidetto (Fig. 1 *b'*).

Questa diversa disposizione di cose porta a considerare diversamente la differenza di fase di due cilindri adiacenti: quali sono ad esempio i cilindri 1 ed $\frac{n+3}{2}$ in un sistema a 4 tempi come quello rappresentato dalla Fig. 1.

In vero, nel caso (*a*) la punteria $\frac{n+3}{2}$ è incontrata *prima* della 1 dall'eccentrico rotante, si deve quindi considerarla *in precedenza di fase* φ'; nel caso (*b*) la punteria $\frac{n+3}{2}$ è incontrata *dopo* la 1 e si considera perciò *in ritardo di fase* φ''.

Lo schema della Fig. 1 si riferisce ad un 7 cilindri; quindi il cilindro $\frac{n+3}{2}$ è il 5°. Per conseguenza nella rettilineazione delle sagome di eccentrico fatta in alto, dato il senso di traslazione di esse che la freccia rappresenta da destra verso sinistra, 5 si trova a destra di 1 nella disposizione *a')*, a sinistra invece nella disposizione *b')*.

Gli angoli φ' e φ'' sono quelli che bisogna percorrere *nell'ordine delle accensioni* per passare dal 5° cilindro al 1° nel caso (*a*) $\left(\text{(in generale dall'}\ \frac{n+3}{2}\ \text{al 1°}\right)$; ovvero dal 1° al 5° nel caso (*b*) $\left(\text{(in generale dal 1° all'}\ \frac{n+3}{2}\right)$.

Sulle Fig. 1 *a'* ed 1 *b'* tali angoli si vedono segnati, percorrendo nella (*a'*) il circuito

5 - 6 - 7 - 1

nella (*b'*) il circuito

1 - 2 - 3 - 4 - 5

ossia, rispettivamente, 3 e 4 volte l'angolo $\frac{4\pi}{n}$.

In generale adunque possiamo porre

$$
(1)\qquad \begin{cases} \varphi' = \dfrac{n-1}{2}\,\dfrac{4\pi}{n} = 2\pi\,\dfrac{n-1}{n} \\[2ex] \varphi'' = \dfrac{n+1}{2}\,\dfrac{4\pi}{n} = 2\pi\,\dfrac{n+1}{n}\,. \end{cases}
$$

Volendo mettere a posto le punterie 1ª e 5ª (in generale 1ª ed $\frac{n+3}{2}$) rispetto alla sagoma rettilineata lunga l, siamo quindi autorizzati a farlo in due modi:

a) collocare la $\frac{n+3}{2}$ rispetto alla 1 *contro* al moto traslatorio della sagoma ad una distanza x' per cui la differenza di fase sia φ';

b) collocare la $\frac{n+3}{2}$ rispetto alla 1 *secondo* il moto traslatorio della sagoma alla distanza x'' per cui la differenza di fase sia φ''.

E poichè si tratta di un 4 tempi, in cui alla intera lunghezza l della sagoma corrisponde una differenza di fase 4π, ne deduciamo subito

$$x' : l = \varphi' : 4\pi$$
$$x'' : l = \varphi'' : 4\pi$$

onde risulta, grazie alle (1),

$$x' = \frac{n-1}{2n} l, \qquad x'' = \frac{n+1}{2n} l. \tag{2}$$

Alle medesime distanze si devono succedere due punterie qualsiansi appartenenti a cilindri adiacenti, poichè la differenza di fase fra essi è sempre quella sopra indicata.

Ne discendono *due soluzioni* del problema che ci siamo proposti di risolvere, entrambe possibili.

In vero n intervalli x' stanno esattamente in $\frac{n-1}{2}$ lobi, come ci assicura la 1ª delle (2); ed n intervalli x'' stanno pure esattamente in $\frac{n+1}{2}$ lobi come risulta dalla 2ª.

Si può dunque costruire un eccentrico multiplo in servizio di tutti i cilindri di un motore raggiato a 4 tempi. Esso dovrà avere $\frac{n-1}{2}$ *lobi se l'ordine in cui si succedono le accensioni è opposto al senso in cui l'eccentrico gira* (supposti i cilindri fissi): *ne avrà invece* $\frac{n+1}{2}$ *se tali sensi sono concordanti* (sempre nella stessa ipotesi).

Le Figg. 1 a' ed 1 b' rappresentano i due casi per il 7 cilindri; nell'una l'eccentrico ha 3 nell'altra 4 lobi, ottenuti av-

volgendo in circolo la sagoma EC per la 1ª e la DC per la 2ª. È facile riconoscere che alle punterie ugualmente numerate corrispondono nei due dispositivi posizioni identiche rispetto alla sagoma, e quindi fasi uguali.

4. La estensione delle cose dette ai *motori a 6 tempi* è assai semplice.

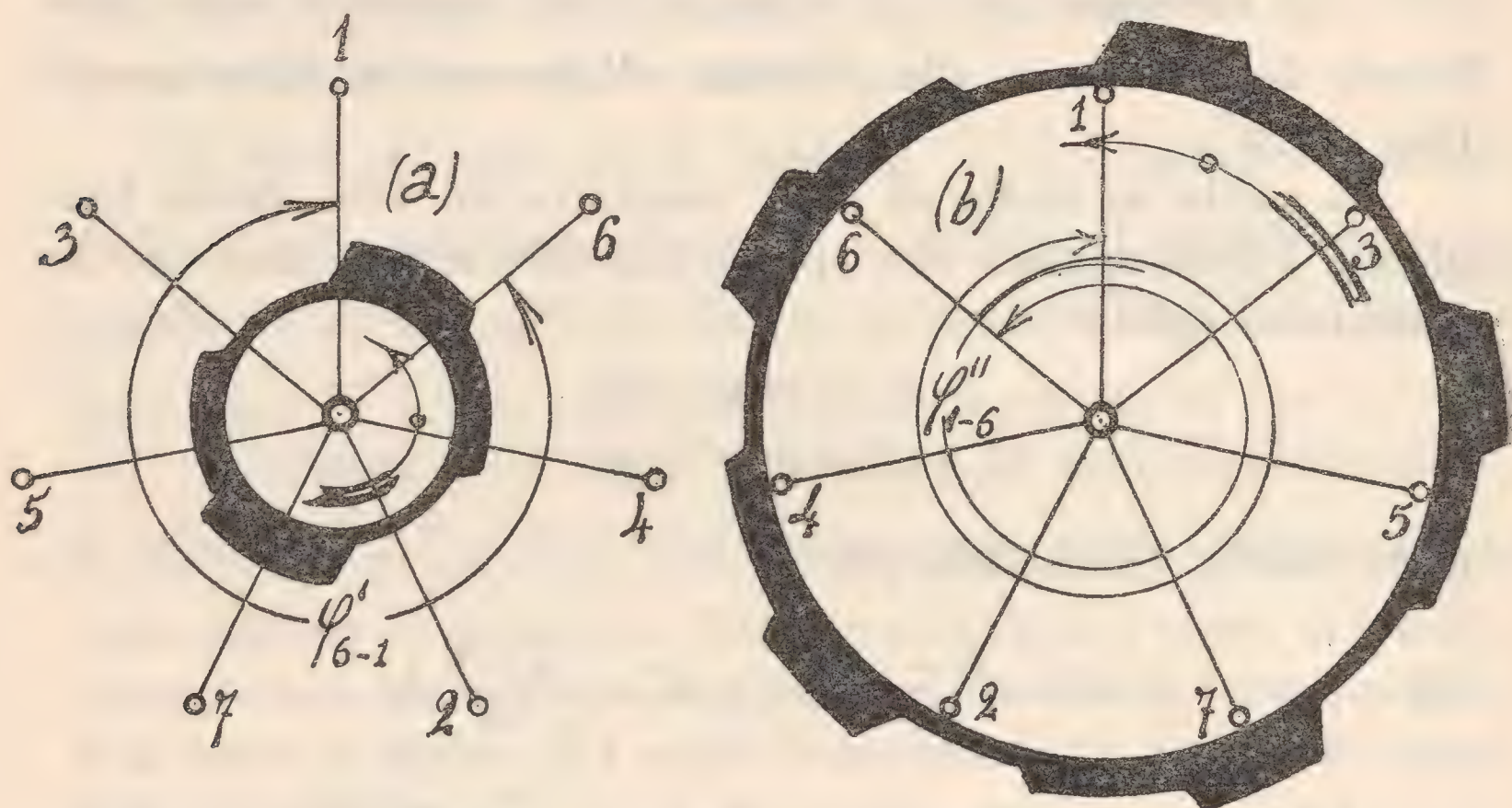



Fig. 2.

In essi però bisogna distinguere due casi:

1° quello in cui il numero dei cilindri supera di uno un multiplo del 3 (Fig. 2, motore a 7 cilindri);

2° quello in cui il numero dei cilindri supera di due un multiplo del 3 (Fig. 3, motore a 8 cilindri).

Fatta la numerazione dei cilindri nell'ordine delle accensioni, una volta (b) nel senso del moto dell'eccentrico ed un'altra volta (a) in verso opposto, sempre considerandone uno ogni 3, come il ciclo a 6 tempi richiede, si determini la differenza di fase fra due cilindri adiacenti qualsiansi.

Anzi tutto nel 1° caso se uno dei due cilindri è il 1° l'altro è quello che porta il numero $\frac{2n+4}{3}$ ovvero $\frac{2n+4}{6}$ (il 6° o il 3° nel caso del 7 cilindri, Fig. 2 a).

La scelta fra questi due è indifferente: prendiamo, per es., in esame quello che porta il numero $\frac{2n+4}{3}$.

Esso nel dispositivo (*a*) è rispetto al cilindro 1 in precedenza di fase

$$\varphi' = 6\pi - \left(\frac{2n+4}{3} - 1\right)\frac{6\pi}{n} = 2\pi\,\frac{n-1}{n},$$

come risulta anche dalla Fig. 2 *a*.

Nel dispositivo (*b*) vi è invece fra i due cilindri designati il ritardo di fase

$$\varphi'' = \left(\frac{2n+4}{3} - 1\right)\frac{6\pi}{n} = 2\pi\,\frac{2n+1}{n}.$$

Considerato che la lunghezza l della sagoma corrisponde ad una differenza di fase di 6π, si ritrova subito l'equidistanza delle punterie:

nel dispositivo (*a*) $\qquad$ nel dispositivo (*b*)

$$x' = l\,\frac{n-1}{3n}; \qquad x'' = l\,\frac{2n+1}{3n};$$

quindi *l'eccentrico multiplo in un motore a 6 tempi con cilindri radiali, il cui numero superi di 1 un multiplo del 3, deve avere* $\frac{n-1}{3}$ *lobi, se le accensioni si seguono in ordine opposto al senso in cui gira l'eccentrico; ne avrà invece* $\frac{2n+1}{3}$ *nel caso opposto.*

La Fig. 2 fa vedere l'eccentrico a 2 e quello a 5 lobi per il 7 cilindri a 6 tempi, e da essa appare chiaramente che le punterie indicate con gli stessi numeri si trovano in fasi identiche.

Trattando finalmente il caso in cui il numero dei cilindri superi di 2 un multiplo del 3 si nota che i cilindri adiacenti al 1° portano i numeri $\frac{n+4}{3}$ e $2\,\frac{n+1}{3}$, e, operando per uno qualunque di essi, si trovano le differenze di fase, quotate nella Fig. 3

$$\varphi' = 2\pi\,\frac{n+1}{n}, \qquad \varphi'' = 2\pi\,\frac{2n-1}{n}$$

e le equidistanze delle punterie

$$x' = l\,\frac{n+1}{3n}, \qquad x'' = l\,\frac{2n-1}{3n}.$$

Dunque *l'eccentrico multiplo in un motore a 6 tempi con cilindri radiali, il cui numero superi di due un multiplo di 3, deve avere* $\frac{n+1}{3}$ *lobi se le accensioni si seguono in ordine opposto al senso in cui gira l'eccentrico, ne avrà in vece* $\frac{2n-1}{3}$ *nel caso opposto.*

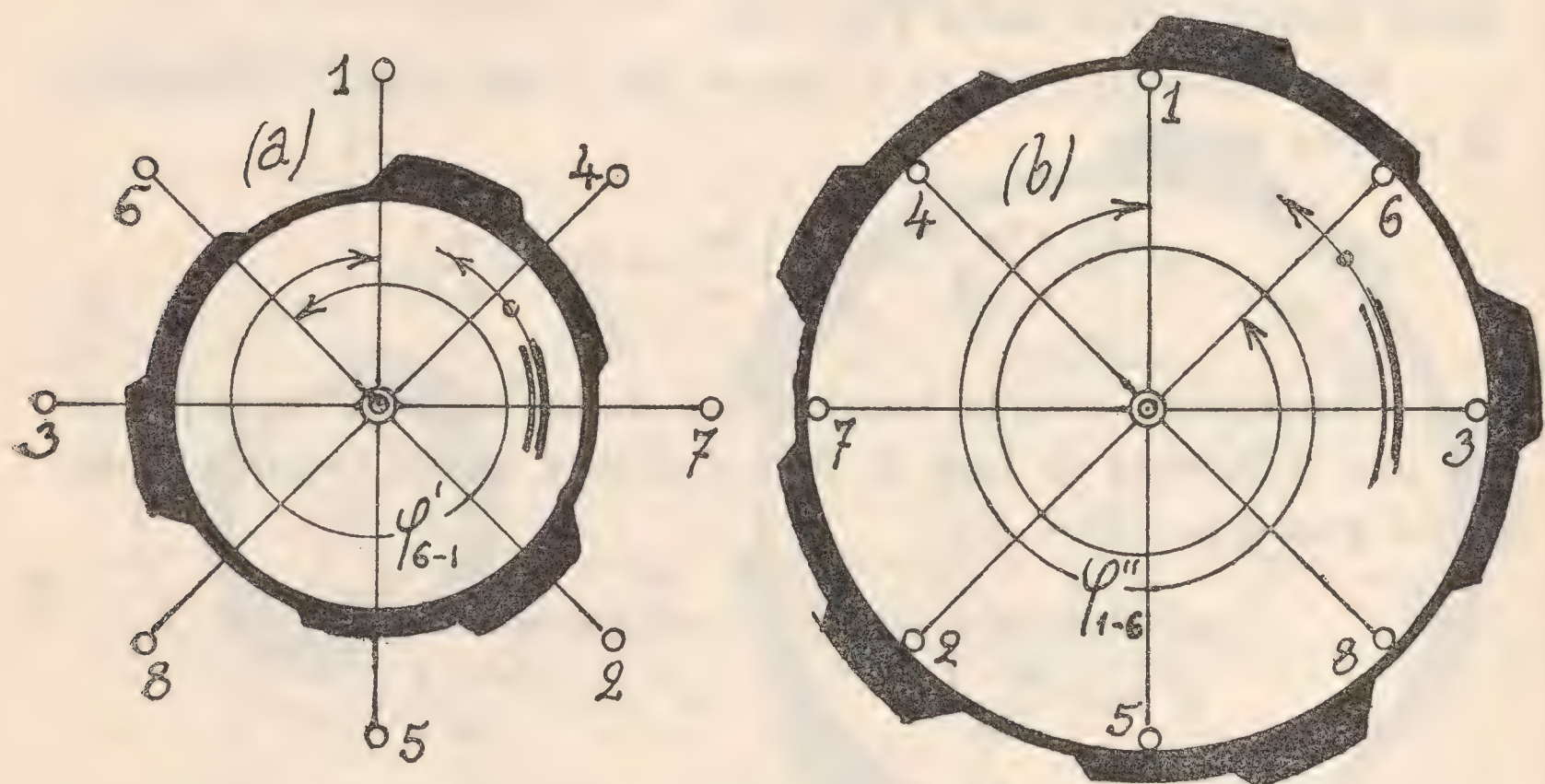



Fig. 3.

La Fig. 3 fa vedere l'eccentrico a 3 e quello a 5 lobi per l'8 cilindri a 6 tempi, e qui pure appare chiaramente l'uguaglianza di fase assicurata alle punterie portanti lo stesso numero nelle due soluzioni.

5. È chiaro che delle due soluzioni trovate per ogni tipo di motore a cilindri radiali si deve preferire quella che risolve il problema col minor numero di lobi.

Per questo fatto il caso semplicissimo dei motori a cilindri radiali a 2 tempi, che non abbiamo neppure preso in esame, conduce all'uso di un eccentrico a lobo unico, utile per tutti i cilindri. L'altra soluzione condurrebbe ad un eccentrico con $n-1$ lobi.

Sul problema delle vene confluenti.

Nota di TOMMASO BOGGIO (*).

In una Memoria recentissima, molto interessante, il Professore Cisotti (**) ha dato la soluzione del problema della confluenza od urto di due vene liquide, o, più in generale, della confluenza di un numero qualsiasi di vene liquide.

Egli studia il problema in due dimensioni, e perciò si vale naturalmente del sussidio della teoria delle funzioni di variabile complessa e delle rappresentazioni conformi, le quali, come è noto, si prestano meravigliosamente alla trattazione dei più svariati problemi idrodinamici in due dimensioni (***).

Ora a me pare che la trattazione del Cisotti sia in qualche parte suscettibile di semplificazioni: egli rappresenta conformemente il piano del moto sul piano di una variabile complessa ζ, che non ha relazione diretta cogli elementi del moto. Io ho os-

---

(*) Nota presentata nell'adunanza del 7 marzo 1915.

(**) Cisotti, *Vene confluenti* [“ Annali di Matematica „, tomo XXIII, serie III (a. 1915), pp. 285-341]. Dovendo citare, nel seguito, questa Memoria, la indicherò brevemente con *M. C.*

(***) La semplicità apportata dalla teoria delle funzioni di variabile complessa, in confronto dei metodi cartesiani, si spiega facilmente osservando che detta teoria differisce solo per la forma, da quella delle omografie vettoriali nel piano [Cfr. Bottasso, *Omografie vettoriali del piano* (“ Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo „, tomo XXXV, 1° sem., 1913)]. Così, ad es., se si considera una funzione della variabile complessa z, la sua derivata rispetto a z, coincide colla derivata di un vettore rispetto ad un punto, che è una particolare omografia vettoriale.

E poichè nello spazio mancano le variabili complesse, mentre invece sussistono lo omografie vettoriali, si capisce che queste ultime debbano rendere segnalati servizi, analoghi (nei limiti del possibile) a quelli forniti nel piano, dalle variabili complesse.

servato che basta fare, più semplicemente, la rappresentazione conforme del campo del moto sul cerchio rappresentativo dei vettori velocità delle particelle liquide.

Anzi sembra che questa rappresentazione conforme si possa sempre applicare utilmente nei problemi nei quali intervengono solo peli liberi. Tale rappresentazione è analoga a quella classica di Kirchhoff (*Mechanik*, 22ᵉ Vorles.), il quale ricorreva al piano dell'inverso della velocità.

Assegno poi una costruzione, più semplice di quella data dal Cisotti, di una certa funzione [la $f(w)$ del n. 4], dalla quale si deducono poi immediatamente (n. 5) due relazioni importanti, stabilite dal Cisotti, fra le portate e le direzioni asintotiche delle vene.

Per ultimo estendo le precedenti considerazioni al caso della confluenza di quante si vogliano vene ed espongo le modificazioni che occorre fare alle formule stabilite per tale caso dal Cisotti.

1. Posizione del problema. — Si considerino due getti G e G' arbitrari; essi urtandosi dànno luogo a due correnti G_1, G_1', e, una volta raggiunto il regime permanente, supponiamo che i getti presentino la disposizione indicata nella fig. 1.

Si suppongono note le portate e le direzioni asintotiche dei getti G, G' e si tratta di determinare lo stato di moto dell'intera massa liquida, nonchè le portate e le direzioni asintotiche dei getti G_1, G_1'.

A distanza sufficientemente grande, le vene G, G' scorrono coi filetti sensibilmente paralleli fra loro e ai rispettivi peli liberi sinistri e destri s e d, ovvero s' e d'; tale comportamento va modificandosi man mano che i filetti si avvicinano alla regione centrale del moto, in cui avviene l'urto e la susseguente compenetrazione dei getti G e G'.

Un particolare filetto g di G si incontra con un determinato filetto g' di G' in un punto O; ivi momentaneamente si arrestano, poi ciascuno si bipartisce e i quattro filetti che ne risultano si compenetrano a due a due dando luogo a due unici filetti distinti g_1, g_1' che scorrono dapprima in senso opposto l'uno all'altro a partire da O, e poi si allontanano indefinitamente.

Tutti gli altri filetti vengono deviati, ma nessuno si arresta: quelli che appartengono a G e che scorrono fra d e g e quelli di G' che scorrono fra s' e g' vanno a formare la corrente G_1;

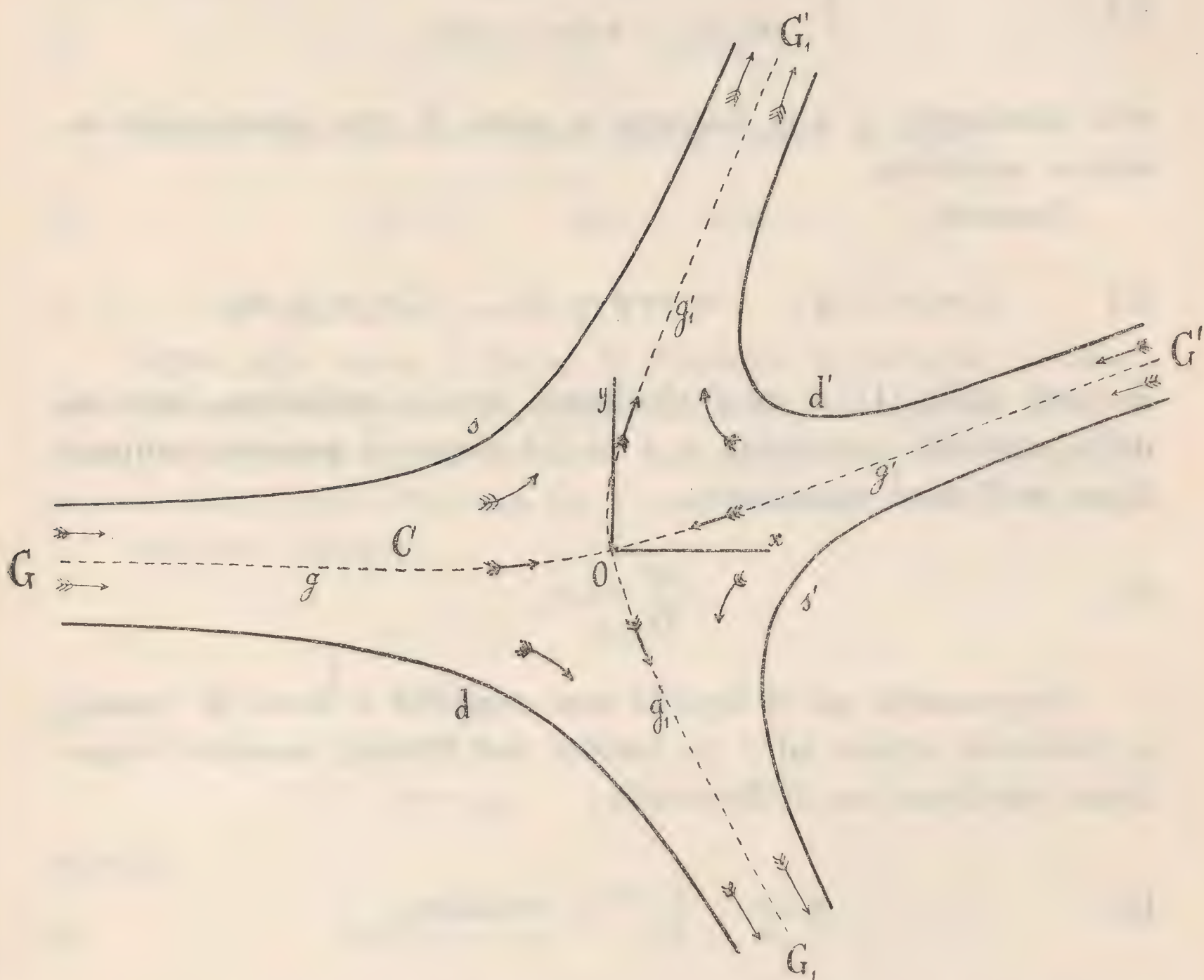



fig. 1.

invece i filetti di G compresi fra s e g e quelli di G' compresi fra d' e g' generano la corrente G_1'.

Il punto O viene denominato *spartiacque* (*M. C.*, § 1).

2. Equazioni del problema. — Assumiamo il punto O come origine di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, di cui l'asse Ox sia parallelo alla direzione asintotica di G, e l'asse Oy sia rivolto verso il pelo libero sinistro s di G.

Siano u, v le componenti della velocità di un punto generico P, e supponiamo il moto del liquido permanente ed irrotazionale; esisteranno allora il potenziale di velocità φ e la fun-

zione di corrente ψ, che sono funzioni armoniche coniugate, legate alle u, v dalle relazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} d\varphi = u\,dx + v\,dy \\ d\psi = -v\,dx + u\,dy\,, \end{cases}$$

che definiscono φ e ψ ciascuna a meno di una inessenziale costante additiva.

Ponendo:

$$(2) \qquad z = x + iy\,, \qquad w = u - iv\,, \qquad f = \varphi + i\psi\,,$$

in virtù delle (1), w ed f risultano, com'è notissimo, funzioni della variabile complessa z, e le (1) stesse si possono compendiare nell'unica equazione:

$$(3) \qquad \frac{df}{dz} = w\,.$$

Supponendo poi il liquido non soggetto a forze di massa, e ritenendo eguale ad 1 la densità del liquido, sussiste l'equazione idrodinamica di Bernoulli:

$$(4) \qquad p = -\frac{1}{2} V^2 + \text{costante}\,,$$

ove $V = \text{mod}\,w$ indica la grandezza della velocità.

Poichè lungo i peli liberi s, d, s', d' il liquido in moto confina con una regione in cui v'ha quiete, e nella quale quindi regna una pressione d'intensità costante p_0, si dovrà avere, sopra i detti peli liberi, $p = p_0$. La (4) mostra, in conseguenza, che V dovrà essere costante sopra i peli stessi.

Assumendo questa costante eguale ad 1, avremo:

$$(5) \qquad \text{mod}\,w = 1\,, \qquad \text{sopra} \qquad s,\ d,\ s',\ d',$$

dopo di che si vede subito che la (4) può scriversi:

$$(4') \qquad p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2).$$

Se si tiene conto della circostanza che, affinchè il moto sia fisicamente possibile, occorre che le linee libere siano *convesse* verso il campo C del moto, si trae $p > p_0$ in C, onde, dalla (4'), $V < 1$, perciò:

$$\text{mod}\, w < 1\,, \qquad \text{entro } C. \tag{6}$$

Inoltre, per quanto è stato detto dianzi, si avrà:

$$w = 0\,, \qquad \text{per} \qquad z = 0\,, \tag{7}$$

e $V > 0$ in ogni altro punto di C.

Sopra ogni linea di flusso la funzione di corrente ψ deve, notoriamente, assumere un valore costante, diverso da linea a linea; e la portata della corrente che scorre fra due di queste linee è data dalla differenza fra i corrispondenti valori della ψ.

Supposto dunque:

$$\left\{\begin{array}{lll} \psi = 0\,, & \text{sopra} & d\,, \\ \psi = q\,, & \;\;\text{"} & s\,, \\ \psi = q_1\,, & \;\;\text{"} & s'\,, \\ \psi = q_2\,, & \;\;\text{"} & d'\,, \end{array}\right. \tag{8}$$

saranno:

$$q\,, \qquad q' = q_1 - q_2\,, \qquad q_1\,, \qquad q_1{}' = q - q_2 \tag{9}$$

le portate dei getti G, G', G_1, $G_1{}'$, ed anche le loro larghezze asintotiche; dalle (9) risulta poi la relazione prevedibile, data la stazionarietà del fenomeno:

$$q + q' = q_1 + q_1{}'. \tag{10}$$

Quanto alla funzione φ, è facile vedere che essa cresce costantemente e indefinitamente sopra ogni linea di flusso, assumendo tutti i valori crescenti da $-\infty$ a $+\infty$, quando si procede nel senso del moto.

Perciò si può concludere che $f = \varphi + i\psi$ è funzione regolare dei punti z del campo C, situati a distanza finita, diviene infinita all'infinito, e sopra il contorno costituito dalle linee libere d, s, s', d' la sua parte immaginaria soddisfa alle (8).

Il problema proposto di moto è quindi ridotto alla determinazione del campo C del moto, nonchè delle funzioni f e w.

3. Piano rappresentativo delle velocità. — Rappresentiamo nel piano complesso $w = u - iv$ i valori che assume la funzione $w(z)$, al variare di z entro il campo C.

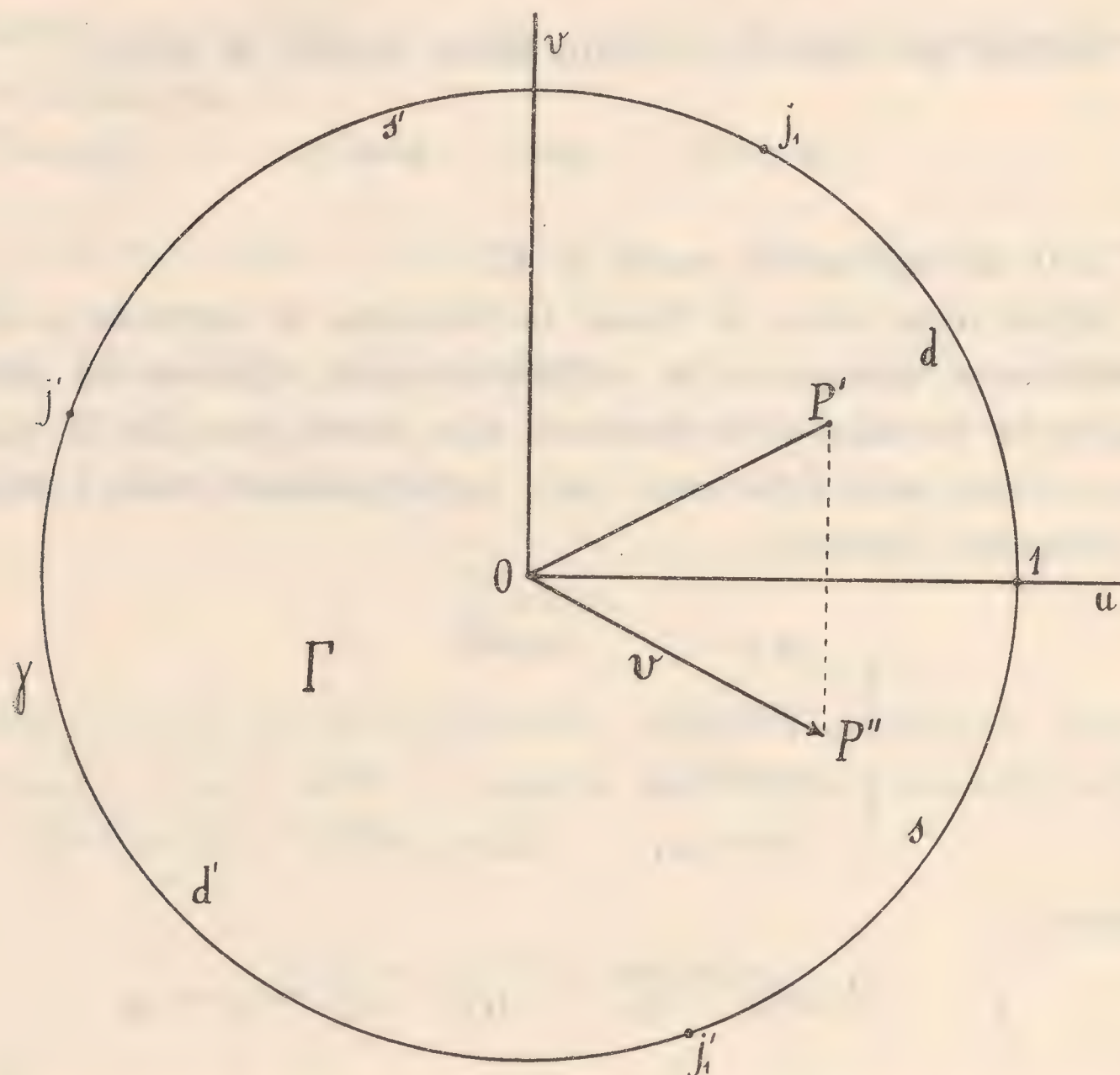



fig. 2.

Anzitutto osserviamo che, supposti gli assi coordinati u, v del piano w paralleli agli assi x, y del piano z, se P' è il punto del piano w di affissa w, e P'' è il suo simmetrico (fig. 2) rispetto all'asse reale, l'affissa di P'' sarà $\overline{w} = u + iv$, quindi il vettore $P'' - O$ è eguale al vettore velocità $\boldsymbol{v}$ del punto corrispondente P del piano z.

Si può quindi dire che il campo w è il campo rappresentativo dei vettori velocità dei punti del campo C.

Ciò premesso, quando z è sul contorno, la w ha modulo eguale ad 1, per la (5); se poi il punto z descrive l'intero contorno del campo C, il corrispondente punto w descrive l'intera circonferenza γ di raggio 1.

Ai quattro punti all'infinito dei getti G, G_1, G', G_1', corrispondono quattro punti di γ, tali che le congiungenti il centro coi loro simmetrici rispetto all'asse reale dànno le direzioni asintotiche delle quattro correnti G, G_1, G', G_1'.

In particolare, il punto all'infinito di G ha per corrispondente il punto $w = 1$ di γ; chiamando poi risp. j_1, j', j_1' le affisse dei punti di γ corrispondenti ai punti all'infinito di G_1, G', G_1', è chiaro che agli archi

$$(1, j_1), \quad (j_1, j') \quad (j', j_1') \quad (j_1', 1)$$

di γ faranno riscontro, sul piano z, risp. le linee libere d, s', d', s.

Ai punti z di C corrispondono poi, per la (6), i punti del cerchio Γ limitato da γ, e allo spartiacque di C corrisponderà, per la (7), il centro di Γ, che diremo ancora O.

La teoria delle funzioni di variabile complessa ci assicura allora l'esistenza di una relazione funzionale $w = w(z)$, la quale stabilisce la rappresentazione conforme del campo del moto C (che è semplicemente connesso) sul cerchio Γ.

Considerando, reciprocamente, z come funzione dell'argomento w, il campo in cui si dovrà fare variare w è l'intero cerchio Γ (contorno compreso), ed in tale campo la z è funzione uniforme e regolare, tranne che quando w tende ad uno dei punti 1, j_1, j', j_1', nel qual caso mod z cresce indefinitamente.

Poichè vedemmo che f è funzione regolare di z, immaginando z espressa mediante w, si potrà considerare f come funzione di w finita e continua in tutto il cerchio Γ e sopra γ, salvo che nei punti 1, j_1, j', j_1' ove essa diviene infinita.

Inoltre, la parte immaginaria di questa funzione f, dovrà soddisfare sugli archi della circonferenza γ, corrispondenti rispettivamente ai peli liberi d, s, s', d' del campo C, alle condizioni (8).

4. Costruzione della funzione $f(w)$. — È facile costruire una particolare funzione $f(w)$ che soddisfa alle condizioni poste.

Per maggiore chiarezza, richiamiamo anzitutto una convenzione sul segno degli angoli. Siano OA, OB due semirette uscenti da un punto O; diremo che l'angolo AOB è positivo o negativo, secondochè per portare la semiretta OA a sovrapporsi

alla OB si fa rotare la OA, intorno ad O, nel verso antiorario, ovvero nel verso orario.

Ciò premesso, siano M_1, M_2 due punti qualunque della circonferenza γ di centro O, e diciamo j_1, j_2 le loro affisse; sia poi P' un punto qualunque di Γ (o di γ) di affissa w. Il numero complesso $\frac{j_2 - w}{j_1 - w}$ ha notoriamente per modulo il quoto r dei moduli, e per argomento la differenza α degli argomenti dei numeri complessi $j_2 - w$ e $j_1 - w$, la quale differenza è eguale all'angolo $M_1P'M_2$.

Avremo perciò:

$$\log \frac{j_2 - w}{j_1 - w} = \log (r e^{i\alpha}) = \log r + i\alpha ,$$

intendendo di considerare per la funzione a primo membro quel ramo di essa, uniforme e regolare in Γ, che si riduce, per $w = 0$, ad $i\sigma$, avendo posto $\sigma = \text{ang}\, M_1OM_2$.

Se il punto P' viene a cadere sulla circonferenza, si ha, dalla Geometria elementare:

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}, \qquad \text{ovvero} \qquad \alpha = \pi + \frac{\sigma}{2},$$

secondochè il raggio OP' non penetra, oppure penetra nell'angolo positivo M_1OM_2.

Ne segue che la funzione:

$$\log \frac{j_2 - w}{j_1 - w} - i\frac{\sigma}{2}$$

è uniforme e regolare in Γ, e il coefficiente della sua parte immaginaria vale 0 in ogni punto P' situato sull'arco di circonferenza γ compreso fra M_1 e M_2, per il quale il raggio OP' non penetra nell'angolo positivo M_1OM_2, mentre vale π in ogni punto del rimanente arco (complementare) di circonferenza.

Indicando con σ_1, σ', σ_1' gli argomenti (*) dei punti j_1, j',

---

(*) Questi argomenti differiscono evidentemente, soltanto per il segno, dagli angoli che le direzioni asintotiche dei flussi G_1, G', G_1' formano colla direzione positiva dell'asse reale nel piano z.

j_1' di γ (che verificheranno le relazioni $0 < \sigma_1 < \sigma' < \sigma_1' < 2\pi$), se ne trae che la funzione

$$(11)\quad f(w) = \frac{q_1}{\pi}\left(\log\frac{j'-w}{j_1-w} - i\frac{\sigma'-\sigma_1}{2}\right) + \frac{q_2}{\pi}\left(\log\frac{j_1'-w}{j'-w} - i\frac{\sigma_1'-\sigma'}{2}\right) + \\ + \frac{q}{\pi}\left(\log\frac{1-w}{j_1'-w} - i\frac{2\pi-\sigma_1'}{2}\right)$$

è la funzione cercata, giacchè i coefficienti delle parti immaginarie dei tre termini che la compongono, valgono, per quanto ora si è detto, rispettivamente:

0	sull'arco	$j'j_1'1j_1$;	e	q_1	sull'arco	j_1j';
0	„	$j_1'1j_1j'$;	„	q_2	„	$j'j_1'$;
0	„	$1j_1j'j_1'$;	„	q	„	$j_1'1$.

5. Relazioni fra le portate e le direzioni delle vene. — È facile stabilire un'importante relazione fra le costanti:

$$q,\ q_1,\ q',\ q_1', \qquad \text{e} \qquad j_1,\ j',\ j_1'.$$

Per questo, osserviamo, in primo luogo, che la (3) può scriversi:

$$(3')\qquad \frac{df}{dw}\,\frac{dw}{dz} = w;$$

ora $\frac{dw}{dz}$ non si annulla certo entro il campo C, perchè la rappresentazione conforme fra il campo C e il cerchio Γ non ha punti singolari. Dalla (3) si deduce perciò:

$$(12)\qquad \frac{df}{dw} = 0, \qquad \text{per} \qquad z = 0.$$

Dalla (11) risulta, tenendo conto delle (9):

$$(13)\qquad \frac{df}{dw} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{q_1}{j_1-w} + \frac{q_1'}{j_1'-w} - \frac{q'}{j'-w} - \frac{q}{1-w}\right\},$$

perciò la (12) porge:

$$(14)\qquad \frac{q_1}{j_1} + \frac{q_1'}{j_1'} - \frac{q'}{j'} - q = 0;$$

questa è la formula cercata, che si scinde in due relazioni fra quantità reali.

Essa è stata stabilita, in modo del tutto diverso, dal Professore Cisotti (*M. C.*, § 9), ricorrendo ad un teorema di trasformazione di integrali, dovuto al Prof. Levi-Civita (*) e che ha già avuto parecchie applicazioni idrodinamiche.

6. Integrale generale. — Quando la variabile w descrive il cerchio Γ, la variabile z descrive, nel piano del moto, il campo C immagine di Γ; tale campo risulta quindi noto, quando si abbia la z espressa in funzione di w.

Ora, dalla (3') risulta, ricordando la (7):

$$z = \int_0^w \frac{1}{w} \frac{df}{dw} dw, \qquad (\operatorname{mod} w \leq 1), \tag{15}$$

ma osservando che si ha, qualunque sia a:

$$\frac{1}{w(a-w)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a-w} + \frac{1}{w}\right), \tag{16}$$

si ha, dalla (13):

$$\frac{1}{w}\frac{df}{dw} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{q_1}{j_1}\frac{1}{j_1 - w} + \frac{q_1'}{j_1'}\frac{1}{j_1' - w} - \frac{q'}{j'}\frac{1}{j' - w} - q\frac{1}{1-w}\right\} +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\frac{1}{w}\left\{\frac{q_1}{j_1} + \frac{q_1'}{j_1'} - \frac{q'}{j'} - q\right\},$$

e poichè l'ultimo termine è nullo, in virtù della (14), sostituendo nella (15) risulta:

$$z = \frac{1}{\pi}\left\{ q \log(1-w) + \frac{q'}{j'}\log\left(1 - \frac{w}{j'}\right) - \frac{q_1}{j_1}\log\left(1 - \frac{w}{j_1}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{q_1'}{j_1'}\log\left(1 - \frac{w}{j_1'}\right)\right\},$$

ove, per i varî logaritmi, si considera quel ramo uniforme e regolare per $\operatorname{mod} w < 1$, che si riduce a 0 per $w = 0$.

(*) Levi-Civita, *Sulla contrazione delle vene liquide* [" Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti ", tomo LXIV (a. 1905), pp. 1466-67].

La formula precedente costituisce l'integrale generale dei moti in questione. Da essa si trae, come ha osservato il Cisotti (*M. C.*, § 11), che il fenomeno di confluenza considerato è reversibile.

Se ne deducono pure facilmente (*M. C.*, § 12) le equazioni parametriche dei peli liberi delle quattro correnti G, G_1, G', G_1', nonchè l'ubicazione dello spartiacque (*M. C.*, § 13).

7. Confluenza di quante si vogliano vene. — Le considerazioni precedenti si estendono convenientemente al caso della confluenza di un numero qualsiasi di vene.

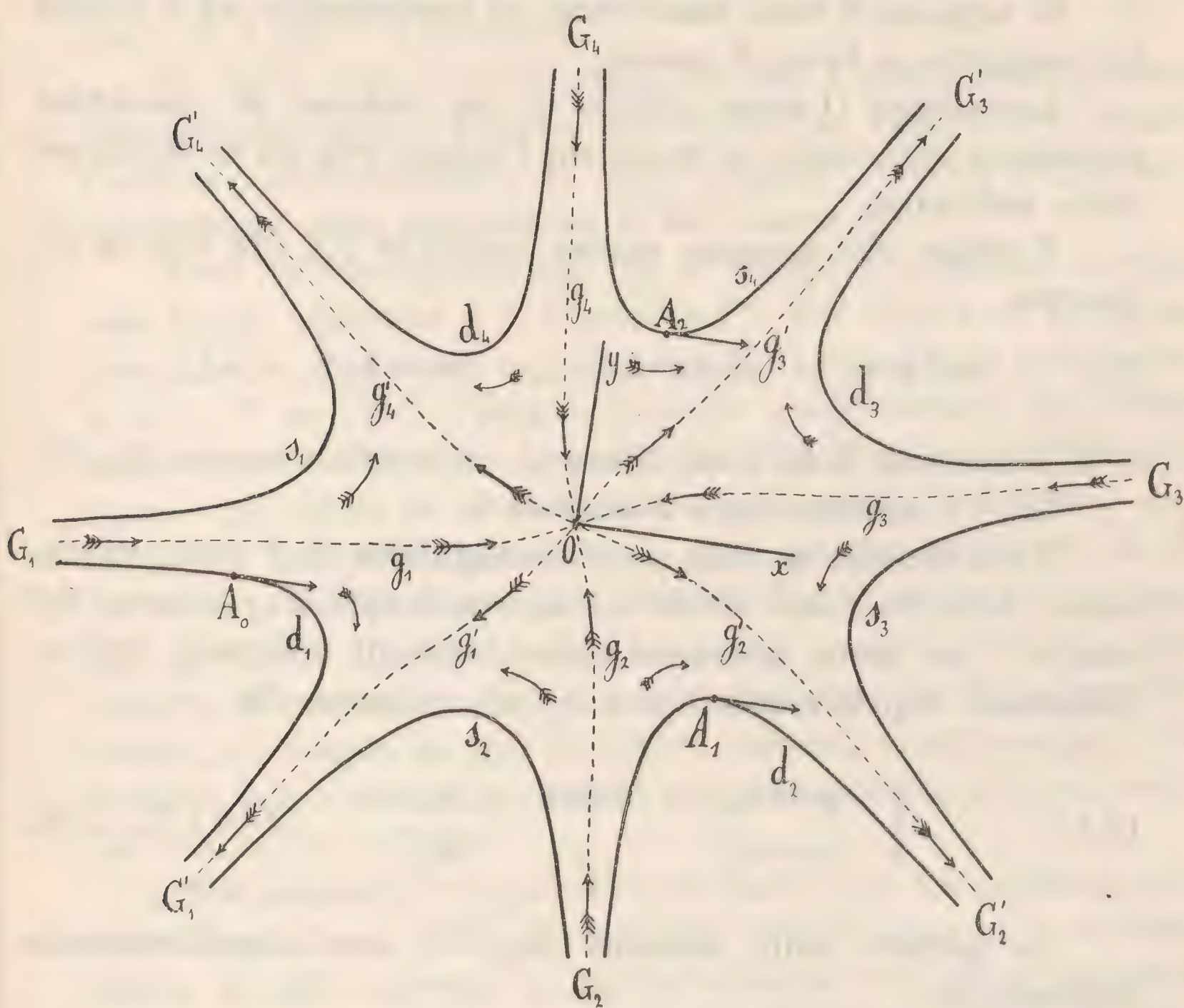



fig. 3.

Consideriamo la confluenza (in regime permanente) di n getti liquidi G_1, G_2, ..., G_n, che confluiscano tutti in una medesima località, in guisa che esista un unico punto di spartiacque O (cfr. la fig. 3, in cui $n = 4$).

L'urto delle n vene $G_1, G_2, \ldots, G_n$ dà luogo ad altrettante correnti $G_1', G_2', \ldots, G_n'$ (*M. C.*, § 18). A distanza abbastanza grande dalla località ove avviene la confluenza delle n vene G_h, in ciascuna di esse i filetti scorrono paralleli fra loro ed ai peli liberi destro e sinistro d_h e s_h; avvicinandosi alla località anzidetta l'andamento si modifica alquanto, e precisamente n filetti $g_1, g_2, \ldots, g_n$ appartenenti rispettivamente a $G_1, G_2, \ldots, G_n$ urtandosi in uno stesso punto O (spartiacque) si arrestano momentaneamente, indi proseguono generando altri n filetti $g_1', g_2', \ldots, g_n'$ direttori delle n correnti $G_1', G_2', \ldots, G_n'$; gli altri filetti liquidi vengono più o meno deviati, ma nessuno si arresta.

Si suppone il moto stazionario ed irrotazionale, ed il liquido non soggetto a forze di massa.

Assumiamo O come origine di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, in modo che l'angolo xOy sia descritto nel verso antiorario.

È chiaro che saranno ancora valide le (1), (2), (3); la (5) diventa

$$(5_1) \qquad \text{mod}\, w = 1, \quad \text{sopra } d_h \text{ e } s_h, \quad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

e la convessità delle linee libere d_h, s_h conduce ancora alla (6).

La (7) continua pure a sussistere.

Il coefficiente ψ della parte immaginaria di f deve, su ciascuna delle $2n$ linee libere s_h, d_h costituenti il contorno del campo C del moto, assumere valori costanti differenti, che indicheremo rispettivamente con c_h, c_h', in guisa che

$$(8_1) \qquad \begin{cases} \psi = c_h, & \text{sopra} \quad s_h \\ \psi = c_h', & \quad\text{„} \quad\; d_h \end{cases}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Le portate delle correnti G_h, G_h' sono rispettivamente espresse da:

$$(9_1) \qquad q_h = c_h - c_h', \qquad q_h' = c_{h+1} - c_h', \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

e se ne trae la relazione prevedibile, data la stazionarietà del fenomeno:

$$(10_1) \qquad \sum q_h = \sum q_h';$$

in queste Σ e nelle successive è sottinteso che l'indice h varia da 1 ad n.

Si conclude poi agevolmente che la $f(z) = \varphi + i\psi$ è funzione regolare dei punti z del campo C situati a distanza finita, diviene infinita all'infinito, e sul contorno la sua parte immaginaria deve soddisfare alle (8_1).

La $w(z) = u - iv$ è funzione uniforme, finita e continua nel campo C del moto, e soddisfa inoltre alle (5_1), (6), (7).

8. Piano rappresentativo del moto. — Come già abbiamo fatto nel n. 3, converrà intanto rappresentare nel piano complesso $w = u - iv$ i valori che la funzione $w(z)$ assume al variare di z entro il campo C.

Si trova così, in virtù della (6), che i punti z di C hanno per corrispondenti i punti w del cerchio di raggio 1 e centro l'origine delle coordinate, la quale origine è, per la (7), il corrispondente dello spartiacque O del campo C.

Però la corrispondenza fra il campo C e questo cerchio non è più, come nel § 3, biunivoca (*). Per vedere ciò basta osservare che, essendo V la grandezza della velocità, si può porre: $w = Ve^{-i\theta}$, ove θ è l'angolo (contato positivamente nel verso antiorario) che il vettore velocità fa colla direzione positiva dell'asse Ox; allora se si fa percorrere al punto z l'intero contorno del campo C, partendo da quel punto A_0 (fig. 3) di d_1 in cui la velocità è parallela all'asse Ox, e, seguendo le linee d_1, s_2, d_2, ... d_n, s_1, d_1, cioè lasciando sempre il campo alla sinistra di un osservatore che cammina secondo il percorso indicato, si ritorna in A_0, il vettore velocità ruota sempre nell'istesso verso (orario), e l'angolo θ va costantemente decrescendo da 0 a $-(n-1)\,2\pi$.

Precisamente, l'angolo θ varia da 0 a -2π quando z percorre il tratto di contorno compreso fra il punto A_0 e il primo punto A_1 del contorno, in cui la velocità è di nuovo eguale a quella di A_0, poi θ varia tra -2π e -4π quando z percorre

---

(*) Dalla Memoria del Cisotti risulterebbe invece (§§ 20, 21) la biunivocità di tale corrispondenza; egli però ha tratto questa inesatta deduzione dalle formule (80), che non possono sussistere.

il tratto di contorno compreso fra il punto A_1 e il secondo punto A_2 del contorno in cui la velocità è di nuovo eguale a quella di A_0, e così via; infine θ varia tra $-(n-2)2\pi$ e $-(n-1)2\pi$ quando z percorre il tratto di contorno compreso fra l'ultimo punto A_{n-2} del contorno in cui la velocità è eguale a quella di A_0, e il punto A_0 stesso.

C'è quindi corrispondenza $(1, n-1)$ fra l'intero contorno del campo C del piano z e la circonferenza $\mathrm{mod}\, w = 1$ del piano w; lo stesso avviene per le aree racchiuse tra questi contorni.

Riesce invece biunivoca, com'è facile vedere, la corrispondenza fra il campo C e il cerchio Γ luogo dei punti W definiti dalla

$$W = \sqrt[n-1]{w}\,.$$

Poichè: $w = Ve^{-i\theta}$, si ha:

$$W = \sqrt[n-1]{V}e^{i\sigma}, \qquad \text{ove} \qquad \sigma = -\frac{\theta}{n-1},$$

perciò, al variare del punto z sulle linee libere ($V=1$), il corrispondente punto W descrive la circonferenza γ di Γ.

E precisamente se si chiamano (fig. 4) j_1, j_1', j_2, j_2', ..., j_n, j_n' le affisse dei punti di γ che corrispondono rispettivamente ai punti all'infinito delle correnti G_1, G_1', G_2, G_2', ..., G_n, G_n', è chiaro che, ad es., all'arco di γ compreso fra j_h, j_h' corrisponderà, sul piano z, la linea libera d_h, e all'arco compreso fra j_h', j_{h+1} corrisponderà la linea libera s_{h+1}.

Ai filetti g_h, g'_h corrisponderanno due linee, che chiameremo ancora g_h, g'_h, che, partendo rispettivamente dai punti j_h, j'_h vanno ad incontrarsi nel centro di Γ, che corrisponde allo spartiacque O. Ai punti del piano z compresi fra d_h, g_h, g'_h corrispondono, nel piano W, i punti appartenenti al settore (curvilineo) determinato da d_h, g_h, g'_h.

Considerando allora la z come funzione dell'argomento W variabile nel cerchio Γ, la z risulta funzione uniforme e regolare di W, perciò anche la f si potrà considerare come funzione di W, finita e continua in tutto Γ e sopra γ, salvo che nei punti j_h, j_h', ove essa diviene infinita.

La parte immaginaria di questa funzione $f(W)$ dovrà soddisfare, sugli archi di γ corrispondenti ai peli liberi del campo C_γ alle condizioni (8_1).

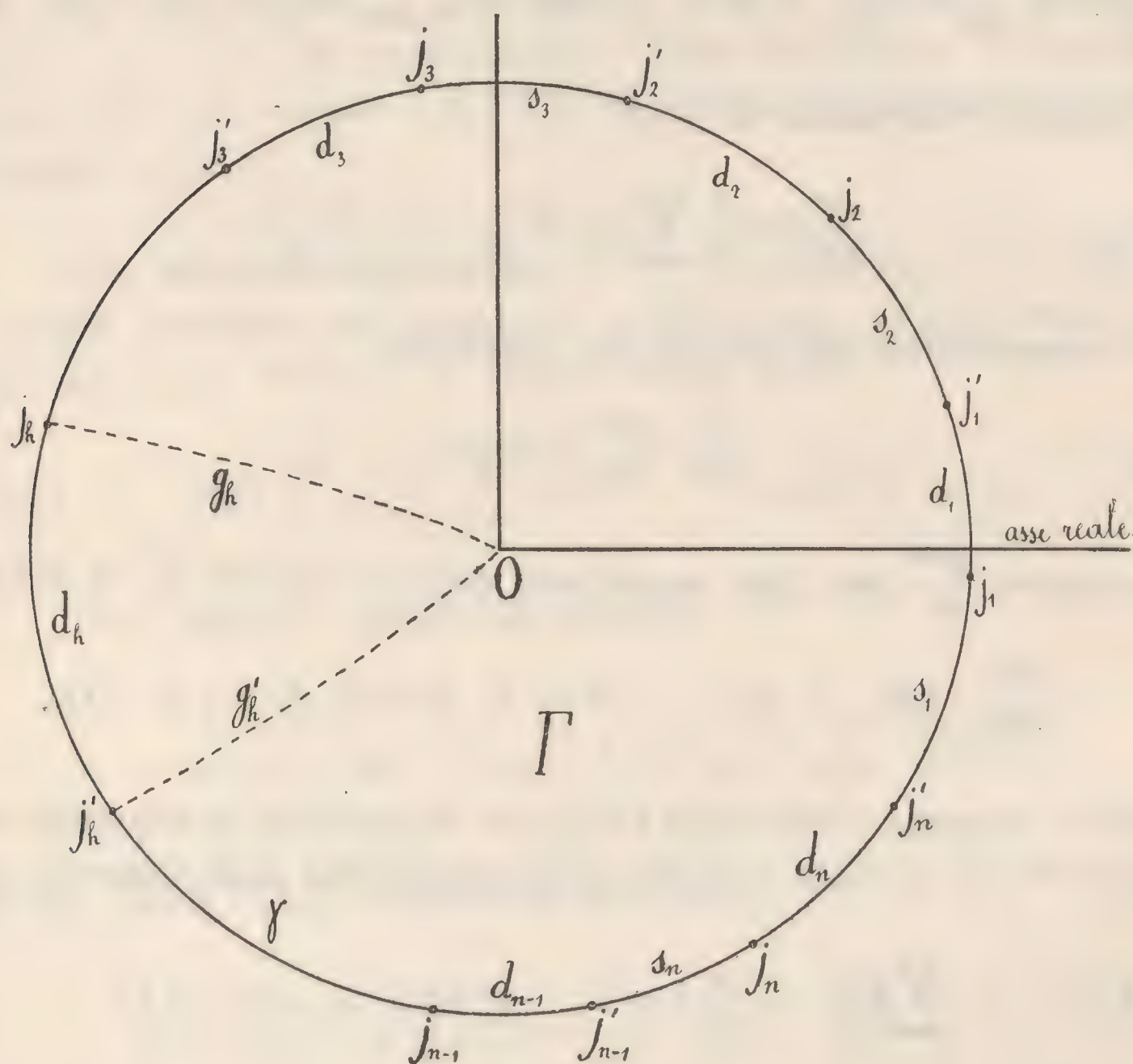



Fig. 4.

Si costruisce immediatamente, come nel n. 4, la funzione cercata $f(W)$; indicando con σ_h, σ_h' gli argomenti dei punti j_h, j_h' di γ (che verificheranno le relazioni $\sigma_1 < \sigma_1' < \sigma_2 < \sigma_2' < \ldots < \sigma_n < \sigma_n' < \sigma_1 + 2\pi$), si ha senz'altro la formula seguente, analoga alla (11):

$$(11_1)\qquad f(W) = -ic_1 + \frac{1}{\pi}\sum c_h\left(\log\frac{j_h - W}{j'_{h-1} - W} - i\,\frac{\sigma_h - \sigma'_{h-1}}{2}\right) + $$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum c_h'\left(\log\frac{j_h' - W}{j_h - W} - i\,\frac{\sigma_h' - \sigma_h}{2}\right),$$

ove si conviene che $j_0' = j_n'$, $\sigma_0' = \sigma_n'$.

9. **Relazioni fra le portate e le direzioni delle vene.** — Dalla (11_1) segue:

$$\frac{df}{dW}=\frac{1}{\pi}\sum c_h\left(\frac{1}{j'_{h-1}-W}-\frac{1}{j_h-W}\right)+\frac{1}{\pi}\sum c_h'\left(\frac{1}{j_h-W}-\frac{1}{j_h'-W}\right),$$

od anche, ricordando le (9_1):

$$(13_1)\qquad \frac{df}{dW}=\frac{1}{\pi}\sum\left(\frac{q_h'}{j_h'-W}-\frac{q_h}{j_h-W}\right).$$

Ora osserviamo che la (3) può scriversi:

$$(3_1)\qquad \frac{df}{dW}\,\frac{dW}{dz}=W^{n-1},$$

e siccome $\frac{dW}{dz}$ non può annullarsi entro il campo Γ, si trae:

$$\frac{d^rf}{dW^r}=0,\qquad \text{per}\qquad W=0,\ (r=1,2,\ldots,n-1),$$

perciò, tenendo conto della (13_1), ne deduciamo le seguenti relazioni fra le portate e le direzioni asintotiche delle vene G_h, G_h':

$$(14_1)\qquad \sum\left(\frac{q_h'}{j'^r_h}-\frac{q_h}{j_h^r}\right)=0,\quad (r=1,2,\ldots,n-1).$$

Esse si scindono nelle seguenti relazioni fra quantità reali:

$$\left\{\begin{aligned}&\sum\{q'_h\cos(r\sigma'_h)-q_h\cos(r\sigma_h)\}=0\\&\sum\{q'_h\,\text{sen}\,(r\sigma'_h)+q_h\,\text{sen}\,(r\sigma_h)\}=0,\end{aligned}\right.$$
$$(r=1,2,\ldots,n-1),$$

ricordando che $\theta=-(n-1)\sigma$, queste equazioni possono anche scriversi:

$$(14')\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum\left(q_h\cos\frac{r\theta_h}{n-1}-q'_h\cos\frac{r\theta'_h}{n-1}\right)=0\\&\sum\left(q_h\,\text{sen}\,\frac{r\theta_h}{n-1}-q'_h\,\text{sen}\,\frac{r\theta'_h}{n-1}\right)=0,\end{aligned}\right.$$
$$(r=1,2,\ldots,n-1).$$

Si hanno così $2(n-1)$ relazioni fra le portate e le direzioni asintotiche delle vene.

Il Prof. Cisotti ha invece ottenuto due sole relazioni fra le suddette costanti, e cioè quelle che si deducono dalle (14′) per $r=n-1$. In conseguenza vanno modificate le considerazioni che egli espone (*M. C.* § 25) circa la determinazione di queste costanti.

10. Integrale generale. — È ora assai facile trovare l'integrale generale del problema considerato. Infatti, ricordando che $z=0$ se $W=0$, si deduce dalla (3_1):

$$(15_1) \qquad z=\int_0^W \frac{1}{W^{n-1}}\frac{df}{dW}\,dW, \qquad (\text{mod}\, W \leq 1).$$

Ora, tenendo conto dell'identità:

$$\frac{1}{W^{n-1}(a-W)}=\frac{1}{a^{n-1}}\left(\frac{1}{a-W}+\sum_1^{n-1}{}_r \frac{a^{n-r-1}}{W^{n-r}}\right),$$

si ha, dalla (13_1), ricordando le (14_1):

$$\frac{1}{W^{n-1}}\frac{df}{dW}=\frac{1}{\pi}\sum\left(\frac{q_h'}{j_h'^{\,n-1}}\frac{1}{j_h'-W}-\frac{q_h}{j_h^{n-1}}\frac{1}{j_h-W}\right),$$

perciò sostituendo nella (15) si ha:

$$z=\frac{1}{\pi}\sum\left\{\frac{q_h}{j_h^{n-1}}\log\left(1-\frac{W}{j_h}\right)-\frac{q_h'}{j_h'^{\,n-1}}\log\left(1-\frac{W}{j_h'}\right)\right\},$$

ove, per i varî logaritmi, si considera quel ramo uniforme e regolare per mod $W<1$, che si riduce a 0 per $W=0$.

La formula precedente — che va sostituita alla (107) del Cisotti — stabilisce la voluta corrispondenza fra i piani z e W; essa costituisce pure l'integrale generale del problema della confluenza di n correnti liquide; da essa si può dedurre la reversibilità del fenomeno.

L'Accademico Segretario: CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 30 Maggio 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE G. P. CHIRONI

DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Socii: Carle, Ruffini, Brondi, Sforza, Einaudi, Schiaparelli, Patetta, Vidari, Prato e Stampini, Segretario della Classe.

È scusata l'assenza di S. E. Boselli, Presidente dell'Accademia, e dei Socii De Sanctis e D'Ercole.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 16 maggio.

Il Socio Stampini, avuta facoltà di parlare, ritiene d'interpretare il sentimento unanime della Classe proponendo un plauso al Presidente Paolo Boselli per il memorabile discorso pronunciato alla Camera dei Deputati nella storica seduta del 20 maggio. Legge perciò il seguente ordine del giorno dettato d'accordo col Direttore della Classe Chironi: " La Classe di Scienze morali, storiche e filologiche della Reale Accademia delle Scienze di Torino, per la prima volta riunita dopo il giorno 20 maggio, è lieta e orgogliosa di esprimere il più fervido compiacimento e il più vivo plauso per il memorabile discorso in cui il suo

Presidente Paolo Boselli, decano della Camera legislativa italiana, con alta e calda eloquenza seppe interpretare i sentimenti dello intero popolo Italiano, felicemente e fortemente unito nella rivendicazione così dei diritti della Nazione come di quelli della Giustizia, della Civiltà e della Umanità. In pari tempo esprime, plaudendo, il voto che l'azione dell'Italia nostra nella guerra si svolga e si chiuda vittoriosa in modo degno degli altissimi fini che l'hanno giustamente determinata e imposta al cuore ed alla volontà del Paese „. L'ordine del giorno è approvato per acclamazione.

Il Presidente presenta, a nome della famiglia di Alessandro D'Ancona, il volume *In memoriam Alessandro D'Ancona* recentemente pubblicato per cura dei figli del compianto maestro. La Classe ringrazia.

Il Socio Einaudi, anche a nome del Socio Ruffini, presenta il volume primo del *Trattato di scienza della finanza* del Prof. Vincenzo Tangorra, ordinario nella R. Università di Pisa. Il Socio Einaudi si compiace di segnalare alla Classe questo primo volume di un trattato destinato a prendere uno dei primissimi posti nella letteratura scientifica italiana finanziaria, come quello che unisce alla sistematicità della trattazione la profondità delle indagini, la compiutezza della bibliografia e la esposizione critica delle dottrine più recenti, e che è sopra tutto notevole per la fusione del punto di vista economico con quello giuridico. Sotto questo rispetto il trattato del Tangorra emerge fra tutti. L'autore ha saputo dimostrare quale ampia messe di principii e di nozioni si possono ricavare dall'innesto del diritto amministrativo su quello finanziario e dalla conoscenza degli ordinamenti finanziari per il progresso della scienza delle finanze.

Con parole di vivo elogio per l'interessante monografia, il Socio Segretario Stampini presenta la pubblicazione del Socio Giovanni Sforza, *Un viaggio attraverso i Balcani nel 1575*, nella quale, dopo una Introduzione storica ad illustrazione del curioso

documento, è stampata la " Relazione di Carlo Ranzo, gentiluomo di Vercelli, d'un viaggio fatto da Venezia in Costantinopoli, ritornato che fu dalla battaglia navale [di Lepanto], assai curioso per i molti accidenti occorsi, ove si possono imparare stratagemme di guerra, umori d'uomini e diversità di genti e di paesi „.

In fine il Socio SFORZA presenta una sua memoria manoscritta dal titolo: *Papa Rezzonico studiato ne' dispacci inediti di monsig. Filippo Maria Bonamici agente della Repubblica di Lucca presso la Corte di Roma.* Con votazione segreta e unanime, astenendosi l'autore, la Classe delibera la pubblicazione di questo lavoro nelle *Memorie* accademiche.

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di C. Frati, A. Baudi di Vesme e C. Cipolla.

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di C. Cipolla, G. De Sanctis e P. Fedele.

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. L. DISP. **15a**. **1914-1915**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1915

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 13 Giugno 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Salvadori, Naccari, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Somigliana, Fusari, Balbiano, Panetti e Segre, Segretario.

Letto e approvato il verbale della precedente adunanza, il Presidente ringrazia vivamente pel telegramma che in quella riunione gli fu inviato. Quel saluto, egli dice, era luce di pensiero patriottico, e altissimo augurio per i destini dell'Italia rivendicatrice dei diritti nazionali; e costituisce per lui una manifestazione benevola che gli è sommamente preziosa.

L'Accademia di Scienze, Lettere e Arti di Bordeaux ha inviato un telegramma di saluto e augurio. Si prega il Presidente di rispondere a nome della Classe.

Il Socio nazionale Taramelli ha inviato in omaggio una sua Nota su *La traspirazione tellurica ed i terremoti nell'Appennino centrale e meridionale.*

Il Socio Segre offre in dono, a nome dell'Autore, gli *Elementi di Astronomia* del Prof. G. Boccardi. Supplemento alla Parte I.

Vengono presentate, per essere inserite negli *Atti*, le seguenti Note:

I. Guareschi, *Ricerche sull'acqua di cristallizzazione. Composti con* 5H^2O. *Solfato di rame.* Nota III;

P. Foà, *Azione della pirodina su alcuni elementi del midollo delle ossa.* Nota II (*);

G. Peano, *Le grandezze coesistenti di Cauchy.*

Il Socio Naccari, anche a nome del Collega Grassi, legge la Relazione sulla Memoria del Prof. Campetti intitolata *Sull'equilibrio di coppie di liquidi parzialmente miscibili.* Si approvano con votazione unanime le conclusioni favorevoli alla stampa della Memoria.

Similmente viene accolto fra le *Memorie* un lavoro del Socio Mattirolo su *G. B. Romano, di Castellino-Tanaro, e la sua opera botanica (1810-1877). Note per servire alla storia dei botanici Monregalesi.*

(*) Questa Nota venne poi ritirata dall'Autore, il quale si riserva di presentarla per le *Memorie.*

LETTURE

Ricerche sull'acqua di cristallizzazione. Composti con $5H^2O$. Solfato rameico.

Nota III del Socio ICILIO GUARESCHI

Ricerche sull'acqua di cristallizzazione. Composti con $5H^2O$.

In un altro lavoro ho già fatto notare che, secondo Rosenstiehl ([1]), i sali con $5H^2O$ sarebbero solamente 8, mentre io in realtà solamente nei sali di *sei* metalli (K, Na, Ba, Cs, Rb e Li) ne ho trovati più di 34. Il Rosenstiehl inoltre afferma che degli 8 sali con $5H^2O$, solamente per 3 si conoscono dei dati precisi sulle condizioni di disidratazione, e questi tre sali sarebbero: il solfato di rame $CuSO^4.5H^2O$, l'iposolfito di stronzio $SrS^2O^3.5H^2O$ ed il tetraborato di potassio $K^2B^4O^7.5H^2O$.

Io ora non voglio occuparmi che del solfato di rame, sul quale si hanno dei dati tutt'altro che precisi ed il quale, secondo Rosenstiehl ed altri autori, perderebbe complessivamente $4H^2O$ a 100° e la quinta molecola a temperatura molto elevata (da 230°, 240°, 300° e più).

Io invece ho ottenuto dei risultati molto diversi e non privi d'interesse. Le affermazioni di Rosenstiehl e di altri autori sono molto incomplete ed anche inesatte, perchè, fra l'altro, già da tempo si conosce anche l'idrato con $3H^2O$.

Viste le grandi contraddizioni esistenti fra i vari autori intorno all'eliminazione dell'acqua dal solfato di rame, bisognava sotto ogni riguardo studiare le condizioni precise nelle quali questo sale perde le $5H^2O$ e stabilirne la vera temperatura di disidratazione.

([1]) " Bull. Soc. Chim. „, 1911 (4), t. IX, p. 288.

Solfato di rame.

Pare quasi incredibile che per un solo sale come questo, vi siano tanti dati contradditorii e così lontani dal vero. Sono così numerosi i lavori fatti sulla composizione del solfato di rame e la sua acqua di cristallizzazione che vi sarebbe da scrivere un piccolo Trattato!

Non possiamo ancora dire con sicurezza che questo sale sia da rappresentarsi con $CuSO^4.5H^2O$ oppure, come non è improbabile, con la formula doppia $Cu^2S^2O^8.10H^2O$. A me ora importa far conoscere alcune osservazioni sull'acqua di cristallizzazione, perchè, come per molti altri sali, trovansi dei dati erronei anche nei migliori Trattati ed anche perchè queste ricerche, insieme ad altre, potranno servire a discutere la questione delle mezze molecole di acqua di cristallizzazione.

Le più vecchie osservazioni risalgono a Graham ed in parte sono esatte. Egli osservò che il solfato $CuSO^4.5H^2O$ nell'aria secca nel vuoto e a 38° perde $4H^2O$ e dà il sale $CuSO^4.1H^2O$ in polvere bianco-verdognola. Il sale $CuSO^4.5H^2O$, dopo sette giorni a 19°-21° nel vuoto, perde $3H^2O$ e dà $CuSO^4.2H^2O$ (1).

Il sale $CuSO^4.5H^2O$, scaldato al punto di ebollizione dell'acqua, perde $4H^2O$ ed il resto a 221°-243°, dando il composto anidro bianco $CuSO^4$. Egli dunque ha notato che $4H^2O$ si eliminano molto più presto dell'ultima e perciò denominò il composto: $CuSO^4.5H^2O$ *solfato di rame con acqua salina* e lo rappresentò con $(CuSO^4+H^2O)+4H^2O$ (2).

Secondo Latschinoff, il sale $CuSO^4.5H^2O$ scaldato a 180° perde 4,75 mol. H^2O, cioè $4^3/_4H^2O$ ed il resto a 360° (3). Il sale con $5H^2O$ scaldato a 250° perde completamente l'acqua (4) secondo Krafft.

A 220° in aria secca, Horn e Taylor (5) osservarono che perde da 35,71 a 36,26 %.

---

(1) " Phil. Mag. „ (3), 1835, VI, p. 419.

(2) " Trans. of the Royal Soc. of Edinb. „, VIII; " Pogg. Ann. „, Bd. 38, p. 135 e A. 1836, t. XX, p. 147.

(3) " Chem. Cent. „, 1888, p. 1570.

(4) F. Kraft (1907); " Ber. „, 40, p. 4770.

(5) " Am. Ch. J. „, t. 32, p. 277.

Il sale $CuSO^4 5H^2O$ stando sull'acido solforico perde $2H^2O$ (1).

Secondo Krafft (2), il sale $5H^2O$ lasciato per 60 ore in disseccatore ad acido solforico e nel vuoto completo perde $4H^2O$ e rapidamente tutta l'acqua nel vuoto e a 250°.

Il sale $5H^2O$ scaldato per una settimana (?) a 98° perde $4H^2O$ (3).

Per protratta ebollizione della soluzione del solfato con $5H^2O$ si eliminano $4H^2O$ (C. F. Cross) (4).

Secondo Lescœur (5) esistono soltanto tre idrati: $CuSO^4 . 5H^2O$; $CuSO^4 . 3H^2O$; $CuSO^4 . 1H^2O$; egli non ha potuto ottenere nè l'idrato $CuSO^4 . 2H^2O$ di Graham, nè quello $CuSO^4 . 4H^2O$ di Thomsen. Il Lescœur afferma che lo studio del solfato di rame presenta delle difficoltà particolari. " Ce sel en effet émet avec " la plus grande difficulté l'eau qu'il renferme, même l'eau d'in- " terposition, quand il est en cristaux et même en poudre, et " la réabsorbe avec lenteur. Il se déshydrate assez irréguliè- " rement quand on le chauffe à l'étuve et forme facilement un " mélange peu homogène. Ce sont des circonstances dont on doit " tenir compte si on ne veut pas aboutir à des interprétations " erronées „ (6). In parte queste osservazioni sono giuste. Debbo dire che io, coi campioni di sale perfettamente puro, privo affatto di acido solforico libero, non ho trovato molte difficoltà. Certo si comporta diversamente secondo le variazioni, anche minime, delle condizioni in cui ci si mette per dosare l'acqua.

H. Lescœur (7) osservò poi che disseccando alla stufa ordinaria, a 100°, i solfati dei metalli pesanti, si eliminavano le $4H^2O$ e rimane il sale con H^2O; spesso rimane un poco più di acqua.

Secondo Baubigny e Péchard (8) il solfato di rame lasciato

---

(1) Latschinoff, " Chem. Cent. „, 1889, I, p. 807.

(2) " Berichte „, 1907, t. 40, p. 4770; " Ch. Cent. „, 1898, I, p. 340.

(3) Hodgkinson e Leahy " Chem. News. „, 1899, p. 198.

(4) " Chem. News. „, 1881, p. 209.

(5) " A. Ch. „, 1890 (6), t. 21, p. 544.

(6) *Recherches sur la dissociation des hydrates salins et des composés analogues*, Lille, 1888, p. 129.

(7) " A. Ch. „, 1895 (7), t. 4, p. 216.

(8) " C. R. „, 1892, t. 115, p. 171.

sull'acido solforico perde solamente 4,87 % di acqua a temperatura ordinaria. Però non indicano esattamente la temperatura. Molto probabilmente sarà 15°. La percentuale 4,87 non corrisponde nè a $^1/_2H^2O$ per la quale si calcola 3,6 % nè a $1H^2O$ per la quale si calcola 7,2 %. Gli autori sono probabilmente incorsi in qualche errore.

In una memoria di J. Isidore Pierre [1]: *Sur quelques sels doubles formés par les oxydes du groupe magnésien*, trovasi una osservazione non priva di interesse. A proposito del solfato di rame $CuSO^4.5H^2O$ egli osservò che scaldato a 114° in corrente d'aria secca perde 35,9 %, cioè *tutta* l'acqua di cristallizzazione, dopo 17 ore. Così pure il solfato di zinco, che contiene $7H^2O$, scaldato a 110° in corrente di aria secca, perderebbe tutta l'acqua.

Per prolungata ebollizione del solfato $CuSO^4.5H^2O$ con alcool assoluto non si eliminano $2H^2O$, ma bensì $4H^2O$, dando $CuSO^4.1H^2O$ [2].

L'osservazione di I. Pierre fu fatta col sale $CuSO^4.5H^2O$ cristallizzato sopra 25°. Io ho quindi voluto ripetere queste esperienze di Pierre sul solfato di rame, ma, come si vedrà, non ho mai potuto avere il sale anidro in queste condizioni, nemmeno scaldando a 125°, a 157°.

Secondo Müller-Erzbach, che ha pubblicato tre Memorie sulla dissociazione del solfato di rame [3], esisterebbero gli idrati con $1H^2O$, $2H^2O$, $3H^2O$ e $5H^2O$.

Nei Trattati poi sono riportati dei dati ancor più discordanti. A cagion d'esempio, Arm. Gautier nell'articolo: CUIVRE del *Diction. de Chim.* di Wurtz, I, p. 1020, afferma che il solfato di rame $CuSO^4.5H^2O$ " *exposé* à l'air sec vers 15°, ses " cristaux deviennent efflorescents et perdent 2 mol. d'eau. " A 100° ils ne retiennent plus qu'une mol. d'eau, qu'ils perdent " vers 230° ".

Il Mendelejeff ne' suoi preziosi *Principes de Chimie*, vol. I, pp. 170-171, scrive: " Il solfato di rame contiene 36 % d'acqua

---

(1) " A. Ch. ", 1846 (3), t. XVI, pp. 241 e 250.

(2) CROSS, " Chem. ", N. 44, p. 209.

(3) " Berichte ", t. VII, p. 1417, XIX, p. 2877 e " Pogg. Ann. " (2), XXXII, p. 313.

" e ne perde 28,8 % (cioè $4H^2O$) a 100° ed il resto, vale a dire " 7,2 %, solamente a 250° „.

Nel Richter-Klinger's, *Lehrb. d. anorg. Chem.*, 1910, 12ª ediz., p. 494, è detto: " Il solfato di rame a 100° perde $4H^2O$ e la 5ª mo- " lecola sopra 200° (e le ultime traccie sopra 400°) „. Ma sopra 400° il sale anidro perde SO^3!.

Ma tralasciando di citare dei trattati i quali riportano dei dati più o meno inesatti, vediamo le più recenti ricerche.

Secondo M.lle E. Feytis (1), il solfato di rame con $5H^2O$ si disidrata completamente quando si scalda a 250°; a 100° perde $4H^2O$ e la quinta molecola non si elimina che a temperatura più elevata. Feytis ha studiato il coefficiente di magnetizzazione molecolare del solfato di rame ed ha trovato che le $4H^2O$ eliminabili a 100° si comportano sotto il punto di vista magnetico come dell'acqua semplicemente sovrapposta alla molecola salina, mentre il magnetismo osservato pel composto $CuSO^4.1H^2O$ è eguale a quello pel sale $CuSO^4$; l'ultima molecola d'acqua *est complètement dissimulé au point de vue magnétique.*

Però, come possiamo considerare le $4H^2O$ quale acqua semplicemente sovrapposta, quando ora sappiamo che non solamente il sale anidro $CuSO^4$ all'aria ricupera tutta l'acqua, ma la ricuperano pure i sali con $1H^2O$ e con $3H^2O$?

Il Feytis, considerando che i due sali $CuSO^4.1H^2O$ e $CuSO^4$ hanno lo stesso coefficiente magnetico, crede di poter rappresentare il sale ordinario con: $(CuSO^4.H^2O) + 4H^2O$; come già del resto aveva proposto il Graham per altre ragioni.

Wirouboff (2) invece crede che le esperienze di Feytis confermino le sue idee, e che cioè nei veri sali, contrariamente all'opinione accettata, la combinazione dell'idrossido e dell'acido abbia luogo sempre per semplice addizione, *senza eliminazione di acqua*, e che i veri sali debbano per conseguenza contenere necessariamente dell'acqua di costituzione. Egli considera il cloruro di rame $CuCl^2.H^2O$ come $Cu(OH)^2.HCl$ ed il solfato $CuSO^4.H^2O$ come $Cu(OH)^2.H^2SO^4$!

(1) " C. R. „, 1911, t. 153, p. 669 e t. 156, p. 886; e " Chem. Zentr. „, 1913, I, p. 1577.

(2) " C. R. „, 1913, t. 156, p. 1072.

Ma allora come spiegare che è precisamente quest'acqua, quest'ultima molecola, la quale si elimina più difficilmente, mentre sappiamo che $Cu(OH)^2$ si disidrata facilmente?

Anche il solfato di nickel $NiSO^4.7H^2O$ contiene $1H^2O$ allo stato dissimulato. Vedremo come si comporta all'azione del calore.

I.

Solfato di rame $CuSO^4.5H^2O$.

1) *Disseccazione su cloruro di calcio.* — Il solfato di rame con $5H^2O$ stando in disseccatore con cloruro di calcio alla temperatura di 20°-21°, perde $2H^2O$. Infatti:

Gr. 1,0163 di sale purissimo, dopo otto giorni perdettero 0,1472, cioè 14,4 %, e per l'eliminazione di $2H^2O$ si calcola 14,4 %. Poi dopo anche vari giorni non perdettero più di peso.

Gr. 2,7530 dopo circa un mese perdettero 0,4007, cioè 14,57 %, mentre per $2H^2O$ si calcola 14,4 %.

Dunque in queste condizioni rimane $CuSO^4.3H^2O$.

2) *Disseccazione in termostato.* — Il solfato di rame scaldato a 40° in termostato non perde di peso (o appena qualche milligrammo); invece già a 45° perde $2H^2O$ e si nota un punto di arresto.

Gr. 1,0547 di $CuSO^4.5H^2O$ in fina polvere dopo 86 ore a 45° perdettero 0,1535, cioè:

	trovato	calcolato per — $2H^2O$
H^2O %	14,5	14,43

Gr. 1,0131 dopo sei ore a 40° non perdettero di peso; dopo 67 ore a 45° perdettero 0,1469, cioè 14,50 % corrispondente a — $2H^2O$ e a 60°, dopo 30 ore, perdettero ancora 0,1446, cioè in totale 0,2915, cioè:

	trovato	calcolato per — $4H^2O$
H^2O %	28,77	28,84

Continuando a scaldare a 70°-80°-90° e anche 99° (in istufa di vetro a vapore d'acqua) non perdettero più di peso.

Il composto $CuSO^4.1H^2O$ così ottenuto, fu scaldato a 206° in stufa a vapore di etere benzoico (V. più avanti).

Gr. 0,6202 di $CuSO^4.5H^2O$ a 50° dopo 12 ore perdettero 0,0902, pari a 14,54 $^0/_0$, e dopo 117 ore a 60° perdettero in totale 0,1776, cioè 28,68, ossia $4H^2O$.

Dunque già a 45° perde $2H^2O$, ma più presto a 50° e perde le altre due molecole solamente a 60°.

Si ripeterono queste esperienze *in termostato a 50° e 60° ed in disseccatore a cloruro di calcio*:

Gr. 0,6560 a 50° dopo 11 ore perdettero 0,0948, cioè 14,45 $^0/_0$, ossia $2H^2O$; continuando a scaldare a 60°, dopo circa tre giorni perdettero in totale 0,1874, ossia 28,56 $^0/_0$, vale a dire $4H^2O$.

Dunque anche in questo caso a 50° non si eliminano che $2H^2O$ e le altre due a 60°. A 206° il sale perde poi l'ultima molecola d'acqua.

Riassumendo, si avrebbe per la temperatura di disidratazione:

a 45° e a 50°	eliminazione di: $2H^2O$
a 60°	altre $2H^2O$
a 206°	l'ultima molecola.

3) *Riscaldamento in corrente di aria secca.* — Ho detto più sopra che, secondo I. Pierre, il solfato di rame recentemente cristallizzato a 25°, scaldato a 114° in corrente di aria secca, perde tutta l'acqua e diventa anidro. Io ho voluto vedere come realmente si comporta questo sale in corrente di aria secca ed a varie temperature. Ho esperimentato con sale puro ricristallizzato appositamente a 25°.

La mia stufa di vetro che io ho adoperato in queste ed in altre ricerche è rappresentata dalla fig. 1, pag. seg. Dalla parte *A* è congiunta con una serie di tubi disseccatori contenenti cloruro di calcio, calce sodata, acido solforico, e dall'altra parte con tubi pure disseccanti contenenti cloruro di calcio e con un aspiratore. Per temperature superiori a 120°, invece del refrigerante, si usa una stufa simile senza refrigerante, ma con un semplice tubo a bolle. È molto comoda.

Gr. 1,0276 di $CuSO^4.5H^2O$ furono scaldati a 41° (vapore di metilale) in corrente di aria secca, e dopo circa 5 ore perdettero 0,1120, cioè 10,9 $^0/_0$, e per la eliminazione di $1^1/_2H^2O$

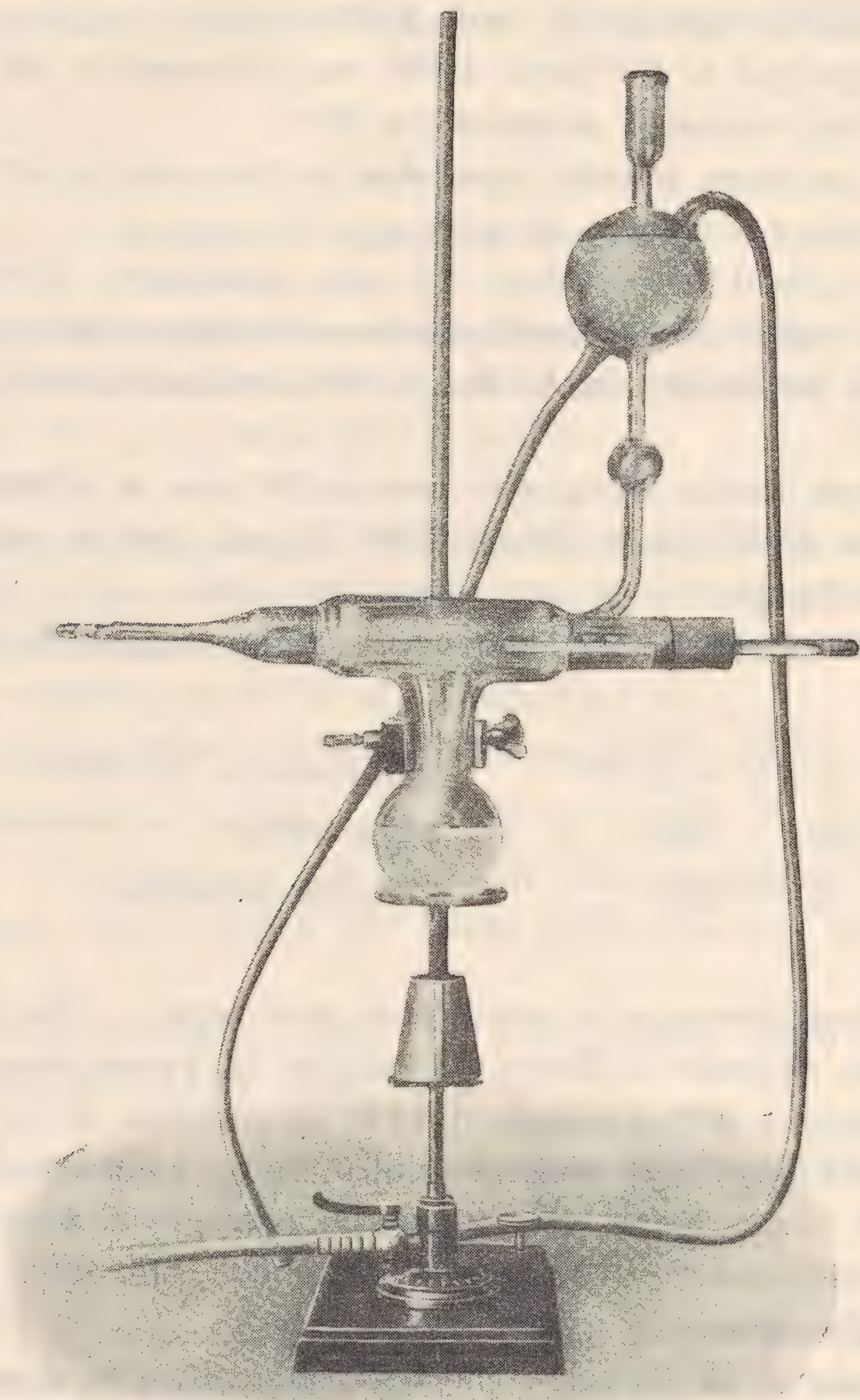



Fig. 1.

si calcola 10,8 $^0/_0$; dopo altre cinque ore non perdette più che 0,0375, cioè ancora $^1/_2H^2O$; in totale 0,1491, pari a 14,50 $^0/_0$, mentre per $2H^2O$ si calcola 14,4 $^0/_0$.

Come si vede, nelle prime 5 ore a 41°-42° perde $1^1/_2H^2O$ e nelle 5 ore successive $^1/_2H^2O$.

Il sale così ottenuto con $CuSO^4.3H^2O$, scaldato sempre in corrente d'aria secca ma a 60° (vapore di cloroformio), perdette appena 0,0013, mentre a 72° (in vapore d'etere acetico) dopo 6 a 7 ore perdette ancora 0,1413, cioè in totale 0,2914, pari a 28,38 % e per $-4H^2O$ si calcola 28,8 %. Dunque il sale $CuSO^4.3H^2O$ a 72° in corrente d'aria disseccata ha perduto $2H^2O$.

Riassumendo: il sale $CuSO^4.5H^2O$ in corrente d'aria secca e a 42° perde $2H^2O$, delle quali $1^1/_2H^2O$ in 5 ore e la seconda $^1/_2H^2O$ in altre 5 ore; proseguendo a scaldare, a 72° perde ancora $2H^2O$ e lascia l'idrato stabile $CuSO^4.1H^2O$.

Sale $CuSO^4.5H^2O$ *in corrente di aria secca e a 93°-94°* (vapore d'eptano).

Gr. 1,2052 di sale scaldati un'ora a 93°-94° in corrente d'aria perdettero 0,3444, cioè:

	trovato	calcolato per $-4H^2O$
H^2O %	28,57	28,4

Anche a 115°-116° (vapore di acido acetico) non perde più di peso.

Dunque scaldato a 93°-94° basta un'ora per eliminare $-4H^2O$.

Sale $CuSO^4.5H^2O$ *scaldato in corrente d'aria disseccata, direttamente a 116° (in vapore di acido acetico).* — Il sale adoperato era stato ricristallizzato di recente a 30°.

Gr. 0,6787 dopo due ore a 115°-116° perdettero 0,1933 e non più, cioè 28,42 % e per $-4H^2O$ si calcola 28,8. Allora si scaldò a 128° (vapori di alcool amilico) e anche a 156°-160° (vapore di cumene), sempre in aria disseccata, ma non perdette di peso. Invece dopo 9 a 10 ore a 204°-206° in stufa Bunsen ad aria perdettero ancora 0,0547, cioè in totale 0,2478, ossia 36,5, mentre per $-5H^2O$ si calcola 36,1 %.

Dunque l'osservazione di I. Pierre non è esatta.

Per maggiore sicurezza ho voluto ripetere l'esperienza.

Gr. 0,4386 di sale $CuSO^4.5H^2O$ furono direttamente scaldati a 116° (come sopra) e dopo 3 ore perdettero in totale 0,1265,

cioè 28,84 %, esattamente $4H^2O$. Anche a 156° non perdettero più di peso.

In una terza esperienza, gr. 1,1056 a 114° e in corrente d'aria secca, dopo un'ora e mezzo perdettero 0,3172, pari a 28,7 % e non più.

Resterebbe così dimostrato che l'osservazione di Isidore Pierre non è esatta. A 114° e anche a 156° in corrente d'aria secca il sale $CuSO^4.5H^2O$ *non* si disidrata completamente.

Non so trovare la causa di questa divergenza.

II.

Solfato di rame $CuSO^4.3H^2O$.

Abbiamo già visto che il solfato $CuSO^4.5H^2O$, disidratato in disseccatore con cloruro di calcio, lascia il composto $CuSO^4.3H^2O$. Ho voluto vedere in quali condizioni quest'ultimo perde la sua acqua.

In disseccatore con acido solforico, in macchina pneumatica e riscaldamento in termostato. — Gr. 0,8691 posti in disseccatore ad acido solforico, anche dopo due giorni non perdettero di peso; dopo due giorni sull'acido solforico e nel tempo stesso in macchina pneumatica alla pressione di 40 mm. non perdettero di peso. In queste condizioni dunque è stabile.

In termostato a 40° e a 50° non perdettero di peso; a 60° dopo 104 ore perdettero 0,1441 cioè 16,5 %, e per l'eliminazione di $2H^2O$ si calcola 16,8 %. A 70° e anche a 99° non perdettero più di peso e rimane $CuSO^4.1H^2O$. Dunque il composto $CuSO^4.3H^2O$ a 60° in termostato perde $2H^2O$.

Magnier de la Source (1) aveva già notato che il solfato con $3H^2O$ si ottiene da quello con $5H^2O$ lasciandolo nell'aria secca e a 25°-30°; egli osservò che questo composto con $3H^2O$ è una polvere bleuastra che rimane inalterata nel vuoto, mentre si sa che $CuSO^4.5H^2O$ nel vuoto perde $5H^2O$.

---

(1) " C. R. ", t. 83, p. 899. Si vegga anche Latschinoff, " Chem. Zent. ", 1888, p. 1570.

Magnier de la Source (1) ha fatto l'osservazione interessante seguente: mantenendo il sale con $5H^2O$ a 25°-30° nell'aria secca si ottiene $CuSO^4 . 3H^2O$, il quale posto nel vuoto non perde più acqua, mentre invece il sale con $5H^2O$ posto direttamente nel vuoto perde $4H^2O$. Il che vorrebbe dire che le $3H^2O$, rimaste sono orientate diversamente da quando erano nel sale con $5H^2O$.

Étard ha pure ottenuto il sale con $3H^2O$ ma ben cristallizzato a 108°-110° da una soluzione satura di $CuSO^4 . 5H^2O$ (2).

Io ho voluto vedere se potevo confermare l'osservazione interessante del Magnier de la Source e posso dire di averla confermata.

Gr. 0,7681 di solfato furono lasciati sull'acido solforico entro disseccatore alla temp. di 20°-24° e perdettero dopo 5 a 6 giorni 0,1140 cioè 14,84 %, mentre per la eliminazione di $2H^2O$ si calcola 14,44. Questo sale che non conteneva più che $3H^2O$ fu posto in macchina pneumatica a 10 mm. e sull'acido solforico. Non perdette in 9 a 10 giorni più di 0,0073, cioè appena 1 %.

Dunque le ultime tre molecole sono diventate più stabili ed il fatto osservato dal Magnier de la Source è confermato.

D'altra parte ho verificato ancora che il sale con $5H^2O$ posto direttamente in disseccatore ad acido solforico e nel vuoto a 10 mm. di pressione perde $4H^2O$.

Gr. 0,7109 dopo circa 15 giorni (temp. 13°-14°) perdettero 0,2050 cioè 28,83 %, mentre per $-4H^2O$ si calcola 28,84 %.

Il sale $CuSO^4 . 3H^2O$ lasciato all'aria a temperatura ordinaria ricupera abbastanza presto le due molecole d'acqua per dare $CuSO^4 . 5H^2O$, ed invero: gr. 0,6541 di sale $CuSO^4 . 3H^2O$ lasciati 10 ore all' aria ricuperarono 0,0520 cioè 7,9 % del proprio peso, e per $1H^2O$ si calcola 8,4 %, e dopo ancora 15 a 16 ore ricuperarono ancora 0,0600 cioè in totale 0,1120 ossia 17,1 % e per $2H^2O$ si calcola 16,85 %.

---

(1) Loc. cit.
(2) " C. R. ", t. 104, p. 1614.

III.

Solfato di rame $CuSO^4 . 1H^2O$.

Questo composto si ottiene facilmente, come abbiamo visto, da $CuSO^4 . 5H^2O$ e da $CuSO^4 . 3H^2O$ e si disidrata completamente a 206°, cioè a temperatura molto inferiore a quella indicata dai varî autori.

Gr. 0,8770 di $CuSO^4 . 5H^2O$ purissimo furono scaldati in termostato per 7 ore a 40° e non perdettero di peso, a 60° perdettero 0,2493 cioè 28,42 %, e per l'eliminazione di $4H^2O$ si calcola 28,84. Il composto $CuSO^4 . 1H^2O$ così ottenuto scaldato a 60°-80°-98°,5 (stufa a vapor d'acqua), a 115° e anche a 157° (stufa a vapore di cumene) non perdette più di peso. Invece dopo 1 ora e mezzo a 206°-207° (stufa a vapore di etere benzoico) perdettero ancora 0,0346 cioè in totale 0,2863 ossia 32,6 % e per — $4\frac{1}{2}H^2O$ si calcola 32,4 %. Dopo ancora 8 ore e mezzo a 207° perdettero 0,0255 cioè in totale 35,66 %, e per — $5H^2O$ si calcola 36 %.

Come si scorge, l'ultima molecola che si elimina a 206°-207°, si elimina in tempi molto diversi. Perciò ho voluto fare altre esperienze in proposito anche direttamente sul sale $CuSO^4 . 1H^2O$. L'osservazione non è priva di interesse, come si vedrà.

Gr. 0,3762 di $CuSO^4 . 1H^2O$ furono scaldati in istufa metallica a vapore di etere benzoico, alla temperatura costante di 206°-207° (pressione circa 740 mm.) [1]; dopo quattro ore e un quarto (tre pesate, le due prime ogni ora e mezzo) perdettero gr. 0,0192, dunque:

	trovata	calcolata per — $\frac{1}{2}H^2O$
H^2O % perduta	5,1	5,07.

---

[1] La stufa da me fatta costruire in rame consta di due parti che si possano avvitare insieme. La forma è la stessa della mia stufa di vetro già descritta da alcuni anni. La temperatura si regola benissimo. L'apparecchietto è rappresentato dalla fig. 2, pag. seg.

Dopo seguitai a fare le pesate di tre in tre ore circa e dopo 22 ore circa si arrivò alla perdita costante di 0,0189 e quindi:

	trovata	eliminata la 2ª $^{1}/_{2}$ H^2O
H^2O %	5,2	5,3

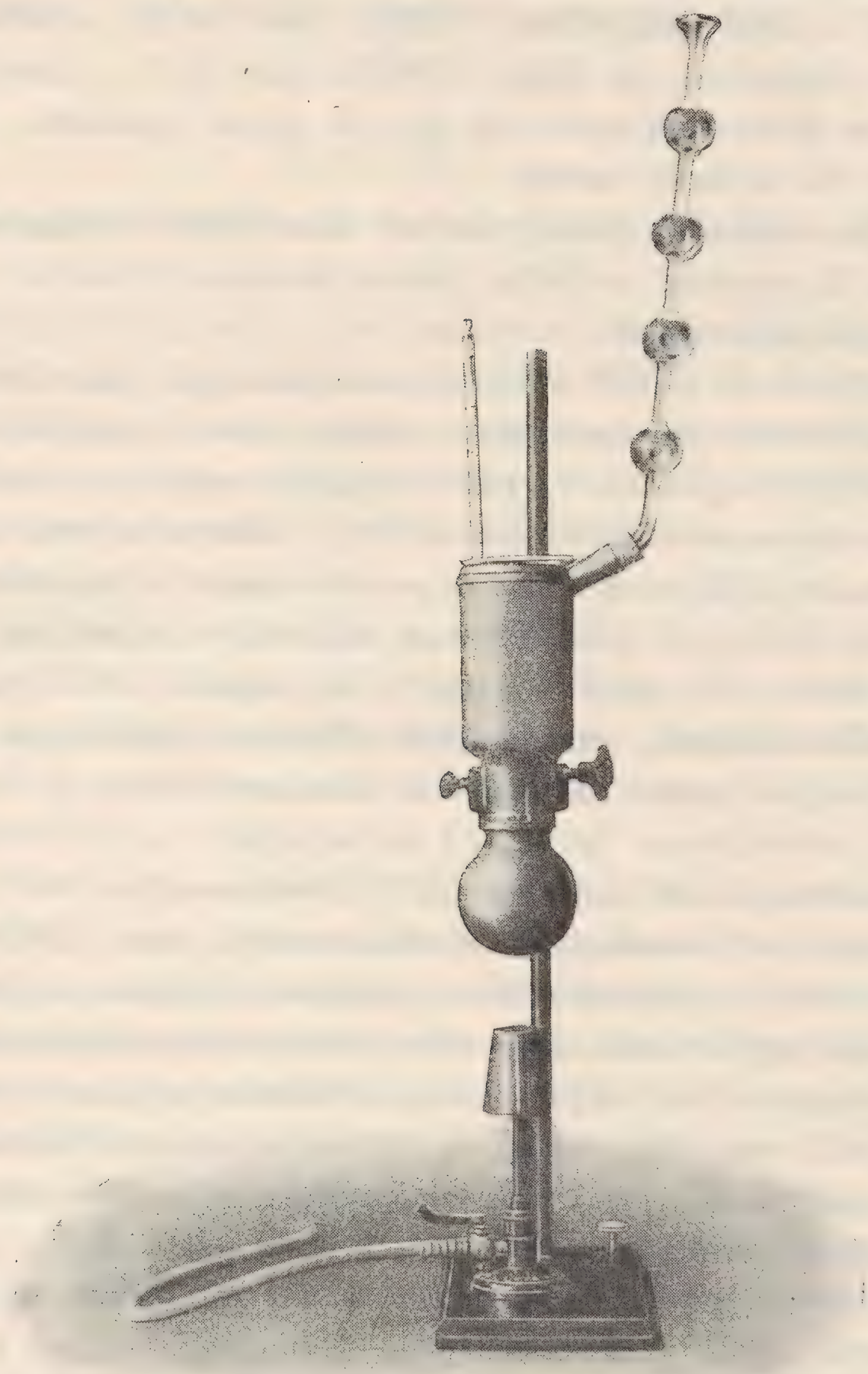



Fig. 2.

Cioè in totale 10,37, mentre si calcola 10,15 %.

Gr. 0,4696 di solfato $CuSO^4 . 1H^2O$ ottenuto a 50°-60° in termostato e su cloruro di calcio, dopo 5 ore a 206° perdet-

tero 0,0244 cioè 5,18 $^0/_0$, e per $^1/_2H^2O$ si calcola 5,07; il sale è totalmente bianco e dopo ancora 20 ore a 206° perdettero 0,0223 cioè in totale 0,0467 pari a 9,95 $^0/_0$, e per $1H^2O$ si calcola 10,15 $^0/_0$.

Gr. 0,4422 di un altro campione del sale $CuSO^4.1H^2O$, ottenuto da riscaldamento di $CuSO^4.5H^2O$ in termostato a 60°, dopo 2^h,50 a 206° perdettero 0,0284, cioè 6,4 $^0/_0$, e solo dopo molte ore perdettero in totale 0,0436, cioè 9,8 $^0/_0$. Anche qui si nota una differenza notevole fra la prima cosidetta mezza molecola e la seconda mezza.

Dunque anche in questi casi vi è un notevole distacco fra la *prima* e la *seconda* cosidetta mezza molecola d'acqua.

Ripetei l'esperienza:

Gr. 0,7218 di $CuSO^4.1H^2O$, proveniente dal sale con $5H^2O$ scaldato a 50°-60° in termostato, dopo 2 ore e mezzo a 206° perdettero 0,0369 cioè 5,1 $^0/_0$ pari a $^1/_2H^2O$, e dopo ancora 32 ore perdettero di nuovo 0,0355 cioè 4,9 $^0/_0$. Dunque si nota sempre questa grande differenza nel tempo che dura l'eliminazione.

È vero che fra la prima mezza molecola e la seconda mezza molecola non vi è un vero punto di arresto; vi è però un enorme rallentamento, una grande differenza nel tempo in cui le cosidette due mezze molecole si eliminano.

Riscaldamento del sale con $5H^2O$ *direttamente a 206°*. — Ho voluto vedere se scaldando direttamente il sale $CuSO^4.5H^2O$ a 206° (stufa a vapore di etere benzoico), l'ultima molecola si elimina più rapidamente, se avviene cioè un disorientamento fra le cinque molecole di acqua che si eliminano, oppure se ancora rimane il sale con $1H^2O$ che poi si elimina lentamente lentamente.

Gr. 0,5466 di $CuSO^4.5H^2O$ furono scaldati direttamente a 206° per 45 minuti; perdettero 0,1579 cioè 28,9 $^0/_0$, ossia poco più di $4H^2O$; dopo ancora circa 1 ora 0,0065 (30,0 $^0/_0$), dopo ancora 1 ora 0,0057 (31,1 $^0/_0$), e dopo ancora 1 ora 32,1 $^0/_0$, e per $4^1/_2H^2O$ si calcola 32,4 $^0/_0$. Dopo ancora 22 ore di riscaldamento il sale perdette in totale 0,1959 cioè 35,84 $^0/_0$ e per $5H^2O$ si calcola 36,05 $^0/_0$.

Ho ripetuto l'esperienza:

Gr. 0,4424 di sale con $5H^2O$ dopo non più di mezz'ora di riscaldamento rapido e crescente sino a 206° perdettero 28,88 $^0/_0$

cioè $4H^2O$, e dopo 2 ore a 206° perdettero 32,64 % cioè — $4^1/_2 H^2O$ (calc. 32,4 %), e dopo ancora 12 ore arrivò a 35,5 %. Non continuai a scaldare perchè la perdita era sempre lentissima.

Dunque durante il rapido riscaldamento a 206° non vi è dislocamento della quinta molecola d'acqua.

Anche in queste condizioni vi è un distacco notevolissimo fra la prima mezza e la seconda mezza molecola.

IV.

Sale anidro $CuSO^4$ che ha ricuperato l'acqua all'aria.

Già Ch. F. Cross (¹) aveva osservato che il sale anidro $CuSO^4$ stando all'aria, dopo 210 ore ricupera 36,10 % di acqua e per $CuSO^4 . 5H^2O$ si calcola 36,05. Io ho voluto ripetere questa esperienza con un altro scopo, per vedere cioè se il sale $CuSO^4 . 5H^2O$ che ha ricuperato tutta l'acqua stando all'aria, contiene ancora $1H^2O$ combinata stabilmente, e se è proprio la prima che si assorbe stabilmente come era prevedibile.

Gr. 0,3382 di sale $CuSO^4$ (proveniente dal riscaldamento a 206° di 0,3762 di $CuSO^4 . 1H^2O$) furono lasciati all'aria alla temp. 24° e pressione di circa 740 a 745 mm.; dopo 6 ore assorbirono 8,1 %, e dopo circa 11 giorni assorbirono in totale 0,1816 cioè 53,5 % ossia 34,9 %, invece di 56,5 % ossia 36,05 % quale sarebbe se avesse assorbito tutte le $5H^2O$.

Dunque in questo caso non ha riassorbito tutta l'acqua.

Gr. 0,5192 cioè tutto il sale che aveva ricuperato $4^3/_4 H^2O$ scaldato circa 2 ore a 99° perdette 28,5 % d'acqua cioè $4H^2O$, ma poi a 206° perdette ancora nelle prime 6 ore 7,7 %, e poi dopo ancora 12 ore perdette sino 9,5 % cioè $1H^2O$ circa. Dunque anche in questo caso vi è $1H^2O$ combinata stabilmente.

Ma ho voluto fare un'altra esperienza per maggiore sicurezza.

Gr. 0,3507 di sale anidro $CuSO^4$ a 206° furono lasciati all'aria a 15°-17° (pressione 740 mm. a 745 mm.), rimescolando la polvere di tempo in tempo, e dopo circa 10 ore riassorbi-

(¹) " I. Chem. Soc. ", 1879, t. 35, p. 799.

rono gr. 0,0410 d'acqua cioè 11,4, e pel ricupero di $1H^2O$ l'aumento di peso avrebbe dovuto essere di 11,25 %. Allora questo sale fu scaldato per 2 ore in stufa a vapor d'acqua (99°) e non perdette affatto di peso. Dunque la molecola prima assorbita è quella che rimane stabile.

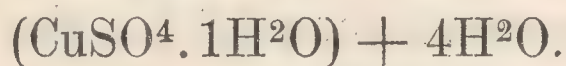
Continuando a lasciare all'aria questo sale, dopo 13 ore riassorbì una seconda molecola d'acqua cioè 22,67 % invece di 22,5 %. Dopo altre 17 ore riassorbì 35,9 % e per $3H^2O$ si calcola 33,9 %.

Dopo circa altre 13 ore riassorbe la terza e dopo ancora 13 ore la quarta molecola, infine dopo circa 24 ore riassorbì l'ultima cioè la quinta. In totale riassorbì 0,1962 cioè 56 %, mentre per $5H^2O$ riassorbite si calcola 56,35 %. Il colore del sale così ottenuto non è più di un bell'azzurro, ma un azzurro più chiaro.

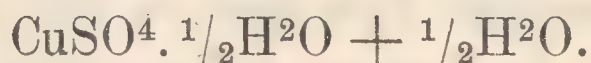
V.

In quale stato è combinata l'acqua di cristallizzazione?

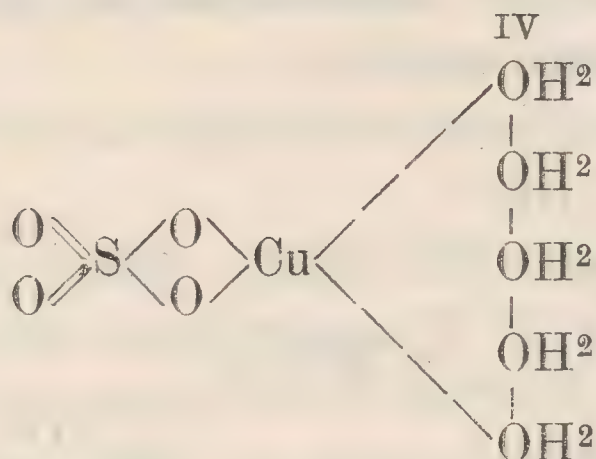
Molto si è discusso intorno al modo col quale l'acqua sta unita ai sali o in genere ai diversi composti chimici. Mi guarderò bene dal riferire tutte le opinioni in proposito. Per ora io mi riferisco solamente al solfato di rame.

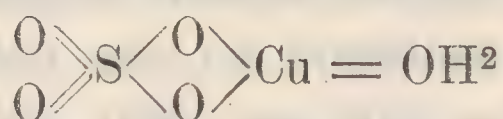
In un altro lavoro tratterò della questione delle mezze molecole d'acqua nell'acqua di cristallizzazione. Ammessa la formola semplice $CuSO^4 . 5H^2O$, tutto porta a distinguere le molecole d'acqua in due parti, come già fece il Graham nel 1835, cioè:

$$(CuSO^4 . 1H^2O) + 4H^2O.$$

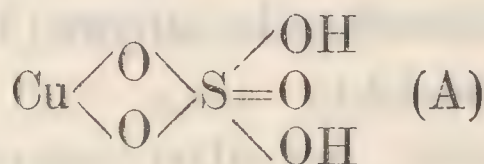
Come spiegare l'eliminazione dal sale $CuSO^4 . 1H^2O$ di due mezze molecole d'acqua in tempi tanto diversi? Bisognerebbe ammettere:

$$CuSO^4 . {}^1/_2H^2O + {}^1/_2H^2O.$$

In una Nota intorno all'acqua di cristallizzazione, Wurtz ammetteva possibile la combinazione dell'acqua al metallo me-

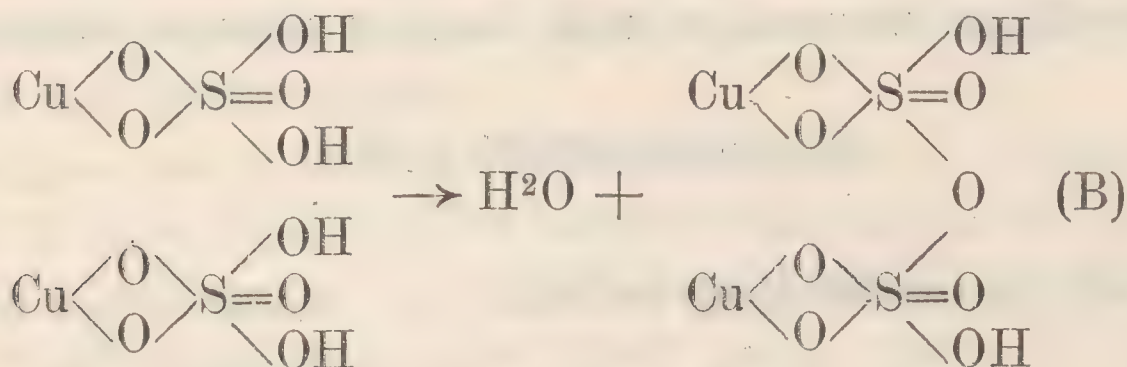
diante l'ossigeno tetravalente, come ad esempio nel solfato di rame [1]:

$$\begin{array}{c} \overset{IV}{OH^2} \\ | \\ OH^2 \\ | \\ {\scriptstyle O}\!\!>\!S\!<\!\!{\scriptstyle O}\!\!>\!Cu\!< \quad OH^2 \\ | \\ OH^2 \\ | \\ OH^2 \end{array}$$

Questa idea spiegherebbe sino ad un certo punto il fatto che 4 molecole d'acqua si eliminano presto e l'ultima a temperatura di 205°-206°:

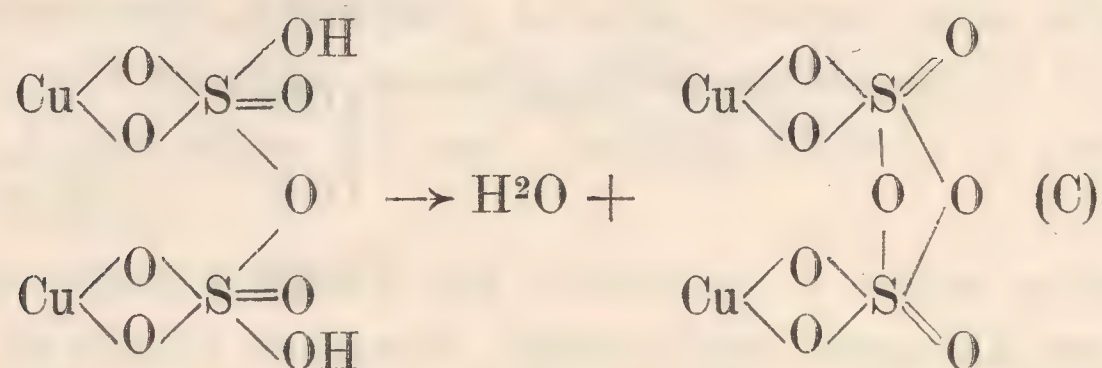
$$O_2\!>\!S\!<\!\!{}^{O}_{O}\!\!>\!Cu = OH^2$$

Ma questa formola non spiega la grande stabilità di $CuSO^4.1H^2O$, nè la eliminazione di $^1/_2H^2O$. A mio parere è meglio invece ammettere che $CuSO^4.1H^2O$ sia:

$$Cu\!<\!\!{}^{O}_{O}\!\!>\!S\!\begin{array}{l} /OH \\ =O \\ \backslash OH \end{array} \quad (A)$$

Allora si potrebbe avere la spiegazione come nel primo periodo da due molecole di questo composto si elimini una molecola intera d'acqua:

$$\begin{array}{l} Cu\!<\!\!{}^{O}_{O}\!\!>\!S\!\begin{array}{l} /OH \\ =O \\ \backslash OH \end{array} \\ Cu\!<\!\!{}^{O}_{O}\!\!>\!S\!\begin{array}{l} /OH \\ =O \\ \backslash OH \end{array} \end{array} \rightarrow H^2O + \begin{array}{l} Cu\!<\!\!{}^{O}_{O}\!\!>\!S\!\begin{array}{l} /OH \\ =O \\ \backslash \end{array} \\ \qquad\quad O \\ Cu\!<\!\!{}^{O}_{O}\!\!>\!S\!\begin{array}{l} / \\ =O \\ \backslash OH \end{array} \end{array} \quad (B)$$

---

[1] Ad. Wurtz, *La théorie atomique*, 1879, p. 243.

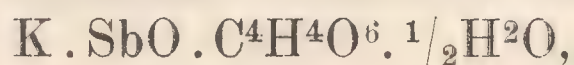
Si avrebbe cioè un prodotto (B) intermedio a peso molecolare doppio; vale a dire la formazione di una prima anidride condensata; e da questa ne deriverebbe poi per lenta eliminazione dell'acqua il composto anidro:

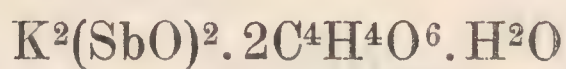
```
               OH                          O
    /O\      /               /O\      //
 Cu<   >S=O               Cu<   >S
    \O/     \                \O/  |  \
             O   —> H2O +         O   O   (C)
            /                     |  /
    /O\    /                 /O\  | /
 Cu<   >S=O               Cu<   >S
    \O/    \OH               \O/   \\O
```

Il solfato di rame anidro sarebbe dunque bimolecolare. Quest'ultima molecola d'acqua che va via molto lentamente corrisponderebbe alla cosidetta seconda mezza molecola.

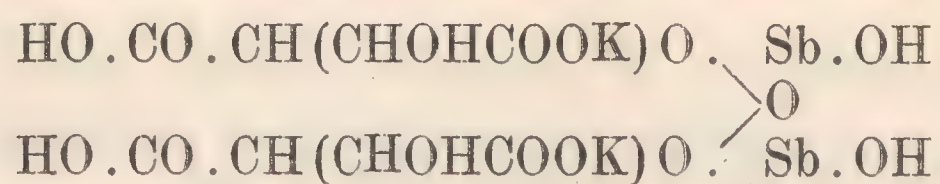
Forse la prima molecola va via bene anche a 200° e la seconda rapidamente a 220°, ma non ho fatto esperienze in proposito.

Che il solfato di rame anidro sia bimolecolare si potrebbe indurre anche dalle esperienze sul ricupero dell'acqua stando all'aria (V. pag. 15). Colla formola (C) si spiegherebbe bene come riassorbendo all'aria $1H^2O$ dia il sale stabile $Cu^2S^2O^8.1H^2O$ ossia (B), e questo riassorbendo ancora $1H^2O$ dia il sale pure stabile, $CuSO^4.H^2O$ cioè (A).

Del resto ora anche per altri composti, nei quali si ammetteva l'esistenza di una mezza molecola d'acqua, quale ad esempio il tartaro emetico:

$$K.SbO.C^4H^4O^6.{}^1/_2H^2O,$$

si è costretti ad ammettere una formola almeno doppia

$$K^2(SbO)^2.2C^4H^4O^6.H^2O$$

e quindi (F. E. Hale) si avrebbe:

```
HO.CO.CH(CHOHCOOK)O.\ Sb.OH
                     >O
HO.CO.CH(CHOHCOOK)O./ Sb.OH
```

Conclusioni.

Dalle osservazioni ed esperienze fatte posso concludere come segue:

1° Il solfato di rame $CuSO^4.5H^2O$ in disseccatore a cloruro di calcio, ed alla temperatura di 21°-23°, perde solamente $2H^2O$ e fornisce il composto $CuSO^4.3H^2O$ di color celeste chiaro.

2° Il sale con $3H^2O$ in termostato a 60° perde $2H^2O$ e lascia il composto $CuSO^4.1H^2O$.

3° Il sale $CuSO^4.3H^2O$ lasciato all'aria ricupera tutta l'acqua dando $CuSO^4.5H^2O$.

4° Il sale $CuSO^4.5H^2O$ scaldato in termostato a 40° non perde di peso ma bensì a 45° e 50° perde $2H^2O$; a 60° perde ancora $2H^2O$ e l'ultima mol. a 206°.

5° Il sale $CuSO^4.5H^2O$ scaldato a 41°-42° (stufa a vapore di metilale) in corrente di aria secca perde $2H^2O$, ma $1^1/_2H^2O$ in 5 ore e la quarta mezza molecola, $^1/_2H^2O$ pure in 5 ore. Continuando a scaldare a 50°-60° non perde di peso, ma a 72° perde ancora $2H^2O$ e rimane $CuSO^4.1H^2O$.

Ammettendo la formola doppia $Cu^2S^2O^8.10H^2O$ si potrebbe dire che a 42° perde $4H^2O$, delle quali $3H^2O$ in 5 ore e la quarta pure in 5 ore; poi a 72° perde ancora $4H^2O$ e lascia il composto stabile $Cu^2S^2O^8.2H^2O$.

6° Scaldando direttamente $CuSO^4.5H^2O$ a 93°-94° in corrente d'aria secca, in 1 ora perde $4H^2O$ ed il $CuSO^4.1H^2O$ scaldato pure in corrente d'aria secca, a 114°-116° non perde di peso. Il sale $CuSO^4.5H^2O$ in corrente d'aria secca scaldato direttamente (stufa a vapore d'acido acetico) a 116° perde $4H^2O$, poi a 128° (vapore d'alcol amilico) e a 155°-160° (vapore di cumene) non perde nulla.

Dunque non è esatta l'affermazione di J. I. Pierre secondo il quale il sale $CuSO^4.5H^2O$ cristallizzato sopra 25°, scaldato in corrente d'aria secca e a 114°, si disidrata completamente.

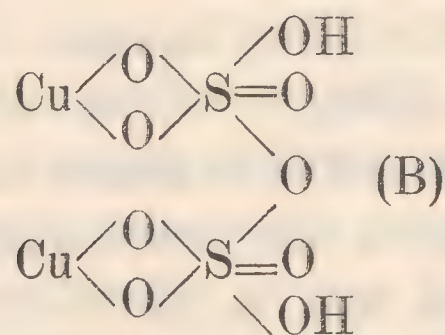
7° Il composto $CuSO^4.1H^2O$ perde tutta la sua acqua a 206°-207°; ma molto più presto la prima mezza molecola; la seconda con estrema lentezza. Anche il sale con $5H^2O$ scaldato direttamente non perde insieme le cinque molecole d'acqua, ma

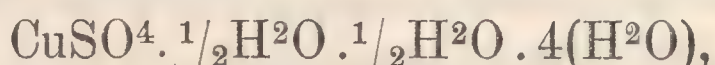
bensì, in meno di mezz'ora, le prime quattro, poi lentissimamente come al solito l'ultima molecola.

La *temperatura di disidratazione* completa è 206°.

8° Il sale anidro $CuSO^4$ lasciato all'aria a temperatura ordinaria (15°-17°) riassorbe la prima molecola, che è appunto la più stabile, in circa 10 ore, e non la perde più a 99°; in seguito ricupera tutta l'acqua.

9° Si può ammettere che il sale monoidrato $CuSO^4 . 1H^2O$ sia invece $Cu^2S^2O^8 . 2H^2O$ e che $CuSO^4 . {}^1/_2H^2O$ sia $Cu^2S^2O^8 . 1H^2O$, e allora probabilmente:

```
          /O\     /OH
       Cu<   >S=O
          \O/   \
                 O    (B)
          /O\   /
       Cu<   >S=O
          \O/   \OH
```

Dunque a seconda delle condizioni in cui è posto il sale $CuSO^4 . 5H^2O$ può perdere $4H^2O$ e poi ancora ${}^1/_2H^2O$ ed infine l'ultima ${}^1/_2H^2O$, e quindi si avrebbe:

$$CuSO^4 . {}^1/_2H^2O . {}^1/_2H^2O . 4(H^2O),$$

oppure può perdere prima $2H^2O$ e dare il sale $CuSO^4 . 3H^2O$, e questo perdere ancora $2{}^1/_2H^2O$ ed infine l'ultima ${}^1/_2H^2O$; oppure può perdere prima $2H^2O$ e $2H^2O$ e lasciare $CuSO^4 . 1H^2O$, che poi perde successivamente in ${}^1/_2H^2O$, ${}^1/_2H^2O$.

Non si riesce ad eliminare una sola prima molecola ed ottenere $CuSO^4 . 4H^2O$.

Con questi dati di fatto quale conclusione sicura si può trarre relativamente allo stato dell'acqua in questo sale? Nessuna.

10° Colla formola raddoppiata $Cu^2S^2O^8 . 10H^2O$ si eviterebbero tutte le questioni relative alle mezze molecole d'acqua e quindi con $Cu^2S^2O^8 . 2H^2O$ si spiegherebbe bene come in circa 2 a 3 ore si elimini H^2O e nelle 20 a 22 ore successive si elimini la seconda molecola. Il composto più stabile sarebbe $Cu^2S^2O^8 . 1H^2O$, cioè (B).

È tanto netta e spiccata la differenza nel modo di eliminarsi queste ultime parti dell'acqua nel solfato di rame che riesce difficile il pensare a delle mezze molecole d'acqua.

Purtroppo manchiamo ancora di metodi per determinare il peso molecolare dei sali metallici non volatili.

In molti casi l'inconveniente delle mezze molecole d'acqua di cristallizzazione è stato eliminato quando si modificarono i pesi atomici e si unificarono come sono attualmente. Il Wurtz nel suo bel discorso: *Sur l'oxyde d'éthylène, considéré comme un lien entre la chimie organique et la chimie minérale* (1), fece giustamente osservare che un gran numero di sali contenevano una quantità d'acqua di cristallizzazione tale che si era obbligati, adottando la notazione di Gerhardt, di rappresentarli con un numero frazionario di molecole ($H^2O = 18$). Se si raddoppiano i pesi atomici di un certo numero di metalli, questo inconveniente scompare per alcuni composti. Ed egli citava i casi seguenti:

Notazione di Gerhardt	Nuova Notazione
$NiCl + 4\,{}^1/_2 H^2O$	$NiCl^2 + 9H^2O$
$CuNO^3 + 1\,{}^1/_2 H^2O$	$Cu(NO^3)^2 + 3H^2O$
$PbC^2H^3O^2 + 1\,{}^1/_2 H^2O$	$Pb(C^2H^3O^2)^2 + 3H^2O$
$PbClO^3 + 1\,{}^1/_2 H^2O$ (Roscoe)	$Pb(ClO^3)^2 + 3H^2O$

Verso il 1860 per molte altre ragioni si raddoppiarono i pesi atomici dei metalli bivalenti, e così per alcuni sali scomparve l'inconveniente delle mezze molecole d'acqua di cristallizzazione. Ne rimangono ancora molti dei sali e dei composti organici con mezze molecole d'acqua di cristallizzazione. Ma in successivi lavori tornerò su questa questione.

Torino, R. Università. Maggio 1915.

---

(1) *Leçon faite devant la Soc. Chim. de Londres le 5 juin 1862*, in " A. Ch. ", 1863 (3), t. 69, p. 362.

Le grandezze coesistenti di Cauchy.

Nota del Socio G. PEANO.

Cauchy, nello scritto:

Mémoire sur le rapport différentiel de deux grandeurs qui varient simultanément, " Exercices d'Analyse et de Physique mathématique „, tome 2, Paris, 1841, pag. 188-229,

chiama grandezze coesistenti le funzioni di un campo, che ora si dicono *distributive*.

§ 1.

Una funzione, o operazione, f, dicesi *distributiva*, quando, comunque si prendano due valori della variabile x e y, si ha

$$f(x+y) = fx + fy.$$

Tanto il campo dei valori della variabile quanto quello dei valori della funzione debbono essere delle classi di enti su cui sia definita la somma.

L'espressione " funzione distributiva „ fu introdotta da Servois, " Annales de Mathématiques „, tome V, anno 1815, pag. 98. Però il suo uso generale è abbastanza recente. Vedasi pag. 21 del mio libro:

Formulario Mathematico, edizione V, Torino, Fratelli Bocca, 1908.

Ovvero si può consultare l'apposito libro:

Pincherle e Amaldi, *Le operazioni distributive*, Bologna, Zanichelli, 1901.

Se la variabile della funzione distributiva assume soli valori razionali, allora questa funzione è la proporzionalità, o

moltiplicazione per un fattore costante. La dimostrazione, affatto elementare, trovasi, per esempio, nel citato libro del Pincherle, pag. 25 e 467; oppure nel *Formulario*, pag. 117, prop. 13·1, ove essa si fa rimontare ad Eulero, con altre consimili.

Se la variabile assume tutti i valori reali, razionali e irrazionali, cioè se f è funzione reale di variabile reale, ed è distributiva, per dedurre che essa è la proporzionalità, Cauchy nel 1821 ne presuppose la continuità. Darboux nel 1880 suppose solo che esista un intervallo nel quale il limite superiore dei valori della funzione sia finito. Vedasi *Formulario*, pag. 118.

Recentemente alcuni autori enunciarono la proposizione senza condizioni restrittive, ma le dimostrazioni risultarono illusorie.

È facile il costrurre una funzione che in un campo di valori reali sia distributiva, e non sia la proporzionalità. Diamo alla variabile i soli valori della forma $y+z\sqrt{2}$, ove y e z sono numeri razionali, e $\sqrt{2}$ sta per indicare un numero irrazionale qualunque. Questa espressione fu chiamata da Euclide *binomio*, *ἐκ δύο ὀνομάτων*, nel libro X, prop. 36. Da $y+z\sqrt{2}=y'+z'\sqrt{2}$ risulta $y=y'$ e $z=z'$. Allora se si pone

$$f(y+z\sqrt{2})=\mathrm{A}y+\mathrm{B}z\sqrt{2}$$

ove A e B sono due costanti, sarà effettivamente la f una funzione distributiva, qualunque siano le costanti A e B; e sarà la proporzionalità nel solo caso di $\mathrm{A}=\mathrm{B}$. Ma finora non si sa esprimere una funzione definita per tutti i valori reali della variabile, che sia distributiva, e che non sia la proporzionalità.

§ 2.

Se la variabile della funzione distributiva è un numero complesso d'ordine finito n, la funzione, che può alla sua volta essere un numero complesso, dicesi *lineare*, perchè le sue coordinate sono funzioni lineari e omogenee delle coordinate della variabile. Vedasi la bibliografia nel *Formulario*, pag. 148.

Se tanto la variabile quanto la funzione sono numeri complessi dello stesso ordine n, allora la funzione lineare dicesi

sostituzione nello spazio ad n dimensioni; in ricerche geometriche dicesi più spesso *omografia*. Qui le parole *sostituzione* e *omografia* hanno un significato simile, ma diverso da quello che hanno in altre teorie.

Una splendida teoria di queste omografie, e delle loro applicazioni alla geometria infinitesimale, alla meccanica e alla fisica matematica, si trova nella collezione di opere " Analyse vectorielle générale „ per cura dei Prof. Burali-Forti, Marcolongo, Boggio, ecc. (Pavia, Mattei, 1912-1915).

§ 3.

La variabile della funzione distributiva può essere ad infinite dimensioni, cioè essere una serie di quantità, in simboli qFN_0, ovvero può essere una funzione di variabile reale, una qFq. Così i simboli di differenza finita Δ, e di derivata D, sono operazioni distributive delle funzioni, poichè

$$\mathrm{D}\,(f+g) = \mathrm{D}f + \mathrm{D}g.$$

Anche $\int (gx)\,(fx)\,dx$, esteso ad un intervallo dato, ove g è funzione data, ed f è variabile, è un numero funzione distributiva della f.

§ 4.

Dirò " campo di punti nello spazio ad n dimensioni „, ciò che nel *Formulario* è indicato col simbolo Cls' Cx n " classe di numeri complessi di ordine n „.

Un numero sarà funzione distributiva dei campi di punti, o assolutamente arbitrarii, o assoggettati a certe condizioni, se la funzione della somma di due campi è la somma delle funzioni degli addendi.

Qui per somma di due campi x e y si intenda la loro somma logica, cioè l'insieme dei punti che appartengono all'uno o all'altro campo. Ed a primo aspetto si presenta naturale l'indicarla con $x + y$, come la somma aritmetica; questa notazione

si trova in alcuni lavori di Leibniz e di Cantor; e " si parva magnis componere licet ", anche nel mio libro:

Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale, Torino, Fratelli Bocca, 1887

a pag. 164. Ma questa notazione può dare luogo ad equivoci.

Invero, essendo x e y delle classi di numeri (reali o complessi), è più naturale ancora di indicare con $x + y$ la somma aritmetica delle due classi, cioè la classe dei numeri che si ottengono sommando un numero della classe x con un numero della classe y.

Ciò si fa da tutti gli autori, per esempio, per definire la somma di due numeri irrazionali, che è il limite superiore delle somme dei numeri razionali minori dei numeri dati.

E si fa pure nelle approssimazioni numeriche. Dare un numero per approssimazione significa dare un intervallo cui il numero appartiene. La notazione 0,123 ... indica ogni numero le cui prime cifre sono quelle scritte, e le successive sono arbitrarie, cioè

$$0,123 ... = 0,123 \vdash 0,124$$

rappresenta un intervallo di ampiezza 0,001, un estremo incluso e l'altro escluso. E la regola per l'addizione dei numeri approssimati dice ad esempio:

$$0,123 ... + 0,654 ... = 0,777 \vdash 0,779$$

e la somma di due numeri approssimati è appunto la somma aritmetica di classi.

In conseguenza, per eliminare l'equivoco, Leibniz indicò la somma logica con un segno speciale $x \oplus y$; G. Cantor, in " Mathematische Annalen ", t. 17, pag. 355, indicò la somma logica col simbolo M (x, y), che legge " minimo comune multiplo delle classi x e y ", poichè la somma logica gode delle proprietà del minimo multiplo aritmetico.

La notazione adottata nel *Formulario*, per la somma logica, è $x \cup y$, ed è già molto usata. Perciò un numero sarà funzione

distributiva d'un campo, se essendo x e y due campi (arbitrarii, o soddisfacenti a qualche condizione), si ha

$$f(x \cup y) = fx + fy.$$

§ 5.

Due grandezze sono *coesistenti*, secondo Cauchy, quando sono funzioni distributive d'uno stesso campo. Già affermai la coincidenza della teoria di Cauchy con quella delle funzioni distributive, nel libro sopra citato del 1887, pag. 167.

Ciò risulta dagli esempi che Cauchy adduce a pag. 188, il volume e la massa d'un corpo; poichè dividendo il corpo in parti, tanto il volume quanto la massa del corpo valgono la somma rispettivamente dei volumi e delle masse delle parti.

Si suppone in questo esempio di considerare i soli solidi, o campi di punti, che hanno volume in senso proprio. Altrimenti, alcuni autori considerarono il volume interno, definito come il limite superiore dei volumi dei poliedri interni al solido; e considerarono il volume esterno del solido, cioè il limite inferiore dei poliedri contenenti nel loro interno il solido. Secondo l' " Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften „ (Leipzig, in corso di pubblicazione), Band I, 1, 4, pag. 524, tali enti furono considerati la prima volta nel mio libro sopra citato del 1887, pag, 156.

I volumi esterno e interno d'un campo di punti non sono però funzioni distributive del campo; poichè il volume interno del campo somma è maggiore o eguale alla somma dei volumi interni dei due campi. La stessa cosa avviene per gli integrali superiori e inferiori, che non sono funzioni distributive della funzione integranda; vedasi *Formulario*, pag. 345, prop. 7.

§ 6.

La proprietà caratteristica delle funzioni distributive è scritta nel lavoro citato di Cauchy a pag. 190; egli afferma che se A e B sono grandezze coesistenti, e se B si decompone in elementi $b_1 b_2 \ldots b_n$, sicchè $B = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, e se $a_1 a_2 \ldots a_n$ sono i corrispondenti elementi di A, sarà $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Ma la definizione che Cauchy dà delle grandezze coesistenti non è chiara. Egli dice a pag. 188:

" Nous appelons *grandeurs coexistantes* deux grandeurs qui " existent ensemble et varient simultanément, de telle sorte " que les éléments de l'une existent et varient, ou s'évanouissent " en même temps que les éléments de l'autre ".

§ 7.

In seguito, pag. 189, Cauchy definisce il " rapport différentiel " delle grandezze coesistenti, il quale rapporto, nel caso della massa e del volume, è la *densità* del corpo in un suo punto (pag. 193).

E a pag. 190, Egli enuncia il teorema fondamentale del valore medio:

" Le rapport entre deux grandeurs coexistantes A et B, " dont la première varie dans un ou plusieurs sens avec la " seconde supposée toujours positive, est une moyenne entre les " diverses valeurs de leur rapport différentiel ".

E sotto forma fisica (pag. 195):

" Le rapport de la masse d'un corps à son volume est une " moyenne entre les densités correspondantes aux divers points " de ce volume. Cette proposition justifie le nom de densité " moyenne ".

La densità media è, per definizione, il rapporto fra la massa e il volume di tutto il corpo.

La dimostrazione che il Cauchy dà di questo teorema fondamentale non è completa. Essa si può completare, e ciò è fatto nel mio libro del 1887, a pag. 170.

Cauchy deduce il teorema (o corollario), pag. 192:

" Une grandeur s'évanouit toujours, lorsque le rapport dif- " férentiel de cette grandeur à une autre grandeur coexistante " est constamment nul ".

§ 8.

Il concetto di funzione distributiva si può anche applicare al dominio della logica pura. Ciò è fatto nel mio libro:

Lezioni di Analisi infinitesimale, Torino, 1893, tomo 2°, pag. 46.

Per variabili prenderemo ancora delle classi di punti Cls' Cx n, e per funzioni prenderemo delle classi di classi di punti, in simboli Cls' Cls' Cx n. Ognuna delle frasi " classe limitata ", " classe chiusa ", " sfera ", ecc., rappresenta una classe di classi di punti. Spesso una classe di classi si determina mediante una proprietà, ad es. di " essere limitata ", di " essere chiusa ", ecc.

Sia u una classe di classi di punti, cioè una proprietà dei campi di punti. Diremo che questa proprietà u è *distributiva*, se tutte le volte che la somma di due campi c e c' ha la proprietà u, uno almeno di essi abbia la stessa proprietà; e viceversa, se uno dei campi c e c' ha la proprietà u, anche il loro insieme $c \cup c'$ abbia la stessa proprietà.

Quindi la proprietà u è distributiva, quando:

$$c \cup c' \epsilon u \,.=.\, c \epsilon u \,.\cup.\, c' \epsilon u \,.$$

Essa deriva dalla $f(x+y) = fx + fy$, ove al posto di x e y si scriva c e c'; al posto di $+$ si consideri la somma logica $\cup$; e per fx si assuma la proposizione $x \epsilon u$. Il valore della funzione è una proposizione o condizione.

§ 9.

La considerazione delle proprietà distributive serve ad enunciare il seguente teorema:

" Se u è una proprietà distributiva dei campi di punti, e
" se un campo s ha la proprietà u, e questo campo è limitato
" (cioè il limite superiore dei moduli degli elementi di s è finito),
" allora esiste un punto x del campo λu, limite di u, tale che
" comunque si prenda la quantità positiva r, il gruppo di punti y
" che distano da x meno di r (cioè la sfera di centro x e raggio r)
" abbia la proprietà u ".

In simboli:

$$u \epsilon (\text{Cls' Cls' Cx } n) \text{ distrib.} \, s \epsilon u \,.\, \text{l}' \text{ mod } s \epsilon \text{Q} \,.\, \supset .$$
$$\exists \lambda u \cap x \ni \{ r \epsilon \text{Q} \,.\, \supset_r .\, \text{Cx } n \cap y \ni [\text{mod}(y - x) < r] \, \epsilon u \} .$$

Nel mio libro ultimamente citato, pag. 48, attribuii questo importante teorema a Georg Cantor; perchè effettivamente

questo autore lo enunciò sotto forma differente, ma identica in sostanza, nei " Mathematische Annalen „, anno 1884, tomo 23°, pag. 454.

Esempio. — La condizione " il gruppo o classe di punti s contiene infiniti punti „ è una proprietà distributiva di s; poichè se s contiene infiniti punti, dividendo s in due gruppi, uno di questi conterrà pure infiniti punti; e viceversa, se una delle parti contiene infiniti punti, anche il campo totale conterrà infiniti punti. Risulta dal teorema precedente che " se la classe s contiene infiniti punti, ed è limitata, esiste un punto tale che in ogni suo intorno esistono infiniti punti di s „. Questo punto appartiene al gruppo derivato.

Teorema e dimostrazione sono di Cantor.

§ 10.

Si presentano alcune volte delle proprietà u delle classi di punti, che soddisfanno solo in parte alla proprietà distributiva, cioè da $c \cup c' \epsilon u$ si deduce $c \epsilon u$ o $c' \epsilon u$; ma non viceversa. Questa proprietà si dirà *semidistributiva*. Allora la proprietà " il campo c contiene un campo avente la proprietà u „ è distributiva; e il teorema di Cantor assume la forma:

" Se u è una proprietà semidistributiva dei campi di punti, " e se una classe limitata s ha la proprietà u, allora esiste un " punto x del campo limite di s, tale che ogni sfera di centro x " contiene dei campi aventi la proprietà u „.

§ 11.

La dimostrazione del teorema § 9, che si può leggere o nel lavoro di Cantor, o nei miei libri sopra citati, è, come Cantor afferma, la generalizzazione d'una forma di ragionamento che si incontra in Cauchy, *Analyse Algébrique*, anno 1821, per provare che una funzione continua definita in un intervallo, e che cambia segno agli estremi dell'intervallo, si annulla in un punto intermedio.

Sia f la funzione reale definita nell'intervallo $a \vdash b$, e continua, e sia $fa < 0$ e $fb > 0$. Cauchy dice: divido l'intervallo $a \vdash b$

per metà col punto $c = (a + b)/2$. Escluso il caso $fc = 0$, in cui il teorema è verificato, in uno dei due intervalli parziali la funzione cambierà di segno agli estremi. Sia $a_1 {}^{\vdash} b_1$ l'intervallo parziale ai cui estremi la funzione cambia segno; e si operi su $a_1 {}^{\vdash} b_1$ come si è operato su $a {}^{\vdash} b$. Si troverà un nuovo intervallo $a_2 {}^{\vdash} b_2$, metà del precedente, e quindi il quarto di $a {}^{\vdash} b$, ai cui estremi la funzione cambia segno. E così via. Ne risultano le successioni $a\, a_1\, a_2 \ldots$, $b\, b_1\, b_2 \ldots$, la prima crescente quando varia, e la seconda decrescente, e che convergono verso uno stesso valore x. Si deduce poi facilmente $fx = 0$.

La proprietà " la funzione f cambia di segno agli estremi dell'intervallo $a {}^{\vdash} b$ " è una proprietà semidistributiva dell'intervallo $a {}^{\vdash} b$. Conviene però alla frase " la funzione cambia segno agli estremi dell'intervallo $a {}^{\vdash} b$ " attribuire il senso $fa \times fb \leqq 0$, onde comprendere il caso in cui si trovi qualche valore nullo della funzione. Allora, se la funzione f cambia segno agli estremi dell'intervallo, dividendo l'intervallo in parti, in una di queste la funzione cambierà segno. Quindi applicando il teorema del § 10 si deduce che esiste un valore x per cui $fx = 0$. E viceversa, basta ripetere questa dimostrazione di Cauchy, sostituendo alla proprietà " la funzione cambia segno nell'intervallo " una proprietà semidistributiva, per dimostrare il teorema del § 10, o l'equivalente del § 9.

§ 12.

Ritorniamo alle grandezze coesistenti, che chiameremo massa e volume d'un corpo. La proposizione " la densità media del corpo s è maggiore del numero dato m " è proprietà semidistributiva di s; poichè se la densità media di s è $> m$, dividendo s in parti, la densità media di una delle parti sarà $> m$. Quindi, pel teorema precedente si ha:

" Se la densità media del corpo finito s è maggiore di m,
" esisterà un punto x del campo limite di s, tale che comunque
" (piccolo) si prenda il raggio r, dentro la sfera di centro x e
" di raggio r esistono campi in cui la densità media è $> m$ ".

E supposto che in ogni punto x la densità del corpo sia determinata, si ha

" Se il corpo s, finito e chiuso, ha densità determinata in

“ ogni suo punto, e se la densità media di s è maggiore di m,
“ allora esisterà un punto x di s, in cui la densità sarà mag-
“ giore di m „.

Lo stesso avviene se invece di maggiore si legge minore. Ne risulta:

“ Se il corpo s, finito e chiuso, ha densità determinata in
“ ogni suo punto, la densità media di s sarà compresa fra il
“ limite superiore e il limite inferiore delle densità di s nei
“ suoi varii punti „.

Questo è il teorema di Cauchy, riportato sopra nel § 7.

Nel mio libro del 1887, pag. 171, trovasi pure il teorema che “ il rapporto $\frac{dy}{dx}$ delle due grandezze coesistenti in un punto, è funzione continua del punto „. Per le funzioni reali di variabile reale, la derivata può esistere ed essere discontinua. Ma la derivata in questo caso è il limite del rapporto incrementale, ove un estremo sia fisso, e l'altro mobile tendente al primo. Se per derivata si intendesse il limite del rapporto incrementale, ove ambo i valori dati alla variabile tendono ad uno stesso valore, come si fa per le grandezze coesistenti, allora questa derivata, supposta esistente, risulta funzione continua.

Un campo dicesi *continuo* (alcuni dicono *connesso*) se due suoi punti si possono sempre congiungere con una linea continua di cui tutti i punti appartengono al campo (*Formulario*, pag. 458). Se una funzione definita in un campo continuo è continua, essa assume ogni valore compreso fra il limite superiore ed il limite inferiore dei suoi valori. Risulta che:

“ Se un corpo (o classe di punti) limitato, chiuso e continuo,
“ ha densità determinata in ogni suo punto, allora la densità
“ media del corpo vale la densità del corpo in un qualche suo
“ punto „.

Questa proposizione rassomiglia ad una di Cauchy, pag. 198:
“ une des valeurs du rapport différentiel représentera le rapport
“ de la première grandeur à la seconde „; ma la parola “ funzione continua „ ha in Cauchy senso differente dell'attuale.

Relazione sulla Memoria del Prof. Campetti, intitolata: *Sull'equilibrio di coppie di liquidi parzialmente miscibili.*

La Memoria del Prof. Campetti, intitolata: *Sull'equilibrio di coppie di liquidi parzialmente miscibili*, è la continuazione di uno studio, che il Campetti stesso eseguì insieme col Prof. Del Grosso, e che fu pubblicato in due parti nei volumi LXI e LXIV della nostra Accademia.

In questa terza Memoria sono descritte le esperienze, con cui vennero determinate le curve di solubilità reciproca per due nuove coppie di sostanze e cioè per zolfo-metaxilolo e fosforo-metaxilolo. Vennero pure determinate le temperature critiche di miscibilità per le due coppie e le corrispondenti concentrazioni critiche, e venne verificata la legge del diametro rettilineo.

Venne poi tracciata la curva di solubilità dello zolfo nell'etere, la quale è notevole perchè indica un massimo intorno a 180° e una rapida diminuzione di solubilità al di sopra di quella temperatura. Venne determinata la temperatura critica dell'etere adoperato e si trovò 196°,2.

Le esperienze sulla solubilità dello zolfo vennero spinte fino a 202°,2, alla quale temperatura la solubilità dello zolfo nell'etere è piccolissima.

Queste esperienze riguardano due questioni importanti, quella relativa alla temperatura critica delle miscele di due sostanze, e quella della solubilità di una sostanza in un liquido a temperature più alte della temperatura critica di questo.

Per studiare la prima questione fu determinato come variasse la temperatura critica dell'isopentano e dell'esano normale quando venivano disciolti in questi liquidi del fenolo e dell'anilina, e si trovò che l'innalzamento della temperatura critica è con grande approssimazione proporzionale alla concentrazione. La regola di miscuglio non risultò esattamente verificata.

Quanto alla seconda questione, fu riconosciuta la reciproca miscibilità dell'anilina e del fenolo con l'isopentano e con l'esano normale anche al di sopra della temperatura critica della soluzione. Il carattere dei fenomeni indica che s'ha una vera e propria soluzione e non una sospensione.

Noi proponiamo che la Memoria, in cui queste importanti e difficili esperienze sono descritte, venga letta alla Classe per essere poi inserita nei volumi accademici.

GUIDO GRASSI.
A. NACCARI, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSI UNITE

Adunanza del 20 Giugno 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali i Soci Camerano, Vice-Presidente dell'Accademia, D'Ovidio, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona e Balbiano;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche i Soci Carle, Pizzi, Ruffini, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato e Stampini, Segretario della Classe, in funzione di Segretario dell'adunanza, essendo assente il Socio Segre, Segretario più giovane.

È scusata l'assenza dei Soci Naccari, Segre, Mattirolo e Somigliana della Classe di Scienze fisiche, ecc., e dei Soci Chironi e De Sanctis della Classe di Scienze morali, ecc.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 9 maggio.

Il Presidente invita il Socio Segretario Stampini a leggere la relazione della Commissione del premio Gautieri per la letteratura (triennio 1911-1913), della quale fecero parte i Soci Ruffini, Sforza e Stampini. Terminata la lettura e dopo breve discussione, a cui prendono parte i Soci Guareschi, Ruffini e D'Ercole, il Presidente chiede all'Accademia se aderisca alla proposta fatta dalla Commissione di dividere il premio in due parti uguali. La votazione è palese, e l'Accademia approva alla unanimità che il premio sia in tal modo diviso. Si passa quindi alla votazione segreta per ischede sulla proposta della Commissione di attribuire il premio al Prof. Ireneo Sanesi, ordinario di

letteratura italiana nella R. Università di Pavia, e al Prof. Carlo Pascal, ordinario di letteratura latina nella medesima Università. Anche questa proposta risulta approvata alla unanimità, cioè con voti 20 su 20 votanti. Resta pertanto deciso che il premio Gautieri di letteratura per il triennio 1911-1913 sarà diviso in parti uguali fra il Prof. Ireneo Sanesi per l'opera *La Commedia*, vol. I (Milano, Vallardi, 1911) e il Prof. Carlo Pascal per le opere *Dioniso. Saggio sulla religione e la parodia religiosa in Aristofane* (Catania, Battiato, 1911) e *Le credenze d'oltretomba nelle opere letterarie dell'antichità classica* (Catania, Battiato, 1912).

Esaurito così l'ordine del giorno, il Presidente Boselli, dopo aver accennato alla grande ora presente del Paese che ha in armi i suoi figli e con l'anima esaltata e commossa li accompagna combattenti con romano eroismo per terra e per mare in difesa dei diritti e delle alte idealità della Patria; e dopo di avere evocato i nomi dei gloriosi Soci della nostra Accademia Vincenzo Gioberti, Cesare Balbo, Alberto Lamarmora, che la nuova nostra guerra con l'antico tradizionale nemico richiama per diverse ragioni e per diversi titoli alla nostra memoria, e il nome sempre venerato di Federico Sclopis, già Presidente dell'Accademia, che fu iniziatore di quel nuovo giure internazionale il quale, negletto e vilipeso nell'immane conflitto che sconvolge l'Europa, sembra piuttosto riservato ancora al futuro che non destinato a salvaguardare nel presente i diritti delle genti; propone che l'Accademia invii un telegramma di omaggio al Re, che riassume in sè i diritti, le speranze, le idealità della Patria ed insieme il valore, l'abnegazione, l'eroismo dell'Esercito e della Marina. La proposta è approvata per acclamazione.

Dopo di che il Presidente, essendo questa l'ultima adunanza dell'anno accademico, saluta i Colleghi, ed agli augurî che egli fa per essi unisce quelli per il maggior bene e la maggiore grandezza d'Italia. E l'Accademia con un applauso saluta il suo illustre Presidente e ricambiandogli il cortese augurio pon fine alla seduta col grido di viva l'Italia, viva il Re!

Relazione della Commissione del premio Gautieri per la Letteratura (triennio 1911-1913).

Egregi Colleghi,

I Soci, a cui commetteste di farvi proposte per il conferimento del premio Gautieri, da assegnarsi alla migliore opera di letteratura pubblicata nel triennio 1911-1913, si sono nelle loro indagini attenuti al criterio fissato dalla Classe di Scienze morali, storiche e filologiche nella sua adunanza privata del giorno 18 dello scorso aprile; vale a dire hanno prese in considerazione non solamente le opere concernenti la letteratura italiana, ma quelle ancora che si riferiscono alle letterature straniere e alle antiche, purchè scritte da autori italiani ed in lingua italiana.

Essi hanno prima di tutto sottoposte ad accurato esame quelle opere che i loro autori inviarono alla Accademia per concorrere al premio. E sono le seguenti:

Lajolo (Gregorio). *Sotto il velo della canzone " Tre donne intorno al cor mi son venute „ di Dante Alighieri.* Città di Castello, S. Lapi, 1911; 8°.

Donati (Alessandro). *Gabriele D'Annunzio*, 2ª edizione. Milano-Roma-Napoli, Società editrice Dante Alighieri, di Albrighi, Segati e C., 1912; 8°.

Falchi (Luigi). *Studi di poesia cristiana.* Roma, Società editrice Dante Alighieri, 1914; 8°.

— *Nuove osservazioni sul sentimento civile del Leopardi.* Roma, " Nuova Antologia „, 1913; 8°.

Donadoni (Eugenio). *Antonio Fogazzaro.* Napoli, Francesco Perrella e C., 1913; 8°.

Tonelli (Luigi). *L'evoluzione del teatro contemporaneo in Italia.* Milano-Palermo-Napoli, Remo Sandron ed., 1913; 8°.

Mininni (Carmine Gustavo). *Pietro Napoli Signorelli: vita, opere, tempi, amici.* Con lettere, documenti ed altri scritti inediti. Città di Castello, S. Lapi, 1914; 8°.

Pellegrini (Carlo). *Luigi Pulci, l'uomo e l'artista.* Pisa, Stabil. tipogr. Succ. Fratelli Nistri, 1912; 8°.

Morpurgo (Giuseppe). *Un umanista martire: Aonio Paleario e la riforma teorica italiana nel secolo XVI.* Città di Castello, S. Lapi, 1912; 8°.

Misciatelli (Piero). *Mistici senesi,* 2ª edizione. Siena, Libreria editrice Giuntini Bentivoglio, 1913; 8°.

Di tali opere dovettero essere poste senz'altro in disparte quella del Mininni e la prima e principale delle due presentate dal Falchi (l'altra non è che l'estratto di un articolo di rivista), perchè cadenti fuori del limite di tempo prestabilito.

E da un canto la Commissione pose parimente, dopo un primo esame, il lavoro del Lajolo in ragione della sua tenuità, e quello del Misciatelli perchè, a parte anche gravi deficienze di informazione e di metodo, esso riguarda piuttosto la storia generale, politica, artistica, religiosa, che non la letteraria.

Gli altri cinque libri, tutti quanti degni di considerazione, si ripartiscono, potrebbe dirsi quasi di per sè, in due gruppi; nel primo dei quali stanno quello del Morpurgo su Aonio Paleario e quello del Pellegrini su Luigi Pulci, e nel secondo quelli del Donati su Gabriele D'Annunzio, del Donadoni su Antonio Fogazzaro e del Tonelli sul Teatro italiano contemporaneo. E la ragione del distinguere, più assai che non semplicemente di tempo, per ciò che i lavori del secondo gruppo trattano argomenti di letteratura contemporanea, è di genere e di metodo. Appartengono invero alla storia letteraria i primi, che discorrono partitamente la vita e le opere degli autori studiati, giovandosi di tutto ciò che prima già si era scritto su di loro. Sono invece di pura critica letteraria gli altri tre, poichè in essi, per proposito dichiarato dai loro autori, si è fatta astrazione

da ogni dato biografico, non solo, ma da ogni anche minimo riguardo al non indifferente apparato di letteratura che già si è venuto accumulando intorno ai rispettivi soggetti, per non darci se non la impressione e la valutazione individuale e indipendente di chi scrive. Lavori recanti, pertanto, una spiccata impronta personale tutti e tre, e certo ragguardevoli; se anche si deve osservare che, mentre quello del Donadoni è pervaso da un senso di così scarsa simpatia per l'autore studiato da far pensare quasi a una svalutazione sistematica dell'opera artistica di lui, quello del Tonelli, per contro, presenta un contrasto così stridente fra la severità, ond'è giudicato di ogni indirizzo anteriore a quello ora dominante nel teatro italiano e conseguentemente degli autori che precedettero il rappresentante più insigne di quest'ultimo indirizzo, il Bracco, e il giudizio esaltatore che di questo scrittore si reca in ultimo, da lasciare l'impressione quasi di una apologia preordinata dell'opera di lui. Al libro del Donati, ch'è una raccolta di conferenze sul D'Annunzio, è derivato dalle sue origini, non tanto un che di superficiale, come l'autore stesso con bella franchezza ci dice, quanto un carattere forse troppo spiccatamente discorsivo e vivacemente polemico. Validi contributi alla storia della nostra letteratura e del pensiero nostro sono tanto il libro del Pellegrini, quanto quello del Morpurgo; più maturo e più felicemente fuso quest'ultimo, che rappresenta certo quanto di meglio si abbia intorno a quella importantissima e interessante figura di letterato e di riformatore, che fu Aonio Paleario; e se anche nella parte dedicata ad illustrarne il pensiero religioso lascia qua e là qualcosa a desiderare, specie rispetto al nesso fra la dottrina di lui e le grandi correnti religiose del tempo, esso è per altro particolarmente commendevole nella parte ove se ne discorre l'opera poetica, oratoria e didattica; ciò che più monta ai nostri fini presenti.

Tuttavia parve alla Commissione che neppure quest'opera, forse la più significante fra quelle inviate all'Accademia, potesse anteporsi ad alcune altre, uscite nel torno di tempo prestabilito e non inviate dai loro autori all'Accademia. Di queste — tenuto stretto conto dei detti termini di tempo e del carattere prevalentemente scientifico del nostro Istituto e di conseguenza anche del premio — la Commissione credette di potervene segnalare tre, di cui due appartengono allo stesso autore.

Il primo volume della storia della Commedia italiana, che Ireneo Sanesi, professore ordinario di lettere italiane nell'Università di Pavia, ha pubblicato nel 1911, e che tratta con grande ampiezza, come la importanza somma del tema voleva, del Dramma sacro, delle Commedie umanistiche, delle Commedie erudite del Cinquecento e del Dramma popolare dello stesso secolo, parve alla Commissione esempio veramente notevole di geniale e fecondo connubio fra storia documentata e critica estetica. L'autore, invero, addestratosi di già alla conoscenza ed alla elaborazione analitica della materia, ch'è oggetto del suo studio, con l'improba e meritoria fatica di procurare l'edizione in ben due volumi di Commedie italiane del Cinquecento, nel quale delicato ufficio egli mostrò ottime attitudini, racchiude ora in una sintesi vigorosa e ben costrutta la vasta messe delle sue indagini minute e coscienziose; non solo, ma, conferito per tal modo quanto il più rigoroso metodo scientifico, o positivo o storico che dir si voglia, poteva pretendere, compie e corona l'opera sua con un complesso di impressioni personali e di valutazioni originali delle opere letterarie studiate, ove si rivela il suo nobile temperamento di artista. Così che il volume, ove la parte di pura erudizione è quasi a bello studio dissimulata anche materialmente per non inceppare la vivace ed elegante esposizione, è riuscito un libro di gradevole lettura, oltre che un contributo scientifico di molto valore, che giova a chiarire alcuni problemi essenziali della nostra coltura; come sarebbe, per non fare se non un esempio, il problema veramente centrale della parte che è da assegnarsi nella Commedia cinquecentesca alla derivazione o quanto meno alla imitazione classica e di quella che spetta invece agli elementi nuovi medioevali e cristiani.

Genialità di concezione, estesissima coltura, larga conoscenza delle letterature, dei miti e delle antichità classiche attesta l'opera in due volumi stampata a Catania nell'anno 1912 da Carlo Pascal, professore ordinario di letteratura latina nell'Università di Pavia, e intitolata *Le credenze d'oltretomba nelle opere letterarie dell'antichità classica*. L'autore, raccogliendo e coordinando parecchi scritti pubblicati precedentemente, li ha riveduti, ritoccati e integrati con nuovi studi, in modo da presentarci in un ampio quadro organico la storia delle speranze e delle trepidazioni, dei sogni e delle angosce in cui si esaltò o si travagliò l'anima

umana nel mondo greco e nel romano davanti allo spettacolo della morte e al problema dell'oltretomba. È, in altri termini, l'atteggiamento vario delle coscienze antiche riguardo alla vita futura, così come esso si riflette nelle opere letterarie dei Greci e dei Romani, l'obbietto delle ricerche del Pascal, il quale, partendo da un capitolo sul fato mortale, passa via via, nello svolgimento del suo tema, al mondo infernale e a' suoi sovrani, alla divinità della morte e alla religione de' sepolcri; discorre poscia degli Dei Mani, del bivio fatale, della morte immortale e della seconda morte, per quindi occuparsi del giudizio d'oltretomba, delle pene e del riposo dei dannati, dell'oltretomba omerico e dell'apoteosi mistica nella religione orfica; al che tien dietro la disamina delle mitiche discese nell'inferno, delle visioni d'oltretomba, delle narrazioni dei redivivi. Segue lo studio dell'inferno e del purgatorio virgiliano, dell'oltretomba ne' maggiori imitatori di Virgilio e delle pene infernali nella tradizione popolare; finchè, dopo di aver passato in rassegna, mediante speciali capitoli, le idee degli antichi sui Campi Elisii, sulla purificazione delle anime, sulla distruzione e rinnovazione cosmica e sulla sorte delle grandi anime dopo la morte, il lavoro si chiude con un capitolo sulla deificazione di Cesare e di Augusto.

Certo si può di quest'opera del Pascal rilevare qualche difetto, così nel disegno generale come nell'esecuzione delle singole parti, formanti altrettante monografie, di cui alcune furono pensate e stese forse prima che si delineasse in tutta la sua pienezza nella mente dell'autore il piano generale dell'opera. Ma egli è verissimo che il Pascal si dimostra sempre appieno informato della letteratura di tutti i punti i quali ha fatto oggetto delle sue indagini, e che ha saputo esporli con molte osservazioni acute e non di rado originali, con numerosi riscontri geniali, e, quel che pur monta, con commendevole garbo di forma. Onde questo studio del Pascal, al quale egli fece precedere il volume, degno del pari di grande considerazione, pubblicato nel 1911 col titolo *Dioniso. Saggio sulla religione e la parodia religiosa di Aristofane,* è indubbiamente da riguardarsi come uno dei più dotti lavori letterari che siansi editi in Italia nel triennio a cui la Commissione doveva rivolgere la sua attenzione.

La Commissione, pertanto, unanime Vi propone che il premio sia diviso in parti uguali fra questi due autori:

IRENEO SANESI, *La Commedia* (in " Storia dei Generi letterari Italiani "), vol. I, Milano, Vallardi, 1911; 8°.

CARLO PASCAL, *Dioniso. Saggio sulla religione e la parodia religiosa in Aristofane.* Catania, Battiato, 1911; 8°.

LO STESSO, *Le Credenze d'oltretomba nelle opere letterarie dell'Antichità classica.* Catania, Battiato, 1912; 8°.

La Commissione:

FRANCESCO RUFFINI,
GIOVANNI SFORZA,
ETTORE STAMPINI, *Segretario.*

Gli Accademici Segretari
CORRADO SEGRE.
ETTORE STAMPINI.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 20 Giugno 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Carle, Pizzi, Ruffini, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato e Stampini, Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci Chironi, Direttore della Classe, e De Sanctis.

È letto e approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente del 30 maggio.

Il Presidente S. E. Boselli porge vivi ringraziamenti alla Classe per l'ordine del giorno approvato per acclamazione in suo onore nella adunanza del 30 maggio u. s. Indi legge un telegramma di fraterno saluto inviato alla nostra Accademia dal Presidente della Académie Nationale des Sciences, Belles-Lettres et Arts di Bordeaux e il telegramma di risposta già mandato in seguito all'unanime voto della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Anche la nostra Classe si associa con unanime plauso.

Il Socio Pizzi presenta un opuscolo del Prof. Michelangelo Billia, intitolato *Le ceneri di Lovanio e la filosofia di Tamerlano*, dando un breve cenno del suo contenuto.

Il Socio Sforza presenta con parole di elogio un libro del Dott. Don Romolo Putelli dal titolo *Intorno al Castello di Breno. Storia di Valcamonica, Lago d'Iseo e Vicinanze da Federico Barbarossa a S. Carlo Borromeo.*

Il Socio Segretario Stampini presenta i *Documenti diplomatici Austria-Ungheria* inviati in dono dalla Camera dei Deputati.

Indi il Socio Patetta presenta una sua Nota per gli *Atti*, intitolata *I libri legali e il corredo d'un giudice bolognese nell'anno 1211, e un caso di rappresaglia fra Bologna e Ferrara.*

In fine il Socio Stampini, che ha esaminato la monografia del Dott. Aldo Ferrabino *Silla a Cheronea* insieme col Socio De Sanctis, legge la relazione del Socio De Sanctis, la quale conchiude ritenendo la detta monografia degna di essere pubblicata nelle *Memorie* accademiche. La Classe approva la relazione e con voti unanimi, a schede segrete, consente che sia fatta la pubblicazione nelle *Memorie.*

Il Presidente rinnova ai Colleghi l'augurio già fatto nell'adunanza a classi riunite. Dopo di che l'adunanza è tolta.

LETTURE

I libri legali e il corredo d'un giudice bolognese nell'anno 1211, e un caso di rappresaglia fra Bologna e Ferrara.

Nota del Socio FEDERICO PATETTA.

1. Nell'anno 1255 il comune di Bologna e quello di Ferrara, signoreggiato da Azzo VII d'Este, dovevano essere in ottime relazioni d'amicizia, certo determinate in prima linea dalla comunanza d'interessi di fronte ai ghibellini ed al loro terribile rappresentante Ezzelino da Romano. Èra dunque naturale, che si cercasse di toglier di mezzo ogni causa di dissapori fra i cittadini dei due comuni, cominciando intanto dal por fine a tutte le controversie, per le quali fossero state rilasciate carte di rappresaglia (1).

(1) Collo stesso scopo e in egual modo si dovette naturalmente procedere colle altre città amiche. Sappiamo infatti dal Savioli (*Annali bolognesi*, vol. III, parte I, p. 286), che nello stesso anno 1255 " cessarono per patto fissato in Imola parecchie rappresaglie invecchiate co' Forlivesi „; e già prima, l'11 luglio 1253, era stata pronunciata la *assoluzione reciproca dei due comuni di Bologna e di Ravenna*, e il 29 ottobre 1254 *i due comuni di Firenze e di Bologna* erano venuti a composizione *sulle rappresaglie e pedaggi* (o. c., documenti n° 689 e 692. Si cfr. anche il documento n° 720 del 10 febbraio 1258, contenente altra composizione di rappresaglie coi Fiorentini). Sulle rappresaglie resta sempre fondamentale l'opera di A. Del Vecchio ed E. Casanova, *Le rappresaglie nei comuni medievali e specialmente in Firenze*, Bologna, 1894. La letteratura posteriore è diligentemente raccolta nella monografia della Dott. Dina Bizzarri, *Le rappresaglie negli statuti e nei documenti del comune di Siena*, nel " Bullettino Senese di storia patria „, XX, 1913, pp. 115-139 e 217-245.

Sulla via da seguire non poteva cader dubbio; bisognava nominare degli arbitri, come già s'era stabilito altra volta (1), e obbligare gli interessati a presentarsi davanti a loro entro un termine fisso, e ad accettarne poi le sentenze. Furono infatti designati arbitri per il comune di Ferrara *Gruamons quondam domini Ioculi de Ratichero* e *Andreas iudex quondam domini Lanfranchi*, cittadini ferraresi; per Bologna, *Thomasinus domini Guidonis Ubaldini* (2) e *Gerardus Ungarelli*, cittadini bolognesi; aggiungendo un quinto arbitro forestiero, *Manfredus Columbus iudex de Mediolano*, e delegando come *sindici*, a rappresentare i due comuni davanti al collegio arbitrale, un *Martinus notarius* per Ferrara e un *Nicholaus Petri Pizoli* (3) per Bologna.

Gli arbitri si riunirono il 19 giugno 1255, ed ebbero il coraggio di decidere nella giornata di ben dodici cause, alcune delle quali si riferivano a fatti anteriori di quaranta e più anni. Il modo, con cui procedettero, è veramente caratteristico. I due ferraresi si pronunciarono sempre, senza eccezione, in favore di Ferrara; i due bolognesi, sempre, con eguale costanza, in favore di Bologna; cosicchè la decisione dipese in ogni caso dal quinto arbitro, il quale distribuì assoluzioni e condanne, badando forse alle regole dell'aritmetica più che a quelle del diritto e dell'equità: quattro assoluzioni per il comune di Ferrara, quattro per Bologna; due condanne per Ferrara, una condanna e, probabilmente, una dichiarazione di *non liquet* per Bologna.

---

(1) Nei *patti d'alleanza* del 2 luglio 1240 (in Savioli, o. c., doc. n° 621) si legge: " Item statutum et ordinatum est quod duo arbitri Ferr. eligantur, " qui cum duobus arbitris Bon. videant et cognoscant omnia instrumenta " facta pro rapresaliis faciendis et quod eis iustum visum fuerit dicant vel " amicabiliter definiant; et interim carte de rapresaliis effectum non sor " tiantur..... Quod si dicti quatuor non possint insimul concordare, d. Le- " gatus predictus [*Gregorio de Montelungo, legato pontificio*] dabit quintum " ad suam voluntatem..... ". Dell'arbitraggio fra comuni discordi per causa di rappresaglie tratta a lungo Gino Arias, *I trattati commerciali della repubblica fiorentina*, vol. I (solo pubblicato), Firenze, 1901, pp. 191 e segg.

(2) *Dominus Thomasinus Guidonis Ubaldini* compare col titolo di *doctor legum* in un documento del 1271 pubblicato dal Savioli, III, 2, p. 444; e il padre, *d. Guido Ugolini Ubaldini*, in un documento del 1229, Ibid., p. 92.

(3) *Petrus Pizoli* è ricordato più volte nei documenti pubblicati dal Savioli, vol. cit.

Conseguenza delle assoluzioni furono, com'era naturale, due sentenze d'annullamento delle lettere di rappresaglia concesse rispettivamente contro l'uno e l'altro dei due comuni, i quali avranno poi provveduto a far indennizzare i lesi, i cui diritti erano stati riconosciuti nelle sentenze di condanna.

Le sentenze, pronunciate *super balchione domus monasterii Sancti Proculi apud Podium* (1), *iuxta turrim*, sono raccolte in un fascicolo membranaceo d'otto carte inserito, con numerazione delle carte da 100 a 107, nel noto *Catastico B* del comune di Ferrara, ora conservato nell'Archivio di Stato di Modena. Un secondo esemplare, parimenti autentico, si trova, dopo poche carte, nello stesso volume. Altri esemplari dovevano evidentemente trovarsi negli archivi bolognesi, ma sono forse periti. Certo i documenti in questione sfuggirono alle diligenti ricerche del Savioli.

2. Metterebbe forse conto d'esaminare partitamente le varie cause decise dagli arbitri. Ho però trascritto una sola sentenza, che mi parve specialmente importante, e che farò oggetto della presente comunicazione, dopo aver premesso, quasi fra parentesi, pochi cenni su alcune altre.

Lettere di rappresaglia erano state concesse nel 1236 dal comune di Bologna *contra marchionem Estensem et homines sue iurisdicionis*, per un debito del marchese stesso di 268 lire e 13 soldi veronesi verso il bolognese *Romeo Aprielis* (?), che aveva poi donato il suo credito al concittadino *Bonacursio Bombaronis*. Si fece osservare, senz'alcun fondamento legale data la concessione delle lettere di rappresaglia, che il marchese era *tutum prescriptione temporis*, e che, in ogni modo, gli arbitri erano solo competenti a giudicare *super cartis represaliarum factarum contra comune et homines Ferrarie et sue iurisdicionis*.

Bologna fu assolta nel caso di un *Bonvisinus de Andrucio* e compagni, i quali chiedevano, fra altro, d'esser indennizzati per 215 corbe di sale stato loro tolto mentre era podestà di

---

(1) *Podium, Podium Episcopi* sono ricordati più volte nelle carte pubblicate dal Savioli, secondo il quale si tratterebbe di *Poggio* nel contado di Bologna (vol. III, parte II, p. 58).

Bologna il piacentino Bonifacio dal Carro (*de Caro* dice il documento), cioè nel 1248, e computato a dodici soldi di Ferrara *pro unoquoque corbe.*

A favore di Ferrara si giudicò nella causa mossa da un *dominus Iacobinus de Sancto Marino*. Questi, avendo ottenuto nel 1253 lettere di rappresaglia dal comune di Bologna, doveva essere probabilmente cittadino bolognese, o almeno del distretto; ma aveva prima giurato la cittadinanza ferrarese, e gli arbitri trovarono quindi perfettamente legale che il comune di Ferrara lo avesse bandito, togliendogli le sue *possessiones*: " illa potis- " simum ratione, quia bannitus est communis Ferrarie sicut ini- " micus et extra civitatem Ferrarie propter partem domini Sa- " linguerre, sicut ipse dominus Iacobinus protestatus fuit; et sic " dominus marchio et commune Ferrarie merito potuit et potest " auferre ei possessiones suas, sicut civi suo et inimico, sicut " contra ceteros, qui sunt extra civitatem illa de causa: et quia " petiit extimationem rerum quo ad proprietatem, et alia est ex- " timatio proprietatis et alia possessionis; et proprietas ei ablata " non fuit sed sola possessio, secundum formam pacti inter Fer- " rarienses et Venetos; quod pactum ipse Iacobinus servare te- " nebatur tamquam civis Ferrarie, et quia citadanciam iura- " verat, ut ex instrumento publico patet ".

Benchè l'argomento appaia, in sostanza, cavilloso, è interessante l'accenno alle *possessiones* tolte a Iacopino, ma delle quali egli non era vero proprietario; e interessante è pure il ricordo dei patti fra Ferrara e Venezia, che lo stesso Iacopino, come cittadino ferrarese, avrebbe dovuto osservare. Com'è noto, sono giunti a noi, e furono ripetutamente pubblicati, importanti patti conchiusi fra Veneziani e Ferraresi a partire dal 1191 (1); e in parecchi di essi si parla di *possessiones* tolte e da restituire, e in uno, del 1230, si fa speciale menzione di *tenute et possessiones* tolte ai Veneziani e occupate da Salinguerra *e da altri*. Ma quale fosse precisamente il caso di Iacopino non so,

---

(1) Si veda specialmente B. Ghetti, *I patti tra Venezia e Ferrara dal 1191 al 1313 esaminati nel loro testo e nel loro contenuto storico*, Roma, 1907. Il patto del 1230 è pubblicato a pp. 177 e segg., e il passo, che c'interessa, è a p. 180.

e non posso neppure congetturare, non avendo presente il testo completo della sentenza, che lo riguarda.

Iacopino era stato bandito *propter partem domini Salinguerre*, cioè come partigiano di Salinguerra Torelli, genero d'Ezzelino da Romano e capo in Ferrara del partito ghibellino. Salinguerra aveva conteso, con varia fortuna, il dominio della sua città natale agli Estensi per circa mezzo secolo, fino al 1240, nel qual anno aveva dovuto soccombere agli inganni e alle forze alleate del marchese d'Este e di parecchie città guelfe. Era poi morto quattro anni dopo in Venezia, più che ottantenne (1). Il bando contro Iacopino doveva dunque risalire probabilmente al 1240 e in ogni modo non esser posteriore al 1244.

3. Ad un episodio molto anteriore della lotta fra Salinguerra e gli Estensi si connette la causa, di cui intendo occuparmi in modo speciale.

Nell'anno 1207 Azzo VI d'Este, eletto dal popolo signore di Ferrara, ne aveva cacciato Salinguerra, il quale alla sua volta riuscì ad impadronirsi della città nel 1209, scacciandone Azzo. In un documento importante del 20 settembre 1209, pubblicato già dal Muratori (2), compaiono, accanto a Salinguerra, il podestà di Ferrara *Ugo de Gramaxe* e un *dominus Cazzanimicus eius iudex*. Sembra che Ugo fosse un podestà imperiale, posto dallo stesso imperatore Ottone IV, e ciò spiega come egli durasse ancora in carica, insieme col suo giudice, il 1° marzo 1211, quando il marchese d'Este, coll'aiuto dei Cremonesi, s'impadronì di nuovo di Ferrara (3). Dalla sentenza del 1255 veniamo ora a sapere, che Caccianemico era della famiglia bolognese dei Porconcini e che, in conseguenza del nuovo stato di cose, fu preso e spogliato d'ogni suo avere.

---

(1) Quanto si conosce della vita di Salinguerra fu, non è molto, riassunto dal Dott. E. P. Vicini, nel suo importante studio *I podestà di Modena* (1156-1796), parte I, Roma, 1913, pp. 46 e segg. Salinguerra fu appunto podestà di Modena nell'anno 1205.

(2) *Antiq. ital. m. aevi*, diss. 27, t. II, coll. 679 e seg. dell'edizione di Milano, 1739.

(3) Cfr. Frizzi e Laderchi, *Memorie per la storia di Ferrara*, vol. III, Ferrara, 1850, pp. 66-67; e il *Chronicon estense* nella nuova edizione dei *Rerum italicarum scriptores*, t. XV, parte III (fasc. 57), p. 8.

I Porconcini furono in Bologna fra le più note famiglie popolane di parte Geremea (1); e Caccianemico godè certo in patria di grande reputazione, poichè lo troviamo nel 1219 fra i quattro vessilliferi del popolo, e più tardi fra i consiglieri della credenza e nel consiglio generale del comune di Bologna (2).

Non dovette quindi riuscirgli difficile ottenere lettere di rappresaglia per il danno subìto in Ferrara, e le lettere gli furono infatti rilasciate il 3 giugno del 1217 dal podestà di Bologna Guido di Canossa. Sembra però che non fosse egualmente facile procedere all'esecuzione contro i Ferraresi, poichè i crediti o pretesi crediti di Caccianemico passarono alla sua morte al figlio d'egual nome, e questi con atto pubblico ne fece donazione al notaio Tommaso *Albrici* (= *Alberici*), che nel 1255 non aveva ancora ottenuto nulla e nulla ottenne.

Osserviamo, fra parentesi, che fra i pochi casi ricordati abbiamo già trovato un esempio di donazione dei crediti risultanti da carte di rappresaglia; e siffatte donazioni, quando anche nascondessero una cessione non perfettamente gratuita, sono indizi più che sufficienti della difficoltà e forse dei pericoli dell'esecuzione forzata contro forestieri.

Il notaio Tommaso *Alberici* chiedeva davanti agli arbitri cinquanta lire d'imperiali, salario fissato a Caccianemico, con pubblico istrumento, dagli anziani e dal podestà di Ferrara; più le cose o il valore delle cose di cui Caccianemico era stato spogliato. Vista la mala parata, s'indusse poi a dichiarare, che si sarebbe accontentato delle cinquanta lire, rinunciando a tutto il resto. Ma la sua rinuncia, forse suggerita, servì solo a facilitare l'opera, evidentemente partigiana, dei giudici. I due ferraresi dichiararono infatti, che il comune di Ferrara doveva esser assolto, perchè non risultava dai documenti presentati, che gli anziani e il podestà fossero autorizzati dal Comune o dal Consiglio a costituire il salario di cui si trattava; il quinto arbitro aderì alla sentenza dei ferraresi, e così il povero Tommaso dovette restare colle mani piene di mosche, avendoci rimesso, se non altro, tempo e fatica.

---

(1) Cfr. Savioli, o. c., III, 1, p. 61.

(2) Cfr. Savioli, II, 1, p. 389, e, nella seconda parte dello stesso volume, i documenti n° 469, 490, 492, 575.

4. Il *libellus petitionis* inserito nella sentenza è molto interessante, perchè contiene l'elenco dei libri legali e degli indumenti, armi ed oggetti tolti a Caccianemico.

Appunto come elenco di libri legali esso mi fu segnalato in Modena, parecchi anni or sono, dal dott. Alfredo Hessel, noto per parecchi lavori di storia bolognese, al quale mi professo grato di questa sua cortesia.

La biblioteca portatile di Caccianemico era composta di nove opere, che formavano al massimo sette volumi.

Compaiono in prima linea le *Summae* d'Azone al Codice e alle Istituzioni, alle quali s'aggiungono in seguito i *Brocarda a domino Azone composita*.

Il ricordo di queste tre opere fin dal 1211 è un dato non privo d'importanza per la cronologia degli scritti d'Azone; poichè finora, salvo errore, si sapeva solo, che la *Summa Codicis*, intimamente connessa colla *Summa Institutionum*, è spesso citata nella *Lectura in Codicem*, e che questa non può essere anteriore al 1229 (1).

Dopo le *Summae* si trova nell'elenco un *Comentum ff. vetus*, nel quale, correggendo leggermente il testo, è forse lecito ravvisare un *Comentum digesti veteris* o *in digestum vetus*. Nè il titolo, poco classico, di *commentum* (del quale dovremo pur registrare un altro esempio) nè il corrispondente *commentarium* o *commentaria* si trovano fra quelli comunemente usati per le loro opere dai giureconsulti del secolo duodecimo e del decimoterzo (2); tanto che possiamo chiederci che cosa precisamente fosse un *commentum*, e poichè non sembra dubbio che debba trattarsi di

---

(1) Cfr. Savigny, *Gesch. des röm. Rechts im M. A.*, 2ª ediz., vol. V, Heidelberg, 1850, pp. 8 e 25. Veramente, quanto alla *Summa Codicis*, sfuggì al Savigny un dato cronologico di qualche importanza, che essa cioè si trova già fra i libri lasciati dal cardinale Guala Bicchieri, morto nel 1227. Ma l'inventario interessantissimo (pubblicato per la prima volta in *Gualae Bicherii..... vita et gesta collecta a Philadelfo Libico*, Milano, 1767, pp. 174 e segg.) non fu conosciuto dal Savigny (vol. III, p. 576, n.ª *d*) se non indirettamente, per una citazione del Tiraboschi.

(2) Cfr. Savigny, V, pp. 240 e segg. (" Bibliothek der Glossatoren "); e Schulte, *Die Gesch. der Quellen und Literatur des canon. Rechts*, I, Stoccarda, 1875, pp. 217 e segg.

un lavoro esegetico e non dogmatico, se si tratti d'uno dei così detti *apparatus* o d'una *lectura*. Siccome però l'*apparatus* difficilmente si può staccare dal testo al quale si riferisce e col quale sta nel rapporto di accessorio a principale, propenderei per la seconda ipotesi.

Non si potrebbe d'altra parte congetturare che il *Commentum in digestum vetus* comprendesse anche il testo, poichè in tal caso si sarebbe parlato di *Digestum vetus cum commento* o *cum apparatu*.

5. Un altro *Commentum*, quello *domini Columbi super Codice usque ad quartum librum*, è l'opera, che più dovremmo invidiare al giudice Caccianemico, o meglio ai Ferraresi suoi spogliatori, poichè non è ormai conosciuto se non per alcune citazioni di Odofredo, dell'Ostiense e di Cino da Pistoia. Ma anche il semplice ricordo ha qualche importanza, almeno per la cronologia, e ci offre inoltre l'occasione di richiamar in esame un punto controverso di storia letteraria, cioè la pretesa identità del *dominus Columbus* col glossatore dei *Libri feudorum, Jacobus Columbi* (1).

Il vecchio Diplovataccio (1468-1541), nella sua opera *De praestantia doctorum*, trattò separatamente di *Columbus* e di *Iacobus Columbi*, congetturando che potessero essere padre e figlio. Ma in seguito di *Columbus* nessuno più parlò fino al Savigny, il quale, dopo aver raccolto, in civilisti e feudisti, un discreto numero di citazioni del *dominus Columbus* e di *Iacobus Columbi*, s'indusse ad asserire, o almeno a ritener probabile, che si tratti d'una stessa persona, per il solo fatto, che Alberico da Rosciate, morto nel 1354, ricorda in due luoghi (ma sempre a proposito dell'autentica *Sacramenta puberum*) l'*apparatus* ai *Libri feudorum*, " *qui dicitur fuisse domini Columbi* ".

Ora, dato pure che Alberico abbia proprio scritto *domini Columbi*, come si legge nell'edizione del 1534 usata dal Savigny, e non *Iacobi Columbi*, non mi par lecito dar più importanza alle sue vaghe indicazioni che alle espressioni precise di tutti

---

(1) I testi, di cui mi varrò, si posson vedere raccolti in Savigny, o. c., vol. V, pp. 89 e segg.

gli altri scrittori, i quali parlano di *Columbus* per il commento al Codice e di *Iacobus Columbi* per l'apparato ai *Libri feudorum.* Si noti poi che le due citazioni d'Alberico, che possono in sostanza ridursi ad una, derivano molto probabilmente da Cino da Pistoia (1270-1336), il quale, nella sua *Lectura Codicis,* ricorda una trattazione *Iacobi Columbi* " *in usu feudorum* „ e viceversa cita due volte *Columbus* per le sue opinioni sulla prescrizione delle azioni *finium regundorum, familiae herciscundae* e *communi dividundo,* ossia per argomenti svolti, secondo ogni probabilità, nel commento ai titoli 36-39 del terzo libro del Codice.

Per parte mia non esiterei dunque ad accogliere l'opinione del Diplovataccio, che si tratti di due giureconsulti diversi. Mi sembra invece molto incerta la sua ipotesi, che si tratti di padre e figlio, tantopiù data la grande diffusione del nome e poi del cognome *Columbus.* Un *Columbus* di Milano abbiamo già avuto occasione di ricordare in questo stesso scritto. *Iacobus Columbi* era di Reggio. Del *dominus Columbus* ignoriamo la patria.

Del commento di *Columbus* al Codice abbiamo due citazioni in Odofredo, due nell'Ostiense e due in Cino da Pistoia. Le citazioni d'Odofredo confermano appunto il titolo di *Commentum* dato all'opera.

Cino da Pistoia ricorda *Columbus* dopo Rogerio; Odofredo, dopo Giovanni Bassiano ed Azone; l'Ostiense dopo Placentino e prima di Lanfranco da Crema, morto nel 1229. Tutte queste indicazioni non sono in contraddizione col dato nuovo, che risulta dal nostro documento, cioè che il *Commentum* era conosciuto almeno fin dal 1211.

L'espressione del documento " *commentum super Codice usque ad quartum librum* „ potrebbe spiegarsi coll'ipotesi, che Caccianemico possedesse solo una parte dell'opera; la quale, del resto, potrebbe anche esser stata condotta a termine solo dopo il 1211. Va però osservato, che tutte le citazioni finora note possono, a quanto sembra, riferirsi a costituzioni contenute nei primi tre libri del Codice. Si può quindi supporre, che l'opera di *Columbus* non andasse oltre il quarto libro.

In uno dei passi d'Odofredo si legge: " hanc questionem " not(*averunt*) hic do. Columbus et eius socius; et bene durat " per unam cartam in suo commento „. Il Savigny (pag. 93) dichiara di non sapere che significhi qui il *socius.* Ma poichè dalla

metà all'incirca del secolo duodecimo, cioè da quando cominciò a costituirsi a Bologna la *università,* come una specie di *societas* dei *doctores* e degli *scholares,* i professori bolognesi usarono la parola *socii* ad indicare i proprî scolari, com'è attestato da molti esempi (1), l'espressione usata da Odofredo fa pensare, che la *lectura* di *Columbus* fosse raccolta e pubblicata da un *socius*, così come fu raccolta e pubblicata da Alessandro di Sant'Egidio la *lectura* d'Azone.

6. Un altro volume della piccola biblioteca giuridica del 1211, che non sarebbe privo d'importanza, era quello contenente i *Casus domini Guilielmi de Capriano, cum distinctionibus domini Iohannis.*

I *Casus in Codicem* di Gugliemo *de Cabriano*, glossatore del secolo duodecimo, sono ricordati da Odofredo, il quale osserva che " *non sunt casus, sed leges commentatae* „. Da ciò il Savigny (vol. IV, pag. 239) arguì che dovesse trattarsi di semplici glosse, quali se ne trovano, colla sigla di Guglielmo, in varî manoscritti del Codice; e si fece quindi meraviglia che fra i libri caduti, nel 1289, nell'eredità di Salatiele si trovasse un *Liber casuum domini Guilielmi de Cavriana super Codice*; che cioè le pretese glosse di Guglielmo fossero state trascritte a parte. Ma evidentemente, qualunque sia il valore dell'osservazione d'Odofredo, i *Casus* di Guglielmo non sono da confondersi colle sue glosse. Alcuni di essi possono essersi conservati fra le glosse a margine del Codice giustinianeo, ma il *Liber casuum* è perduto, così com'è perduta la *Summa* dello stesso Guglielmo al *Digestum novum.*

Quanto alle *Distinctiones domini Iohannis,* cioè di Giovanni Bassiano, esse in parte sono giunte fino a noi, sparse in vari manoscritti (2), ma non ci pervenne la raccolta originale ricor-

---

(1) Cfr. A. GAUDENZI, *Appunti per servire alla storia della università di Bologna e dei suoi maestri,* fasc. I (solo pubblicato), Bologna, 1889, pp. 13 e seguenti.

(2) Cfr. specialmente E. SECKEL, *Distinctiones Glossatorum. Studien zur Distinktionen-Literatur der romanistischen Glossatorenschule,* Berlino, 1911, pp. 382 e segg. (estratto dalla " Festschrift „ in onore di Ferdinando von Martitz).

data da Odofredo e la cui esistenza viene ora ad esser confermata.

Da Odofredo sono pure ricordate le *Distinctiones domini Alberici*, parimenti possedute dal nostro Caccianemico, e che, secondo il noto computo bolognese, avrebbero occupato quindici quinterni, mentre per le *Distinzioni* di Giovanni Bassiano bastavano due quinterni.

Anche la raccolta d'Alberico, certo anteriore al 1185, non è giunta a noi nella sua integrità; e la notizia d'Odofredo, che ne computa l'estensione a quindici quinterni, parve poco verosimile (1). Il numero potrebbe infatti esser errato, e sarebbe bene riscontrarlo sui manoscritti odofrediani; ma che si trattasse d'opera abbastanza ampia sarebbe in ogni modo provato, se, come sembra, essa occupava nella piccola biblioteca di Caccianemico un intero volume.

7. Sono ricordate in fine le così dette *Diversitates* o *Dissensiones dominorum,* delle quali ci giunsero varie raccolte, in gran parte pubblicate, molto scorrettamente, da Gustavo Haenel (Lipsia, 1834).

Fra queste raccolte l'ultima e più ampia è d'Ugolino, di cui s'hanno notizie dal 1197 al 1233. Ma Caccianemico, il quale possedeva le raccolte di *Distinctiones* più antiche e non quella d'Ugolino, avrà probabilmente avuto anche qualche antica raccolta anonima di *Dissensiones.* Di questo per altro non sarebbe prova sufficiente il fatto che sia taciuto il nome dell'autore, poichè esso manca in tutti i manoscritti d'Ugolino usati dall'Haenel, uno solo eccettuato; e d'altra parte le *Dissensiones dominorum* compaiono senza indicazione d'autore anche nei famosi cataloghi per gli *stacionari librorum,* così negli statuti del 1317-1347 come in quelli del 1432 (2).

---

(1) Cfr. Savigny, IV, pp. 160 e segg.; Seckel, pp. 312 e segg.; e, per la questione della data, pp. 330-331. Le distinzioni d'Alberico erano in parte un rifacimento delle distinzioni d'Ugo. Perciò Pillio le chiama scherzosamente *distinctiones repezate* (Seckel, pp. 327 e segg.).

(2) *Statuti delle università e dei collegi dello studio bolognese pubblicati da* C. Malagola, Bologna, 1888, pp. 35 e 93.

8. Con ciò è finito l'esame dei libri legali di Caccianemico. Questi però, secondo il savio precetto di Giustiniano, non era solo *legibus armatus*, ma anche *armis decoratus*, benchè leggi ed armi poco gli giovassero contro la prepotenza dei guelfi ferraresi. Aveva inoltre vesti ed oggetti di valore e una discreta somma in contanti, oltre al credito verso il Comune per il suo stipendio.

Quanto ad armi ed armature, possedeva una spada (*ensis*), due coltelli, due schinieri (*ocreae*), un usbergo (*osbergus*), due gambiere (*gamberiae*), due *loriche* e una *manica loricae*, probabilmente di maglia (poichè non è il caso di pensare a una di quelle lunghe maniche di stoffa, che le dame offrivano ai loro cavalieri e questi portavano nei tornei pendenti dalla spalla (1)), due *maleate* (2), un cappello di ferro (3): inoltre un cavallo valutato 32 lire, due selle, un freno dorato, due paia di speroni dorati e un paio di non dorati.

Numerosi erano gli oggetti di vestiario. Troviamo fra essi in primo luogo un paio *d'indumenti* di *bruna* nera con varie *pelli* e un paio di bruna pavonazza con pelli di coniglio. La parola *indumentum* è usata, in principio del documento, come termine generico, ma trattandosi qui di *paia*, si sarà probabilmente inteso di calze o brache. La bruna, in francese *brunette* (4), era una stoffa di lana tinta, che poteva esser di vario colore, come si vede anche dal documento e com'era pure per altre stoffe, il cui nome sembrerebbe accennare ad un colore determi-

---

(1) Cfr. Viollet-Le-Duc, *Dictionn. raisonné du mobilier français*, Parigi, 1872-75, vol. VI, alla v. *manche*; Gabotto, *Inventari messinesi inediti*, Catania, 1907 (estr. dall' " Arch. stor. per la Sicilia Orientale „), pp. 46, n^a 135, dove sono citati il Merkel e parecchi altri, che s'occuparono della storia del costume; Cecchetti, *La vita dei veneziani nel 1300. Le vesti.* Venezia, 1886, p. 75 (nella qual'opera, nonostante il titolo, è usata una quantità così di documenti anteriori al secolo decimoquarto, come di posteriori).

(2) Questa parola manca al Du Cange, ma di *maleata, maglata, maiata* parlano più volte gli *Statuti di Bologna dall'anno 1245 all'anno 1267, pubblicati per cura di* Luigi Frati. Questi, nello *Spoglio di voci* in fine del vol. III (Bologna, 1877, pag. 670), spiega " camicia o armatura di maglia, che co- " priva e difendeva la persona fin sotto le reni „.

(3) Cfr. Viollet-Le-Duc, vol. V, alla v. *chapel.*

(4) Viollet-Le-Duc, vol. III, alla v. *étoffes.*

nato, ad esempio per lo scarlatto. Di pelli si faceva nel medio evo grandissimo uso sia per fodera dei vestiti sia per ornamento, e pelli di varia specie sono appunto ricordate più volte anche nel nostro elenco.

Di *bruna*, foderata di pelli d'agnello, era una delle due *guarnacche* (1) di Caccianemico; un'altra, più preziosa, era di *scarlatto*, stoffa probabilmente di seta, foderata parimenti di pelli. Un *vestitus*, forse una lunga veste o sopravveste da portare coll'armatura, era di *staminafortis* ossia stamigna (2). Di due mantelli, uno era un *mantellus soriani*, l'altro *de caparozo,* parola che mi riesce nuova (3). C'era inoltre un *capapellus* (" *quasi pellis cum capa* ", come spiega Giovanni de Ianua (4)) di *verde* foderato di *fianchi* di volpe (5); tre berrette d'Inghilterra (6); due camicie, due paia di mutande (*serabule*) (7); due paia di stivali, e due paia di calzature (*calige*) di *saia*, specie di panno lano; tre lenzuoli (*duple*); una coltre di seta (*cultra*) (8); due origlieri (*oriierii*); uno scrigno (*scrineum*); due cassapanche (*banche*); due valigie (*valixie*); una coppa d'argento (*cuppa, syphus*) (9).

---

(1) Per le *guarnacche* cfr. Cecchetti, p. 82. In un inventario bolognese del 1285, che è il più antico di quelli pubblicati da L. Frati, in appendice alla sua opera *La vita privata di Bologna dal sec. XIII al XVII*, Bologna, 1900 (p. 225), troviamo appunto una *guarnachia de bruna*; e in un inventario del 1313 (ivi, p. 230) " unam guarnacchiam de sbiaveto cum ismaltis " de argento super doratis cum auxelitis de argento super doratis foderatam " de vario, valoris X lib. ". V. anche il citato *Spoglio di voci* contenute negli Statuti bolognesi del sec. XIII.

(2) V. il Du Cange-Favre alle vv. *stamfortis*, *staminea*; e il *Dizionario* del Tommaseo e del Bellini alla v. *stamigna*.

(3) Manca al Du Cange. Non so se possa aver rapporto con *caparo*. Quanto al *mantellus soriani* si veda il *Dizionario italiano* cit. alla v. *soriano* e il Du Cange a *sorianus*; e per i mantelli in genere, Cecchetti, p. 71.

(4) Cit. dal Du Cange, alla v. *capapellis.*

(5) V. il Du Cange, alla v. *viride* 2 e *flanchus.*

(6) Cfr. Cecchetti, p. 60.

(7) V. il Du Cange, alla v. *serabola,* e il Gabotto, o. c., nota 184. In un testo riportato dal Du Cange si legge l'espressione " spoliet se usque ad " camisiam et serabulam ".

(8) Un testo citato dal Du Cange spiega " coopertorium lecti, quod de " lineo panno et bombyce conficitur et vulgari vocabulo *cultra* vocatur ".

(9) Per la coppa e gli oggetti precedentemente ricordati si può vedere il Viollet-Le-Duc, vol. I, alle vv. *coffret* e *coupe*, e vol. II, alla v. *valise.*

Su ciascuna delle cose elencate sarebbe facilissimo far dell'erudizione a buon mercato; lungo e difficile dir veramente qualche cosa di preciso, cioè addentrarsi nell'esame delle armi e armature, e delle foggie del vestir civile, che potevano esser in uso a Bologna e a Ferrara nei primi anni del secolo decimoterzo. Prescinderò quindi da ogni tentativo di vera e propria illustrazione, restringendomi a ricordare di passaggio, che un documento del 1227 pubblicato dal Muratori nelle *Antiq. Ital.*, II, col. 904, e non sfuggito al Du Cange, dà un elenco di mercanzie tolte a un modenese, appunto nel territorio di Ferrara, e che quest'elenco presenta alcune notevoli analogie col nostro, parlandovisi di *mantellum ... coopertum de stanforte; duas pelles de flanchis coopertas de virde; unam cultram; quatuor linteamina; duas serabulas; duas pelles agnelli; unum cultrum*, ecc.

9. Do finalmente il testo della sentenza concernente Caccianemico e gli aventi diritto da lui.

Come ho già detto, l'antico *Catastico B* del Comune di Ferrara contiene due esemplari autentici degli atti del 1255. Le differenze fra i due esemplari sono minime; per lo più ortografiche e tali da non meritare che se ne tenga conto. Sembra tuttavia che il secondo esemplare sia il più corretto; e perciò di esso mi sono specialmente valso per l'edizione, indicandolo eventualmente colla sigla **A** e segnando colla sigla **B** le varianti del primo testo.

La sentenza, che pubblico, si legge nel *Catastico B* a carte 104 *v*-105 *r* e 121 *v*-122 *r*.

[*S. T.*]. In nomine patris et filii et spiritus sancti. Amen. Anno dominice nativitatis millesimo ducentesimo quinquagesimo quinto, indictione XIII, tempore Alexandri pp.

Item Nos predicti arbitri, cognitores petitionis facte a Thomasio Albrici notario, que quidem petitio talis erat: " Petit Thomas Albrici " notarius a communi Ferrarie et hominibus ipsius communis libros le- " gales, equos (1) et arma et indumenta et XIIII (2) libras imperialium

---

(1) Così hanno entrambi i testi; ma certo nel testo originale doveva leggersi *equum*.

(2) **B**, qui e in seguito, *tredecim*.

" in una parte, et L (1) libras imperialium in alia parte, et cuppam unam
" argenteam et alias res, quas dicti Ferrarienses abstulerunt domino Ca-
" zanimico Porcunzini (2), iudice condam communis Ferrarie, cum eum
" ceperunt; et si dicte res non extant, petit extimationem arbitrio bo-
" norum virorum: occasione quarum rerum dictus dominus Cazanimicus
" habuit cartam represalie contra commune et homines ipsius terre a do-
" mino Guidone de Canosa quondam potestate Bononie (3), quod patet
" ex publico instrumento: et predicta petit ex iure sibi cesso ex causa do-
" nationis a domino Cazanimico, filio condam dicti Cazanimici Porcuncini,
" ut ex publico instrumento patet. Res ablate eidem domino Cazanimico
" sunt hee: In primis libri legales, scilicet Summa domini Azonis super
" Codice et Instituta, et Comentum ff. vetus (4), et Comentum domini Co-
" lumbi super Codice usque ad quartum librum, et Casus domini Guilielmi
" de Capriano cum Distinctionibus domini Johannis, et Brocarda a domino
" Azone composita, et Distinctiones domini Albrici, et omnes Diversi-
" tates dominorum; et equus unus unde potuit habere triginta duas
" libras imperialium; et unum par indumentorum de bruna nigra cum
" variis pellibus (5); et unum par indumentorum de bruna paonata cum
" coniliis; et una guarnachia de bruna frodata de agnorum pellibus; et
" unus capapellus de viridi frodatus de flanchis (6) vulpinis; et guar-
" nachia de scarleto frodata de variis pellibus; et tres duple; et una
" cultra de seta; et unus mantellus de caparozo; et due camisie; et duo
" paria serabularum; et duo paria calcarium auratorum, et aliud par
" non auratorum; et quinquaginta libras imperialium de feudo ipsius
" domini Cazanimici; et XIIII libras imperialium, quos sibi abstulerunt
" Ferrarienses de camera palatii; et unum scrineum; et duo banca; et
" due ocree; et duo stuvales (7), et duo alii osati; et due valixie; et
" due selle; et frenum aureatum; et unus osbergus; et due gamberie;
" et due lorice; et una manica (8) lorice; et due maleate; et ensis; et

(1) B *quinquaginta*.

(2) B *Porcuncini*, come si legge anche in seguito.

(3) Guido da Canossa fu podestà di Bologna nel 1217. Cfr. Savioli, o. c., II, 1, p. 365.

(4) B *comentum vetus D*. Colla iniziale *D* rendo la nota sigla usata a indicare la parola *Digestum*, che in B s'avvicina appunto ad una *D*, mentre in A è *ff*.

(5) B *pelibus*, come si legge quasi sempre anche in seguito, dove ho corretto *pellibus*.

(6) B *flachis*.

(7) B *stivales*.

(8) B aveva dapprima *due manice*, errore corretto subito dalla stessa mano.

" duo cultelli; et unus vestitus staminefortis; et unus mantellus soriani;
" et duo oriierii; et duo paria caligarum de saia; et unus syphus
" argenteus; et tres birete de Engeltera; et unus capellus ferri: Et petit
" iniuriam emendari, quia eum ceperunt et predictas res sibi abstu-
" lerunt, et paratus est iniurias et damnum extimare et suo sacramento
" facere, cum iuris ratio non plus exigat „: qui dominus Thomas ostendit cartam represaliarum coram arbitris, quam habet dominus Cazanimicus super bonis hominum Ferrarie et districtus, factam in Millesimo ducentesimo XVII, indictione quinta, die tercio intrante mense Junii: Visa dicta petitione et instrumento represalie et instrumento cessionis et instrumento concessionis salarii facte per ancianos populi et potestatem Ferrarie, et visis iuribus et rationibus et allegationibus coram nobis et domino Manfredo quinto arbitro hinc inde ostensis, super his omnibus habita deliberatione plena: Nos Thomasinus et Gerardus, arbitri communis Bononie, pronunciamus, diffinimus et condemnamus commune Ferrarie et Martinum notarium, sindicum ipsius communis, nomine et vice eiusdem, in quinquaginta libras imperialium, nomine salarii, dicto Thomasio; a petitione vero extimationis rerum petitarum in libello, quia dictus Thomas Albrici sponte renunciavit, coram arbitris omnibus, petitioni extimationis predictarum rerum, Martinum sindicum communis Ferrarie, nomine ipsius communis, absolvimus: Nos vero Gruamons et Andreas predicti (1), arbitri communis Ferrarie, pronunciamus et diffiniendo absolvimus commune Ferrarie et Martinum sindicum eiusdem communis, nomine ipsius, a petitione salarii petiti a dicto Thomasio, quia non constat aliqua parte actorum quod illi, de quibus fit mencio in instrumento concessionis salarii, habuerint potestatem a communi seu consilio communis Ferrarie constituendi predictum salarium ipsi domino Cazanimico: Et ego Manfredus Columbus iudex de Mediolano, quintus arbiter inter communia supradicta Bononie et Ferrarie, adhereo sententie, pronuntiationi, diffinitioni et absolutioni dominorum Gruamontis et Andree arbitrorum communis Ferrarie et cum eis sentio, absolvendo commune Ferrarie et Martinum notarium sindicum ipsius communis, nomine et vice eiusdem, a petitione dicti domini Thomasii Albrici notarii.

Lata fuit hec sententia per arbitros supradictos super balchione domus monasterii Sancti Proculi apud Podium, iuxta turrim, presentibus Martino notario sindico communis Ferrarie et Nicholao Petri Pizoli sindico communis Bononie ad sententiam audiendam, die XII exeunte Junio. Ad publicationem cuius sententie interfuerunt testes presbiter

---

(1) B om. *predicti*.

Petrus quintanus (1) ecclesie Sancti Petri de Podio, Saracenus domini Ugolini Capretii, Sossus albergator de Podio, Benvenutus de Pontita, Boniohannes domini Gerardi Ungarelli, Ubaldinus quondam Benedicti de Podio et Galvanus piscator de Podio. Interfuit similiter predictus Thomas Albrici ad dictam sententiam audiendam.

Et Ego Brunellus de Sancto Apollenare, Dei gratia sacri palatii et tunc dictorum arbitrorum pro communi Ferrarie notarius, hiis omnibus interfui et, ut supra legitur, mandato et communi voluntate eorum, bona fide scripsi et publicavi.

---

(1) La parola *quintanus* manca al Du Cange. Suppongo si tratti di persona avente diritto al *quinto* delle rendite d'una chiesa. Cfr. Du Cange, alla v. *quintum* 2.

Relazione sulla Memoria del Dr. Aldo Ferrabino intitolata: *Silla a Cheronea.*

Una delle guerre in cui più rifulse il valore dei legionari romani e il genio dei loro duci fu quella combattuta da Silla e da Fimbria contro Mitridate Eupatore e nota col nome di prima guerra mitridatica. Insufficientemente studiata nel rispetto strategico e tattico da Teodoro Reinach nel libro, del resto assai pregevole, sulla storia di quel re, se ne occuparono poi con diversi intendimenti e conclusioni contraddittorie due insigni scrittori di cose militari, Hans Delbrück e Giovanni Kromayer. Il primo nella sua *Geschichte der Kriegskunst* giudica che le narrazioni romane sulle vittorie di Silla non sono che " die Produkte der dürftigen Phantasie eitler Rhetoren „ (I^2 462); il secondo (*Schlachtfelder* II 351 segg.) mercè accurate ricerche topografiche sul campo d'una delle maggiori battaglie vinte da Silla in Grecia, quella di Cheronea, cerca di lumeggiare le notizie a noi trasmesse da Appiano e da Plutarco e di trarne un racconto militarmente plausibile di quella battaglia.

Il Ferrabino muove dalle stesse ricerche topografiche del Kromayer per tentare una nuova interpretazione delle notizie antiche in proposito. Si studia anzitutto di rendere più intelligibili i precedenti, identificando il Philoboeotos su cui Silla accampò non, come il Kromayer, col colle di Kravasara, ma con quello di Merali, più ad oriente; con che si spiega meglio la occupazione riuscita a Silla della rocca di Parapotami. E per quel che riguarda la battaglia stessa di Cheronea, il Ferrabino si propone di dimostrare che l'esercito romano si schierò nella pianura dinanzi a Cheronea (Kaprene) da nord-ovest verso sud-est, che cioè i Romani si appoggiarono con le spalle alle alture del Thurion anzichè schierarsi da sud a nord appoggiando alle

alture la sola estremità dell'ala destra; che sarebbe stato assai pericoloso data la grande superiorità del nemico in cavalleria. Dopo ciò l'Autore esamina partitamente le notizie tramandateci sulle manovre compite da Silla durante la battaglia, e cerca di chiarirle tenuto conto delle congetture da lui proposte sullo schieramento delle legioni romane. Nè trascura la ricerca sulle fonti e la minuta interpretazione filologica dei testi; giungendo alla conclusione che i dati antichi sulla battaglia di Cheronea risalgono in massima alle *Memorie* stesse di Silla e solo sono stati alterati qua e là dalla negligenza o dalla tendenza dei compilatori che li hanno, almeno in parte, trasmessi a Plutarco e ad Appiano.

Non tutti forse accetteranno a pieno in argomento tanto controverso le congetture del Ferrabino. Altri potrà credere, ad esempio, che in età pienamente storica e per fatti svoltisi nella penisola greca non potevano mancare correnti di tradizione autonome affatto dalle *Memorie* sillane. Ma la monografia del Ferrabino è a ogni modo singolare per diligenza ed acutezza, ed ha il pregio innegabile d'essere il primo saggio veramente scientifico scritto in Italia sulle guerre mitridatiche. Perciò la Commissione ritiene che essa sia degna d'essere pubblicata nelle Memorie accademiche.

Ettore Stampini.
G. De Sanctis, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini.

Questa tavola va inserita nella dispensa 12ª del vol. XLIX.

3

5

4

6

7

8

Officina Fototecnica Ing. Molfese. Torino

INDICE

DEL VOLUME L.

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di C. Frati, A. Baudi di Vesme e C. Cipolla.

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di C. Cipolla, G. De Sanctis e P. Fedele.

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classi Unite.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino